NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

1

GEORGE ALEXITS

SERIES TRIGONOMETRIQUES

1966
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA

PUBLICACIONES DEL INSTITUTO DE MATEMATICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

I. NOTAS DE LOGICA MATEMATICA

1. MONTEIRO (ANTONIO) et VARSAVSKY (OSCAR) - **Algèbres de Heyting Monadiques.** Traducción de una nota publicada en **"Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina"**, 1957, pp. 52-59.

2. MONTEIRO (ANTONIO) - **Normalité dans les Algèbres de Heyting Monadiques.** Traducción de una nota publicada en **"Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina"**, 1957, pp. 50-51.

3. VARSAVSKY (OSCAR) - **Quantifiers and equivalence relations.** Nota publicada en **"Revista Matemática Cuyana"**, Vol. 2, fasc. 1 (1958), pp. 29-51.

4. SIKORSKI (ROMAN) - **Algebras de Boole.** Lecciones dictadas en la Universidad Nacional del Sur, redactadas por Antonio Diego. 1ª Edición, Universidad Nacional del Sur. 1960, 73 pág. (agotada). 2ª Edición, 84 pág. (en preparación).

5. SIKORSKI (ROMAN) - **Teorías matemáticas formalizadas.** Lecciones dictadas en la Universidad Nacional del Sur, redactadas por Antonio Diego. 1ª Edición, Universidad Nacional del Sur, 1960, 65 pág. (agotada). 2ª Edición, 70 pág. (en preparación).

6. MONTEIRO (ANTONIO) - **Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique.** Nota publicada en **"Anais da Academia Brasileira de Ciências"** (1960), pp. 1-7.

7. MONTEIRO (ANTONIO) - **Algèbres monadiques.** Traducción de una nota publicada en **"Actas do Segundo Colóquio Brasileiro de Matemática"**. São Paulo, 1960, pp. 33-52.

8. PORTE (JEAN) - **La logique mathématique et le calcul mécanique.** 1ª Edición, Universidad Nacional del Sur, 1960, 87 pág. (agotada). 2ª Edición, 104 pág. (en preparación).

9. PORTE (JEAN) - **Quelques extensions du théorème de déduction.** Nota publicada en **"Revista de la Unión Matemática Argentina"**, 20 (1960), pág. 259-266.

10. MONTEIRO (ANTONIO) - **Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays.** Nota publicada en "Revista de la Unión Matemática Argentina", 20 (1960), pp. 308-309.

11. DIEGO (ANTONIO) - **Sur les Algèbres implicatives.** Traducción de una nota publicada en **"Revista de la Unión Matmeática Argentina"**, 20 (1960), pp. 310-311.

12. DIEGO (ANTONIO) - **Sobre algébras de Hilbert.** Tesis de Doctorado en la Universidad Nacional de Buenos Aires (1961), 94 pág.

13. PORTA (HORACIO) - **Sur un théorème de Skolem.** Preprint de una nota publicada en **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris**, 256 (1963), pp. 2562-2564.

14. MONTEIRO (LUIZ) et PICCO (DARIO) - **Les réticulés de Morgan et l'opération de Sheffer.** Preprint de una nota publicada en **"Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences"**, 11 (1963), pp. 355-358.

15. MONTEIRO (ANTONIO) - **Construction des Algèbres de Nelson finies.** Preprint de una nota publicada en **"Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences"**, 11 (1963), pp. 359-362.

16. DIEGO (ANTONIO) and SUAREZ (ALBERTO) - **Two sets of axioms for boolean algebras.** Preprint de una nota en curso de publicación en "Portugaliae Mathematica".

17. MONTEIRO (LUIZ) et GONZALEZ COPPOLA (LORENZO) - **Un théorème sur les Algèbres de Lukasiewicz trivalentes.** Preprint de una nota en curso de publicación en **"Portugaliae Mathematica"**.

18. MARONNA (RICARDO) - **Axioms for Morgan lattices.** Prepint de una nota en curso de publicación en **"Portugaliae Mathematica"**.

19. MONTEIRO (LUIZ) - **Sur les Algèbres de Heyting trivalentes.** Preprint de una nota en curso de publicación en **"Fundamenta Mathematicae"**, sous le titre "Algèbre du calcul propositionnel trivalent de Heyting".

20. BRIGNOLE (DIANA) et MONTEIRO (ANTONIO) - **Caractérisation des Algèbres de Nelson par des égalités.** Preprint.

21. MONTEIRO (ANTONIO) - **Sur la définition des Algèbres de Lukasiewicz trivalentes.** Preprint.

22. MONTEIRO (LUIZ) - **Axiomes indépendants pour les Algèbres de Lukasiewicz trivalentes.** Preprint.

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES SÉRIES DE FOURIER ET DES SÉRIES ORTHOGONALES GÉNÉRALES

(Cours professé par G. ALEXITS
à l'Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.)

1960

1. NOTION D'ORTHOGONALITÉ, SÉRIES DE FOURIER. ORIGINES PHYSIQUES DE LA THÉORIE.

Un système de fonctions réelles $\{\varphi_n(x)\}$ définies dans un intervalle (a,b) s'appelle orthogonal, si

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0\ , & \text{si } m \neq n \\ \lambda_n > 0, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Lorsque $\lambda_n = 1$ pour $n = 0,1, \ldots$, on dit que les fonctions $\varphi_n(x)$ sont normées; alors $\{\varphi_n(x)\}$ est dit un système orthonormal.

Le système le plus remarquable de fonctions orthogonales est celui des fonctions trigonométriques. C'est le système de fonctions $\{1;\ \cos nx,\ \sin nx\}$, définies dans un intervalle quelconque de longeur 2π. On prend naturellement $(0,2\pi)$ ou $(-\pi,\pi)$ comme intervalle d'orthogonalité. Le système trigonométrique normé est alors

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ;\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\ ;\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

Comme la définition de l'orthogonalité exprime tout simplement une propriété de l'intégrale des produits de certaines fonctions, la portée de cette notion dépend de la définition de l'intégrale. Nous adoptons, dorénavant, la notion d'intégrale de Lebesgue. Il s'ensuit que les fonctions $\varphi_n(x)$ appartiennent à l'espace L^2. On peut les interpréter comme vecteurs de cet espace ayant comme point de départ l'origine de L^2, c'est-à-dire le point $f(x) \equiv 0$. Ces vecteurs sont effectivement orthogonaux dans le sens de la géometrie de l'espace L^2, puisque leurs produits scalaires sont nuls:

$$(\varphi_m,\varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0$$

La notion d'orthonormalité exprime donc que $\{\varphi_n(x)\}$ est un système de vecteurs unitaires orthogonaux car leur longeur est alors

$$\|\varphi_n\| = \left(\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Le problème fondamental de la théorie des séries orthogonales est le suivant: sous quelles conditions peut-on affirmer qu'une fonction L^2-intégrable, $f(x)$, peut se mettre, pour certains $x \in (a,b)$, sous la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\varphi_n(x),$$

où $\{\varphi_n(x)\}$ est un système orthonormal et les coefficients c_n sont déterminés à la Fourier: $c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$.

Lorsqu'il s'agit du système trigonométrique, la série de Fourier d'une fonction $f(x)$, même si on suppose seulement que $f \in L$, est de la forme

$$(2) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin bx)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx \;;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx.$$

Pourquoi est intéressant le problème de la convergence de la série orthogonale (1), ou celle de la série (2), plus spéciale? La raison en est que la description de la nature conduit nécessairement à la recherche d'une série orthogonale.

Les systèmes oscillants, la vibration d'une corde ou d'une membrane, la diffusion des gaz, la propagation de la chaleur ou, dans la physique moderne, les recherches concernant l'équation de Schrœdinger conduisent à l'analyse mathématique des propriétés de convergence des séries orthogonales.

Prenons comme exemple l'esquisse du cas des vibrations d'une corde homogène de longeur $\ell=\pi$, fixée aux deux bouts. Elle commence à vibrer ayant une forme initiale $f(x)$, c'est-à-dire que la corde tendue suit le diagramme de la fonction $f(x)$. Le problème est de déterminer la fonction $u(x,t)$ qui rend la position du point x de la corde $(0,\pi)$ en tout moment $\underline{t}$. On sait de la physique théorique qu'en choisissant convenablement les constantes physiques on a à résoudre l'équation différentielle linéaire et homogéne

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

sous les conditions:

(*) $u(0,t) = 0$; (**) $u(\pi,t) = 0$; (***) $u(x,0) = f(x)$.

Les deux premières conditions expriment que la corde est fixée aux deux bouts, la dernière que la forme initiale est déterminée par la fonction continue $f(x)$.

On cherche les solutions dans la forme

$$u(x,t) = g(x)\ h(t).$$

L'équation différentielle se réduit alors à

$$g''(x)\ h(t) = \ddot{h}(t)\ g(x)$$

où les virgules désignent la dérivation par rapport à x et les points celle par rapport à la variable t. On a donc

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = \frac{\ddot{h}(t)}{h(t)}\ .$$

Comme le premier membre ne dépend que de x tandis que le deuxième seulement de t, cette égalité ne peut subsister que dans le cas où les deux membres sont égaux à la même constante $-\lambda^2$, qui est négative comme on peut le démontrer par des raisons de périodicité. On est donc amené à résoudre le système d'équations différentielles.

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = -\lambda^2 \ ; \quad \frac{\ddot{h}(t)}{h(t)} = -\lambda^2$$

On en obtient comme solutions générales:

$$g(x) = A \cos\lambda x + B \sin \lambda x$$

$$h(t) = \alpha \cos \lambda t + \beta \sin \lambda t$$

où A, B, α, β sont des constantes arbitraires. Nous devons adapter ces solutions générales aux conditions (*), (**) et (***). De la première, on obtient $A = 0$; par conséquent

$$g(x) = B \sin \lambda x$$

De la deuxième on obtient: $B \sin \lambda\pi = 0$. Mais cette relation ne peut subsister que si la constante non-négative λ, prend les valeurs $\lambda_n = n$, pour $n = 1, 2, \ldots$. Nous avons donc obtenu une infinite de solutions particulières: $g_n(x) = B_n \sin nx$.

Les solutions particulières de (3) sont donc de la forme

$$u_n(x,t) = B_n \sin nx(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt).$$

Mais (3) étant une équation linéaire et homogène, la somme de ces solutions particulières rend une solution générale, donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt).$$

Or, il faut faire usage encore de la condition (***):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \alpha_n \sin nx = f(x) .$$

Le problème mathématique est donc réduit à déterminer les coefficients $b_n = B_n \alpha_n$ de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

de sorte que sa somme soit $f(x)$. On voit que si cette série converge uniformément, alors

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad .$$

C'est-à-dire: on obtient les coefficients de Fourier de la fonction impaire $f(x)$. Mais, sons quelles conditions converge-t-elle, même non-uniformément? Et si cette série ne converge pas, existe-t-il une méthode de sommation qui permette de représenter $f(x)$ comme une somme généralisée?

Voilà un problème élémentaire de la physique théorique qui nous conduit à des problèmes difficiles de la théorie des séries de Fourier. Un autre exemple d'un système orthogonal s'obtient si on ne suppose pas la homogénéité de la corde, mais que sa densité est une fonction positive $p(x)$ du lieu x.

Un calcul semblable au précédent montre qu'il faut alors résoudre l'équation différentielle

$$g''(x) + \lambda\, p(x) g(x) = 0$$

avec $p(x) > 0$. On trouve de nouveau qu'elle n'a des so lutions que pour certaines valeurs de λ (valeurs propres): $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$, les solutions particulières étant $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... $g_n(x)$, ... (fonctions propres). Montrons que les $g_n(x)$ forment un système orthogonal en un certain sens. En effet, multiplions par $g_n(x)$ la première des deux équations suivantes

$$g_m'' + \lambda p g_m = 0 \ , \ g_n'' + \lambda p g_n = 0$$

et par $g_m(x)$ la deuxième. Alors, soustrayons la deuxième de la première. Il s'ensuit aisément que

$$\frac{d}{dx}(g_n g_m' - g_m g_n') + (\lambda_m - \lambda_n) p(x) g_m g_n = 0 \ .$$

En intégrant, on obtient donc

$$\Big[g_n g_m' - g_m g_n'\Big]_0^{\pi} + (\lambda_m - \lambda_n)\int_0^{\pi} p(x)\ g_m(x)\ g_n(x)\ dx = 0 \ .$$

Mais des conditions (*) et (**) on tire que le premier terme est zéro; par suite, en tenant compte de ce que $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$, on a

$$\int_0^{\pi} p(x) g_m(x) g_n(x) dx = 0 \ .$$

C'est aussi une relation d'orthogonalité, soit que l'on entende par intégrale non pas l'intégrale de Lebesgue, mais l'intégrale de Stieltjes

$$\int_0^{\pi} g_m(x)g_n(x)dP(x) = 0$$

où $P(x) = \int_0^x p(x)dx$, soit que l'on prenne $\sqrt{p(x)}\ g_k(x)$ au lieu de $g_k(x)$. De toute façon, les solutions de l'équation différentielle $g'' + \lambda pg = 0$ forment, sous les conditions envisagées, un système orthogonal. Il s'agit alors, comme dans le cas de la corde homogène, de résoudre le problème: sous quelles conditions est

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n g_n(x)$$

où $C_n = \int_0^{\pi} f(x)g\ (x)p(x)dx$. On détermine les C_n en supposant que la série considérée converge uniformément. De nouveau nous sommes conduits, par un problème de la physique théorique, à un problème de convergence d'une série orthogonale du type général (1).

2. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES SÉRIES ORTHOGONALES GÉNÉRALES.

La différence entre une série orthogonale (1) dont les coefficients c_n sont déterminés "à la Fourier" et les sommes orthogonales $\sum a_n \varphi_n(x)$ avec des coefficients réels quelconques a_n est considérable. Désignons par $s_n(x)$ la n-ième somme partielle de la série (1) et par $S_n(x)$ celle de la série $\sum a_n \varphi_n(x)$. On voit aisément que les $s_n(x)$ donnent dans l'espace L^2 la meilleure approximation parmi toutes les sommes $S_n(x)$. Plus précisément, on a le théorème classique suivant:

2.1 <u>Soit</u> $f \in L^2$; <u>alors l'intégrale</u>

$$I(S_n) = \int_a^b \left[f(x) - S_n(x)\right]^2 dx$$

<u>prend sa valeur minimale si</u> $S_n(x) = s_n(x)$

En tenant compte de l'orthonormalité (nous supposons toujours que les fonctions $\varphi_n(x)$ figurant dans la série (1) sont normées), on obtient tout de suite

$$I(S_n) = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)\Big)^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k c_k + \sum_{k=0}^{n} a_k^2 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=0}^{n} (a_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

Le dernier membre est évidemment minimal si

$\sum_{k=0}^{n} (a_k - c_k)^2 = 0$, c'est-à-dire, si $a_r = c_r$ pour $r = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$; en d'autres termes: si $S_n(x) = s_n(x)$.

De cette relation nous obtenons aussi <u>l'inégalité de Bessel</u> qui est de la plus grande importance:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx$$

On en tire immédiatement le théorèmme

2.2. <u>Si $f \in L^2$, les carrés des coefficients c_n du développement</u> $f(x) \sim \sum c_n \varphi_n(x)$ <u>forment une série convergente, par conséquent $c_n \to 0$.</u>

Cette propriéte des coefficients est importante pour la théorie de la convergence, comme il suit du théorème suivant:

2.3. <u>Si le système orthonormal</u> $\{\varphi_n(x)\}$ <u>est presque partout borné, c'est-à-dire si</u> $|\varphi_n(x)| \leq M$ <u>pour tout n et presque tout x, alors la condition</u> $a_n \to 0$ <u>est nécessaire pour la convergence p.p. de la série</u> $\sum a_n \varphi_n(x)$

En effet, si cette série converge p.p. , elle converge uniformément sur un ensemble E de mesure $|E| = (b-a) - \varepsilon$ avec un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit (Théoreme d'Egoroff). La convergence uniforme permet donc d'ecrire:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 \int_E \varphi_n^2(x)\, d(x) = 0 \;;$$

relation qui est une conséquence de l'hypothèse que $\sum a_n \varphi_n(x)$ converge uniformément sur E, donc $a_n^2 \varphi_n(x) \to 0$ uniformément. Or $|\varphi_n(x)| \leq M$; pour un $\varepsilon > 0$ assez petit on obtient donc

$$\int_E \varphi_n^2(x)dx = \int_a^b \varphi_n^2(x)dx - \int_{CE} \varphi_n^2(x)dx \geqslant 1 - M \int_{CE} dx > 1 - M\epsilon > \frac{1}{2} .$$

Il s'ensuit $a_n^2 \longrightarrow 0$. C. Q. F. D.

Remarque littéraire. Le théoreme 2.3 est dû à Plancherel, les autres sont classiques. Pour des renseignements plus amples, consultez la littérature dans les livres de G. Alexits, Convergence problems of orthogonal series (New York - Oxford - London - Paris, 1961) et A. Zygmund, Trigonometric Series (Cambridge, 1959), 2 volumes.

Désormais nous citerons le premier par CP, et le deuxième par TS.I ou TS.II, suivant qu'il s'agisse du volume I ou II de l'ouvrage de Zygmund.

Exercice. Montrez que 2.3 peut être en défaut si $\{\varphi_n(x)\}$ n'est pas borné. (Prenez le système $\{\varphi_n(x)\}$ en $[0,1]$ où $\varphi_n(x) = \sqrt{n(n+1)}$ pour $\frac{1}{n+1} < x \leqslant 1$ et $\varphi(x) = 0$ ailleurs).

3. THÉORÈME DE RIESZ - FISCHER. SYSTÈMES ORTHOGONAUX COMPLETS.

Un théorème fondamental de la théorie des séries orthogonales est le théorème de Riesz - Fischer. Il exprime la possibilité de représenter le "point" $f(x)$ de l'espace L^2 à l'aide de ses coordonnées "relativement" aux "axes" ortogonaux déterminés por le système des "vecteurs unitaires" $\{\varphi_n(x)\}$.-

3.1. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système orthonormal et $\{c_n\}$. une suite de nombres réels. Pour qu'il existe une fonction $f \in L^2$ telle que

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx,$$

il faut et il suffit que

$$\sum_{n=o}^{\infty} c_n^2 < \infty \tag{4}$$

De plus, il y a un et un seul $f \in L^2$ tel que, $s_n(x)$ étant la n-ième somme partielle de

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad , \quad \underline{\text{on ait}}$$

$$\int_a^b \left[f(x) - s_n(x)\right]^2 dx \longrightarrow 0 \quad .$$

La nécessité de la condition (4) est évidente en vertu de l'inégalité de Bessel. Supposons qu'elle soit remplie. On détermine alors la suite croissante d'indices $\{\nu_m\}$ de sorte que

$$\sum_{k=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} c_k^2 \leqslant \frac{1}{4^{m+1}} \quad .$$

La fonction

$$(5) \qquad f(x) = s_{\nu_0}(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \left[s_{\nu_{m+1}}(x) - s_{\nu_m}(x)\right]$$

existe et est L^2-intégrable d'après le théoréme de B. Levi, puisqu'en appliquant l'inégalité de Minkowski on obtient

$$\left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\} \leq \left\{\int_a^b s^2_{\nu_o}(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \sum_{m=o}^{\infty}\left\{\int_a^b\left[s_{\nu_{m+1}}(x)-s_{\nu_m}(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$=\left\{\sum_{k=o}^{\nu_o} c_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \sum_{m=o}^{\infty}\left\{\sum_{k=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} c_k^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \quad c + \sum_{m=o}^{\infty}\left\{\sum_{k=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} \frac{1}{4^{m+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c + \sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} = c+1.$$

Comme la série (5) définissant f(x) peut être intégrée terme à terme, on obtient, en vertu de l'orthonormalité

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \int_b^a s_{\nu_o}(x)\varphi_n(x)dx + \sum_{m=0}^{\infty}\int_a^b\left[s_{\nu_{m+1}}(x)-s_{\nu_m}(x)\right]\varphi_n(x)dx =$$

$$= c_n .$$

et la première partie de notre assertion est démontrée. Quant à la deuxième, soit $\nu_m \leq n < \nu_{m+1}$.

Alors

$$\left\{\int_a^b\left[f_n(x) - s_n(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\int_a^b\left[s_n(x) - s_{\nu_m}(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sum_{j=m}^{\infty}\left\{\int_a^b\left[s_{\nu_{j_n}}(x)-s_{\nu_j}(x)\right]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\left\{\sum_{k=\nu_m}^{\nu_{m+1}}c_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$\sum_{j=m}^{\infty}\left\{\sum_{k=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}}c_k^2\right\}\leq\frac{1}{2^{m+1}}+\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{2^{j+1}}\longrightarrow 0,$$

et notre théorème est entièrement démontré.

Évidemment, le théorème de Riesz-Fischer n'assure pas l'unicité de la fonction $f \in L^2$ dont les coefficients de développement sont les nombres c_n . Un système orthonormal $\{\varphi_n(x)\}$ ayant la propriété qu'il n'y a qu'une seule fonction $f \in L^2$ telle que

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$$

s'appelle un <u>système complet</u>. Cette propriété équivaut à ce que les coefficients de développement c_n d'une fonction $f \in L^2$ ne sont pas tous nuls sauf pour $f(x) \equiv 0$ à un ensemble nul près.

En effet, si $f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes coefficients c_n , alors $f(x) - g(x)$ a pour coefficients

$$\int_a^b (f-g)\,\varphi_n(x)dx = c_n - c_n = 0, \quad (n=0,1,\ldots\ldots)$$

donc $f \equiv g$ à un ensemble nul près puisque le système $\{\varphi_n(x)\}$ est complet. Nous allons montrer que <u>si un système orthonormal est complet, on peut le caractériser par la formule de Parseval</u>

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=o}^{\infty} c_n^2 \; . \tag{6}$$

Il existe, en effet, d'après le théorème 3.1 de Riesz-Fischer, une fonction $F \in L^2$ telle que

$$\int_a^b \left[F(x) - s_n(x)\right]^2 dx \longrightarrow 0$$

où $s_n(x)$ désigne la n-ième somme partielle de la fonction $f(x)$. On obtient alors,

$$\left\{\int_a^b F^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_a^b s_n^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b \left[F(x) - s_n(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \sum_{k=o}^{\infty} c_k^2$$

c'est - à - dire que

$$\int_a^b F^2(x)dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \; .$$

Comme l'inégalité contraire subsiste en vertu de l'inégalité de Bessel, on obtient

$$\int_a^b F^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 .$$

Les nombres c_n sont donc les coefficients de développement de $F \in L^2$ et de $f \in L^2$. Le système $\{\varphi_n(x)\}$ étant complet, on a $F(x) \equiv f(x)$ presque partout; la formule de Parseval (6) est donc valable.

Inversement, soit (6) valable. S'il y avait une fonction $f \in L^2$ ayant tous les coefficients $c_n = 0$, on obtiendrait de (6)

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \quad ,$$

donc $f(x) \equiv 0$ p.p. Le système $\{\varphi_n(x)\}$ est donc complet.

<u>Remarque</u>: On peut démontrer que $\{\varphi_n(x)\}$ étant un système orthonormal non-complet, il peut être complété en lui ajoutant une infinité dénombrable de fonctions orthonormales $\{\psi_n(x)\}$ (Cf. CP, p. 17)

<u>Exercices</u> .1. Démontrer la suivante généralisation de la formule de Parseval: si $f \in L^2$ (resp. $g \in L^2$) a pour coefficients de développement $\{c_n\}$

(resp. $\{d_n\}$) , alors

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n d_n \quad ,$$

pourvu que $\{\varphi_n(x)\}$ soit complet. (Appliquez la formule de Parseval aux fonctions $f + g$ et $f - g$.)

2. Montrez que $\{\varphi_n(x)\}$ est complet (en L^2) , s'il est complet pour une famille de fonctions $\mathcal{F}$ dense par rapport à L^2 .

3. Montrez que la formule de Parseval est une généralisation du théorème de Pythagore. (Les coefficients

$c_n = \int_a^b f\varphi_n dx$ sont les produits scalaires (f,φ_n)). Le

théorème de Pythagore dans l'espace E_n dit que, désignant la distance du point $(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ à l'origine, on a

$$d^2 = \sum_{k=0}^{n} x_k^2 \quad .$$

(Mettez cette formule sous forme de somme des carrés des produits scalaires d'un vecteur et les vecteurs unitaires des axes.)

4. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES SÉRIES DE FOURIER.

Nous supposons toujours en parlant des séries de Fourier, que c'est le développement d'une fonction 2π-périodique $f \in L$. Elle a la forme

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad .$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

s'appelle la série conjuguée de la précédente. En posant $c_o = \frac{a_o}{2}$; $c_n = a_n + ib_n$ et $c_{-n} = a_n - ib_n$, la formule d'Euler $e^{i\nu} = \cos \nu + i \sin \nu$ donne inmédiatement

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \; .$$

C'est la forme complexe de la série de Fourier.

Les coefficients de Fourier de toute fonction $f \in L$ ont la propriété importante que $a_n \to 0$, $b_n \to 0$.

Ce théoreme est une conséquence du théorème général suivant:

4.1. <u>Si le système orthonormal</u> $\{\varphi_n(x)\}$ <u>est borné</u> $(|\varphi_n(x)| \leqslant M,\ n=0,\ 1,\ \ldots)$ <u>et</u> $f(x)$ <u>une fonction</u> L -<u>intégrable, alors</u>

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \to 0 \quad .$$

En effet, soit $f_k(x)$ la fonction $= f(x)$ pour tout x où $|f(x)| \leqslant k$ et $=0$ ailleurs; alors $f_k \in L^2$. Il s'ensuit d'après 2.2

$$\left|\int_a^b f_k(x)\varphi_n(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

pour tout $\epsilon > 0$ donné d'avance pourvu que n soit assez grand. Mais pour k assez grand, f ne diffère de $f_k(x)$ que sur un ensemble E de mesure très petite, par conséquent, la continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue entraine

$$\left|\int_a^b \left[f_k(x) - f(x)\right]\varphi_n(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)||\varphi_n(x)|\,dx < M\int_E |f(x)|\,dx < \epsilon/2 .$$

On obtient donc

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b f_k(x)\varphi_n(x)dx\right| + \left|\int_a^b \left[f_k(x)-f(x)\right]\varphi_n(x)dx\right| < \epsilon.$$

C. Q. F. D.

En prenant pour $\{\varphi_n(x)\}$ le système trigonométrique $\left\{\frac{1}{2\pi} ; \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} , \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$, on a $\left|\varphi_n(x)\right| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Les conditions du théoreme 4.1 sont donc satisfaites, et alors a_n, $b_n \rightarrow 0$.

Pour pouvoir étudier la convergence des séries de Fourier, on a besoin d'une notation condensée des sommes partielles,

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad .$$

Evidemment

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big[\tfrac{1}{2} + (\cos t \cos x + \sin t \sin x) + \dots$$

$$\dots + (\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx)\Big]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\tfrac{1}{2} + \cos(t - x) + \ \dots + \cos n(t - x)\right] dt.$$

Il est facile de voir que

$$\tfrac{1}{2} + \cos u + \dots + \cos nu = \frac{\sin(2n + 1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} .$$

En effet, cette relation est triviale pour $n = 0$. Admettons-la $k \leqslant n - 1$; alors

$$\tfrac{1}{2} + \cos u + \dots + \cos nu = \frac{\sin(2n - 1)\frac{u}{2} + 2\cos nu.\sin\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} =$$

$$= \frac{\sin(2n - 1)\frac{u}{2} + \sin(2n + 1)\frac{u}{2} - \sin(2n - 1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} .$$

En écrivant $t - x$ au lieu de u, on obtient

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(2n + 1)\frac{t - x}{2}}{\sin\frac{t - x}{2}} dt .$$

Il est plus commode pour le calcul d'introduire t

au lieu de $t - x$ comme variable d'intégration. Alors, en tenant compte de la 2π- périodicité:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) . \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} dt$$

On appelle

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

le <u>noyau de Dirichlet</u>. On voit tout de suite que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\tfrac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos nt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = 1 ,$$

d'où

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t) - 2f(x)\right] D_n(t)dt ,$$

ou, sous une forme plus symétrique:

(7)

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right] D_n(t)\, dt .$$

La n-ième somme partielle $\tilde{s}_n(x)$ de la série **conjugée d'une série de Fourier est**

$$\tilde{s}_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(b_k \cos kx - a_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=1}^{n}(\sin kt \cos kx - \cos kt \sin kx)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sum_{k=1}^{n}\sin k(t - x)dt.$$

Comme auparavant, on voit par induction que

$$\sum_{k=1}^{n}\sin ku = \frac{\cos\frac{u}{2} - \cos(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} = \tilde{D}_n(u) \quad .$$

Il s'ensuit d'une **manière** analogue au calcul des sommes $s_n(x)$:

$$(8) \qquad \tilde{s}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+t) - f(x-t)\right]\tilde{D}_n(t)dt \quad .$$

$\tilde{D}_n(t)$ est appelé <u>noyau conjugué</u>.

<u>Exercices .1.</u> Calculez les coefficients de Fourier

d'une fonction 2ℓ-périodique $f(x)$ où $\ell > 0$ est une constante arbitraire

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

2. Calculez la série de Fourier des fonctions suivantes:

a) $$f(x) = \begin{cases} -1 , & -\pi < x < 0 , \\ +1 , & 0 < x < \pi . \end{cases}$$

b) $$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{pour} \quad 0 < x < 2\pi$$

c) $$f(x) = |\sin x|$$

d) $f(0) = 1$, pour un h compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ on a $f(2h) = 0$, et $f(x)$ linéaire en $(0,2h)$. Pour $2h \leqslant x \leqslant \pi$ on a $f(x) = 0$. Etendez $f(x)$ sur toute la droite par 2π-périodicité, en posant $f(-x) = f(x)$. Calculez aussi le cas spécial où $h = \frac{\pi}{2}$.

a) $\displaystyle \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n - 1)x}{2n - 1}$; b) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$;

c) $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - \cos 2nx}{4n^2 - 1}$; d) $\dfrac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin nh}{nh}\right)^2 \cos nx\right]$

3. Montrez que les parties réelle et imaginaire de toute série de puissances $\sum c_n z^n$ sont formellement, pour $|z| = 1$, des séries trigonométriques conjuguées.

5. QUELQUES CONDITIONS SUFFISANTES POUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER.

5.1. Si l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt$$

existe, la série de Fourier de la fonction $f(x)$ converge vers $f(x)$. (Critère de Dini.)

Pour simplifier la notation, désignons par $\varphi_x(t)$ la fonction $f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$. Comme

$$D_n(t) = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin nt + \cos nt$$

il s'ensuit de (7) que

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varphi_x(t)\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin nt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\cos nt\,dt.$$

La deuxième intégrale tend vers zéro, parce qu'elle est le "cosinus-coefficient" de la fonction intégrable $\varphi_x(t)$.

La première tend aussi vers zéro puisqu'elle est le "si nus-coefficient" de la fonction $\dfrac{\varphi_x(t)\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$, pourvu qu'elle soit intégrable. Mais elle l'est, en effet, parce que

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t)\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt \leqslant 2\int_0^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t)}{t}\right|\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt \leqslant \pi\int_0^{\pi}\left|\frac{\varphi_x(t)}{t}\right|dt ,$$

et cette dernière intégrale existe d'après l'hypothèse.

5.2. _Si l'intégrale_

$$\int_0^{\pi}\frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}dt$$

existe, la série conjuguée converge au point x . (_Pringsheim_)

La démonstration suit exactement la même schéma que celle de 5.1.

Nous dirons qu'une fonction satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α , où $0 < \alpha \leq 1$, si $|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^{\alpha}$ où M est une constante positive. Il est évident que si $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ (c'est la notation usuelle pour indiquer que $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre α) alors les conditions de 4.1 et 4.2 sont remplies pour tout x.) Or, dans ce cas, on peut même démontrer la convergence uniforme de la série de Fourier de $f(x)$.

5.3. Si $f \in \text{Lip.}\alpha$ où $0 < \alpha \leq 1$, la série de Fourier de $f(x)$ converge uniformément vers $f(x)$; la convergence de la série conjuguée est aussi uniforme.

Il suffit d'étudier la convergence de $\{s_n(x)\}$ puisque la recherche de la convergence de $\{\tilde{s}_n(x)\}$ se fait d'une manière analogue. La condition $f \in \text{Lip}\,\alpha$ entraine, d'après (7),

$$\left|s_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{t^{\alpha}}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} \sin nt\, dt + \frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi} t^{\alpha} \sin nt dt.$$

Le deuxième membre étant indépendant de x, notre théorème est démontré si les deux intégrales tendent vers zéro.

C'est évident pour la deuxième puisqu'elle est le coefficient de $2Mt^{\alpha}$. La première tend aussi vers zéro car elle est le "sinus-coefficient" de la fonction $\dfrac{t^{\alpha} \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$, qui est intégrable puisque

$$\int_0^{\pi} \frac{t^{\alpha} \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt \leq 2 \int_0^{\pi} \frac{t^{\alpha}}{t} dt = 2\pi^{\alpha}/\alpha .$$

Pour approfondis l'étude de la convergence des séries de Fourier, nous allons montrer que leur convergence et divergence sont des propiétés locales; plus précisément:

5.4. <u>Si deux fonctions</u> $f_1 \in L$, $f_2 \in L$ <u>sontégales dans l'intervalle</u> $(a,b) \subseteq (-\pi,\pi)$, <u>la différence</u> $s_n(f_1 , x) - s_n(f_2 , x)$ <u>des sommes partielles de leurs séries de Fourier respectives tend vers zéro pour tout</u> x <u>intérieur à</u> (a,b).

En effet, comme $f_1(x) = f_2(x)$, si $x \in (a,b)$, on a

$$s_n(f_1 , x) - s_n(f_2 , x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{a} + \int_{b}^{\pi}\right) \frac{f_1(t) - f_2(t)}{\sin \frac{t - x}{2}} .$$

$$. \sin(2n + 1)\frac{t - x}{2} dt$$

Soit maintenant $\delta > 0$ et $x \in (a + \delta , b - \delta)$. Alors

$$\left|\frac{f_1(t) - f_2(t)}{\sin\frac{t - x}{2}}\right| \leqslant \frac{|f_1(t) - f_2(t)|}{\sin\frac{\delta}{2}} ,$$

pourvu que $t \in (-\pi,a) \cup (b,\pi)$. Cette fonction étant intégrable, on voit de la même manière comme dans 5.1. que les intégrales qui figurent au deuxième membre sont les coefficients de Fourier de deux fonctions intégrables; elles tendent donc vers zéro. C. Q. F. D.

<u>Remarque</u>. Il y a encore plusieurs critères de convergence pour la série de Fourier et sa conjuguée. L'intéréssé peut en trouver un exposé serré, mais bien clair, dans TS.I, p. 52-66. La littérature respective est discutée à la fin de ce volume.

6. SOMMATION DE LA SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION BORNÉE

Si, au lieu des sommes partielles $s_n(x)$ d'une série de Fourier, on prend leurs moyennes arithmétiques

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} ,$$

on obtient des résultats beaucups plus satisfaisants.

6.1. <u>Si</u> $f(x)$ <u>est une fonction</u> 2π<u>-périodique, continue, les moyennes</u> $\sigma_n(x)$ <u>convergent uniformément vers</u> $f(x)$.

Remarquons tout d'abord que

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{2\sin^2\frac{t}{2}} ,$$

d'où

$$D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kt - \cos(k+1)t}{2\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{1 - \cos(n+1)t}{2\sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}} \quad .$$

On en obtient

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x+t) + f(x-t) \right] \quad .$$

$$. \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x+t) + f(x-t) \right] \frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}} \, dt$$

La fonction

$$K_n(t) = \frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}$$

s'appelle le noyau de Fejér. Elle a l'importante propriété d'être toujours positive, ce qui n'arrive pas pour le noyau de Dirichlet $D_n(t)$. Comme on a évidemment

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(t) \, dt = 1 \quad ,$$

on obtient finalement

(9) $$\sigma_n(x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)\right] K_n(t)dt \quad .$$

Soit $\delta > 0$ un nombre tellement petit que, pour $0 \leq t \leq \delta$, on ait

$$\left|f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)\right| < \epsilon \quad ,$$

quel que soit $\epsilon > 0$ donné d'avance. Ce choix de δ est légitimé par la continuité de $f(x)$. Partageons l'intervalle d'intégration en deux parties:

$$\left|\sigma_n(x) - f(x)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\left|f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)\right| K_n(t)dt$$

En ce qui concerne la première intégrale, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} < \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{\delta} K_n(t)dt \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t)dt = \frac{\epsilon}{2}$$

Quant à la deuxième remarquons que, pour $\delta \leq t \leq \pi$

$$K_n(t) \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} .$$

En désignant par M le maximun de f(t) , or a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} \leqslant \frac{4M}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} K_n(t)dt \leqslant \frac{2M}{(n+1)\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^{\pi} dt .$$

Il est évident que , pour tout n assez grand, le dernier membre est $< \frac{\epsilon}{2}$; par conséquent

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \epsilon ,$$

pourvu que n soit suffisamment grand. C.Q.F.D.

On tire de cette démonstration que, même si f(x) n'est pas bornée et n'est continue qu'au point x_0 , on a

$$\sigma_n(x_0) \rightarrow f(x_0).$$

On en déduit aisément une conséquence: soit $f \in L$ tel que les limites $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0 - 0)$ existent au point x_0 ; nous atribuerons à f(t) la valeur

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

au point x_0 . La fonction

$$f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

est alors continue au point x_0 , et la remarque précedente entraîne que

$$\sigma_n(x_0) - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} \longrightarrow 0 \quad .$$

On a donc démontré le théorème suivant:

6.2. <u>Si les limites</u> $f(x_0 + 0)$ <u>et</u> $f(x_0 - 0)$ <u>existent</u> <u>et</u> $f \in L$, <u>alors</u>

$$\sigma_n(x_0) \longrightarrow \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} \quad .$$

Une dernieère propriété importante des moyennes de Fejér $\sigma_n(x)$ est qu'elles ne dépassent pas le maximun de la fonction bornée $|f(x)|$:

6.3. <u>Si</u> $f(x)$ <u>est une fonction bornée et</u> $|f(x)| \leqslant M$, <u>on a pour tout</u> x,

$$|\sigma_n(x)| \leqslant M \quad .$$

En effet, on voit que

$$|\sigma_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |(f(x+t) + f(x-t)| K_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t)dt = M \quad .$$

REMARQUE. Les théorèmes 6.1.-6.3. son dus à Fejér. Pour la littérature et plusieurs problèmes qui s'y rattachent v. TS.I. p. 88-92.

<u>Exercices</u>.1. Démontrez que 6.1. est localisable dans ce sens que: <u>Si</u> $f \in L$ <u>est continue en</u> $(a,b) \subset C(0,2\pi)$ <u>les sommes</u> $\sigma_n(x)$ <u>tendent uniformément vers</u> $f(x)$ <u>en</u> $(a+\epsilon \;,\; b-\epsilon)$ <u>pourvu que</u> $\epsilon > 0$.

2. Démontrez que le système trigonométrique est complet. La formule de Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n{}^2 + b_n{}^2)$$

est donc valable pour tout $f \in L^2$. (Appliquez 6.1. et l'exercice 2 du § .3).

3. Montrez que (*) $\sum a_n \cos nx$ avec $a_n \geqslant 0$ $(n=1,2,\ldots)$

ne peut être la série de Fourier d'une fonction continue que si $\sum a_n < \infty$, c'est-à-dire, que si la série (*) converge absolument. (Envisagez $\sigma_n(0)$.).

7. LE CRITÈRE DE CONVERGENCE DE JORDAN-DIRICHLET.

Les théoremes sur la sommabilité des séries de Fourier ont des conséquences importantes dont une partie peut être basée sur un théorème intéressant concernant la convergence des séries générales.

Soit $\sum u_n$ une série quelconque à termes réels. (Cette dernière hyppothèse n'est introduite que pour simplifier l'exposé; elle n'est pas du tout nécessaire.)

Désignons par s_n (resp. σ_n) sa n-ième somme partielle (resp. l'n-ième moyenne arithmétique des s_n:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \quad) .$$

On voit immédiatement que

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k u_k \quad .$$

(Calculez s.v.p!) Introduisons les expressions

$$\sigma_{n,k} = \frac{s_n + s_{n+1} + \dots + s_{n+k-1}}{k}$$

bien semblables aux moyennes arithmétiques. Il est clair que

$$\sigma_{n,k} = \frac{(n+k)\sigma_{n+k-1} - n\sigma_{n-1}}{k} = (1+\frac{n}{k})\sigma_{n+k-1} - \frac{n}{k}\sigma_{n-1} \quad .$$

Il s'ensuit que, si k varie avec n de sorte que $\frac{n}{k} < C$ pour tout n, alors la relation $\sigma_n \to s$ implique $\sigma_{n,k} \to s$. En effet, soit $\sigma_\nu - s = \epsilon_\nu$ où $0 < \epsilon_\nu < \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ donné d'avance. Alors

$$\sigma_{n,k} = s + \epsilon_{n+k-1} + \frac{n}{k}(\epsilon_{n+k-1} - \epsilon_k) \quad ,$$

d'où $|\sigma_{n,k} - s| \leqslant \epsilon + 2C\epsilon$, c'est-à-dire $\sigma_{n,k} \to s$ avec $n \to \infty$. D'après ce cas préliminaire, nous démontrons le théorème suivant de Hardy:

7.1. Si $\sum u_n$ est sommable par la méthode des moyennes arithmétiques, c'est-à-dire: si $\sigma_n \to s$ et si on a $|u_n| \leqslant \frac{C}{n}$ pour tout n , alors $\sum u_n$ est convergente.

Soit $\epsilon > 0$ quelconque et posons $k = [n\epsilon] + 1$ où $[n\epsilon]$ désigne la partie entière de $n\epsilon$.

Evaluons $|\sigma_{n,k} - s_n|$. On voit d'abord que

$$\sigma_{n,k} = \frac{s_n + (s_n + u_{n+1}) + \dots + s_n + (u_{n+1} + \dots + u_{n+k-1})}{k} =$$

$$= s_n + \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} u_\nu \quad ,$$

d'où

$$\left| \sigma_{n,k} - s_n \right| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} |u_\nu| \leqslant c \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} \frac{1}{\nu} < c \frac{k-1}{n} \leqslant$$

$$\leqslant c \frac{[n\epsilon]}{n} < c\epsilon \quad .$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, notre théorème serait dé-montré si $\sigma_{n,k} \to s$ lorsque $n \to \infty$. D'après ce que nous avons remarqué, il suffit pour ceci que $\frac{n}{k}$ reste borné. Mais c'est justement le cas, puisque

$$\frac{n}{k} = \frac{n}{[n\epsilon]} < \frac{n}{(n-1)\epsilon} \leqslant \frac{2}{\epsilon} \text{ , pour tout } n \geqslant 2 \quad ,$$

et la démonstration est achevée.

Des théorèmes précédents (6.1 , 6.2 et 7.1) , on tire immédiatement la conséquence suivante:

7.2. <u>Si la fonction</u> $f \in L$ <u>ne possède que des points de continuité et des sauts et si l'ordre de grandeur</u>

<u>de ses coefficients de Fourier</u> a_n , b_n <u>est, tel que</u> $|a_n| \leq \frac{C}{n}$, $|b_n| \leq \frac{C}{n}$, <u>la série de Fourier de</u> $f(x)$ <u>converge partout</u>.

Etudions maintenant l'ordre de grandeur des coefficients a_n , b_n **d'une** fonction $f(x)$ à variation bornée. En introduisant $x+\frac{\pi}{n}$, $x+\frac{2\pi}{n}$, ... , $x+\frac{2n-1}{n}\pi$ comme variable d'intégration, on obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{\pi}{n})\cos nx dx = \dots$$

$$\dots = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{2n-1}{n}\pi)\cos nx dx \quad .$$

On en tire par addition de ces relations:

$$2n|a_n| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\left|f(x+\frac{k\pi}{n}) - f(x+\frac{k+1}{n}\pi)\right|dx \quad .$$

Mais la somme sous le signe de l'intégrale ne dépasse pas la variation totale V de $f(x)$. Par conséquent

$$|a_n| \leq \frac{V}{n} ,$$

et une évaluation semblable est valable pour $|b_n|$. A l'aide de ces évaluations on prouve aisément le théorème de Jordan-Dirichlet:

7.3 <u>Si la fonction</u> 2π-<u>périodique</u> $f(x)$ <u>est à variation bornée, sa série de Fourier converge partout vers la valeur</u>

$$\frac{f(x+0)+f(f-0)}{2} .$$

En effet, une fonction à variation bornée n'a que des points de continuité ou des sauts. Les conditions de 6.2 et 7.2 sont donc remplies et la série de Fourier de $f(x)$ est, par suite, partout convergente. Mais la limite des sommes partielles $s_n(x)$ ne peut différer de celle de leurs moyennes arithmétiques $\sigma_n(x)$. Celle-ci étant

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} ,$$

en vertu de 6.2 notre théorème est entièrement démontré.

L'intégrale $F(x)$ d'une fonction $f \in L$. étant absolument continue, elle est à plus forte raison à variation bornée.

Sa série de Fourier converge donc partout vers $F(x)$. Calculons les coefficients α_n , β_n de $F(x)$ à l'aide des coefficients a_n , b_n de $f(x)$:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{F(x)\ \sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \sin nx\ dx = -\frac{b_n}{n} \quad ,$$

$$\beta_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{F(x)\ \cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n \cdot \pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{a_n}{n} \quad .$$

On a donc (en supposant le terme constant $\alpha_0 = 0$)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right) \quad ,$$

cette série étant partout convergente, elle l'est au point $x = 0$, d'où il s'ensuit:

7.4 <u>Si</u> $f(x)$ <u>est intégrable, la série</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ <u>formée des "coefficients de sinus" de</u> $f(x)$ <u>est convergente</u>.

<u>Exercices</u> .1. Montrez que $f(x)$ étant à variation totale V bornée et M étant le maximun de $f(x)$, on a $|s_n(x)| \leqslant M + V$ pour tout n. (Faites usage de 6.3 et de la formule

$$s_n(x) = \sigma_n(x) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad .$$

2. Montrez que la série partout convergente

$$\frac{\sin n^{2n}x}{n!}$$

est la série de Fourier d'une fonction continue qui n'est pas à variation bornée. Construisez d'autres exemples plus simples.

3. Soit $F(x)$ l'intégrale de $f(x)$ fixée par $F(0) = F(2\pi) = 0$. Si $s_n(F,x)$ est la n-ième somme partielle de la série de Fourier de $F(x)$, montrez à l'aide de la formule presque évidente (vérifiez!)

$$s_n(F,x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k} \, dt$$

que l'on a

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \; (\pi - t)dt \quad .$$

(Cf. l'exercice 2b) du §4. Justifiez le passage à la limite sous le signe d'intégrale.)

8. SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES A COEFFICIENTS MONOTONES

Partons d'une identité presqu'évidente (vérifiez s.v.p.!) valable pour des sommes de nombres:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n$$

où $V_r = v_0 + v_1 + \dots + v_r$. Cette formule s'appelle la transformée abélienne de

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k$$

Envisageons les séries trigonométriques

$$(*)\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad , \quad (**)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad ,$$

8.1. <u>Si les</u> a_n <u>sont positifs et tendent monotonément vers zéro, la série</u> $(*)$ <u>converge partout sauf éventuellement, les points</u> $x = 0 \pmod{2\pi}$. <u>Sous les mêmes conditions, la série</u> $(**)$ <u>converge partout</u>.

En effet, si $D_n(x)$ et $\widetilde{D}_n(x)$ désignent le noyau de

Dirichlet et sa conjuguée, c'est-à-dire, si

$$D_n(x) = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} ,$$

$$\widetilde{D}_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} ,$$

on obtient, par une transformation abélienne, pour la première série $(x \neq 0, \bmod 2\pi)$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})D_k(x) + a_n D_n(x) ,$$

et pour la deuxième:

$$\widetilde{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(b_n - b_{n+1})\widetilde{D}_k(x) + b_n\widetilde{D}_n(x) .$$

Or $|D_n(x)|$ reste pour un x fixé compris entre 0 et 2π audessous de la valeur finie $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}$. Puis que $a_n \longrightarrow 0$ et $a_k - a_{k+1} \geqslant 0$, on a donc, pour tout $m > n$

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sum_{k=n}^{m-1}(a_k - a_{k-1}) + a_m + a_n\right] = \frac{a_n}{\sin\frac{x}{2}} \quad ,$$

d'où $S_m(x) - S_n(x)$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$, pour tout $m > n$, c'est-à-dire que la série (*) converge en tout point $0 < x < 2\pi$. On obtient de la même manière la convergence de la série (**) pour tout $0 < x \leqslant 2\pi$, et la convergence au point $x = 0$ est manifeste.

La convergence partout d'une série trigonométrique n'assure guère qu'elle soit une série de Fourier. Prenons comme exemple la série

$$\sum \frac{\sin nx}{\log n} \quad .$$

Elle converge d'après le théorème précédent, mais

$$\sum \frac{1}{n \log n}$$

étant une série divergente, $\sum \frac{\sin nx}{\log n}$ n'est, en vertu du théorème 7.4. la série de Fourier d'aucune fonction $f \in L$.

Malgré cela, on verra immédiatement que'elle est la série conjuguée d'une série de Fourier (Le problème de la convergence et de la sommabilité des séries conjuguées est bien compliquée. Pour l'étudier v. surtout, TS.I. chapitre VII.)

Nous disons qu'une suite de nombres positifs $\{\lambda_n\}$ est <u>convexe</u> , si la suite des différences $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$, est monotone, c'est-à-dire, si les deuxièmes différences $\Delta^2\lambda_n = \Delta\lambda_n - \Delta\lambda_{n+1}$ sont non-négatives. Les suites convexes sont évidemment monotones, puisque $\Delta\lambda_n = \Delta^2\lambda_o + \sum_{k=0}^{n} \Delta^2\lambda_k \geqslant 0$. Mais l'inverse n'est pas exacte comme le le montre l'exemple suivant:

$$\lambda_n = \frac{1}{2^k} \quad \text{pour} \quad 2^k \leq n < 2^{k+1} \quad .$$

Si $\{\lambda_n\}$ est convexe, on obtient par une transformation abélienne:

$$\lambda_o - \lambda_{n+1} = \sum_{k=o}^{n+1} 1.\Delta\lambda_k = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\Delta^2\lambda_k + (n+1)\Delta\lambda_n \quad .$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\Delta^2\lambda_k < \lambda_o - \lambda_{n+1} - (n+1)\Delta\lambda_n < \lambda_o \quad ;$$

la série $\sum (n+1)\Delta^2\lambda_n$ à termes positifs est donc convergente. Alors, en choisissant $\epsilon > 0$ arbitrairement, on a pour tout n assez grand

$$(n+1)\Delta\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)\Delta^2\lambda_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1)\Delta^2\lambda_k < \epsilon \quad ,$$

donc $(n+1)\Delta\lambda_n \to 0$. Ces deux propriétés permettent d'énoncer le théorème suivant:

8.2. <u>Si</u> $a_n \to 0$ <u>et</u> $\{a_n\}$ <u>est convexe, la série</u> (*) <u>est la série de Fourier d'une fonction non-négative</u> $f(x)$.

En effet, on obtient par deux transformations abéliennes successives

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k \, D_k(x) + a_n D_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) K_k(x) \Delta^2 a_k + nK_{n-1}\Delta a_{n-1} + a_n D(x) \quad ,$$

où $K_r(x) = \frac{1}{r+1} \sum_{r=0}^{r} D_r(x)$ désigne le noyáu de Fejér.

Or, $K_r(x)$ et $D_r(x)$ étant finis pour $0 < x < \pi$, les deux derniers termes tendent vers zéro par suite de la convexité de $\{a_n\}$ et $a_n \to 0$. On a donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) K_n(x) \Delta^2 a_n \geqslant 0$$

sauf au point $x = 0$, **donc** à un ensemble de mesure nulle près. Tous les termes de cette série étant positifs, on peut intégrer terme à terme (théoreme de B. Levi), par conséquent

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx =$$

$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Delta^2 a_n < \infty \quad .$$

Pur démontrer que la série (*) est la série de Fourier de $f(x)$ prenons l'intégrale formelle de la série $\sum a_n \cos nx$. En désignant par $V_n(x)$ la n-ième somme partielle de $\sum \frac{\sin kx}{k}$, on obtient pour la n-ième somme partielle de la série formellement intégrée:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} V_k \Delta a_k + a_n V_n \quad .$$

Remarquons que les V_n sont bornés en leur ensemble (cf. exercice 1. du § 7.). Désignant cette borne par V, il s'ensuit que

$$\left| S_m(x) - S_n(x) \right| \leqslant V \sum_{k=n}^{m} \Delta a_k + (a_m + a_n) V = 2a_n V \quad .$$

Comme $2a_nV$ tend vers zéro, on voit que la série formellement intégrée tend uniformément vers une fonction $F(x)$. Elle est donc la série de Fourier de la fonction $F(x)$. On voit tout de suite que la dérivée formelle $\sum a_k \cos kx$ de $\sum a_k \frac{\sin kx}{k}$ converge uniformément vers $f(x)$ pour $-\pi+\epsilon < x < \pi-\epsilon$, où $\epsilon > 0$ est arbitraire, on peut donc dériver terme à terme. On obtient alors, pour $-\pi+\epsilon < x < \pi-\epsilon$:

$$F'(x) = \sum a_n \cos nx = f(x) \quad .$$

La fonction $f(x)$ étant presque partout la dérivée de $F(x)$, on sait que, β_n étant le n-ième "coefficient de sinus" de F(x), le n-ième "coefficient de cosinus" de la fonction f(x) est $n\beta_n$, c'est-à-dire: a_n, d'où la proposition.

L'exemple de la série $\sum \frac{\sin nx}{\log n}$ montre bien qu'un théoreme analogue pour la série (✱✱) tomberait en défaut.

Nous n'entrons pas dans l'analyse de cette série, mais renvoyons pour ce sujet à TS.I., chapitre V .

Remarquons que le théorème 8.2 permet de construire des séries de Fourier de fonctions intégrables L (mais non-intégrables L^2) dont les coefficients tendent aussi lentement vers zéro qu'on veut.

Pour cela, il suffit de prendre une fonction convexe $\varphi(x)$ qui tende avec une lenteur arbitraire vers zéro lorsque $x \to \infty$, et de poser $a_n = \varphi(n)$ dans la série (✱). Par contre, on peut construire des séries du type (✱✱) à coefficients avec une lenteur arbitraire tendant vers zéro, convergentes partout sans qu'elles soient des séries de Fourier.

REMARQUE. Pour d'autres résultats concernant les séries trigonométriques à coefficients monotones et leur littérature, consultez T. S. I. , Chapitre V.

9. DIVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER DE FONCTIONS CONTINUES. CONSTANTES DE LEBESGUE.

Nous avons vu qu'on n'a pu assurer la convergence de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$, même continue, que par des conditions supplémentaires, tandis que les sommes de Fejér étaient convergentes sans d'autres conditions; en plus, elles étaient même uniformément convergentes. Ces faits ne sont pas des conséquences de la faiblesse de nos méthodes de recherche, ils sont nécessaires, par ce qu'il existe des fonctions continues dont les séries de Fourier divergent en certains points.

Envisageons, pour étudier ce phénomène, l'intégrale de $|D_n(t)|$. On appelle constantes de Lebesgue les nombres

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt \quad .$$

Il est facile de voir que $L_n \leq C \log n$, où C est une constante absolue. En effet, partageons l'intervalle d'intégration en deux parties: $(0, \frac{1}{n})$ et $(\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2})$.

Alors, en tenant compte de ce que

$$\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| \leq 2n+1 \quad ,$$

on obtient

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{2(2n+1)}{\pi . n} \leqslant \frac{6}{\pi} .$$

Mais $\frac{t}{\sin t} \leqslant \frac{\pi}{2}$ en $(\frac{1}{n} , \frac{\pi}{2})$, donc

$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} = \log \frac{\pi}{2} + \log n .$$

Par suite $L_n \leqslant C \log n$, pour $n \geqslant 2$. Mais ce qui est important c'est qu'il existe aussi une constante positive C_1 telle que $L_n \geqslant C_1 \log n$. En effet, on voit que

$$L_n > \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{t} dt = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2(n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{u} du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{u} du \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} |\sin u| \, du =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k+1} \geqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \int_{2k+1}^{2k+2} \frac{dx}{x} = 2 \int_{3}^{2n+2} \frac{dx}{x} =$$

$$= 2.\log \frac{2n+2}{3} > C_1 \log n \;,$$

pourvu que n soit assez grand. La proprieté $L_n \to \infty$, est opposée à celle des constantes

$$L_n^1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1$$

correspondantes aux sommes de Fejér. C'est la propriété décisive qui détermine la différence entre le comportement des $s_n(x)$ et des $\sigma_n(x)$.

Construisons maintenant un exemple d'une fonction continue 2π- périodique dont la série de Fourier diverge au point $x = 0$. L'exemple que nous allons présenter est le plus simple dans ce genre, il est dû à Fejér (1911). Le premier exemple a été construit par du Bois Reymond (1876).

Envisageons les sommes

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n+1-k)x}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n+1+k)x}{k} \;.$$

En tenant compte de la relation

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} . \sin \frac{\alpha-\beta}{2} ,$$

on voit que

$$\varphi_n(x) = 2 \sin(n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} .$$

Comme les sommes qui figurent au deuxième membre sont uniformément bornées (cf. exercice 1 du § 7) , la série $\sum \frac{1}{n^2} \varphi_n(x)$ est absolument et uniformément convergente. La fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_{2^{n^3}} (x)$$

est, par conséquent, continue et évidemment 2π-périodique. Nous allons montrer que la série de Fourier de $f(x)$ diverge au point $x = 0$. Comme les $\varphi_{2^{n^3}}(x)$ sont des polynômes trigonométriques différents, la série qui définit $f(x)$ peut être écrite sous la forme $\sum a_n \cos nx$.

La somme partielle $s_{2^{n^3}+2^{n^3}}(x)$ de cette série est, d'après la définition des polynômes $\varphi_{2^{k^3}}(x)$, la suivante:

$$s_{2.2^{n^3}}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \varphi_{2^{k^3}}(x) \quad .$$

Elles convergent donc uniformément vers $f(x)$ et sont des sommes partielles de la série de Fourier de $f(x)$.

On obtient la somme partielle $s_{2^{n^3}}(x)$ si on supprime en en $s_{2.2^{n^3}}(x)$ les termes de rang $2^{n^3} + 1 , \dots, 2^{n^3} + 2^{n^3}$.

On aura alors

$$s_{2^{n^3}}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \varphi_{2^{k^3}}(x) + \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^{2^{n^3}} \frac{\cos(2^{n^3} + 1 - \ell)x}{2^{n^3} + 1 - \ell} \quad .$$

Or, pour $x = 0$, on a

$$\varphi_{2^{k^3}}(o) = \sum_{\ell=1}^{2^{k^3}} \frac{1}{2^{k^3} + 1 - \ell} - \sum_{\ell=1}^{2^{k^3}} \frac{1}{2^{k^3} + 1 + \ell} > 0 \quad ,$$

d'où

$$s_{2^{n^3}}(o) \geqslant \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^{2^{n^3}} \frac{1}{2^{n^3} + 1 - \ell} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2^{n^3}} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{n^2} \int_1^{2^{n^3}+1} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\log (2^{n^3} + 1)}{n^2} > n \log 2 \quad .$$

Les sommes partielles $s_{2^{n^3}}(o)$ tendent donc vers infini et la série de Fourier de la fonction $f(x)$ est, par conséquent, divergente au point $x = 0$.

REMARQUES. Si on suit avec attention la démonstration, on peut constater que le choix spécial $\nu_n = 2^{n^3}$ de l'indice ν_n pour les sommes partielles n'est pas décisif. Au contraire, on pourait partir d'une définition

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_{\nu_n}(x)$$

avec les $\alpha_n > 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, et un choix convenable des ν_n pour obtenir de différentes fonctions continues $f(x)$ dont les séries de Fourier divergent au point $x = 0$. Si on prend une suite de nombres positifs β_n tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$, et on choisit convenablement une infinité dénombrable $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... de ces fonctions , alors la fonction continue

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n(x - x_n)$$

a une série de Fourier divergente aux points x_1 , x_2 , ... , Si ces points sont , p. ex., les points rationnels de l'intervalle $(0,2\pi)$, la série divergera aux points d'un ensemble dense. Il n'est pas difficile de montrer à l'aide de la théorie générale des fonctions réelles que cette série diverge même sur un ensemble ayant la puissance du continu.

En analysant le comportement de la série conjuguée de cette série, on peut montrer qu'elle est convergente partout et est, en même temps, la série de Fourier d'une fonction continue $\tilde{f}(x)$.

Si on pose donc $z = r e^{ix}$ et $F(e^{ix}) = f(x) + i\tilde{f}(x)$, on obtient, comme on le voit aisément, une fonction $F(z)$ regulière pour $|z| < 1$, et continûe dans le cercle fermé $|z| \leqslant 1$ dont la représentation

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z$$

diverge sur ensemble ayant la puissance du continu et dense sur la circonférence $|z| = 1$.

Nous n'entrons pas dans la démonstration de ces faits. Elle se trouve, avec d'autres phénomènes intéressants qui s'y rattachent, dans TS. I. p. 298-305, où on peut en consulter la littérature.

Nous nous bornons seulement à signaler que le problème, posé déjà par du Boys Reymond, de savoir s'il existe ou il n'existe pas une fonction continue ayant une série de Fourier partout divergente, est loin d'être résolu. Il semble que c'est un des plus difficiles problèmes de l'analyse. On ne sait même pas si la série de Fourier d'une fonction $f \in L^p$ avec $p > 1$ peut ou ne peut pas diverger sur un ensemble de mesure positive. Malgré cela, le cas $p = 1$ a été résolu par Kolmogoroff, qui a construit une série de Fourier d'une fonction L-intégrable (mais non-intégrable L^p pour aucun $p > 1$) partout divergente. La construction de cet exemple est longue et compliquée. L'intéressé peut consulter le chapitre VIII de TS.I.

10. APPROXIMATION DES FONCTIONS APPARTENANT À DES CLASSES DE LIPSCHITZ.

D'après 6.1, toutes les fonctions périodiques et continues sont approchées uniformément par les moyennes de Fejér $\sigma_n(x)$ de leurs séries de Fourier. Quelle est la vitesse de cette approximation? Et si on connait la vitesse de la convergence des $\sigma_n(x)$, peut-on en tirer quelques ~~cons~~équences concernant la structure de la fonction $f(x) = \lim \sigma_n(x)$?

Ces questions se laissent discuter bien simplement si $f(x)$ appartient à une classe de Lipschitz.

Désignons par $\mathrm{Lip}_M \alpha$ la classe des fonctions 2π-périodiques et continues qui satisfont à la condition de Lipschitz

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M.|h|^{\alpha} .$$

(Nous remarquons que $0 < \alpha \leq 1$, car $\alpha > 1$ entraîne

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq M.|h|^{\alpha-1}$$

d'où, en passant à la limite pour $h \to 0$, .. obtient $f'(x) \equiv 0$; ce ne sont donc que les constantes qui satisfont à une condition $\mathrm{Lip}\,\alpha$ avec $\alpha > 1$) .

10.1. Si $f \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$, alors

$$\rho_n = \max_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |f(x) - \sigma_n(x)| \leqslant \frac{C_\alpha M}{(n+1)^\alpha}$$

où C_α est une constante qui ne dépend que de α

Mais si $\alpha = 1$, on n'a que l'évaluation

$$\rho_n \leqslant \frac{CM}{n+1} \log (n+1) \quad .$$

La formule (9) rend, en tenant compte de ce que $f \in \mathrm{Lip}_M \alpha$, l'évaluation suivante:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| K_n(t) dt =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \frac{\sin^2(n+1)t}{\sin^2 t} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1+\alpha} M}{(n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \frac{\sin^2(n+1)t}{\sin^2 t} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^\alpha M\pi}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)t}{t^{2-\alpha}} dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha} M\pi}{n+1} \int_0^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}}\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{\alpha} M\pi}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{\alpha} du + \frac{2^{\alpha} M\pi}{n+1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{du}{u^{2-\alpha}} \leqslant \frac{C_{\alpha} M}{(n+1)^{\alpha}}$$

pourvu que $0 < \alpha < 1$. C'est la prèmiere partie de notre proposition. Quant à la deuxième, on l'obtient par une voie tout à fait analogue:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{2M\pi}{n+1} \int_0^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{\sin^2 u}{u} du \leqslant \frac{2M\pi}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{du}{u}$$

$$\leqslant \frac{2M\pi}{n+1} \left(\frac{\pi}{2} + \log(n+1)\right) ,$$

et la deuxième partie est aussi démontrée.

Il est très intéressant que l'ordre de grandeur de ρ_n obtenu dans le cas où $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ est caractéristique de ces classes, parce qu'une fonction $f(x)$ qui peut être approchée, pour tout n, par des polynômes trigonométriques d'ordre n avec une vitesse $1/n^{\alpha}$ où $0 < \alpha < 1$, appartient à la classe $\mathrm{Lip}\,\alpha$. Pour démontrer ce théorème dû à <u>S. Bernstein</u> (1912); commençons par prouver le lemme suivant:

10.2. <u>Si</u> $T_n(x)$ <u>est un polynôme trigonométrique d'ordre</u> n <u>et</u> $M = \max\limits_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |T_n(x)|$, <u>alors sa dérivée et la dérivée du polynôme conjugué</u> $\widetilde{T}_n(x)$ <u>satisfont aux inégalités</u>.

$$\max_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |T_n'(x)| \leqslant 2(n+1)M \quad ;$$

$$\max_{-\pi \leqslant x \leqslant \pi} |\widetilde{T}_n'(x)| \leqslant 2(n+1)M.$$

Tout polynôme trigonométrique d'ordre n est identique à la n-ième somme partielle de sa série de Fourier, donc

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(t)D_n(t-x)dt \quad ,$$

d'où, en dérivant par rapport à x sous le signe de l'intégrale:

$$T_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)D_n'(t)dt \quad .$$

Mais $T_n(x+t)$ est un polynôme trigonométrique d'ordre n; donc, si on le multiplie par $\sin \nu t$ où $\nu > n$, l'intégrale du produit disparaît par suite de l'orthogonalité. On peut donc additionner à $D_n'(t)$ n'importe quel polynôme trigonométrique $P(t)$ sans changer la valeur de l'intégrale, pourvu que $P(t)$ n'ait que des termes d'ordre supérieur à n:

$$(10) \quad T'(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)\left[D_n'(t) + P(t)\right] dt \quad .$$

Prenons $P(t) = (n+1)\sin(n+1)t + \sum_{k=1}^{n} \cos(2n+2-k)t$.

Comme

$$D_n'(t) = \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos nt\right] = -\sum_{k=1}^{n} k \sin kt \quad ,$$

on obtient

$$D_n'(t) + P(t) =$$

$$= (n+1)\sin(n+1)t + \sum_{k=1}^{n} k\left[\sin(2n+2-k)t - \sin kt\right] =$$

$$= (n+1)\sin(n+1)t + 2\sin(n+1) + \sum k\cos(n+1-k)t =$$

$$=2\sin(n+1)t\left[\frac{n+1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\cos kt\right].$$

Mais la n-ième moyenne de Fejér est

$$K_n(t)=\tfrac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}\cos kt \quad ,$$

d'où

$$D'(t)+P(t)=2(n+1)\sin nt\,.\,K_n(t)\quad .$$

En tenant compte de ce que $K_n(t)\geqslant 0$, on tire de (10) l'évaluation

$$|T_n'(x)|\leqslant\frac{2(n+1)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(x+t)|\,K_n(t)dt\leqslant 2(n+1)M\quad .$$

C'était notre première proposition. La deuxième se démontre d'une façon semblable. On obtient d'abord

$$\tilde{T}_n'(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x+t)\,\tilde{D}_n'(t)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x+t)\sum_{k=1}^{n}k\cos kt\,dt\quad .$$

En prenant alors

$$(n+1)\cos(n+1)t + \sum_{k=1}^{n} k\cos(2n+2-k)t$$

pour $P(t)$, on obtient

$$\tilde{T}'_n(x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)\cos(n+1)t\left[\frac{n+1}{2} + \sum_{k=1}^{n} k\cos(2n+1-k)t\right]dt$$

d'où

$$\left|\tilde{T}'_n(x)\right| \leqslant \frac{2(n+1)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x+t)|\, K_n(t)dt \leqslant 2(n+1)M \quad ,$$

et notre lemme est entièrement démontré.

Ce lemme nous sert pour démontrer la réciproque de la première partie de 10.1:

10.3. <u>Soit</u> $T_n(x)$ <u>une suite de polynômes trigonométriques tels que</u> $T_n(x)$ <u>est au plus d'ordre</u> n. <u>Si</u> $T_n(x)$ <u>converge uniformément vers une fonction</u> $f(x)$ <u>de sorte que</u>

$$\underset{-\pi \leqslant x \leqslant \pi}{\text{Max}} \left|f(x) - T_n(x)\right| \leqslant \frac{C}{n^{\alpha}}$$

<u>où</u> C <u>est une constante et</u> $0 < \alpha < 1$, <u>alors</u> $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

Comme $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_{2^n}(x)$, on a

$$f(x) = T_1(x) + [T_2(x) - T_1(x)] + \dots + [T_{2^n}(x) - T_{2^{n-1}}(x)] + \dots$$

En posant $u_{2^n}(x) = T_{2^n}(x) - T_{2^{n-1}}(x)$

et $g(x) = f(x) - T_1(x)$,

on a

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{2^k}(x) \quad .$$

Or, $u_{2^k}(x)$ est un polynôme trigonométrique d'ordre 2^k , dont le maximum

$$\max u_{2^k}(x) \leqslant \max\left\{\left|T_{2^k}(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - T_{2^{k-1}}(x)\right|\right\} \leqslant \frac{C}{2^{\alpha k}} \quad .$$

Nous obtenons donc en vertu du lemme précédent:

$$\max \left|u'_{2^k}(x)\right| \leqslant C_1 \; 2^{k(1-\alpha)} \quad .$$

(C_1, C_2 , ... désignent des constantes indépendantes de k) .

Prenons $0 < h \leqslant \frac{1}{2}$, et l'entier N tel que

$2^{-N} < h \leq 2^{-(N-1)}$; alors

$$g(x+h) - g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_{2^k}(x+h) - u_{2^k}(x)\right] = \sum_{k=1}^{N} + \sum_{k=N+1}^{\infty} .$$

Pour évaluer la première somme, appliquons le théorème des accroissements finis. Il s'ensuit, étant donné $0 < \alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \leqslant h \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Max} |u'_{2^k}(x)| \leqslant C_1 h \sum_{k=1}^{N} 2^{k(1-\alpha)} \leqslant C_2 h 2^N . 2^{-N\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 2^{-N\alpha} \leqslant C_3 h^{\alpha} .$$

Quant à la deuxième somme, on obtient

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \leqslant h \sum_{k=N+1}^{\infty} \max |u'_{2^k}(x)| \leqslant C_1 h \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)} \leqslant C_2 2^{-N\alpha} \leqslant C_3 h^{\alpha} .$$

Il en résulte:

$$|g(x+h) - g(x)| \leqslant C_4 h^{\alpha} .$$

Comme $T_1(x)$ est un polynôme trigonométrique d'ordre 1 , il satisfait évidemment à la relation $|T_1(x+h) - T_1(x)| \leqslant C_5 h^{\alpha}$.

Il s'ensuit donc

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant |g(x+h) - g(x)| + |T_1(x+h) - T_1(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_6 h^{\alpha} \ ;$$

en d'autres termes: $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. C. Q. F. D.

Si la série conjuguée de la série de Fourier est aussi une série de Fourier, nous appelons la fonction $\tilde{f}(x)$, dont elle est la série de Fourier, la fonction conjuguée de $f(x)$ .Cette fonction existe sûrement si $f \in L^2$, parce que le théorème de Riesz-Fischer assure dans ce cas que $\tilde{f}(x)$ est aussi L^2-intégrable. Mais nous avons vu que si $f(x) \sim \sum a_n \cos nx$, alors $\tilde{f}(x)$ n'existe pas dans ce sens. (Il existe dans un sens plus général dont nous ne nous occupons pas). Il est intéressant que la fonction conjuguée $\tilde{f}(x)$ d'une fonction $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$, appartient aussi à la même classe $\mathrm{Lip}\,\alpha$. Pour le voir, démontrons d'abord le théorème suivant:

10.4. Si les conditions du théorème précédent sont satisfaites, la fonction conjuguée $\tilde{f}(x)$ de $f(x)$ appartient aussi à la classe $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Désignons par $\tilde{T}_{2^n}(x)$ et $\tilde{u}_{2^n}(x)$ resp. les conjuguée de $T_{2^n}(x)$ et $u_{2^n}(x)$ figurant dans la démonstration précédente. On a

$$\max|\tilde{u}_{2^n}(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u_{2^n}(x+t)|\,|\tilde{D}_{2^n}(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \max|u_{2^n}(x)|\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{D}_{2^n}(t)|\,dt \quad .$$

On voit de la même manière comme dans le cas des constantes de Lebesgue que

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{D}_{2^n}(t)|\,dt \leqslant C_7 \log 2^n < C_7 n \quad ,$$

donc

(11) $$\max|\tilde{u}_{2^n}(x)| \leqslant C_8 n 2^{-n\alpha} \quad .$$

La série $\tilde{u}_1(x) + \tilde{u}_2(x) + \ldots$ est donc uniformément convergente vers une fonction $f^*(x)$. Désignons les sommes partielles de cette série par $\tilde{f}_n(x)$ et les sommes partielles de $u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots$ par $f_n(x)$. Comme $f_n \longrightarrow f$ et $\tilde{f}_n \longrightarrow f^*$ uniformément, les coefficients de Fourier de f_n(resp.$\tilde{f}_n$)tendent vers ceux de f(resp.f^*). Or,f_n,$\tilde{f}_n$ étant conjuguées, il s'ensuit que les coefficients de $f^*(x)$ son les coefficients conjugués b_n et $-a_n$ des coefficients a_n , b_n de $f(x)$; en d'autres termes:

$$f^{*}(x) \equiv \widetilde{f}(x) \quad .$$

Désignons par $\widetilde{g}(x)$ la différence $\widetilde{f}(x) - \widetilde{T}_1(x)$.
Alors

$$|\widetilde{g}(x+h) - \widetilde{g}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\widetilde{u}_{2^k}(x+h) - \widetilde{u}_{2^k}(x)| \leq$$

$$\leqslant h \sum_{k=1}^{\infty} \max |\widetilde{u}'_{2^k}(x)| \quad .$$

Comme, d'après 10.2, les $|\widetilde{u}'_{2^k}(x)|$, sont bornées par les mêmes bornes que les $|u'_{2^k}(x)|$, on répète les évaluations de la démonstration précédente pour en tirer d'abord que $\widetilde{g} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, et puis que $\widetilde{f} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. C.Q.F.D.

On parvient maintenant d'un coup au théorème annoncé, dû à <u>Privaloff</u> (1916):

10.5. Si $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, <u>alors</u> $\widetilde{f} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, <u>pourvu que</u> $0 < \alpha < 1$.

En effet, si $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, on a, d'après 10.1

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leqslant \frac{C}{n}$$

d'où, en vertu de 10.4, $\widetilde{f} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

Nous avons caractérisé les classes Lip α avec

$0 < \alpha < 1$, mais nous n'avons pas réussi jusqu'à maintenant à caractériser la classe Lip 1 , bien que cette classe soit, peut-être, la plus importante des classes de Lipschitz, puisqu'elle coïncide avec la classe des fonctions continues ayant presque partout une dérivée bornée. Mais justement cette proprieté ouvre la voie d'ailleurs tout à fait différente de celle que nous avons suivie pour résoudre ce problème.

Nous avons besoin, d'abord, d'un lemme simple concernant les séries numériques générales.

10.6. <u>Désignons par</u> σ_n (resp. σ_n^*) <u>la n-ième moyenne arithmétique de la série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ (<u>resp.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$). <u>Si</u> $|\sigma_n^*| \leqslant C$, <u>alors</u> σ_n <u>converge vers une valeur finie</u> s <u>et on a</u>

$$|s - \sigma_n| \leqslant \frac{3C}{n} .$$

Pour le démontrer, remarquons qu'en désignant par s_ν la ν-ième somme partielle de la série $\sum u_n$, on a

$$\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} = \frac{s_\nu^*}{\nu(\nu+1)} \quad .$$

En effet

$$\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} = \sum_{k=1}^{\nu}\left(1 - \frac{k}{\nu+1}\right)\frac{u_k}{k} - \sum_{k=1}^{\nu-1}\left(1 - \frac{k}{\nu}\right)\frac{u_k}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu-1}\left(\frac{k}{\nu} - \frac{k}{\nu+1}\right)\frac{u_k}{k} + \left(1 - \frac{\nu}{\nu+1}\right)\frac{u_\nu}{\nu} =$$

$$= \frac{1}{\nu(\nu+1)}\sum_{k=1}^{\nu-1} u_k + \frac{u_\nu}{\nu(\nu+1)} = \frac{s_\nu^*}{\nu(\nu+1)} \quad .$$

Soient m,n, $(m > n)$, des entiers positifs quelconques. On obtient par une transformation abélienne:

$$|\sigma_m - \sigma_n| = \left|\sum_{\nu=n+1}^{m} \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}\right| = \left|\sum_{\nu=n+1}^{m} \frac{s_\nu^*}{\nu(\nu+1)}\right| \leqslant$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{m-1}\left(\frac{1}{\nu(\nu+1)} - \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\right)\left|\sum_{k=1}^{\nu} s_k^*\right| +$$

$$+ \frac{\left|\sum_{k=1}^{m} s_k^*\right|}{m(m+1)} + \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} s_k^*\right|}{n(n+1)} \leqslant 2\sum_{\nu=n+1}^{m-1} \frac{|\sigma_\nu^*|}{\nu(\nu+2)} + \frac{|\sigma_m^*|}{m} + \frac{|\sigma_n^*|}{n} \leqslant$$

$$\leq C.\sum_{\nu=n+1}^{m-1}\frac{1}{\nu(\nu+2)}+\frac{C}{m}+\frac{C}{n}\leq\frac{3C}{n}+\frac{C}{m} .$$

Comme $m > n$, le dernier membre tend vers zéro , si $m\rightarrow\infty$; la différence $|\sigma_m - \sigma_n|$ devient donc arbitrairement petite; c'est-à-dire que les σ_n tendent vers une limite s et on a

$$|s-\sigma_n| = \lim_{m\rightarrow\infty}|\sigma_m-\sigma_n|\leq\frac{3C}{n} . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Maintenant, nous pouvons démontrer le théorème, dû à Alexits (1941) et Zamansky (1949), suivant lequel la classe Lip 1 est caractérisée à l'aide d'approximations par polynômes trigonométriques:

10.7. Pour que $f \in \text{Lip}\,\alpha$, il faut et il suffit que $\tilde{\sigma}_n(x)$, étant la n-ième moyenne de Fejér de la série conjuguée et $\tilde{f}(x)$ la fonction conjuguée de $f(x)$, on ait

$$\max_{-\pi\leq x\leq\pi}|\tilde{f}(x)-\tilde{\sigma}_n(x)|\leq\frac{c}{n} .$$

NECESSITÉ. Si $f \in \text{Lip}_M\,\alpha$, la dérivée $f'(x)$ existe presque partout et $|f'(x)|\leq M$. La série de Fourier de

$f(x)$ formellement dérivée est donc la série de Fourier de $f'(x)$:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \text{ sen } nx) \quad .$$

Les sommes de Fejér ne dépassent pas en valeur absolue la valeur absolue de la fonction auquelle elles appartiennent (6.3), c'est-à-dire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n\pi}\right) k(b_k \cos kx - a_k \sin kx) \right| \leqslant M \quad .$$

Nous n'avons qu'à appliquer le lemme 10.6 avec $u_k = k(b_k \cos kx - a_k \sin kx)$, pour obtenir

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n(x)| \leqslant \frac{3M}{n}$$

pour tout x.

SUFFISANCE. Désignons par $\sigma_n(F,x)$ la n-ième somme de Fejér de la série de Fourier de la fonction $F(x)$. Comme $\tilde{\sigma}_n(x)$ converge uniformément vers $\tilde{f}(x)$, on a $\tilde{\sigma}_n(x) = \sigma_n(\tilde{f},x)$. En posant donc $\tilde{f}(x) = \tilde{\sigma}_n(x) + g_n(x)$, on peut écrire

$$\sigma_n(\tilde{f},x) - \tilde{f}(x) = \left\{\sigma_n(\tilde{\sigma}_n,x) - \tilde{\sigma}_n(x)\right\} + \left\{\sigma_n(g_n,x) - g_n(x)\right\} .$$

Or, d'après l'hyppothèse, on a

$$|\sigma_n(\tilde{f},x) - \tilde{f}(x)| \leqslant \frac{C}{n}$$

et $|g_n(x)| \leqslant \frac{C}{n}$ pour tout x, donc

$|\sigma_n(g_n,x)| \leqslant \sup |g_n(x)| \leqslant \frac{C}{n}$; c'est-à-dire que

$$|\sigma_n(g_n,x) - g_n(x)| \leqslant \frac{2C}{n} .$$

Il en résulte

$$|\sigma_n(\tilde{\sigma}_n,x) - \tilde{\sigma}_n(x)| \leqslant |\sigma_n(\tilde{f},x) - \tilde{f}(x)| + |\sigma_n(g_n,x) - g_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3C}{n} .$$

Posons, pour abréger, $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \operatorname{sen} nx$.

Alors

$$\tilde{\sigma}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) . B_k(x) .$$

Or, $\sigma_n(\tilde{\sigma}_n,x)$ est la moyenne arithmétique de cette somme d'où

$$\sigma_n(\tilde{\sigma}_n,x) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) B_k(x),$$

et

$$\sigma_n(x) - \sigma_n(\tilde{\sigma}_n,x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) k \, B_k(x).$$

On en obtient immédiatement l'évaluation

$$\left|\sigma'_n(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) kB_k(x)\right| \leqslant \frac{n+1}{n}\, 3C \leqslant 6C \quad .$$

Nous disons que $\sigma'_n(x)$ est la n-ième somme de Fejér d'une série de Fourier. En effet, on a pour tout n:

$$36K^2 \geqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sigma'_n(x)\right]^2 dx = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2 k^2(a_k{}^2 + b_k{}^2)$$

Il en résulte, si on passe à la limite pour $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) \leqslant 36K^2 \quad .$$

Les a_k et b_k sont donc, en vertu du théorème de Riesz-Fischer, les coefficients de Fourier d'une fonction L^2-intégrable $\sigma'_n(x)$ est donc une somme de Fejér. Or, nous démontrerons au § suivant (11.2) que les sommes de Fejér convergent presque partout vers la fonction à laquelle elles appartiennent en tant que moyennes de Fejér. Par conséquent $\sigma'_n(x) \to f'(x)$ presque partout et $|f'(x)| \leqslant 36K^2$ presque partout. La fonction $f(x)$ dont $f'(x)$ est la dérivée appartient donc à la classe Lip 1. Cette fonction est déterminée par les sommes de Fejér de sa série de Fourier et celles-ci sont les intégrales de $\sigma_n'(x)$, c'est-à-dire, les $\tilde{\sigma}_n(x)$. Les fonctions $f(x)$ et $\tilde{f}(x)$ sont donc conjuguées et notre théorème est entièrement démontré.

REMARQUES. Les théoremes que nous avons démontrés dans ce § appartiennent à une théorie étendue que S. Bernstein et son école appellent "théorie constructive des fonctions". Une bonne introduction à cette théorie se trouve dans le livre: J. P. Natanson, Konstruktive Funktionentheorie (Berlin, 1955). Le but de cette théorie est de répondre à deux questions. 1º)Quelle est la meilleure approximation des fonctions d'une classe donnée au moyen de polynômes algébrique ou trigonométriques de degré (resp. d'ordre) n?
2º) Etant donnés pour $n=1,2,\ldots$ les ordres de grandeur de l'approximation d'une fonction $f(x)$ par des polynômes de dégré (resp. d'ordre) n, quelles sont les propriétés structurales de $f(x)$ que garantit ce degré d'approximation?
La littérature sur ce sujet est très étendue ; elle se remonte à la fin du XIX siècle et débute por les oeuvres de Tchébychev.

Exercices. 1. Weierstrass a construit le premier exemple d'une fonction continue $f(x)$ dépourvue de dérivée en tout point x. C'était la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos b^n x$$

où $0 < a < 1$ et $ab > 1$. Montrez que $f \in \text{Lip}\,\alpha$ pour tout $\alpha < 1$, mais que $f \notin \text{Lip}\,1$. (Appliquez les théorèmes 10.3 et 10.7).

2. On appelle module de continuité de $f(x)$ la grandeur

$$\omega(f,\delta) = \sup_{|h|\leqslant\delta} |f(x+h) - f(x)| \quad .$$

Généralisez le premiere énoncé de 10.1 comme suit: si $\omega(f,\delta)/_{\delta^\alpha} \longrightarrow 0$ monotonément, lorsque $\delta \longrightarrow 0$, où $0 < \delta < 1$, alors

$$\max |f(x) - \sigma_n(x)| \leqslant C \cdot \omega(\tfrac{1}{n})$$

(Partagez l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ en deux parties: $\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}$. Montrez que $\int_0^{\frac{1}{n}} \leqslant C_1 \omega(\frac{1}{n})$ et que $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \leqslant C_2 n^{-1+\alpha} \omega(\frac{1}{n}) \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{2-\alpha}} \leqslant C_3 \omega(\frac{1}{n})$)

3. Soit $T_n(x)$ un polynôme trigonométrique d'ordre n et $\rho_n = \max|f(x) - T_n(x)|$. Montrez que l'approximation de $f(x)$ par les sommes partielles $s_n(x)$ da sa série de Fourier ne dépasse pas l'ordre de grandeur $C\rho_n \log n$ (Lebesgue, 1909) .

(On voit aisément que $f(x) - s_n(x) = f(x) - T_n(x) +$ $+ s_n(T_n - f,x)$ où $s_n(T_n - f,x)$ est la n-ième somme partielle de la série de Fourier de la fonction $T_n(x) - f(x)$. Par conséquent

$$|f - s_n| \leqslant \rho_n + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T_n(t) - f(t)|\,|D_n(t)|dt .$$

Le résultat de Lebesgue s'ensuit en appliquant l'évaluation $L_n \leqslant C \log n$ des constantes de Lebesgue; v. §9) .

4. Démontrez le critère de convergence de Dini-Lipschitz: si $\omega(f,\delta).\log \frac{1}{\delta} \to 0$, lorsque $\delta \to 0$, alors la série de Fourier de $f(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ (C'est un corollaire immédiat des exercices 2 et 3) .

5. Donnez un exemple d'une fonction $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ telle que

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \geqslant C. \frac{\log n}{n} .$$

L'énoncé de 10.1 ne se laisse donc pas améliorer.

(Prenez la fonction $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, $f(0) = \pi$ et $f(x)$ linéaire en $(-\pi, 0)$ et $(0, \pi)$. On a $f(x) \sim$

$$\sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

. Montrez qu'au point $x = 0$ on a $|f(0) - \sigma_n(0)| \geqslant \frac{C \log n}{n}$ où $C > 0$).

6. Montrez que la "faculté d'approximation" des moyennes de Fejér n'est pas très forte, puisque si

$n|f(x) - \sigma_n(x)| \to 0$ uniformément, alors $f(x) \equiv$ const. (Hille, 1942).

(On voit que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\frac{n+1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \sigma_n(x)] \cos kx dx = k a_k .$$

Si $n \to \infty$, le premier membre, en vertu de l'hypothèse, tend vers zéro, d'où $a_k = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$; une relation analogue est valable pour les b_k).

11. SOMMABILITÉ DES SÉRIES DE FOURIER DES FONCTIONS DISCONTINUES.

Nous nous sommes occupés jusqu'à présent des problèmes concernant les séries de Fourier des fonctions continues ou ayant au plus des sauts.

Or, une fonction L-intégrable peut ne pas avoir des points de continuité ni des points où $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent. Il serait important de savoir quels sont les points où est assurée, sinon la convergence, au moins la sommabilité de la série de Fourier d'une fonction L-intégrable. C'est Lebesgue (1905) qui a résolu ce problème.

Nous dirons que x est un point de Lebesgue de la fonction L-intégrable $f(x)$, si

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0 \quad .$$

Il est évident que les points de continuité sont des points de Lebesgue. Plus encore, on démontre que:

11.1. Si $f(x)$ est L-intégrable en (a,b), les points de (a,b) sont des points de Lebesgue à un ensemble de mesure nulle près.

Désignons par $r_1, r_2, \dots$ les points rationnels de (a,b) ordonnés en une suite. Soit E_n l'ensemble des $x \in (a, b)$ pour lesquels le relation

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - r_n| dt = f(x) - r_n$$

est en défaut. L'ensemble E_n est de mesure nulle, puisqu'en posant

$$F(x) = \int_a^x |f(t) - r_n| dt \quad ,$$

on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - r_n| dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_0^{x+h} |f(t) - r_n| dt =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$$

et on sait qu'à un ensemble de mesure nulle près $F'(x) = |f(x) - r_n|$. L'ensemble $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ est donc aussi un ensemble de mesure nulle. Nous allons montrer que tous les points $x \in (a, b) - E$ sont des points de Lebesgue de $f(x)$. En effet, soit $x \in (a, b) - E$ et soit $\epsilon > 0$.

Choisissons r_n de sorte que $|r_n - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Alors, en tenant compte de ce que $x \notin E$, on obtient pour $|h|$ assez petit:

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - r_n|\,dt + \frac{1}{h}\int_0^h |r_n - f(x)|\,dt <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad ;$$

$x \in (a, b) - E$ est donc un point de Lebesgue.

On en déduit aisément le théorème suivant (Lebesgue, 1905):

11.2. Si $f \in L$, les sommes de Fejér $\sigma_n(x)$ tendent en tout point de Lebesgue, donc presque partout, vers $f(x)$.

Posons pour abréger $\varphi_x(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)$, et partageons l'intégrale figurant dans la relation

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} |\varphi_x(t)|\, K_n(t)\,dt$$

en trois parties:

$$\int_0^{1/n+1} + \int_{1/n+1}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi/2}$$

où la valeur de δ sera fixé immédiatement. Remarquons que x étant un point de Lebesgue, on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\frac{1}{h}\int_0^h |\varphi_x(t)|dt \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+2t) - f(x)|dt +$$

$$+ \frac{1}{h}\int_0^h |f(x-2t) - f(x)|dt < \epsilon \text{ ,}$$

pourvu que $|h|$ soit assez petite. Nous choisissons $\delta > 0$ de sorte que cette évaluation soit valable pour $|h| \leq \delta$

On voit immédiatement, x étant un point de Lebesgue et $\frac{1}{n+1} < \delta$, que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n+1}} |\varphi_x(t)|K_n(t)dt \leqslant \frac{n+1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n+1}} |\varphi_x(t)|\,dt < \frac{\epsilon}{\pi} \text{ .}$$

En ce qui concerne la deuxième intégrale on obtient, en intégrant par parties et en désignant par $\Phi_x(t)$ l'intégrale de $\varphi_x(t)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta}|\varphi_x(t)|K_n(t)dt \leq \frac{1}{2(n+1)}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta}\frac{|\varphi_x(t)|}{t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\Phi_x(t)}{t^2}\right]_{\frac{1}{n+1}}^{\delta} + \frac{1}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta}\frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt <$$

$$< \frac{\epsilon}{2(n+1)}\left[\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{n+1}}^{\delta} + \frac{\epsilon}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta}\frac{dt}{t^2} < \check{C}\epsilon$$

où $\check{C}$ est une constante indépendante de n. Quant à la troisième, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}|\varphi_x(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\pi(n+1)\sin^2\delta}\int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}|\varphi_x(t)|dt \leqslant \frac{c}{n+1} < \epsilon \quad ,$$

pour n assez grand. En résumé, nous avons

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \epsilon\left(\frac{1}{\pi} + C + 1\right) \quad ,$$

et notre théorème est démontré.

REMARQUE. Pour la littérature et de différentes généralisations consultez TS.I. chapitre III. Le problème de la convergence des sommes $\tilde{\sigma}_n(x)$ y est aussi traité.

On voit avec beaucoup de difficulté que $\widetilde{\sigma}_n(x) \longrightarrow \widetilde{f}(x)$ presque partout, même si la série conjuguée n'est pas une série de Fourier. Lorsqu'elle l'est, cet énoncé découle de 11.2)

<u>Exercices. 1.</u> Montrez que, pour $f \in L$, les sommes partielles $s_n(x)$ ont cette propriété:

$$\frac{s_n(x)}{\log n} \longrightarrow 0$$

presque partout.

(Il suffit de montrer que $\dfrac{s_n(x) - f(x)}{\log n} \longrightarrow 0$ en tout point de Lebesgue. La démonstration s'ensuit, en l'appliquant à l'intégrale

$$\frac{s_n(x) - f(x)}{\log n} \leqslant \frac{1}{\pi \log n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_x(t)|\, |D_n(t)|\, dt \quad ,$$

le même procédé que celui de 11.2 , avec la seule différence qu'on doit tenir compte de la grandeur $L_n \leqslant C.\log n$ des constantes de Lebesgue.)

2. Soit $\sum u_n$ une série quelconque dont s_n(resp. σ_n) sont les sommes partielles (resp. les moyennes arithméti-

ques). Montrez que si $\sigma_n \to s$ et $s_n/\lambda_n \to 0$, où les $1/\lambda_n$ forment une suite convexe tendant vers zéro, la série $\sum \frac{u_n}{\lambda_n}$ est convergente.

Si S_n désigne les sommes partielles de $\sum \frac{u_n}{\lambda_n}$, on obtient par deux transformations abéliennes successives.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\sigma_k \Delta^2\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) + n\sigma_{n-1}\Delta\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) + \frac{s_n}{\lambda_n} .$$

Le résultat découle des hypothèses et de la convexité de $1/\lambda_n$) .

3. Démontrez le théorème suivant de Hardy (1913): si a_n, b_n sont les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\log n}$$

converge presque partout.

(On applique les résultats des exercices 1 et 2 en tenant compte de ce que les nombres $1/\log n$ forment une suite convexe tendant vers zéro).

4. Démontrez qu'une série de Fourier est presque partout convergente, si $\sum (a_n^2 + b_n^2)\log^2 n < \infty$.

(D'après le théorème de Riesz-Fischer, les $a_n \log n$ et $b_n \log n$ sont des coefficients de Fourier. On n'a qu'à appliquer le théorème de l'exercice précédent. On verra plus tard que dans ce cas le facteur $\log^2 n$ peut être remplacé par $\log n$; mais la démonstration en est beaucoup plus difficile.)

5. Nous disons que $\sum u_n$ est une <u>série lacunaire</u> si, $u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k}, \dots$ étant les termes non-nuls, on a $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1$. (Les termes 0 n'ont aucune importance quant à la convergence, mais ils jouent un rôle important si on forme les moyennes arithmétiques σ_n). Montrez que si la série $\sum u_n$ est lacunaire et $\sigma_n \to s$, alors $\sum u_n$ est convergente.

(On peut supposer $s = 0$, en prenant au lieu de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, la série ayant les mêmes termes sauf le premier qui est remplacé par $u_0 - s$. Alors $|\sigma_n| < \epsilon$ pour n assez grand. Comme $s_0 + s_1 + \dots + s_n = (n+1)\sigma_n$ et, étant donné la lacunarité, $s_{n_k} = s_{n_k+1} = \dots\dots = s_{n_{k+1}-1}$, on voit que

$$(n_{k+1} - n_k)|s_{n_k}| = |s_{n_k} + s_{n_k+1} + \dots + s_{n_{k+1}-1}| =$$

$$= |n_{k+1}\sigma_{n_{k+1}-1} - n_k \sigma_{n_k} - 1| < n_{k+1}\epsilon + n_k\epsilon .$$

Or, l'hypothèse $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1$ entraîne

$$n_{k+1} + n_k < \frac{2q}{q-1}(n_{k+1} - n_k)$$

d'où

$$|s_{n_k}| < \frac{2q}{q-1}\epsilon .$$

Par conséquent $\sigma_n \longrightarrow 0$ implique $s_{n_k} \longrightarrow 0$; comme $s_n = s_{n_k}$, pour $n_k < n < n_{k+1}$, on obtient enfin $s_n \longrightarrow 0$.

6. Démontrez que si $\sum(a_n^2 + b_n^2) < \infty$, la série trigonométrique lacunaire $\sum(a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$ converge presque partout.

(Appliquez les théorèmes de Riesz-Fisher et 11.2, puis le résultat de l'exercice précédent.)

12. REMARQUES GÉNÉRALES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER. INTÉGRALES SINGULIÈRES.

Les propriétés de convergence des séries de Fourier que nous avons envisagées jusqu'à présent sont fondées sur la possibilité de présenter les sommes partielles $s_n(x)$ (resp. les moyennes de Fejér $\sigma_n(x)$) sous forme d'une intégrale

$$I_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)N_n(t,x)dt \quad .$$

Les propriétés de convergence ou divergence dépendaient du comportement du noyau $N_n(t,x)$. Il est évident qu'une intégrale de la forme $I_n(x)$ ne peut pas tendre vers la valeur $f(x)$ même pour les fonctions les plus simples, si la valeur de l'intégrale dépend aussi des valeurs $f(t)$ prises en des points éloignés du point fixe x .

En effet , prenons les deux fonctions $f(t) \equiv 1$, $g(t) = 1$ en $(x - \delta \, , x + \delta)$, où $\delta > 0$ est un nombre arbitrairement petit, et $g(t) = 0$ ailleurs. Au point x , on désire d'avoir $I_n(f \, , x) - I_n(g \, , x) \to 0$ parce que $I_n(f,x) \to f(x) = 1$ et $I_n(g,x) \to g(x) = 1$. Mais

$$I_n(f,x) - I_n(g,x) = \left(\int_{-\pi}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{\pi}\right) N_n(t)dt$$

La propriété exigée ne peut donc subsister que si

$$(11)\quad \int_{x-\delta}^{x+\delta} N_n(t,x)dt \to 1 \quad \text{et} \quad \Big(\int_{-\pi}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{\pi}\Big) N_n(t,x)dt \to 0 \;.$$

Il est aussi convenable d'exiger que les noyaux $N_n(t,x)$ soient bornés pour des points t éloignés de x , c'est-à-dire qu'on ait

$$(12)\qquad |N_n(t,x)| \leq N(\delta) \quad \text{si} \quad |t - x| \geqslant \delta$$

où $N(\delta)$ est un nombre positif ne dépendant que de $\delta > 0$. Les intégrales douées de ces propriétés s'appellent <u>intégrales singulières</u>. La théorie des intégrales singulières, initiée en 1909 par <u>Lebesgue</u>, est assez compliquée. Nous ne désirons pas la développer, mais nous nous contentons de relever sans démonstration quelques théorèmes bien importants pour la théorie de la convergence des séries de Fourier et d'autres développements ortogonaux. Une présentation détaillée se trouve dans CP. p. 251-285.

On peut d'abord démontrer que les <u>fonctions de Lebesgue</u>

$$L_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |N_n(t,x)|\, dt$$

qui correspondent aux constantes de Lebesgue L_n dans le cas des séries de Fourier, jouent un rôle décisif dans la représentation des fonctions continues. On peut démontrer notamment le théorème suivant (Lebesgue, 1909):

12.1. Pour que les intégrales singulieères $I_n(x)$ tendent pour toute fonction $f(t)$ continue au voisinage du point $t = x$, vers la valeur $f(x)$, il faut et il suffit que les fonctions de Lebesgue $L_n(x)$ soient bornées en leur ensemble au point x, c'est-à-dire qu'il existe une constante K telle que

$$L_n(x) \leqslant K \quad , \quad \text{pour} \quad n = 1,2, \ldots$$

Soit $f(t)$ continue dans l'intervalle $(a,b) \subset \subset (-\pi, \pi)$. Pour que $I_n(x)$ tende vers $f(x)$ uniformément dans tout intervalle $(a+\delta, b-\delta)$ avec $\delta > 0$, il faut et il suffit que les conditions (11) et (12) et la condition $L_n(x) \leqslant \leqslant K$ soient uniformément satisfaites dans l'intervalle (a,b).

La démonstration de la nécessité est assez longue, en voici l'esquisse. Si $\lim\sup L_n(x) = \infty$, on pose $f_n(t) = = \operatorname{sign} N_n(t,x)$, c'est-à-dire $f_n(t) = N_n(t,x)$ pour $N_n(t,x) \geqslant 0$ et $f_n(t) = -N_n(t,x)$ pour $N_n(t) < 0$.

Alors, on obtient $I_n(f_n,x) = L_n(x)$, donc lim sup. $I_n(f_n,x) = \infty$. On peut démontrer qu'il existe une fonction bornée $f^*(t)$ telle que $I_n(f^*,x)$ ne converge pas vers $f^*(x)$, d'où on déduit aisément qu'il existe une fonction continue $f(t)$ pour **laquelle** $I_n(f,x)$ diverge.

La démonstration de la suffisance est plus simple. On voit d'abord que la singularité des intégrales $I_n(f,x)$ entraîne

$$\left(\int_{-\pi}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{\pi}\right) f(t) N_n(t,x)\,dt \longrightarrow 0 \quad ,$$

quel que soit $\delta > 0$. On prendra donc δ de sorte que $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ pour $x - \delta \leqslant t \leqslant x + \delta$.

Il en **résulte pour** la partie principale de $I_n(f,x)$:

$$|I_n(f,x) - f(x)| < \epsilon \cdot \int_{x-\delta}^{x+\delta} |N_n(t,x)|\,dt + \epsilon \leqslant \epsilon\,(K+1) \quad ,$$

c'est-à-dire: $I_n(f,x) \longrightarrow f(x)$.

Comme le choix $N_n(t,x) = D_n(t,x)$ ne satisfait pas, mais $N_n(t,x) = K_n(t,x)$ satisfait aux conditions nécessaires et suffisantes du **théorème** 12.1, il est compréhensible qu'il existe des fonctions continues dont les séries de Fourier ne convergent **pas, mais leurs moyennes de Fejér convergent même uniformément.**

La condition $L_n(x) \leqslant K$ est encore plus importante qu'on ne croirait. Nous démontrerons notamment au § suivants que si $I_n(f,x)$ est la n-ième somme partielle du développement

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

d'une fonction $f \in L^2$ suivant un système orthonormal $\{\varphi_n(x)\}$, la condition $L_n(x) \leqslant K$ presque partout implique la convergence presque partout de $I_n(f,x)$. Or, on ne sait rien sur l'ensemble de mesure nulle où les $I_n(f,x)$ ne convergent pas. On ne peut pas affirmer, p. ex., que $I_n(f,x)$ converge en tout point de Lebesgue, si $L_n(x) \leqslant K$. Quelle est donc la condition nécessaire et suffisante pour que les intégrales singulières $I_n(f,x)$ convergent en tout point de Lebesgue vers $f(x)$? .

La réponse à cette question a été donnée par <u>Faddeev</u> (1936). Nous disons que $\Phi_n(t,x)$ est une majorante <u>gibbeuse</u> de $N_n(t,x)$ si $\Phi_n(t,x)$ croît dans l'intervalle $(-\pi,x)$, décroît dans l'intervalle (x,π) et $|N_n(t,x)| \leqslant \Phi_n(t,x)$.

Le théorème de <u>Faddeev</u> est le suivant:

12.2. <u>Pour que l'on ait, en tout point de Lebesgue,</u> $I_n(f,x) \to f(x)$, <u>il faut et il suffit que les</u> $I_n(f,x)$ <u>soient des intégrales singulières et</u>

<u>les noyaux</u> $N_n(t,x)$ <u>aient des "majorantes gibbeuses"</u> $\Phi_n(t,x)$ <u>telles que</u>

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t,x)dt \leq K$$

<u>pour tout</u> n .

On voit que cette condition est plus forte que $L_n(x) \leq K$, parce qu'on demande que même les intégrales des "majorantes gibbeuses" des $N_n(t,x)$ convenablement choisies soient bornées en leur ensemble. Comme nous savons déjà que les sommes de Fejér convergent en tout point de Lebesgue, les noyaux de Fejér doivent satisfaire à la condition de Faddeev. Peut-on déterminer explicitement les "majorantes gibbeuses" correspondantes aux noyaux de Fejér? -Facilement, puisque nous avons vu que

$$0 \leq K_n(t,x) \leq (n+1) \quad \text{pour} \quad x - \frac{1}{n} \leq t \leq x + \frac{1}{n} ,$$

$$0 \leq K_n(t,x) \leq \frac{C_1}{(n+1)(t-x)^2} \quad \text{pour } t \notin \left(x - \frac{1}{n} , x + \frac{1}{n}\right) ,$$

où C_1 , C_2 ... désignent des constantes indépendantes de n . Nous affirmons que la fonction

$$\Phi_n(t,x) = \frac{C_2 n}{1 + n^2(t - x)^2}$$

est la majorante cherchée de $K_n(t,x)$. Elle est, en effet, croisante pour $t < x$ et décroissante pour $t > x$; $\Phi_n(t,x)$ est donc "gibbeuse" .

Nous allons voir qu'elle est une majorante de $K_n(t,x)$. En effet, si $|t - x| \leqslant n^{-1}$, on a

$$\Phi_n(t,x) \geqslant \frac{C_2 n}{2} \geqslant n + 1 \geqslant K_n(t,x) \quad ,$$

pourvu que C_2 soit assez grand.

Si $\pi \geqslant |t - x| > n^{-1}$, on a

$$\Phi_n(t,x) \geqslant \frac{C_2}{n(t - x)^2} \geqslant \frac{C_1}{(n + 1)(t - x)^2} \geqslant K_n(t,x) \quad ,$$

pourvu que C_2 soit assez grand. $\Phi_n(t,x)$ est donc une "majorante gibbeuse" de $K_n(t,x)$. Quant à son intégrale , on voit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t,x)dt \leqslant C_2\left(\int_{-\pi}^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{\pi}\right) \frac{dt}{n(t - x)^2} + \frac{C}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} dt \leqslant C_3 \quad .$$

$\Phi_n(t,x)$ satisfait donc à toutes les conditions de 10.2.

La démonstration du théorème de Faddeev est longue et labourieuse. Nous ne voulons même pas l'esquisser, mais renvoyons de nouveau à CP. p. 271-279.

13. CONVERGENCE DES DÉVELOPPEMENTS ORTHOGONAUX GÉNÉRAUX.

Nous chercherons maintenant des conditions de convergence presque partout pour les développements orthogonaux généraux

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad , \tag{13}$$

où $\{\varphi_n(x)\}$ désigne un système orthonormal quelconque défini dans un intervalle fini (a,b) et les

$$c_n = \int_a^b f(x) . \varphi_n(x) dx$$

sont les coefficients du développement de la fonction $f(x)$ (On les appelle aussi coefficients de Fourier en sens général).

Remarquons d'abord que le problème de convergence, dans le cas général, n'est raisonnable qu'en supposant $f \in L^2$, puisque les intégrales définissant les coefficients c_n n'existent pas nécessairement si $f^2(x)$ n'est pas intégrable. Une autre remarque antérieure est qu'il n'est plus raisonnable de parler de la convergence en un point x_0 fixé, parce que l'orthonormalité du système $\{\varphi_n(x)\}$ reste conservée, même si on change les valeurs des $\varphi_n(x)$ seulement au point x_0 de sorte que la convergence en x_0

soit détruite par ce changement (on pose p. ex. $\varphi_{2n}(x_o) = +\infty$ et $\varphi_{2n+1}(x_o) = -\infty$) . Le seul problème raisonnable est: quelles conditions sont suffisantes pour la convergence presque partout du développement (13) ?. Nous entendons naturellement par "presque partout": partout en (a,b), à un ensemble de mesure nulle près.

Démontrons tout d'abord le théorème suivant:

13.1. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite non-décroissante de nombres positifs tels que les fonctions de Lebesgue du système $\{\varphi_n(x)\}$ satisfassent à la condition,

$$L_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x) \right| dt \leq \lambda_n \quad .$$

Alors, en désignant par $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$ les sommes partielles du développement (13) de la fonction $f \in L^2$, on a

$$|s_n(x)| \leq C(x) \,.\, \sqrt{\lambda_n} \quad ,$$

où $C(x)$ est une fonction presque partout finie.

Introduisons au lieu de n, l'indice variable $n(x)$ défini comme suit: $n(x)$ est le plus petit índice ν tel que

$$\frac{s_\nu(x)}{\sqrt{\lambda_\nu}} \leqslant \max\left\{\frac{s_0(x)}{\sqrt{\lambda_0}} \;,\; \frac{s_1(x)}{\sqrt{\lambda_1}} \;,\; \dots \;,\; \frac{s_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\} .$$

L'indice $n(x)$ est évidemment une fonction mesurable $\leqslant n$ qui ne prend que les valeurs entières $0, 1, \dots, n$

Il suit de la définition que la suite $\left\{\frac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}\right\}$ croît avec n et que $\frac{s_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \leqslant \frac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}$. On obtient par application de l'inégalité de Schwarz:

$$\left|\int_a^b \frac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}dx\right| = \left|\int_a^b\int_a^b f(t).\frac{\sum_{k=0}^{n(x)} \varphi_k(t).\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}dt\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_a^b f^2(t)dt\int_a^b\left[\int_a^b \frac{\sum_{k=0}^{n(x)} \varphi_k(t)\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}dx\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Posons pour abréger $D_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t).\,\varphi_k(x)$, puisque ces fonctions jouent le rôle du noyau de Dirichlet.

Comme $f \in L^2$, on peut donc écrire

$$\left|\int_a^b \frac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}dx\right| \leqslant C_1\left\{\int_a^b\left[\int_a^b \frac{D_{n(x)}(t,x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}dx\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Le carré d'une intégrale peut s'écrire sous forme d'une intégrale double (comme, p. ex., dans le cas classique traité par <u>Laplace</u>:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dx\ dy\ ).$$

On obtient alors

$$\left[\int_a^b \frac{D_{n(x)}(t,x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}dx\right]^2 = \int_a^b\int_a^b \frac{D_{n(x)}(t,x)D_{n(y)}(t,y)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}\lambda_{n(y)}}}dx\ dy \quad ,$$

c'est-à-dire que

$$\left|\int_a^b \frac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}dx\right| \leqslant C_1\left\{\int_a^b\int_a^b\int_a^b \frac{D_{n(x)}(t,x)D_{n(y)}(t,y)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}\ \lambda_{n(y)}}}dt\ dx\ dy\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

En tenant compte de l'orthonormalité, on obtient

$$\int_a^b D_{n(x)}(t,x)D_{n(y)}(t,y)dt = D_{n(x,y)}(x,y) \quad ,$$

où $n(x,y)$ désigne le plus petit des entiers $n(x)$ et $n(y)$.

Il s'ensuit que

$$\left|\int_a^b \frac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}dx\right| \leqslant C_1 \left\{\int_a^b \int_a^b \frac{D_{n(x,y)}(x,y)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}\lambda_{n(y)}}}dx\ dy\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Soit A l'ensemble où $n(x,y) = n(x)$ et B son complémentaire. Alors $\{\lambda_n\}$ étant croissante, on a $\sqrt{\lambda_{n(x)}\lambda_{n(y)}} \leqslant$ $\leqslant \lambda_{n(y)}$ sur A et $\leqslant \lambda_{n(x)}$ sur B. Il s'ensuit donc que

$$\int_a^b\int_a^b \frac{D_{n(x,y)}(x,y)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}\lambda_{n(y)}}}dxdy \leqslant \int_a^b\int_a^b \frac{|D_{n(x)}(x,y)|}{\lambda_{n(x)}}dxdy + \int_a^b\int_a^b \frac{|D_{n(y)}(x,y)|}{\lambda_{n(y)}}dxdy .$$

Mais, d'après l'hypothèse, on a

$$\int_a^b |D_{n(x)}(x,y)|\,dy \leqslant \lambda_{n(x)} \quad \text{et} \quad \int_a^b |D_{n(y)}(x,y)|\,dx \leqslant \lambda_{n(y)} ,$$

par conséquent

$$\left|\int_a^b \frac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}dx\right| \leqslant C_1 \left\{\int_a^b dx + \int_a^b dy\right\}^{\frac{1}{2}} = C_1 \cdot \sqrt{2(b-a)} .$$

La suite $\left\{\dfrac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}\right\}$ étant croissante et les intégrales de ses termes bornées en leur ensemble, le théorème connu de B. Levi assure l'intégrabilité de la fonction

$$S_1(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}$$

$S_1(x)$ est donc presque partout fini. En répétant cette démonstration appliquée à la suite $\frac{-s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}$, on obtient, étant donné que $-s_{n(x)}(x)$ est la $n(x)$-ième somme partielle de $-f(x)$, que la fonction

$$S_2(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{-s_{n(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}}$$

est aussi presque partout finie. En posant $C(x) = \max\{|S_1(x)|, |S_2(x)|\}$, nous obtenons, pour tout n , l'évaluation

$$\frac{|s_n(x)|}{\sqrt{\lambda_n}} \leqslant \frac{|s_{n(x)}(x)|}{\sqrt{\lambda_{n(x)}}} \leqslant C(x) \quad ;$$

d'où la proposition.

Après cette longue, mais très élégante démonstration dû au fond à <u>Kolmogoroff-Seliverstoff</u> (1926) et <u>Plessner</u> (1926) on peut énoncer le théorème de convergence suivant:

13.2. <u>Si</u> $L_n(x) \leqslant \lambda_n$, <u>la condition</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda_n < \infty$$

assure la convergence presque partout du développement (13) .

Pour le démontrer remarquons que, d'après un résultat classique (v. l'exercice 1. à la fin de ce §) , la condition $\sum c_n^2 \lambda_n < \infty$ entraîne l'existence d'une suite croissante $\{\mu_n\}$ de nombres positifs tendant vers infini, tels que

(14)
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda_n \mu_n < \infty .$$

Désignons par $S_n(x)$ la n-ième somme partielle de la série orthogonale $\sum c_n \sqrt{\lambda_n \mu_n} \varphi_n(x)$.

La condition (14) assure, en vertu de théorème de Riesz-Fischer, que les hypothèses du théorème 13.1. sont satisfaites par le développement $\sum c_n \sqrt{\lambda_n \mu_n} \varphi_n(x)$.

On a donc $|S_n(x)| \leq C(x)\sqrt{\lambda_n}$ pour tout n .

Alors, en désignant par $s_n(x)$ les sommes partielles de(13) , on obtient par une transformation abélienne l'évaluation

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} c_k \sqrt{\lambda_k \mu_k} \varphi_k(x) . \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \mu_k}} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m-1} |S_k(x)| \, \Delta\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k \mu_k}}\right) + \frac{|S_m(x)|}{\sqrt{\lambda_m \mu_m}} + \frac{|S_n(x)|}{\sqrt{\lambda_{n+1} \mu_{n+1}}} \leq$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m-1} |s_k(x)| \, \Delta\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k \mu_k}}\Big) + \frac{C(x)}{\sqrt{\mu_m}} + \frac{C(x)}{\sqrt{\mu_{n+1}}} \quad .$$

Les deux derniers termes tendent, pour tout $m > n$, vers zéro, lorsque $n \longrightarrow \infty$. Quant au premier, on a, en appliquant l'inégalité de Schwarz

$$\sum_{k=o}^{\infty} \int_a^b |s_k(x)| \, \Delta\Big(\frac{1}{\lambda_k \mu_k}\Big) dx \leqslant \sum_{k=o}^{\infty} \Delta\Big(\frac{1}{\lambda_k \mu_k}\Big) \Big\{ \int_a^b dx \int_a^b s_k^2(x) dx \Big\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{b-a} \, \Big\{ \sum_{\nu=o}^{\infty} c_\nu^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=o}^{\infty} \Delta\Big(\frac{1}{\lambda_k \mu_k}\Big) = \sqrt{b-a} \, \frac{1}{\sqrt{\lambda_o \mu_o}} \Big\{ \sum_{\nu=o}^{\infty} c_\nu^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Il s'ensuit donc du théorème de <u>B. Levi</u> que la série

$$\sum |s_k(x)| \, \Delta\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k \mu_k}}\Big)$$

converge presque partout. On a donc pour tout $m > n$, n assez grand, et presque tout x:

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \epsilon + \frac{C(x)}{\sqrt{\mu_m}} + \frac{C(x)}{\sqrt{\mu_n}} < 2\epsilon .$$

La suite des $s_n(x)$ converge donc presque partout, C.Q.F.D.

Ce résultat rend un critère bien fort pour la convergence presque partout des séries de Fourier. En effet, si on choisit $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ; \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} ; \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$ comme système orthonormal $\{\varphi_n(x)\}$, les fonctions de Lebesgue $L_n(x)$ se réduisent au constantes de Lebesgue L_n, dont nous savons déjà que $L_n \leq C.\log n$. Le théorème 10.2 rend donc, dans ce cas particulier, le résultat suivant:

13.3. <u>La série de Fourier</u> $\frac{a_0}{2} + (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ <u>converge presque partout, si</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).\log n < \infty .$$

<u>Remarques.</u> Pour la littérature et les applications du théorème 10.2 aux développements en polynômes orthogonaux v. CP. p. 172-185. Nous remarquons que ce théorème est, en un certain sens, le meilleur posible, comme l'a démontré <u>Tandori</u> (1959). En effet, soit $\{\lambda_n^*\}$ une suite croissante telle que $\lambda_n^* \to \infty$, mais $\frac{\lambda_n^*}{\lambda_n} \to 0$.

<u>Tandori</u> a montré que <u>l'on peut construire un système orthonormal</u> $\{\varphi_n(x)\}$ <u>et une série orthogonale</u> $\sum c_n \varphi_n(x)$ <u>partout divergente telle que</u>

$$L_n(x) \leq \lambda_n \quad \underline{\text{et}} \quad \sum c_n^2 \lambda_n^* < \infty$$

(mais naturellement $\sum c_n^2\lambda_n = \infty$) . La démonstration de ce théorème est longue et difficile (v. CP. p. 227-237 .

Il n'est pas du tout connu si le théorème 13.3 concernant la convergence presque partout peut être amélioré ou non. Remarquons enfin que des théorèmes semblables peuvent être démontrés pour la convergence presque partout des moyennes arithmétiques $\sigma_n(x)$.

<u>Exercices. 1.</u> Démontrez que, si $u_n \geqslant 0$ et $\sum u_n < \infty$, il existe une suite croissante $\{\lambda_n\}$ de nombres positifs tels que $\lambda_n \longrightarrow \infty$, mais $\sum u_n\lambda_n < \infty$.

Soit $s_{n,\ell} = \sum\limits_{k=\nu_{n+1}}^{\ell} u_k$ où les ν_n sont choisis de sorte que l'on ait $s_{n,\ell} < \frac{1}{n^3}$ pour $\nu_n < \ell \leqslant \nu_{n+1}$.

On obtient par une transformation abélienne

$$\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} u_k\lambda_k \leqslant \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}-1} |\Delta\lambda_k|\, s_{n,k} + \lambda_{\nu_{n+1}} s_{n,n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^3}(\lambda_{\nu_{n+1}} - \lambda_{\nu_n+1}) + \frac{\lambda_{\nu_{n+1}}}{n^3} \; .$$

Choisissez la suite $\{\lambda_n\}$ de sorte que l'on ait $\lambda_{\nu_{n+1}} \leqslant$ $\leqslant n$, ce qui est possible si $\{\lambda_n\}$ croît assez lentement.

Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\lambda_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty \quad .$$

2. Démontrez que la série trigonométrique

$$\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est presque partout convergente, si et seulement si

$$\sum \left[(\Delta a_n)^2 + (\Delta b_n)^2 \right] \log n < \infty \qquad (\underline{\text{Salem}},\ 1940)$$

(Envisageons d'abord $\sum a_n \cos nx$. On obtient par une transformation abélienne

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k D_k(x) + a_n D_n(x) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k \sin kx + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k \cos kx + a_n D_n(x) \quad .$$

Le dernier terme tend vers zéro pour $x \not\equiv 0$ et les deux sommes convergent presque partout, si

$\sum (\Delta a_n)^2 \log n < \infty$, en vertu de 13.3. Montrez qu'il en est de même de $\sum (b_n \sin nx)$.

3. Démontrez que si le système orthonormal $\{\varphi_n(x)\}$

est borné: $|\varphi_n(x)| \leq M$, ses fonctions de Lebesgue $L_n(x)$ satisfont à $L_n(x) \leq C.n$.

(Appliquez l'inégalité de Schwarz:

$$L_n(x) \leq \left\{ \int_a^b dt \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\,\varphi_k(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ (b - a). \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) \right\}$$

$$\leq M \sqrt{(b - a)(n + 1)} \;).$$

4. Démontrez que $L_n(x) < C.\sqrt{n.(\log n)^{1+\epsilon}}$ $(\epsilon > 0)$ presque partout pour tout système orthonormal $\{\varphi_n(x)\}$.

Quelles sont les suites croissantes $\{\lambda_n\}$ avec $\frac{\lambda_n}{(\log n)^{1+\epsilon}} \to 0$, pour lesquelles reste encore exacte cette proposition?

(Soit $n(x)$ le plus petit indice ν pour lequel

$$\frac{L_\nu(x)}{\sqrt{\nu(\log \nu)^{1+\epsilon}}} = \max_{0 \leq k \leq n} \frac{L_k(x)}{\sqrt{k.(\log k)^{1+\epsilon}}} \, .$$

Alors $\{L_{n(x)}(x)\}$ est une suite non-décroissante. On en obtient, en tenant compte de la croissance de la suite $n(x)(\log n(x))^{1+\epsilon}$:

$$\int_a^b \frac{L_{n(x)}(x)}{\sqrt{n(x)(\log n(x))^{1+\epsilon}}}dx \leq \sqrt{b-a}\int_a^b \left[\frac{\sum_{k=0}^{n(x)} \varphi_k^2(x)}{n(x)(\log n(x))^{1+\epsilon}}\right]^{\frac{1}{2}} dx \leq$$

$$\leq C\int_a^b \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{k(\log k)^{1+\epsilon}}dx = C.\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k.(\log k)^{1+\epsilon}}$$

Comme ailleurs, il s'ensuit que $\left\{\frac{L_n}{\sqrt{n(\log n)^{1+\epsilon}}}\right\}$ reste fini presque partout.) .

14. LE THÉORÈME DE MENCHOFF-RADEMACHER.

La condition du théorème 13.2 n'est effecace que si les fonctions de Lebesgue ne convergent pas très vite. Or, malheureusement, on peut construire des exemples de systèmes orthonormaux pour lesquels $L_n(x) > \sqrt{n} \log n$. (v. CP. p. 213-237) . Le théorème que nous allons voir, demontré par <u>Rademacher</u> (1922) et <u>Menchoff</u> (1923) , est indépendant de la croissance des fonctions de Lebesgue. Il est d'une importance fondamentale dans la théorie des séries orthogonales générales. Démontrons, d'abord, le lemme suivant:

14.1. <u>Soient</u> $a_0, a_1, \dots a_n$ <u>des nombres réels et</u> $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ <u>un système orthonormal fini. Il existe une fonction</u> $\delta_n(x) \geqslant 0$ <u>telle que</u>

$$(14) \qquad \left| \sum_{k=0}^{m} a_k \psi_k(x) \right| \leq \delta_n(x) ,$$

<u>pour tout</u> $m \leqslant n$ <u>et</u>

$$(15) \qquad \int_a^b \delta_n^2(x)dx \leqslant C.(\log^2 n) \sum_{k=0}^{n} a_k^2 ,$$

<u>où C est une constante absolue.</u>

Soit $\sum_{k=0}^{p} 2^{p-k}\gamma_k = m$ la représentation dyadique de l'entier positif m, c'est-à-dire que $\gamma_k = 1$ ou 0 suivant que la puissance 2^{p-k} figure ou non dans la représentation dyadique de n. Posons $\nu_q = 2^p\gamma_0 + 2^{p-1}\gamma_1 + \dots + 2^{p-q}\gamma_q$ et

$$S_q(x) = \sum_{k=\nu_q+1}^{\nu_{q+1}} a_k\psi_k(x) \quad ,$$

alors

$$(16) \quad \Big(\sum_{k=0}^{m} a_k\psi_k(x)\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{q=0}^{p} S_q(x)\Big)^2 \leqslant (p+1)\sum_{q=0}^{p} S_q^2(x) \quad .$$

Posons

$$T_q^2(x) = \sum_{r=0}^{p}\Big(\sum_{k=2^{p-r+q-1}+1}^{2^{p-r+q+1}} a_k\,\psi_k(x)\Big)^2 \; .$$

On a évidemment $S_q^2(x) \leqslant T_q^2(x)$. Si on pose donc

$$\delta_n^2(x) = (p+1)\sum_{q=0}^{p} T_q^2(x) \quad ,$$

on voit que, d'après (16) , l'inégalité (14) aura lieu. De plus, en tenant compte de ce que

$$\int_a^b T_q^{\,2}(x)dx \leqslant \sum_{r=0}^{p}\int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\psi_k(x)\Big)^2 dx = (p+1)\sum_{k=0}^{n} a_k^{\,2} ,$$

on obtient, d'après (16)

$$\int_a^b \delta_n^{\,2}(x)dx \leqslant (p+1)^2\sum_{k=0}^{n} a_k^{\,2} .$$

Mais p est la plus grande puissance figurant dans la représentation dyadique de m et $m \leqslant n$, donc $2^p \leqslant n$, par conséquent $(p+1)^2 \leqslant (\log n.\ \log 2 + 1)^2 \leqslant C \log^2 n$. Ainsi, l'évaluation (15) est démontré.

Après ce lemme fondamental, la démonstration du théorème de <u>Menchoff-Rademacher</u> devient simple.

14.2. <u>Si $\{\varphi_n(x)\}$ est un système orthonormal quelconque, la série orthogonale</u>

(17)
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

<u>est presque partout convergente, pourvu que</u>

(18)
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\,2}\log^2 n < \infty .$$

En effet, désignons par $s_n(x)$ la n-ième somme partielle de la série (17). On voit que (18) entraîne la convergence presque partout de $\{s_{2^m}(x)\}$ puisque

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_a^b \nu^2\left[\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^2\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^{\,2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\log^2 2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k^{\,2}\log^2 k < \infty .$$

La série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^2\left[\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k\varphi_k(x)\right]^2$$

est donc presque partout convergente (théorème de B. Levi), par conséquent

$$\left[s_{2^{m+p}}(x) - s_{2^m}(x)\right]^2 \leqslant \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+p}}\nu^2\left[\sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} c_k\varphi_k(x)\right]^2 \cdot \sum_{\nu=2^m}^{2^{m+p}}\frac{1}{\nu^2} \to 0$$

presque partout. La suite $\{s_{2^m}(x)\}$ est donc pp. convergente. Nous devons encore démontrer que, si $2^m < n < 2^{m+1}$, la différence $s_n(x) - s_{2^m}(x)$ tend presque partout vers zéro, or, en appliquant à cette différence le lemme 14.1. avec $a_k = c_{2^m+k}$ et $\psi_k(x) = \varphi_{2^m+k}(x)$, on obtient une fonction $\delta_{2^m}(x) \geqslant 0$ telle que

$$\max_{2^m < n < 2^{m+1}} \left| s_n(x) - s_{2^m}(x) \right| \leqslant \delta_{2^m}(x)$$

et encore que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b \delta^2_{2^m}(x)dx \leqslant C \sum_{m=1}^{\infty} \log^2 2^m \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} c_k^2 \log^2 k < \infty \quad .$$

La série $\sum \delta^2_{2^m}(x)$ converge donc presque partout, d'où $\delta_{2^m}(x) \longrightarrow 0$ presque partout. C.Q.F.D.

<u>Remarque</u>. Malgré les évaluations très grossières utilisées dans la démonstration du lemme fondamental 14.1, le théorème 14.2. ne peut être amélioré dans le sens suivant (<u>Menchoff</u>, 1923): <u>Si</u> $w(n)$ <u>est une suite croissante de nombres positifs tels que</u> $\frac{w(n)}{\log n} \longrightarrow 0$, <u>on peut construire une série orthogonale</u> $\sum c_n \varphi_n(x)$, <u>partout divergente telle que</u> $\sum c_n^2 \, w_n^2(x) < \infty$. <u>Menchoff</u> a démontré en 1940 que ce résultat reste valable même si on suppose les $\varphi_n(x)$ des polynômes orthogonaux bornés. Récemment <u>Tandori</u> (1957) a

démontré qu'on ne peut pas l'améliorer même en supposant, p. ex., que les c_n forment une suite convexe tendant vers zéro.

Par contre, le théorème suivant est valable:

<u>Si les</u> c_n <u>forment une suite positive décroissante, la condition</u> $\sum c_n^2 \log^2 n < \infty$ <u>est nécessaire et suffisante pour que</u> $\sum c_n \varphi_n(x)$ <u>converge presque partout quel que soit le système orthonormal</u> $\{\varphi_n(x)\}$.

Les démonstrations de ces théorèmes très importants, sont longues et difficiles (v. CP. p. 87-101) .

<u>Exercices</u>.1. Démontrez que la série de Fourier

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \nu_n(x)}{(n.(\log n)^{3+\epsilon})^{\frac{1}{2}}} \quad (\epsilon > 0)$$

est presque partout convergente, quelque soit la suite croissante des indices ν_n .

(Appliquez 14.2 avec $\varphi_n(x) = \frac{\cos \nu_n x}{\sqrt{\pi}}$ et $c_n = \frac{1}{\sqrt{n(\log n)^{1+\epsilon}}}$) .

2. Démontrez que les sommes partielles $s_{\nu_n}(x)$ de

$\sum c_n \varphi_n(x)$ convergent presque partout, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log^2 n) \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2 < \infty .$$

(Soit $$\Phi_n(x) = \frac{s_{\nu_{n+1}}(x) - s_{\nu_n}(x)}{\gamma_n}$$

où $\gamma_n = \sqrt{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2}$ si cette somme est positive, et

$\gamma_k = 1$, si elle est nulle. Montrez que les $\Phi_n(x)$ forment un système orthonormal et appliquez 14.2 à la série orthogonale $\sum C_n \Phi_n(x)$, avec

$$C_n = \sqrt{\sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} c_k^2} \;) .$$

3. Démontrez le lemme suivant dû à Kronecker. Soit s_n la n-ième somme partielle d'une série quelconque $\sum u_n$. Si $\{\lambda_n\}$ est positive, croissante et $\lambda_n \to \infty$, la convergence de $\sum u_n \lambda_n^{-1}$ entraine $s_n/\lambda_n \to 0$.

(soit $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k . \lambda_k^{-1}$. En appliquant la transformation abélienne à

$$s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{u_k}{\lambda_k} \lambda_k ,$$

on voit que, $\epsilon > 0$ étant arbitraire, on a pour n assez grand

$$|s_n - s_m| \leqslant \sum_{k=m+2}^{n} |R_k|(\lambda_k - \lambda_{k-1}) + |R_{m+1}|\lambda_{m+1} + |R_{n+1}|\lambda_n <$$

$$< \epsilon(\lambda_n - \lambda_{m+1}) + \epsilon\lambda_{m+1} + \epsilon\lambda_n < 3\epsilon\lambda_n .$$

Fixons m et faisons $n \to \infty$, alors $|s_m| < \epsilon\lambda_n$, si n est assez grand. Notre assertion est donc une conséquence de $|s_n| \leqslant |s_n - s_m| + |s_m|$.

4. Démontrez le théorème suivant (Rademacher, 1923): $\{\varphi_n(x)\}$ étant un système orthonormal quelconque, on a

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)}{\sqrt{n.(\log n)^{1+\epsilon}}} , \quad (\epsilon > 0) , \quad \text{presque}$$

partout.

(Applique 14.2 et le lemme de Kronecker à la série $\sum \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{n(\log n)^{1+\epsilon}}}$) .

15. SOMMATION DES SÉRIES ORTHOGONALES GÉNÉRALES.

Qu'est ce qu'on peut dire sur la convergence des moyennes arithmétiques $\sigma_n(x)$ d'une série orthogonale générale?. Il est intéressant que leur comportement dépende de la convergence de la suite des sommes partielles $s_{2^n}(x)$.

15.1. (<u>Kolmogoroff</u>, 1924). <u>Si</u> $\sum c_n^2 < \infty$ <u>et les</u> $\sigma_n(x)$ <u>convergent presque partout, la suite</u> $s_{\nu_n}(x)$, <u>converge presque partout pour</u> $\dfrac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqslant q > 1$.

En tenant compte de ce que, pour toute série $\sum u_n$,

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k\, u_k ,$$

on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left[s_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x)\right]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu_n+1)^2} \sum_{k=1}^{\nu_n} k^2 c_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \sum_{\nu_n \geqslant k} \frac{1}{\nu_n^2}$$

Soit ν_p le plus petit $\nu_n \geqslant k$. Alors, $\nu_n \geqslant q\nu_{n-1} \geqslant$

$\geqslant \dots \geqslant q^{n-p}\nu_p$ donc,

$$\sum_{\nu_n \geqslant k} \frac{1}{\nu_n^2} \leqslant \frac{1}{\nu_p^2} \sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{q^{2(n-p)}} \leqslant \frac{1}{k^2} \cdot \frac{q^2}{q^2 - 1} \quad .$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left[s_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x) \right]^2 dx < \infty \quad ,$$

d'où $\sum \left[s_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x) \right]^2$ converge presque partout, donc $s_{\nu_n}(x) - \sigma_{\nu_n}(x) \longrightarrow 0$ presque partout.

Comme $\{\sigma_n(x)\}$ converge pp., il en résulte que $\{s_{\nu_n}(x)\}$ converge pp. C.Q.F.D.

Les sommes partielles $s_{2^n}(x)$ satisfont évidemment à la condition précédente. Il est intéressant que la convergence pp. de cette suite entraîne, inversement, la sommabilité pp. de la série orthogonale $\sum c_n \varphi_n(x)$, pourvu que $\sum c_n^2 < \infty$.

15.2 (<u>Kaczmarz, 1927</u>). <u>Si</u> $\sum c_n^2 < \infty$, <u>la condition nécessaire et suffisante pour la convergence des moyennes arithmétiques</u> $\sigma_n(x)$ <u>de la série orthogonale</u> $\sum c_n \varphi_n(x)$ <u>est que</u> $\{s_{2^n}(x)\}$ <u>converge presque partout.</u>

La nécessité découle du théorème précédent. Quant à la suffisance, nous avons vu dans la démonstration de 15.1. que $\left[s_{2^n}(x) - \sigma_{2^n}(x)\right] \to 0$ presque partout. Nous n'avons donc à démontrer que $\left[\sigma_m(x) - \sigma_{2^m}(x)\right] \to 0$, pour $2^n < m < 2^{n+1}$. Si nous nous souvenons de ce que

$$\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} = \frac{1}{\nu(\nu+1)} \sum_{k=1}^{\nu} k\, u_k$$

pour toute série $\sum u_n$, nous obtenons, pour tout m compris entre 2^n et 2^{n+1} , l'évaluation

$$\left[\sigma_m(x) - \sigma_{2^n}(x)\right]^2 \leq \left[\sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \sqrt{\nu}\left|\sigma_\nu(x) - \sigma_{\nu-1}(x)\right| \frac{1}{\sqrt{\nu}}\right]^2 \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \nu\left[\sigma_\nu(x) - \sigma_{\nu-1}(x)\right]^2 \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{\nu} \leq \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{\nu^3}\left[\sum_{k=1}^{\nu} kc_k\varphi_k\right]^2 .$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left[\sigma_m(x) - \sigma_{2^n}(x)\right]^2 dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} \sum_{k=1}^{\nu} k^2 c_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty .$$

La série $\sum\left[\sigma_m(x) - \sigma_{2^n}(x)\right]^2$ converge donc presque partout, d'où $\left[\sigma_m(x) - \sigma_{2^n}(x)\right] \to 0$ presque partout quel que soit l'indice m compris entre 2^n et 2^{n+1}, C. Q. F. D.

Il est aisé maintenant de démontrer le théorème analogue à 14.2 pour la sommation (<u>Menchoff</u>, 1927 et <u>Kaczmarz</u>, 1927).

15.3. <u>Les moyennes arithmétiques</u> $\sigma_n(x)$ <u>de la série orthogonale</u> $\sum c_n\varphi_n(x)$ <u>convergent presque partout, si</u>

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty . \tag{19}$$

En effet, cette condition entraîne

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log^2 n \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 (\log \log n)^2 < \infty ,$$

d'où l'on tire que la suite $\{s_{2^n}(x)\}$ est presque partout convergente(cf. exercice 2 du § 14.) et ce fait équivaut, d'après 15.2, à notre proposition.

Un autre critère de sommabilité est d'un caractère tout à fait différent. On peut, notamment, démontrer le théorème suivant (<u>Alèxits</u>, 1956):

15.4 <u>Soit</u> $\{q_n\}$ <u>une suite décroissante de nombres positifs tels que</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\sqrt{n}} < \infty \; . \tag{20}$$

<u>Si les coefficients</u> c_n <u>de la série orthogonale</u> $\sum c_n \varphi_n(x)$ <u>satisfont à la condition</u> $|c_n| \leqslant q_n$, <u>alors</u> $\sigma_n(x)$ <u>converge presque partout</u>.

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b \left[s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} q_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Or, $\{q_n\}$ étant décroissante, ~~on a~~ $q_k^2 \leqslant q_{2^n}^2$ pour tout $k > 2^n$, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x)|\, dx \leqslant \sqrt{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n}\, q_{2^n}.$$

Etant donné que

$$\sqrt{2^{n-2}} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{2^{n-1}} ,$$

on peut écrire:

$$\sqrt{2^n}\, q_{2^n} \leqslant 2q_{2^n} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2 \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n} \frac{q_k}{\sqrt{k}} ,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x)|\, dx \leqslant 2\sqrt{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{q_k}{\sqrt{k}} < \infty .$$

La série $\sum |s_{2^{n+1}}(x) - s_{2^n}(x)|$ est donc presque partout convergente. Comme

$$s_{2^n}(x) = s_1(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[s_{2^{k+1}}(x) - s_{2^k}(x) \right] ,$$

il s'ensuit que la suite $\{s_{2^n}(x)\}$ converge presque partout.

Notre proposition serait donc démontré, en vertu de 15.2., si on avait $\sum c_n^2 < \infty$.

Mais on voit ceci aisément. En effet, étant donné la décroissance de $\left\{\frac{q_n}{\sqrt{n}}\right\}$ et la convergence de $\sum \frac{q_n}{\sqrt{n}}$, on a, d'après un théorème élémentaire et classique d'Abel, que $\sqrt{n}\, q_n \longrightarrow 0$.

Il s'ensuit donc, à l'aide d'une transformation abelienne, que

$$\sum_{k=1}^{n} q_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k(q_k^2 - q_{k+1}^2) + n\, q_n^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k(q_k - q_{k+1})(q_k + q_{k+1}) + n\, q_n^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\,(q_k - q_{k+1}) + n\, q_n^2 =$$

$$= C_1 \left[q_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})q_k - \sqrt{n-1}\, q_n \right] \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{q_k}{\sqrt{k}} + nq_n^2 .$$

Comme $n\, q_n^2 \longrightarrow \infty$, on en tire:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\sqrt{k}} < \infty .$$

et la démonstration est achevée.

Remarques. Les critères de sommation (19) et (20) ne sont pas améliorables dans la même sens que le critère de convergence (18) ne l'est pas.

Il existe donc pour tout $w(n) \longrightarrow \infty$ (resp. $w^*(n) \longrightarrow \infty$) tel que $\frac{w(n)}{\log n} \longrightarrow 0$., resp. $\frac{\sqrt{n}}{w^*(n)} \longrightarrow 0$, des séries orthogonales $\sum c_n \varphi_n(x)$, partout divergentes, avec

$\sum c_n^2 w^2(n) < \infty$ (Menchoff, 1927 et Kaczmarz, 1927), resp.

$\sum \frac{c_n}{w^*(n)} < \infty$ et $0 \leqslant c_{n+1} < c_n$ (Tandori, 1957) .

Il est évident que la condition (19) peut être satisfaite sans que (20) le soit, comme on le voit en posant p. ex.,

$$c_n = 1/\sqrt{n \log n} \ (\log \log n)^2 .$$

Mais la réciproque est aussi possible: on peut choisir $0 \leqslant c_{n+1} < c_n$ de sorte que la condition (20) soit satisfaite, mais que (19) ne le soit pas. Ces deux critères de sommation sont donc indépendants.

Pour le vérifier, soit ν_n le plus petit indice tel que $\log \log \nu_n \geqslant n$. Choisissons

$$c_k = \frac{1}{(\sqrt{\nu_{n+1}} - \sqrt{\nu_n})\sqrt{n^3}} \quad , \quad \text{si} \quad k = \nu_n + 1 \; , \; \ldots , \; \nu_{n+1} \quad .$$

Alors $\{c_n\}$ décroît et

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k^{\,2}(\log \log k)^2 \; =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\nu_{n+1}} - \sqrt{\nu_n})^2 n^3} \quad \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} (\log \log k)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_{n+1} - \nu_n}{(\sqrt{\nu_{n+1}} - \sqrt{\nu_n})^2 \cdot n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad .$$

Donc la condition (19) n'est pas satisfaite. Mais

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\sqrt{k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\sqrt{\nu_{n+1}} - \sqrt{\nu_n}\right]\sqrt{n^3}} \cdot \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} < \infty$$

et la condition (20) est satisfaite.

Pour ces questions et de nombreux problèmes s'y rattachant v. CP. p. 118-139 .

<u>Exercices</u>. 1. Démontrez que, si $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \dots$, et $u_n > 0$, les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_n$, sont en même temps convergentes ou divergentes (<u>Cauchy</u>).

(Envisagez la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k$$ et tenez compte de ce que $0 < u_{n+1} \leqslant u_n$) .

2. Démontrez que si $u_n > 0$ et $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \dots$, la convergence de $\sum u_n$ entraîne $n\, u_n \longrightarrow 0$ (<u>Abel</u>) .

(Il suit de l'exercice 1 que $2^m u_{2^m} \longrightarrow 0$. Si $2^m < n < 2^{n+1}$, on a $n_{un} \leqslant 2^{m+1} u_{2^m}$) .

3. Démontrez que $\{\lambda(n)\}$ étant une suite positive croissante telle que $\lambda(n) \longrightarrow \infty$, on peut choisir des nombres $0 \leqslant c_{n+1} \leqslant c_n$, de sorte que la condition (20) soit satisfaite mais $\sum c_n^2 \lambda(n)$ diverge.

(Suivez le raisonnement de l'exemple présenté aux remarques).

4. Une série $\sum u_n$ s'appelle <u>sommable au sens fort</u> à la valeur s, si s_r en étant les sommes partielles, on

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}(s - s_k)^2}{n+1} \to 0 \quad .$$

Démontrez qu'une série sommable au sens fort est sommable au sens habituel.

(Appliquez l'inégalité de Schwarz à

$$|s - \sigma_n| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n}|s - s_k|}{n+1}) \quad .$$

5. Démontrez que la série 1-1+1-1+ .... est sommable au sens habituel à la valeur $s = \frac{1}{2}$, mais n'est pas sommable au sens fort.

6. Démontrez le théorème suivant dû à Zygmund (1927): Si la série orthogonale $\sum c_n \varphi_n(x)$, où $\sum c_n^2 < \infty$, est presque partout sommable $(\sigma_n(x) \to f(x))$, elle est aussi presque partout sommable au sens fort.

(Pour tout couple de nombres réels u, v, on a $(u+v)^2 \leqslant 2u^2 + 2v^2$, donc

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}(f - s_k)^2}{n+1} \leqslant 2\frac{\sum_{k=0}^{n}(f - \sigma_k)^2}{n+1} + 2\frac{\sum_{k=0}^{n}(\sigma_k - s_k)^2}{n+1} \quad .$$

Comme le premier terme du second membre tend, d'après l'hypothèse, presque partout vers zéro, on n'a à démontrer que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} (s_k - \sigma_k)^2}{n+1} \longrightarrow 0$$

presque partout. Or

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{(s_n - \sigma_n)^2}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2 c_k^2}{n(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \sum_{n\geqslant k} \frac{1}{n^3} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty .$$

La série $\sum \frac{\left[s_n(x) - \sigma_n(x)\right]^2}{n}$ converge donc presque partout. En appliquant le lemme de Kronecker, (exercice 3. § .14) on obtient

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \left[s_k(x) - \sigma_k(x)\right]^2}{n} \longrightarrow 0$$

presque partout. C.Q.F.D.) .

7. Remarquez que ce théorème de Zygmund contient le cas

spécial suivant, démontré déjà par Hardy et Littlewood en 1913: Si $\sum (a_n^2 + b_n^2) < \infty$, la série de Fourier $\frac{a_o}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est presque partout sommable au sens fort. Le même résultat est valable pour la série conjuguée. (Pourquoi?).

16. LE SYSTÈME ORTHOGONAL DE RADEMACHER

Définissons dans l'intervalle (0,1) le système orthonormal suivant:

$$r_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } & 0 < x < \frac{1}{2}\,, \\ 0 \text{ pour } & x = 0\,,\ \frac{1}{2}\,,\ 1\,, \\ -1 \text{ pour } & \frac{1}{2} < x < 1\,; \end{cases}$$

$$r_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } & 0 < x < 1/4 \text{ et } \frac{1}{2} < x < 3/4\,, \\ 0 \text{ pour } & x = 0\,,\ 1/4\,,\ \frac{1}{2}\,,\ 3/4\,,\ 1\,, \\ -1 \text{ pour } & 1/4 < x < \frac{1}{2} \text{ et } 3/4 < x < 1\,; \end{cases}$$

....
....

$$r_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } & \frac{2k}{2^n} < x < \frac{2k+1}{2^n} \text{ où } k = 0,1,..,2^{n-1}-1\,; \\ 0 \text{ pour } & x = k/2^n \text{ où } k = 0,....,2^n\,, \\ -1 \text{ pour } & \frac{2k-1}{2^n} < x < \frac{2k}{2^n} \text{ où } k = 1,..,2^{n-1}\,; \end{cases}$$

....
....

Le système $\{r_n(x)\}$ est évidemment orthonormal en (0,1). (Dessinez s.v.p. les diagrammes de $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$.).

On l'appelle le système de Rademacher, qui l'a introduit en 1922. Il est évidemment incomplet, parce que, p. ex., la fonction $f(x) \equiv 1$ est orthogonale à toutes les fonctions r_n.

$$c_n = \int_0^1 f(x) r_n(x)dx = \int_0^1 r_n(x)dx = 0 \quad .$$

On peut aussi définir les fonctions $r_n(x)$ par la relation $r_n(x) = \text{sign} \sin 2^n \pi x$, si on entend par sign a, comme d'habitude, la valeur $\frac{a}{|a|}$, si $a \neq 0$ et 0 si $a = 0$.

Le système $\{r_n(x)\}$ possède des propriétés de convergence bien intéréssantes. Démontrons d'abord le théorème suivant (<u>Rademacher</u>):

16.1. <u>Si</u> $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, <u>la série de Rademacher</u> (21)

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x)$ <u>converge presque partout</u>.

Le théorème de Riesz-Fischer assure, en vertu de ce que $\sum c_n^2 < \infty$, l'existence de $f \in L^2$ de sorte que

$$\int_0^1 \left[f - s_n\right]^2 dx \to 0$$

On en obtient à l'aide de l'inégalité de Schwarz, pour tout intervalle $I \subset (0,1)$:

$$\left|\int_I s_n(t)dt - \int_I f(t)dt\right| \leqslant \int_I |s_n - f| dt \leqslant \int_0^1 \left[s_n - f\right]^2 dt \longrightarrow 0.$$

Soit I_n un intervalle de la forme $(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ où $k = 0,1,\ldots,2^n-1$. Alors, d'après l'évaluation précédante:

$$(22) \quad \lim_{m \to \infty} \int_{I_n} \left[s_m(t) - s_{n-1}(t)\right] dt = \int_{I_n} \left[f(t) - s_{n-1}(t)\right] dt.$$

Mais les $r_j(t)$ sont, pour $j \geqslant n$, symétriques par rapport au centre de l'intervalle $I_n = (k/2^n, (k+1)/2^n)$ en y prenant alternativement les valeurs $+1$ et -1. Par conséquent

$$\int_{I_n} r_j(t)dt = 0 \qquad (j = n, n+1, \ldots, m) ,$$

donc

$$\int_{I_n} s_m(t)dt = \int_{I_n} s_{n-1}(t)dt .$$

On tire alors de (22) que

$$\int_{I_n} s_{n-1}(t)dt = \int_{I_n} f(t)dt.$$

Soit $|I_n|$ la longeur de I_n et x un point de I_n, différent des points dyadiquement rationnels $p/2^q$.

Alors, en tenant compte de ce que $s_{n-1}(t)$ est constante en I_n (exception faite des points de la forme

$p/2^q$), il s'ensuit que

$$s_{n-1}(x) = \frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} s_{n-1}(t)dt = \frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f(t)\,dt \quad .$$

Mais certains I_n se contractent, avec $n \to \infty$, sur le point x . Alors, si

$$F(t) = \int_0^t f(u)du \quad ,$$

on a

$$\frac{1}{|I_n|}\int_{I_n} f(t)dt = F'(x) \quad ,$$

pourvu que $F'(x)$ existe. Or, $F'(x)$ existe pour presque tout x et on a même $F'(x) = f(x)$.

Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1}(x) = f(x)$$

pour presque tout $x \in (0,1)$, ce qui établit notre proposition.

Il est très intéressant que la condition $\sum c_n^2 < \infty$ soit non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour la convergence (Khintchine-Kolmogoroff, 1925) et même nécessaire pour la sommabilité, c'est-à-dire pour la convergence de $\{\sigma_n(x)\}$ de la série (21) (Zygmund, 1930) .

16.2. Si la série (21) converge ou si elle est, au moins, sommable sur un ensemble de mesure positive, on a nécessairement

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty .$$

Il suffit se borner au cas où les moyennes arithmétiques $\sigma_n(x)$ convergent, puisque la convergence des $s_n(x)$ entraîne celle des $\sigma_n(x)$. Supposons donc que les

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{k}{n+1}) c_k r_k(x)$$

convergent sur un ensemble de mesure positive.

Il existe alors un ensemble E de mesure $|E| > 0$, où $|\sigma_n(x)| \leqslant M$.

Désignons par N un entier positif et fixe dont la valeur sera déterminée plus tard. Il est évident que les coefficients c_1 , c_2 , ... , c_{N-1} n'influençant guère la convergence des $\sigma_n(x)$, on peut supposer $c_0 = c_1 = \ldots = c_{N-1} = 0$. Dans ce cas on obtient

$$M^2 |E| \geqslant \int_E \left[\sigma_n(x)\right]^2 dx = |E| \sum_{k=N}^{n} c_k^{\,2} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2 +$$

$$+ 2\sum_{k=N}^{n} c_k\left(1-\frac{k}{n+1}\right) \sum_{\ell=k+1}^{n} \left(1-\frac{\ell}{n+1}\right)c_\ell \int_E r_k(x) r_\ell(x)\, dx.$$

Désignons par $2S_N$ le dernier terme du deuxième membre. Alors, d'une part

$$M^2|E| \geqslant |E| \sum_{k=N}^{n} c_k^{\,2}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)^2 + 2S_N \ , \tag{23}$$

d'autre part

$$|S_N| \leqslant \left\{\sum_{k=N}^{n} \sum_{\ell=k+1}^{n} c_k^2 c_\ell^2 \left(1-\frac{k}{n+1}\right)^2\left(1-\frac{\ell}{n+1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} . \tag{24}$$

$$\cdot\left\{\sum_{k=N}^{n} \sum_{\ell=k+1}^{n} \left(\int_E r_k(x) r_\ell(x)\, dx\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Remarquons que les produits $r_k(x)r_\ell(x)$ $(k\neq \ell)$ forment un système orthonormal. La normalité est évidente. Quant à l'orthogonalité, soit n le plus grand indice dans le produit $r_k(x)r_\ell(x)r_m(x)r_n(x)$.

Dans un intervalle I_n où $r_n(x)$ prend la valeur + 1 sur une moitié de I_n et -1 sur l'autre moitié de I_n, le produit $r_k(x)r_\ell(x)r_m(x)$ est constant et sa valeur est +1 ou -1, puisque n est plus grand qu'un des nombres k,ℓ,m.

Il s'ensuit que

$$\int_I r_k(x) \cdot r_\ell(x) \cdot r_m(x) \cdot r_n(x)dx = \pm \int_{I_n} r_n(x)dx = 0 \quad .$$

Or, $(0,1)$ est la somme des intervalles I_n , donc

$$\int_0^1 r_k(x) \cdot r_\ell(x) \cdot r_m(x) \cdot r_n(x)dx = 0$$

Comme $\{r_k(x) r_\ell(x)\}_{k \neq \ell}$ forme un système orthonormal, les intégrales

$$\int_E r_k(x)\, r_\ell(x)dx$$

sont les coefficients de développement de la fonction caractéristique $\mathcal{E}(x)$ de l'ensemble E suivant le système $\{r_k(x)\, r_\ell(x)\}$.

Il s'ensuit , en vertu de l'inégalité de Bessel,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \left(\int_E r_k(x)\, r_\ell(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 \mathcal{E}^2(x)dx = |E|$$

Fixons maintenant la valeur de l'entier N indéterminée jusqu'ici. Soit N le plus petit entier tel que

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \left(\int_E r_k(x)\, r_\ell(x)dx\right)^2 \leqslant \frac{|E|^2}{9} \, .$$

Il s'ensuit, en vertu de (24) que

$$|s_n| \leqslant \frac{|E|}{3}\sum_{k=N}^{n} c_k^2(1 - \frac{k}{n+1})^2 \quad .$$

L'inégalité (23) rend donc

$$M^2|E| \geqslant |E|\sum_{k=N}^{n} c_k(1 - \frac{k}{n+1})^2 - \frac{2|E|}{3}\sum_{k=N}^{n} c_k^2(1 - \frac{k}{n+1})^2$$

Comme $|E| > 0$, on peut diviser par $|E|$, donc

$$\sum_{k=N}^{n} c_k^2(1 - \frac{k}{n+1})^2 \leqslant 3M^2$$

pour tout $n > N$.

En passant à la limite on a

$$\sum_{k=N}^{\infty} c_k^2 \leqslant 3M^2 \quad ,$$

ce qui établit notre proposition.

Ces deux théorèmes rendent lieu à des conséquences très intéressantes. Comme les fonctions de Rademacher ne prennen que les valeurs $+1$ et -1 aux points x $(\neq \frac{p}{2^q})$, le produit $Cr_n(x)$ n'est rien d'autre que $+C$ ou $-C$, suivant la choix du point x.

Si on choisit donc les signes $\pm$ des termes C_n d'une série donnée $\sum c_n$ arbitrairement, on obtient toutes las distributions des signes $\sum \pm c_n$ multipliquant c_n par $r_n(x)$, pourvu que x parcoure l'intérvalle $(0,1)$, c'est-à-dire que $\sum \pm c_n = \sum c_n r_n(x)$.

Les distributions des signes $\pm$ forment deux ensembles C et D , où C est l'ensemble dont les éléments sont les combinaisons des signes $\pm$ pour lesquelles $\sum \pm c_n$ converge; l'ensemble D est son complémentaire, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons des signes $\pm$ pour lesquelles $\sum \pm c_n$ diverge.

On peut même attribuir une mesure à C et D, si on définit $|C|$ comme la mesure $|C_x|$ de l'ensemble C_x , des points $x \in (0,1)$ pour lesquels la série $\sum c_n r_n(x)$, converge.

Alors $|D| = 1 - |C|$. On peut donc parler de presque toutes les distributions des signes $\pm$ en entendent que la mesure de l'ensemble des distributions envisagées est 1. Les théorèmes 16.1 et 16.2 rendent alors le corollaire suivant, très intéressant:

16.3. <u>La série</u> $\sum \pm c_n$ <u>est pour presque toutes les distributions des signes</u> $\pm$ <u>convergente</u>, <u>si</u> $\sum c_n^2 < \infty$. <u>Mais si</u> $\sum c_n^2 < \infty$, <u>la série</u> $\sum c_n^2 < \infty$ <u>est</u>, <u>pour presque toutes les distributions des signes</u> $\pm$ <u>divergente et même non-sommable</u>.

Si on prend, au lieu de $\sum c_n$, une série orthogonale $\sum c_n \varphi_n(x)$, on ne pourrait démontrer par cette méthode que la convergence ou divergence de $\sum \pm c_n \varphi_n(x)$ au point fixe x_o. Mais on peut démontrer beaucoup plus (Paley - Zygmund, 1930):

16.4. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système orthonormal quelconque. Si $\sum_{n=o}^{\infty} c_n^2 < \infty$, la série orthogonale

(24) $$\sum_{k=1}^{\infty} \pm c_n \varphi_n(x)$$

est presque partout convergente pour presque toutes les distributions des signes $\pm$.

On obtient d'abord, en vertu de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n^2 \varphi_n^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty ,$$

la convergence presque partout de $\sum c_n^2 \varphi_n^2(x)$.

La série de Rademacher

(29) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) r_n(t)$$

est donc convergente en presque tout point $t \in (0,1)$ pour presque tout $x \in (0,1)$. Soit E l'ensemble des (t,x) où (29) converge.

Désignons par $\mathcal{E}(t,x)$ la fonction caractéristique de E. D'après le théorème de Fubini sur l'interchangeabilité des intégrations, on a

$$(30) \qquad \int_a^b \left[\int_0^1 \mathcal{E}(t,x)dt\right]dx = \int_0^1\left[\int_a^b \mathcal{E}(t,x)dx\right]dt \quad .$$

Mais $\mathcal{E}(t,x)$ a , pour un x fixé, la valeur 1 en presque tout t , par conséquent

$$\int_a^b \left[\int_0^1 \mathcal{E}(t,x)dt\right]dx = \int_a^b dx = b - a \quad .$$

Si $\mathcal{E}(t,x)$ n'avait pas la valeur 1 en presque tout x, on obtienderait , pour t fixé

$$\int_0^1\left[\int_a^b \mathcal{E}(t,x)dx\right]dt < (b - a)\int_0^1 dt = b - a \quad ,$$

en contradiction avec (30). Ainsi la série (29) est pour presque tout t et tout x convergente, ce qui équivaut à la convergence presque partout de la série (24) pour presque toutes les distributions des signes $\pm$ .C.Q.F.D.

On peut intervertir ce théorème:

16.5. <u>Si</u> $\{\varphi_n(x)\}$ <u>est un système orthonormal tel que</u>

(31) $$\liminf_{n\to\infty} \int_A \varphi_n^2(x)dx > 0$$

<u>pour tout ensemble</u> A <u>de mesure positive, la condition</u> $\sum c_n^2 = \infty$ <u>entraîne que la série</u> $\sum c_n\varphi_n(x)$ <u>est presque partout non-sommable avec les moyennes arithmétiques</u> $\sigma_n(x)$, <u>pour presque toutes les distributions des signes</u> $\pm$

On voit d'abord que $\sum c_n^2\varphi_n^2(x)$ est presque partout divergente. En effet, on aurait sinon

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \int_A \varphi_n^2(x)dx < \infty$$

sur un ensemble A de mesure positive. Mais , d'après (31), il existe un indice N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on a

$$\int_A \varphi_n^2(x)dx \geqslant K \quad ,$$

où K désigne une certaine constante positive. On en obtienderait donc

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2 \int_A \varphi_n^2(x)dx \geqslant K\sum_{n=N}^{\infty} c_n^2$$

et par conséquent $\sum c_n^2 < \infty$, en contradiction avec l'hypothèse $\sum c_n^2 = \infty$. Les moyennes arithmétiques $\sigma_n(t,x)$ de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) r_n(t)$$

divergent donc en presque tout point $t \in (0,1)$ pour presque tout $x \in (0,1)$. D'ici, la démonstration suit exactement le même schéma que celui du théorème précédent et conduit à notre proposition.

Ce théorème a un corollaire très important. Si on veut rechercher les propriétés de convergence d'une série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

la première chose que l'on va se demander est: est-ce que cette série est une série de Fourier ou non?

Ceci parce que beaucoup de propriétés de convergence d'une série de Fourier sont connues, tandis que les propriétés de convergence des séries trigonométriques générales sont inconnues. Or, excepté le cas très spécial où les a_n et b_n forment des suites convexes tendant vers zéro,on n'a que le théorème de Riesz-Fischer, pour décider si (32) est ou non une série de Fourier.

Nous allons voir qu'<u>il est impossible de donner un critère plus fort que celui de</u> $\sum (a_n{}^2 + b_n{}^2) < \infty$ <u>portant uniquement sur l'ordre de grandeur des coefficients</u> a_n , b_n

<u>qui puisse assurer que les</u> a_n <u>et</u> b_n <u>sont les coefficients de Fourier d'une fonction</u> $f \in L$.

Ceci parce qu'on peut construire avec tous les coefficients a_n, b_n pour lesquels $\sum (a_n^2 + b_n^2) = \infty$, des séries trigonométriques qui ne sont pas des séries de Fourier, en changeant tout simplement les signes des a_n et b_n.

Voici le théorème correspondant (<u>Paley-Zygmund</u>, 1930):

16.6. <u>Si</u> $\sum (a_n^2 + b_n^2) = \infty$, <u>presque toutes las séries</u>

$$(32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

<u>sont presque partout non-sommables par leurs moyennes arithmétiques</u> $\sigma_n(x)$, <u>donc elles ne sont pas des séries de Fourier</u>.

En effet, soit A un ensemble de mesure positive quelconque. On a

$$\int_A \cos^2 nx \, dx = \tfrac{1}{2} \int_A dx + \tfrac{1}{2} \int_A \cos 2nx \, dx .$$

Or, la dernière intégrale est le coefficient de Fourier de la fonction caractéristique de l'ensemble A et converge donc vers zéro lorsque $n \to \infty$. Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \cos^2 nx \, dx = \tfrac{1}{2}\int dx = \frac{|A|}{2} > 0$$

Une relation analogue est valable pour l'intégrale des $\sin^2 nx$. Les conditions du théorème 16.5 sont donc satisfaites; par conséquent, presque toutes les séries (32) sont presque partout non-sommables avec leurs moyennes arithmétiques $\sigma_n(x)$. Mais si elles étaient des séries de Fourier, $\{\sigma_n(x)\}$ serait presque partout convergente en vertu du théorème de Lebesgue (Théorème 11.2). Donc elles ne sont pas des séries de Fourier et la démonstration est achevée.

. Remarques. Pour la litérature et des généralisations v. CP. p. 51-62 et p. 185-196.

Les théorèmes suivants de Hausdorff-Young (resp. de Paley) élucident un peu le problème de savoir si une série donnée est ou non une série de Fourier.

I. (Hausdorff-Young): *Soit* $\{\varphi_n(x)\}$ *un système orthonormal et* p *un nombre tel que* $1 < p \leqslant 2$

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty ,$$

<u>il existe une fonction</u> $f \in L^{p/p-1}$ <u>telle que</u>

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n dx$$

II. (<u>Paley</u>): <u>Si</u> $q \geqslant 2$ <u>et</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q n^{q-2} < \infty$$

<u>il existe une fonction</u> $f \in L^q$ <u>telle que</u>

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad .$$

Les démonstrations en sont longues et labourieuses. L'intéréssé peut consulter, T.S.II. chapitre XII ou <u>Kaczmarz-Steinhaus</u>, Theorie der Orthogonalreihen (Warszawa-Lwów, 1935), chapitre VI.

<u>Exercices</u> .1. Démontrez le théorème suivant: Si $\sum c_n$ est une série convergente et on supprime les termes d'indice $n_1, n_2, \dots$, presque toutes les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\nu_n}$$

3. Démontrez que si $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ax + b_n \sin nx)$ est la série de Fourier d'une fonction $f \in L$ telle que $f \notin L^2$ et si on supprime les termes d'indice $n_1, n_2, \ldots$, alors presque toutes les séries qui restent,

$$\sum (a_{\nu_n} \cos \nu_n x + b_{\nu_n} \sin \nu_n x) ,$$

ne sont pas des séries de Fourier (Paley-Zygmund).

17. MÉTHODES DE SOMMATION GÉNÉRALES. SOMMATION DE CESÀRO. SOMMATION D'ABEL-POISSON.

Jusqu'à présent nous avons étudié la convergence des séries ou leur sommabilité par des moyennes arithmétiques. Or, c'était un point de vue très particulier qui correspond, peut-être, au développement historique, mais qui ne satisfait plus aux aspects les plus généraux. En effet, s'il s'agit d'une série à sommes partielles s_n ou d'une suite $\{s_n\}$ quelconque divergente, on peut attribuer une limite généralisée à $\{s_n\}$ de différentes manières. Envisageons une matrice de nombres doublement infinie

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \ldots & \alpha_{0k} & \ldots \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nk} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

et formons les sommes

$$t_n = \alpha_{n0}s_0 + \alpha_{n1}s_1 + \ldots + \alpha_{nk}s_k + \ldots$$

Il se peut bien que $\{s_n\}$ ne converge pas, tandis que la suite $\{t_n\}$ converge.

On peut dire que les t_n sont en un certain sens, des moyennes des s_n ; la matrice M détermine donc une méthode de sommation de la suite $\{s_n\}$. On exige naturellement que la limite vers laquelle convergent les moyennes t_n ne soit pas prise arbitrairement, mais qu'elle coïncide, si la suite $\{s_n\}$ converge vers s, avec s. Une méthode de sommation ayant la propriété d'attribuer à une suite convergente la même limite, s'appelle une méthode permanente. Toeplitz (1911) a établi les conditions imposées à la matrice M pour qu'elle détermine une méthode permanente:

17.1. Pour qu'une méthode de sommation déterminée par la matrice M soit permanente, il est nécessaire et suffisant que les éléments de la matrice M satisfassent aux conditions suivantes:

1º $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{nk} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots)$;

2º $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = 1$;

3º $\sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_{nk}| \leqslant C \qquad (n = 0, 1, \ldots)$.

La nécessité de 2º est évidente, parce qu'en prenant $s_n = 1$ pour tout n, on a $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_{nk}$ et la permanence suppossée de la méthode entraîne 2º. La nécessité de 1º en est une conséquence: posons $s_k = 1$ pour tout k excepté k_o pour lequel $s_{k_o} = 0$.

La permanence équivaut alors à

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} - \alpha_{nk_o}\right) = 1 \quad .$$

Il s'ensuit donc, en vertu de 1º, que $\lim_{n\to\infty} \alpha_{nk_o} = 0$;

et comme cette relation doit subsister pour un k_o quelconque la nécessité de 2º est démontrée. La démonstration de la nécessité de 3º est plus longue. Nous ne la faisons pas, surtout parce qu'elle équivaut à 2º si les α_{nk} sont non-négatifs, ce qui est justement le cas le plus important et qui nous intéresse.

Quant à la suffisance , supposons que $\{s_n\}$ converge vers s , c'est-à-dire que $s_n = s + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n \xrightarrow[n]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $|\varepsilon_\nu| < \varepsilon/3C$, si $\nu > \nu_o$. Alors

$$|s - t_n| \leq \left|s - s\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk}\right| + \sum_{k=0}^{\nu_o} |\varepsilon_k \alpha_k| + \sum_{k=\nu_o+1}^{\infty} |\varepsilon_k \alpha_k|$$

La première somme est, en vertu de 2º, plus petite que $\varepsilon/3$, si n est assez grand. Il en est de même de la deuxième, puisque la condition 1º entraîne

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\nu_0} \varepsilon_k \alpha_{nk} \leqslant \lim_{n\to\infty} \max_{k\leqslant\nu_0} |\alpha_{nk}| \sum_{k=0}^{\nu_0} |\varepsilon_k| = 0 \quad .$$

La troisième est aussi $< \varepsilon/3$, parce qu'en tenant compte de 3º et de ce que $\varepsilon_k < \varepsilon/3C$, si $k > \nu_0$, nous obtenons

$$\sum_{k=\nu_0+1}^{\infty} |\varepsilon_k \alpha_k| < \frac{\varepsilon}{3C} \sum_{k=\nu_0+1}^{\infty} |\alpha_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad .$$

On a donc, pour n assez grand, $|s - t_n| < \varepsilon$; la méthode de sommation est donc permanente.

On voit que les sommes arithmétiques σ_n fournissent une méthode de sommation permanente (ce qui était déjà connu de Cauchy).

En effet, on a $t_{n_k} = \sigma_n$ en prenant pour M la matrice formée des éléments

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ 0 & (k > n) \quad . \end{cases}$$

Cesàro a introduit à la fin du siècle passé la généralisation suivante des moyennes arithmétiques: désignons par

A_n^{α} le n-ième coefficient binomial pour un $\alpha > -1$:

$$A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n} \quad \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ \dots\ (1+\alpha)}{n!}$$

On a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha}\, x^n = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}$$

pour $|x| < 1$. Soit S_n^{α} le n-ième coefficient du développement

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{\alpha}\, x^n = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

On appelle la n-<u>ième moyenne de Cesàro d'ordre</u> α le quotient

$$\sigma_n^{\alpha} = \frac{s_n^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}$$

Si $\sigma_n^{\alpha} \to s$, on dit que la série $\sum u_n$ (ou la suite $\{s_n\}$) est sommable (C,α) à la limite s . On a évidemment $s_n^{(o)} = s_n$ et $A_n^{(o)} = 1$, la sommabilité $(C,0)$ équivaut donc à la convergence.

De la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{1} x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

on tire aussi que $s_n^{1} = \sum_{k=0}^{n} s_k$ et que $A_n^{1} = \binom{n+1}{n} = n+1$;

par conséquent σ_n^{1} est la n-ième moyenne arithmétique des s_n, c'est-à-dire: la sommabilité (C,1) équivaut à la sommation par les moyennes arithmétiques.

En appliquant la règle de multiplication des séries de puissances, on trouve que

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta} \cdot A_k^{\alpha} ,$$

$$s_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta} s_k^{\alpha} .$$

En y écrivant $\beta - 1$ au lieu de β, on voit que, pour $\alpha > -1$, $\beta > 0$,

$$\sigma_n^{\alpha+\beta} = \frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} s_k^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^{\alpha} \sigma_k^{\alpha}$$

Remarquons que

$$\frac{1}{A_n^{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-1} A_k^{\beta} = 1 .$$

Si on prend donc

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-k}^{\beta-1} A_k^{\alpha}}{A_n^{\alpha+\beta}} & \text{pour} \quad k = 0, 1, \dots, n \ , \\ 0 & \text{pour} \quad k > n \ , \end{cases}$$

on a défini une matrice M dont les moyennes correspondantes sont $t_n = \sigma_n^{\alpha+\beta}$ et les α_{nk} satisfont à la condition 2º et aussi , comme $\alpha_{nk} > 0$, si $\beta - 1 > -1$, $\alpha > -1$, à la condition 3º du théorème 17.1. De plus, on peut montrer que

$$\frac{A_n^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha + 1)}{n^{\alpha}} \longrightarrow 1$$

(Gauss a pris cette relation comme définition de la fonction gamma). Il s'ensuit que

$$\frac{A_{n-k}^{\beta-1} \cdot A_k^{\alpha}}{A_n^{\alpha+\beta}} = \frac{(n - k)^{\beta-1}}{n^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta)} A_k^{\alpha} + \varepsilon_n$$

où $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ donc, pour k fixé , $\alpha_{nk} \longrightarrow 0$

La condition 1º de 17.1 est donc aussi satisfaite. Ainsi les $\sigma_n^{\alpha+\beta}$ déterminent , pour $\beta > 0$, une méthode de sommation permanente appliquée à la suite $\{\sigma_n^{\alpha}\}$.

On a obtenu le théoreme suivant:

17.2. <u>Si, pour un</u> $\alpha > -1$, <u>on a</u> $\sigma_n^{\alpha} \longrightarrow s$, <u>alors</u> $\sigma_n^{\alpha+\beta} \longrightarrow s$, <u>pourvue que</u> $\beta > 0$.

En d'autre mots: <u>si une série est sommable</u> (C,α) , <u>elle est aussi sommable</u> (C,β) <u>pour tout</u> $\beta > \alpha$.

Ceci montre que les sommations de Cesàro de différents ordres forment une échelle: toute sommation d'ordre supérieur est une méthode "plus forte" qu'une sommation d'ordre inférieur. Comme cas particulier , relevons que les sommations (C,α) d'ordres positifs $(\alpha > 0)$ sont plus fortes que la sommation $(C,0)$, elles sont donc des méthodes de sommation permanentes, ce qui n'est plus exact si $\alpha < 0$.

Une sommation plus forte que toutes les sommations de Cesàro est celle d'Abel-Poisson: la sommation (A). La série $\sum u_n$ s'appelle sommable (A) , si $\sum u_n x^n$ est convergente pour $|x| < 1$ et

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = s \quad .$$

On voit tout de suite que la sommabilité (A) est une propriété plus forte que la sommabilité (C,α) :

17.3. <u>**Si la série est sommable (C,α) pour un $\alpha > -1$ quelconque, elle est aussi sommable**</u> (A).

En effet, la **sommabilité** (A) équivaut à ce que

$$f(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x_n^{\ k}$$

tende, pour tout choix de la suite positive $\{x_n\}$ avec $x_n \longrightarrow 1$, à la limite s. Or, d'après la définition de s_k^α et σ_k^α, on a

$$f(x_n) = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} s_k^\alpha x_n^{\ k} = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_k^\alpha \, A_k^\alpha \, x_n^k \quad .$$

En choisissant

$$\alpha_{nk} = (1-x_n)^{\alpha+1} \, A_k^\alpha \, x_n^{\ k} \quad ,$$

on voit que les conditions 1º et 2º de 17.1 sont évidemment satisfaites et, comme $\alpha_{nk} > 0$, la condition 3º l'est aussi. La formation des $f(x_n)$ est donc une sommation permanente appliquée à la suite σ_n^α. Il s'ensuit que $f(x_n) \longrightarrow s$, lorsque $\sigma_n^\alpha \longrightarrow s$.

Exercices.1. Montrez que les sommes de Cesàro d'une série $\sum u_n$ satisfont aux relations

$$\sigma_n^{\alpha} - \sigma_n^{\alpha+1} = \frac{1}{n+\alpha+1} \cdot \frac{1}{A_n^{\alpha}} \cdot \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha} k u_k ,$$

$$\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha} = \frac{\alpha}{n(n+\alpha)} \cdot \frac{1}{A_n^{\alpha-1}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} k u_k .$$

(La somme σ_n^{α} peut se mettre sous la forme

$$\sigma_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} u_k .$$

En tenant compte de ce que $A_\nu^{\alpha} = \dfrac{(\nu+\alpha)(\nu+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)}{\nu!}$,

les deux formules s'obtiennent par un calcul direct) .

2. Démontrez le théorème de Tauber: si $\sum u_n$ est sommable (A) et $nu_n \longrightarrow 0$, la série $\sum u_n$ est convergente.

(Soit $0 < x < 1$ et soit N tel que $N \leq (1-x)^{-1} < N+1$.

Alors

$$f(x) - s_N = \sum_{n=1}^{N} u_n(1 - x^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n x^n = P_n + Q_n .$$

Comme $(1 - x)^n \leq n(1 - x)$ (inégalité de Bernoulli) ,

on a

$$|P_N| \leqslant (1 - x)\sum_{n=1}^{N} n|u_n| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n|u_n| \longrightarrow 0 \quad ,$$

$$|Q_n| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} nu_n x^n \cdot \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N+1} \cdot \max_{n>N} n|u_n| \sum_{N+1}^{\infty} x^n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(N+1)(1-x)} \cdot \max_{n \to N} n|u_n| \longrightarrow 0 \quad .$$

Alors $f(x) - s_N \longrightarrow 0$ lorsque $N \to \infty$, ce qui équivaut à $x \longrightarrow 1$) .

18. REMARQUES SUR LA SOMMABILITÉ DES SÉRIES DE FOURIER ET DES SÉRIES ORTHOGONALES GÉNÉRALES.

Si on recherche la sommabilité des séries de Fourier, on arrive à la conclusion que les théorèmes principaux que nous avons démontrés pour les moyennes de Fejér restent valables pour toute sommation (C,α) d'ordre positif. Ceci parce que les noyaux qui appartiennent à une sommation $(C,\alpha > 0)$ jouissent des propriétés semblables à celles du noyau de Fejér.

Désignons par $\sigma_n^{\alpha}(x)$, la n-ième moyenne de Cesàro de la série de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad .$$

En posant

$$K_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} D_k(t)$$

on obtient, par un calcul semblable à celui du cas $(C,1)$, des moyennes de Fejér qui vérifient

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, |K_n^{\alpha}(t)|\, dt \quad .$$

Les propriétés décisives qui nous ont permis de démontrer les théorèmes de Fejér (6.1) et de Lebesgue (11.2) résidaient en ce que le noyau de Fejér $K_n(t) = K_n{}^1(t)$, jouit des propriétés suivantes:

$$\text{I} \quad . \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1 \quad ,$$

$$\text{II} \quad . \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|\, dt \leqslant C \quad ,$$

$$\text{III} \quad . \quad \lim_{n\to\infty} \max_{\delta \leqslant x \leqslant \pi} |K_n(t)| = 0 \quad \text{pour tout}$$

$\delta > 0$ fixé.

La propriété II était une conséquence de I, puisqu'on avait $K_n(t) \geqslant 0$. Mais en analysant un peu les démonstrations on voit qu'en réalité c'était la propriété II qui était décisive pour le théorème de Lebesgue. On a eu besoin encore d'une propriété:

$$\text{IV.} \quad |K_n(t)| \leqslant C_1 n \quad \text{et} \quad |K_n(t)| \leqslant \frac{C_2}{nt^2} \ (0 < t \leqslant \pi\,) \quad .$$

Or, on démontre -ce que nous ne fairons pas- par un calcul assez minutieux que, si $0 < \alpha \leqslant 1$, le noyau $K_n^{\alpha}(t)$, jouit des propriétés I-III et même de la propriété suivante:

IVa. $|K_n^\alpha(t)| \leq C_1 n$ et $|K_n^\alpha(t)| \leq \dfrac{C_2^\alpha}{n^\alpha t^{\alpha+1}} (0 < t \leq \pi)$,

où C_2^α dépend uniquement de α .

Ceci établi, on voit aisément en répétant les demonstrations des théorèmes de Fejér et de Lebesgue, que le théorème suivant est valable (M. Riesz, 1923):

18.1. Si $f(x)$ est continue ou ne possède que des sauts, sa série de Fourier est sommable (C,α) , pour tout $\alpha > 0$, vers $(f(x+o) + f(x-o))/2$; de plus, la convergence de $\sigma_n^\alpha(x)$ est uniforme en cas de continuité.

Si $f \in L$, sa série de Fourier est sommable (C,α) pour tout $\alpha > 0$ en tout point de Lebesgue, donc presque partout.

Le théorème 17.3. assure les mêmes propriétés pour la méthode de sommation (A). La limite

$$\lim_{r\to 1} P(r,x) = \lim_{r\to 1}\left[\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n\right]$$

existe donc presque partout et est égale à $f(x)$, si $f \in L$; elle existe partout, la convergence étant uniforme, si $f(x)$ est une fonction continue.

Ces propriétés rendent la solution du problème classique de Dirichlet: étant donné un domaine D limité par une courbe fermée simple C et une fonction $f(\xi,\eta)$ continue sur C, trouver une fonction $F(x,y)$ harmonique en D et continue en $D \cup C$ telle que $F(\xi,\eta) = f(\xi,\eta)$ sur C. Prenons pour D le cercle $|z| < 1$, sa circonférence C' étant alors $|z| = 1$.

Soit $f(v)$ une fonction continue sur cette circonférence dont la série de Fourier est

$$f(v) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nv + b_n \sin nv) .$$

En prenant les sommes

$$P(r,v) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nv + b_n \sin nv) r^n ,$$

elles représentent la partie réelle de la série de puissances

$$f(re^{iv}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n e^{inv}$$

avec $C_o = \frac{a_o}{2}$ et $C_n = a_n - ib_n$ pour $n \geqslant 1$. Comme cette série de puissances converge absolumment pour $r < 1$, la fonction $f(re^{iv})$ est régulière à l'intérieur du cercle unitaire, sa partie réelle, c'est-à-dire $P(r,v)$, étant alors une fonction harmonique dans ce domaine. Comme on a, sur la circonférence

$$\lim_{r \to 1} P(r,v) = f(v)$$

$P(r,v)$ est la solution du problème de Dirichlet pour le cercle unitaire. Si, maintenant, D et C sont plus généraux que le cercle unitaire, un théorème classique de Riemann assure l'existance d'une transformation biunivoque et contine $\varphi(re^{iv})$, faisant corresponde l'intérieur $r < 1$ du cercle unitaire à D, la circonférence $r = 1$ à C, $\varphi(re^{iv})$ étant une transformation conforme dans l'intériéur. On n'a qu'à prendre les valeurs $P(r,v)$ aux points $\varphi(re^{iv})$ correspondant aux points (r,v) pour obtenir la solution générale du problème de Dirichlet.

Le théorème 18.1 montre que les différentes méthodes de sommation $(C,\alpha > 0)$ et (A) sont équivalentes pour les séries de Fourier à un ensemble nul près. On peut démontrer, en approfondissant l'étude de la théorie des séries, plus que nous ne l'avons fait c'est,que le même phénomène se présente lorsqu'il s'agit des séries orthogonales générales.

En effet, Zygmund (1927) a démontré le théorème suivant:

18.2. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système orthonormal quelconque

et $\sum c_n \varphi_n(x)$ une série orthogonale telle que

$\sum c_n^2 < \infty$. Si cette série est sommable (A)
sur un ensemble E, elle est aussi presque partout sommable (C,α) sur E pour tout $\alpha > 0$

Nous ne démontrons pas ce théorème puisque la démonstration exige la connaissance de différents lemmes et un calcul assez long, sens être, en principe difficile.

Nous nous contentons de remarquer que, dans les théorèmes démontrés pour le cas des moyennes arithmétiques, c'est-à-dire pour les moyennes (C,1), on peut prendre partout dans les énoncés des moyennes (C,$\alpha > 0$).

Exercices.1. Démontrez que si f(x) est absolument continue, la série conjuguée de sa série de Fourier converge en tout point où elle est sommable (A), donc presque partout. (Appliquez le théorème de Tauber, démontré dans l'exercice 2 du § 17, à la série $\sum(b_n \cos nx - a_n \sin nx)$, et remarquez que la continuité absolue entraîne $na_n \longrightarrow 0$, $nb_n \longrightarrow 0$).

2. Démontrez que, dans l'énoncé du théorème 10.7 on peut prendre $\tilde{\sigma}_n^{\alpha}(x)$, avec $\alpha > 0$, au lieu de $\tilde{\sigma}_n(x)$.

(L'exercice 2 du § 17 rend les relations suivants:

$$\tilde{\sigma}_n^{\alpha}(x) - \tilde{\sigma}_n^{\alpha+1}(x) = -\frac{1}{n+\alpha+1} \cdot \frac{d}{dx}\sigma_n^{\alpha}(x) ,$$

$$\tilde{\sigma}_n^{\alpha}(x) - \tilde{\sigma}_{n-1}^{\alpha}(x) = -\frac{\alpha}{n(n+\alpha)}\frac{d}{dx}\sigma_n^{\alpha-1}(x) .$$

On n'a qu'à suivre le schéma de la démonstration de 10.6 et 10.7 pour parvenir au résultat désiré en tenant compte toujours du théorème 18.1.)

19. CONVERGENCE ABSOLUE DES SÉRIES ORTHOGONALES.

Etant donnée une série orthogonale générale $\sum c_n \varphi_n(x)$, la condition $\sum |c_n| < \infty$ entraîne la convergence absolue de cette série en tout point x, si le système orthonormal $\{\varphi_n(x)\}$ est borné, c'est-à-dire si $|\varphi_n(x)| \leqslant C$, $n = 0, 1, ..$ Même si $\{\varphi_n(x)\}$ n'est pas borné, la convergence absolue presque partout est une conséquence de $\sum |c_n| < \infty$. En effet, en tenant compte de ce que

$$\int_a^b |\varphi_n(x)| \, dx \leqslant \left\{ \int_a^b dx \int_a^b \varphi_n^2(x) \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a} \,,$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b |c_n \varphi_n(x)| \, dx \leqslant \sqrt{b - a} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

d'ou l'on tire, en vertu du théorème de B. Levi, la convergence presque partout de

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \varphi_n(x)| .$$

La recherche de la propriété $\sum |c_n| < \infty$ est donc décisive pour la convergence absolue de

$$\sum c_n \varphi_n(x).$$

Nous allons démontrer un théorème (Orlicz, 1927 et Stone, 1931) qui permet de savoir si la relation $\sum |c_n| < \infty$ subsiste ou non. Nous dirons que le système $\{\varphi_n(x)\}$ possède la propriété C, si la convergence de $\sum c_n\varphi_n(x)$ sur un ensemble de mesure positive entraîne $c_n \to 0$. De même, nous dirons que, le système $\{\varphi_n(x)\}$ possède la propriété D, si la convergence absolue de $\sum c_n\varphi_n(x)$ sur un ensemble de mesure positive entraîne $\sum |c_n| < \infty$. Le théorème que nous allons démontrer prouve que ces deux propriétés sont équivalentes.

19.1. Pour qu'un système orthonormal $\{\varphi_n(x)\}$ possède la propriété C ou D, il faut et il suffit que

$$(*) \qquad \liminf_{n\to\infty} \int_E |\varphi_n(x)|\, dx > 0 \quad .$$

pour tout ensemble E de mesure positive.

Nécessité. Si la condition $(*)$ était fausse, il existerait un ensemble E de mesure positive tel que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E |\varphi_n(x)|\, dx = 0 \quad .$$

Il existerait donc une suite croissante d'indices $\{n_k\}$

telle que

$$\int_E |\varphi_{n_k}(x)|dx \leq \frac{1}{k^3} .$$

Choisissons $C_{n_k} = k$ et $C_n = 0$ pour les autres indices n .

Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \int_E |\varphi_n(x)|dx = \sum_{k=1}^{\infty} |C_{n_k}| \int_E |\varphi_{n_k}(x)|dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty .$$

La série $\sum C_n \varphi_n(x)$ convergerait donc absolument sur l'ensemble E de mesure positive sans que $C_n \longrightarrow 0$ et sans que , à plus forte raison, $\sum |C_n| < \infty$.

Le système $\{\varphi_n(x)\}$ ne possède donc ni la propriété C ni la propriété D.

Suffisance. Soit E^* un ensemble de mesure positive et soit $\sum C_n \varphi_n(x)$, convergente sur E^* .

On connaît le théorème d'Egoroff d'après lequel cette série est uniformément convergente sur un sous-ensemble E de E^* qui est aussi de mesure positive. La convergence étant uniforme, il s'ensuit que $|C_n \varphi_n(x)| \longrightarrow 0$ uniformément, par conséquent

$$\lim_{n \to \infty} |C_n| \int_E |\varphi_n(x)| \, dx = 0.$$

Alors, d'après l'hypothèse $(\ast)$, $c_n \longrightarrow 0$, c'est-à-dire $\{\varphi_n(x)\}$ possède la propriété C.

En ce qui concerne la propriété D, soit $\sum |c_n \varphi_n(x)|$, uniformément convergente sur l'ensemble E de mesure $|E| > 0$. Il existe, d'après l'hypothèse $(\ast)$, une constante $K > 0$ et un indice N tels que

$$\int_E |\varphi_n(x)|\, dx \geqslant K ,$$

pour tout $n > N$. Par conséquent

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n| \leqslant \frac{1}{K} \sum_{n=N}^{\infty} |c_n| \int_E |\varphi_n(x)|\, dx < \infty .$$

La propriété D est donc aussi une conséquence de $(\ast)$

Après avoir démontré ce théorème, on démontre tout de suite le théorème de Denjoy (1912) et Lusin (1912):

19.2. <u>Si une série trigonométrique converge absolument sur un ensemble de mesure positive, on a</u> $\underline{\sum (|a_n| + |b_n|) < \infty}$.

En d'autres termes, le système $\{1; \cos nx, \sin nx\}$, possède la propriété D. Or, d'après 18.1, ceci revient à dire qu'elle possède la propriété C. Mais la propriété C est le théorème de Cantor-Lebesgue, démontré dans l'exercice du § ; le théorème de Denjoy-Lusin en est donc une conséquence immédiate.

Désignons par A l'ensemble des points où la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

converge absolument et par C l'ensemble où elle converge au sens habituel. Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{C}$ les ensembles correspondant à la série conjuguée

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nx - a_n\sin nx) .$$

D'après 19.2 les ensembles A et $\tilde{A}$ sont, ou bien de mesure zéro, au bien $A = (-\pi, \pi)$ et $\tilde{A} = (-\pi, \pi)$. Ce dernier cas étant trivial, admettons que $|A| = 0$. Nous allons voir que, même dans ce cas, A n'est pas un ensemble quelconque de mesure zéro, mais il a des propriétés curieuses, comme on le voit du théorème suivant (<u>Lusin</u>, 1915):

19.3. <u>Tout point de</u> A <u>est un point de symétrie pour les ensembles</u> A, $\tilde{A}$, C, $\tilde{C}$.

Posons, pour abréger, $\alpha_o(x) = \frac{a_o}{2}$ et

$$\alpha_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \text{pour } n \geq 1,$$

puis

$$\beta_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx \quad .$$

Il s'agit de démontrer que, si

$$x \in A \quad \text{et} \quad (x+h) \in A(\text{resp. } \widetilde{A},\ C,\ \widetilde{C}) \quad ,$$

alors

$$(x - h) \in A(\text{resp. } \widetilde{A},\ C,\ \widetilde{C}) \quad .$$

En effet, on voit immédiatement que

$$\alpha_n(x+h) + \alpha_n(x-h) = 2\alpha_n(x) \cos nh,$$

$$\beta_n(x+h) - \beta_n(x-h) = 2\,\beta_n(x) \sin nh \quad .$$

(Calculez s.v.p.!) Or, si $x \in A$ et $(x+h) \in A$, les séries

$$\sum |\alpha_n(x)|\,|\cos nh| \quad \text{et} \quad \sum |\alpha_n(x+h)|$$

sont convergentes, donc en vertu de la première formule,

$\sum |\alpha_n(x - h)|$ l'est aussi.

Si $x \in A$ on a évidemment, $x \in \tilde{A}$, c'est-à-dire que

$\sum |\beta_n(x)||\sin nh|$ converge. En supposant donc $(x + h) \in \tilde{A}$,
on tire de la deuxième formule que $\sum |\beta_n(x - h)| < \infty$.

L'enoncé est donc démontrée pour A et $\tilde{A}$. Soit alors
$x \notin A$ et $(x + h) \in C$.

De la convergence absolue de $\sum \alpha_n(x) \cos nh$ et de la convergence au sens habituel de $\sum \alpha_n(x + h)$ on obtient, en vertu de la première formule , la convergence de la série $\sum \alpha_n(x - h)$. La seconde formule rend le même résultat pour la série $\sum \beta_n(x - h)$. L'énoncé du théorème 18.3 est ainsi démontrée pour les ensembles C et $\tilde{C}$.

L'ensemble A possède encore d'autres curieuses propriétés. Nous n'entrons pas dans les détails et nous retournons aux séries de Fourier. Un critère classique pour la convergence des séries de Fourier est le suivant (Bernstein, 1914):

19.4. *Si la fonction* 2π-*périodique* $f(x)$ *satisfait à une condition* Lip α *avec* $\alpha > \frac{1}{2}$, *sa série de Fourier converge absolument* (partout).

En développant $f(x + h)$ et $f(x - h)$ en série de Fourier, on obtient avec les abréviations introduites dans la démonstration du théorème précédant:

$$f(x + h) - f(x - h) \sim -2\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x) \sin nh \quad ,$$

par conséquent

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x + h) - f(x - h)\Big]^2 dx = 4\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \sin nh \quad .$$

Comme $|f(x + h) - f(x)| \leqslant M|h|^{\alpha}$, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x + h) - f(x - h)\Big]^2 dx \leqslant 2M^2|h|^{2\alpha} ,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \sin^2 nh \leqslant \frac{M^2}{2}|h|^{2\alpha} ,$$

d'où

$$\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}(a_k^2 + b_k^2)\sin^2 kh \leqslant \frac{M^2}{2}|h|^{2\alpha} .$$

Si nous prenons $h = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, on a pour tout k compris en tre 2^{n-1} et 2^n

$$\sin^2 \frac{k}{2^{n+1}} \geqslant \tfrac{1}{2} ,$$

par conséquent

$$\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (a_k{}^2 + b_k{}^2) \leqslant M^2 \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^{2\alpha} .$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$\sum_{k\ 2^{n-1}+1}^{2^n} (|a_k| + |b_k|) \leqslant \left\{ \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (a_k{}^2 + b_k{}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} 1 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (a_k{}^2 + b_k^2) \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Il s'ensuit donc

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (a_k{}^2 + b_k{}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$M \pi^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(\alpha - \frac{1}{2})}} .$$

tre 2^{n-1} et 2^{n}

$$\sin^2 \frac{k}{2^{n+1}} \geqslant \tfrac{1}{2} \;,$$

par conséquent

$$\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (a_k^{\,2} + b_k^{\,2}) \leqslant M^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^{2\alpha} .$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$\sum_{k\; 2^{n-1}+1}^{2^n} (|a_k| + |b_k|) \leqslant \left\{ \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (a_k^{\,2} + b_k^{\,2}) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} 1 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (a_k^{\,2} + b_k^2) \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Il s'ensuit donc

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} (a_k^{\,2} + b_k^{\,2}) \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$M\pi^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(\alpha-\frac{1}{2})}} .$$

Or, la dernière série est convergente, puisque nous avons supposé $\alpha - \frac{1}{2} > 0$, et alors

$$\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < \infty ,$$

C. Q. F. D.

Remarque. Pour la littérature et d'autres problèmes concernant le convergence absolue, consultez T.S. I. chapitre VI et CP. p. 326 - 337 .

Exercices.1. Démontres le théorème suivant dû à Fatou (1906): Si $|a_n| \geqslant |a_{n+1}| \geqslant \dots$ et la série $\sum a_n \cos nx$ converge absolument en un seul point x_o, alors $\sum |a_n| < \infty$. La même propriété possède la série $\sum a_n \sin nx$, pourvu que $x_o \not\equiv 0 (\mathrm{mod.}\pi)$.

(L'hypothèse implique $\sum |a_n| \cos^2 nx_o < \infty$ .Comme

$2 \cos^2 nx_o = 1 + \sin y_o$ où $y_o = 2x_o$ et la série

$\sum |a_n| \sin y_o$ converge, d'après 8.1 en vertu de la monotonie de $\{|a_n|\}$) le théorème est démontré.

La démonstration de la deuxième partie est analogue).

2. Démontrez que si la série $\sum c_n r_n(x)$, où $r_n(x)$ est la n-ième fonction de Rademacher, converge absolument sur un sensemble de mesure positive , alors $\sum |c_n|$ converge aussi.

(Appliquez le théorème 19.1 au système $\{r_n(x)\}$) .

3. Démontrez un théorème de <u>Kaczmarz-Steinhaus</u>, (1930) : Si $f(x)$ est unilatéralement bornée et pour tout $\nu \geqslant 2$ on a

$$(*) \qquad \int_0^1 f(x) \prod_{k=1}^{\nu} r_k(x)dx = 0 \quad ,$$

alors le développement de $f(x)$ en série de Rademacher

$$f(x) \sim \sum c_n r_n(x)$$

est partout absolument convergente.

(On voit que, si $x \neq \frac{p}{2^q}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n r_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x) \text{ sig n } r_n(x) \quad ,$$

par conséquent, en tenant compte de $(*)$,

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n| = \int_o^1 f(t) \sum_{n=1}^{N} r_n(t)\, r_n(x)\, \text{sign}\, r_n(x)\, dt =$$

$$= \int_o^1 f(t) \prod_{n=1}^{N} \left[1 + r_n(t)\, r_n(x)\, \text{sign}\, r_n(x)\right] dt\ .$$

Or, $|r_n(t)| \leqslant 1$, donc $1 + r_n(t)\, r_n(x)\, \text{sign}\, r_n(x) \geqslant 0$.

La fonction f(x) étant unilatéralement bornée, soit $f(t) \leq M$, il s'ensuit

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n| \leqslant M \int_o^1 \prod_{n=1}^{N} \left[1 + r_n(t)\, r_n(x)\, \text{sign}\, r_n(x)\right] dt =$$

$$= M \int_o^1 \prod_{n=1}^{N} \left[1 + r_n(t)\right] dt = M.$$

Comme N est arbitraire, la démonstration est achevée).

AVIS AUX JEUNES LECTEURS

Si le thème dont nous venons d'esquisser quelques parties vous intéresse, n'oubliez pas que ces notes ne sont qu'une modeste introduction à un vaste domaine de l'Analyse. Pour élargir vos connaissances, consultez les deux livres tant de fois cités, T.S.I, II, et CP. Si vous voulez approfondir l'étude de la théorie des séries générales, vous trouverez beacoup de matériel dans le livre de G. H. Hardy, Divergent Series (Oxford, 1949). Si votre intérêt porte sur la théorie des séries orthogonales générales, lisez aussi le livre de S. Kaczmarz et H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen (Warszawa - Lwów, 1935). Mais n'oubliez pas une chose: même le meilleur manuel est plus ou moins unilatéral, car il reflète toujours le goût de son auteur. Pour approfondir sérieusement un sujet, il faut lire et digérer beaucoup de mémoires et de notes originelles. Et surtout, essayez de résoudre tant de problèmes que possible. Cherchez-les partout, dans les livres, dans les revues mathématiques et surtout dans vous-même. Essayez de les résoudre et analysez la solution trouvée pour en ressortir l'idée essentielle, enveloppée quelquefois dans un calcul labourieux, mais qui n'est pas, pourtant, identique à l'essentiel. En travaillant de cette manière vous trouverez la plus grande satisfaction: la recherche.

* IMPRESO EN TECNOCOP * LAVALLE 2257 * LOC. 26-27 * BS.AS. * ARGENTINA