ISSN 0078 - 2009

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

Nº 12

JOSE LUIS TORREA HERNANDEZ

INTEGRALES SINGULARES VECTORIALES

ALGUNAS APLICACIONES DE UNA VERSION ACTUALIZADA DE UN RESULTADO DE A. BENEDEK, A. P. CALDERON Y R. PANZONE

1984

INMABB - CONICET
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS es una colección destinada principalmente a reunir los trabajos de investigación, notas de curso, conferencias, seminarios, realizados en la Universidad Nacional del Sur en el campo del Algebra y del Análisis.

Esta publicación no tendrá un carácter periódico. Los fascículos —cada uno de los cuales contendrá en general un solo trabajo— serán numerados en forma continuada.

Las Universidades, Academias, Sociedades Científicas y los Editores de Revistas de Matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Toda la correspondencia relativa a esta colección deberá ser dirigida a:

SERVICIO DE CANJE
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS est une collection destinèe principalement à reunir les travaux de recherches, notes de cours, conférences, séminaires, réalisés dans l'Université Nationale du Sud dans le domaine de l'Algèbre et de l'Analyse.

Cette publication n'aura pas un caractère périodique. Les fascicules —chacun desquels aura en genéral un seul travail— seront numérotés d'une façon continuée.

Les Universitês, les Académies, les Sociétés Savantes et les Editeurs de Revues de Mathématiques sont instamment priés d'échanger leurs publications contre celles de l'Institut de Mathématique de l'Université Nationale du Sud.

Toute la correspondance relative à cette collection doit être adressée à:

SERVICIO DE CANJE
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

N° 12

INTEGRALES SINGULARES VECTORIALES:

Algunas Aplicaciones de una Versión Actualizada de un Resultado de A.Benedek, A.P.Calderón y R.Panzone

José Luis Torrea Hernández

INMABB - CONICET

1984

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

SUMMARY.

We present an up to date version of the 1962 result of A.I.Benedek, A.P.Calderón and R.Panzone.

This version allows us to obtain the results of Fefferman - Stein and of Andersen - John for the Hardy-Littlewood maximal function, looking at this maximal function as a singular integral from scalar valued functions to ℓ^∞-valued functions.

We obtain also the result of F.Zo for a maximal operator given by

$$M_\varphi f(x) = \sup_{\delta>0} |f*\varphi_\delta(x)|$$

where φ is an integrable function satisfying

$$\int_{|x|>2|y|} \sup_{\delta>0} |\varphi_\delta(x-y)-\varphi_\delta(x)| \, dx \leqslant C.$$

If the method is applied to the Carleson maximal operator

$$T^*f(x) = \sup_n \int \frac{e^{iny}}{x-y} f(y) \, dy$$

the Carleson-Hunt theorem allows us to obtain the result of Hunt and Wo San Young and the fact that T^* maps L^∞ in B.M.O. Using a result of Rubio de Francia we obtain also the boundedness of T^* from $L^p(w,\ell^q)$ into itself for $w \in A_p$, $1 < p,q < \infty$.

Some applications to the Littlewood-Paley theory are also considered.

Dedico este trabajo a mis padres José y Tomasa

PREFACIO.

Estas notas corresponden a un curso desarrollado en el mes de Agosto de 1983 en la Universidad Nacional del Sur en Bahía Blanca, República Argentina, con una Ayuda de Investigación Cooperativa del Ministerio de Educación y Ciencia del Estado Español.

Quiero agradecer a la Universidad Nacional del Sur la invitación para impartir dicho curso así como su gentileza al contratarme como profesor titular. Tengo que hacer mención expresa de la gran hospitalidad de todos los miembros del Departamento e Instituto de Matemática de la U.N.S. que tan agradable han hecho mi estancia en Bahía Blanca. A todos ellos muchas gracias.

Es un placer expresar mi gratitud a José Luis Rubio de Francia que me introdujo en Análisis Armónico y a cuyo lado siempre es tan agradable trabajar.

Madrid
Setiembre 1983

INTRODUCCION.

Las presentes notas pretenden poner de manifiesto que una versión puesta al día del trabajo de Benedek, Calderón y Panzone de 1962, referente al estudio de integrales singulares con valores vectoriales, incluye de un modo sencillo resultados notables como por ejemplo los obtenidos por Fefferman y Stein, Zo, Hunt y Wo San-Young, Andersen y John (ver referencias)

El método desarrollado permite obtener además acotaciones vectoriales nuevas para ciertos operadores como los de la transformada de Hilbert y la función maximal a lo largo de curvas (ver Stein-Wainger), asimismo permite obtener para el operador maximal de Carleson un teorema del tipo del obtenido por Andersen y John para la función maximal de Hardy y Littlewood.

El desarrollo de las notas es como sigue. En las cinco primeras secciones se exponen los conocimientos y técnicas necesarias para el desarrollo posterior. Se ha pretendido ir por la "geodésica" para poder llegar cuanto antes al punto que se quiere tratar, por ello se omiten a veces demostraciones que aunque interesantes e ilustrativas en sí mismas no tienen aporte a la teoría de integrales singulares.

En concreto se comienza en la sección 1 con una somera descripción de la integración vectorial en sentido de Bochner, la sección 2 se ocupa de describir el operador maximal de Hardy Littlewood que es una herramienta básica en la teoría, por ejemplo su uso es fundamental en la descomposición de Calderón-Zygmund expuesta en la sección 3. Las clases de pesos A_p de Muckenhoupt constituyen el tema de la sección 4 y el espacio B.M.O. el de la sección 5.

En la sección 6 se enuncian y demuestran los resultados fundamentales.

El teorema fundamental establece que si un operador T viene dado esencialmente por

$$Tf(x) = \int K(x-y)\, f(y)\, dy$$

donde f es una función valorada en un Banach A y K es una función valorada en $\mathcal{L}(A,B)$ satisfaciendo ciertas condiciones de cancelación como por ejemplo

$$(*) \quad \int_{|x|>2|y|} \|K(x-y)-K(x)\|\, dx \leqslant C \qquad y \neq 0$$

entonces supuesto que T sea acotado de $L^r(A)$ en $L^r(B)$ para un $r > 1$, se obtienen las acotaciones de $L^p(A)$ en $L^p(B)$ para todo p, $1 < p < \infty$. Además la la condición $(*)$ la verifica trivialmente el núcleo del operador $\widetilde{T}$ extendido de T a valores en ℓ^q con lo cual se obtienen acotaciones de $L^p(\ell^q(A))$ en $L^p(\ell^q(B))$.

Si en lugar de $(*)$ K verifica una condición más fuerte como

$$(**)\qquad \|K(x-y)-K(x)\| < C\,\frac{|y|}{|x|^{n+1}} \qquad \text{si}\quad |x|>2|y|$$

entonces se obtienen acotaciones de $L^p(w,\ell^q)$ en $L^p(w,\ell^q)$ para pesos $w \in A_p$.
En la sección 7 se aplican estos resultados a operadores maximales, puesto que todo operador maximal

$$T^*f(x) = \sup_n |T_n f(x)| = \|\{T_n f(x)\}_n\|_{\ell^\infty}$$

puede verse como un operador que manda funciones escalares en funciones ℓ^∞-valoradas.

Entonces desde este punto de vista se obtienen de manera general los teoremas de F.Zo, Fefferman y Stein, Andersen y John para la función maximal de Hardy Littlewood.

Los operadores maximales vuelven a ser considerados en la sección 9 bajo la óptica de los operadores dados por núcleos de dos variables, es decir operadores dados por

$$Tf(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy$$

con K una función valorada en $\mathcal{L}(A,\ell^\infty(B))$. A este modelo se ajusta el operador maximal de Carleson

$$T^*f(x) = \sup_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-int}}{x-t}\, f(t)\, dt$$

para el cual se obtienen (supuesto cierto el teorema de Carleson) el teorema de acotación con peso de Hunt y Wo San Young y teoremas del tipo de Andersen y John. En particular ambos resultados son ciertos para el maximal de la serie de Fourier

$$S^*f(x) = \sup_n |S_n f(x)|$$

En la sección 8 se tratan los operadores de tipo Littlewood-Paley desde la óptica de operadores valorados en espacios de Hilbert. Este tipo de aplicación es clásica y se remonta al trabajo de Benedek, Calderón y Panzone. Aquí se obtienen teoremas del tipo de Andersen y John para el operador

$$f \longrightarrow \Big(\sum_{I\in\Delta} |S_I f|^2\Big)^{1/2}$$

Las ideas desarrolladas aquí son fruto del trabajo realizado conjuntamente por J.L.Rubio de Francia, F.Ruiz y el autor, (ver referencias).

1. INTEGRAL DE BOCHNER.

A lo largo de estas notas A y B designarán espacios de Banach reales o complejos con normas $\|.\|_A$, $\|.\|_B$ (pondremos simplemente $|.|_A$, $|.|_B$ e incluso $|.|$ si no hay lugar a confusión). El dual topológico será designado por A^*, B^*.

Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida positiva σ-finita

(1.1) Una función $f: X \longrightarrow B$ se dice simple si existe una familia de conjuntos medibles de medida finita tal que f es constante en cada uno de ellos y cero en el complementario de la unión de la familia.

(1.2) La función $f: X \longrightarrow B$ se dice medible si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples que convergen en casi todo punto a f. La convergencia anterior se entiende en la norma de B. Si B separable f es medible si y sólo si para todo $\xi \in B^*$ la función escalar $<\xi,f(x)>$ es medible.

(1.3) Sea $f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{A_i}(x)$, $b_i \in B$, $A_i \in \mathcal{A}$ una función simple: se define la integral de Bochner de f con respecto a μ como $\sum_{i=1}^{n} b_i\mu(A_i)$ y se indica por $\int_X f(x)\, d\mu(x)$ o simplemente $\int_X f\, d\mu$.

Si $M \in \mathcal{A}$ se define la integral Bochner de f sobre M como $\sum_{i=1}^{n} b_i\mu(A_i \cap M)$ y se indica $\int_M f\, d\mu$.

Es obvio que $\int_M f\, d\mu = \int_X f.\chi_M\, d\mu$.

(1.4) Una función $f: X \longrightarrow B$ se dice integrable Bochner si existe una sucesión de funciones simples f_n que convergen a f en casi todo punto y tales que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f(x)-f_n(x)|\, d\mu(x) = 0$$

Si se verifica esta condición, se comprueba que para cada conjunto $M \in \mathcal{A}$ existe

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \chi_M.f\, d\mu$$

en el sentido de la norma del espacio B y que el valor de este límite es independiente de la sucesión f_n. Entonces, por definición, la integral de Bochner de f sobre el conjunto M es

$$\int_M f\, d\mu = \lim_n \int_X \chi_M f_n\, d\mu$$

El teorema siguiente debido a Bochner es clave en la teoría de integración vectorial

(1.5) Una función f: $X \longrightarrow B$ medible es integrable Bochner si y solo sí la función escalar $g(x) = |f(x)|$ es integrable.

Corolarios de este teorema son los dos siguientes resultados el primero de los cuales establece la desigualdad integral de Minkowski.

(1.6) Si f es integrable Bochner

$$\left|\int_M f\, d\mu\right| \leqslant \int_M |f|\, d\mu \qquad M \in A.$$

(1.7) Sea T un operador lineal acotado de B en otro espacio de Banach A. Si f es una función integrable Bochner valorada en B entonces $T \circ f$ es integrable Bochner valorada en A y además

$$\int_M T(f(x)\, d\mu(x) = T(\int_M f(x)\, d\mu(x)) \qquad M \in A$$

Un caso particular interesante es tomar $A = C$ y $T = b^* \in B^*$ con lo cual

$$\int_M \langle b^*, f(x)\rangle\, d\mu(x) = \langle b^*, \int_M f(x)\, d\mu(x)\rangle$$

Una consecuencia de esta identidad es que para funciones f valoradas en los espacios de sucesiones ℓ^q si $f = (f_j)$ es integrable se tiene que

$$\int (f_j)_j\, d\mu = (\int f_j\, d\mu)_j$$

(1.8) Se designa por $L^p(X,B)$, $0 < p < \infty$, al conjunto de funciones f: $X \longrightarrow B$ medibles tales que

$$\|f\|_p = (\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x))^{1/p} < \infty$$

Si $1 \leqslant p < \infty$ $(L^p(X,B), \|.\|_p)$ es un espacio de Banach.

(1.9) Por $L^\infty(X,B)$ se designa al conjunto de funciones f medibles tales que existe $k > 0$ para el que $|f(x)| \leqslant k$ en casi todo x. Se define

$$\|f\|_\infty = \inf\{k: |f(x)| \leqslant k \quad \text{c.t.p.x}\}$$

El espacio $(L^\infty(X,B), \|.\|_\infty)$ es de Banach.

(1.10) El comportamiento en dualidad no es todo lo "agradable" que esperaríamos. Así si $1 < p < \infty$ no es cierto en general que $L^p(X,B)^* = L^{p'}(X,B^*)$ con $(p-1)(p'-1) = 1$. Lo único que puede asegurarse es que $L^{p'}(X,B^*) \subset L^p(X,B)^*$ isométricamente $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

El teorema de dualidad $L^{p'}(X,B^*) = L^p(X,B)^*$ caracteriza a los espacios con dual B^* satisfaciendo la llamada propiedad de Radon-Nikodym, es decir que se cumple el teorema de Radon-Nikodym para medidas ν,μ: $X \longrightarrow B^*$ con μ positiva y ν verificando las hipótesis correspondientes con respecto a μ.

(1.11) Un operador T que mande funciones simples A-valoradas en medibles B-valoradas diremos que es sublineal si

$$|T(f_1+f_2)(x)|_B \leqslant |Tf_1(x)|_B + |Tf_2(x)|_B$$

Un operador sublineal del tipo anterior diremos que es (p,p)-fuerte si es

$$\int_X |Tf(x)|^p . d\mu(x) \leqslant C \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

y (p,p)-débil si

$$\mu(\{x: |Tf(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{C'}{\lambda^p} \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

La desigualdad de Kolmogorov dice que la condición (p,p)-fuerte es más fuerte que la condición (p,p)-débil.

Especial importancia en este contexto tiene el teorema de interpolación de Marcinkiewicz del que haremos uso a lo largo de estas notas:

Si T es un operador sublineal del tipo anterior tal que es (q,q)-débil y (r,r)-débil con $1 \leqslant q < r \leqslant \infty$, entonces T es de tipo (p,p)-fuerte con $q < p < r$.

(1.12) Para toda esta parte ver Diestel Uhl y la amplia bibliografía citada allí.

(1.13) NOTACION. Cuando no haya lugar a confusión denotaremos a $L^p(X,B)$ como $L^p(B)$.

2. FUNCION MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD.

(2.1) DEFINICION. Para una función φ localmente integrable en R^n definimos la función maximal de Hardy-Littlewood

$$M\varphi(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |\varphi(y)|\, dy$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos de lados paralelos a los ejes (simplemente cubos a partir de ahora) y que contienen al punto x.

(2.2) OBSERVACIONES.

a) Es obvio que:

$$M\varphi(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_{x+Q} |\varphi(y)|\, dy$$

donde el supremo está tomado sobre los cubos de R^n que contienen al origen. Para cada cubo de esta familia, $-Q$ es otro cubo de dicha familia con la misma medida y por tanto

$$M\varphi(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_{x-Q} |\varphi(y)|\, dy = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |\varphi(x-y)|\, dy$$

es decir

(2.3) $$M\varphi(x) = \sup |\varphi| * \frac{\chi_Q(x)}{|Q|}$$

b) Si para una función medible $f(x)$ definimos

$$f_\delta(x) = \delta^{-n} f(\tfrac{x}{\delta}) \qquad \delta > 0$$

denotando por Q_δ un cubo con radio δ y por Q_1 el cubo concéntrico y con radio 1 se tiene

$$(\chi_{Q_1})_\delta(x) = \frac{\chi_{Q_\delta}(x)}{|Q_\delta|}$$

De este modo la función maximal puede escribirse como

$$M\varphi(x) = \sup |\varphi| * (\chi_{Q_1^c})_\delta(x)$$

donde por Q_1^c denotamos los cubos de radio 1 y centro c que contienen al origen y el supremo se toma para todos los posibles c's y δ's.

Es una comprobación el hecho de que las funciones

$$\delta \longrightarrow |\varphi| * (\chi_{Q_1})_\delta(x)$$
$$c \longrightarrow |\varphi| * \chi_{Q_1^c}(x)$$

son continuas por lo que el supremo de la definición del operador maximal basta tomarlo sobre un conjunto numerable ($\delta \in Q^+$, $c \in Q^n$) con lo cual la función $M\varphi(x)$ es medible.

El siguiente teorema nos dice que el operador sublineal

$$\begin{aligned} L^1_{loc}(R^n) &\longrightarrow \{\text{medibles en } R^n\} \\ \varphi &\longrightarrow M\varphi \end{aligned}$$

se extiende acotadamente para ciertos espacios.

(2.4) TEOREMA. i) $|\{x: Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$, $f \in L^1(R^n)$

ii) $\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p$, $f \in L^p(R^n)$, $1 < p \leq \infty$

Las constantes C, C_p *son absolutas, sólo dependen de la dimensión y de* p.

DEMOSTRACION. Es claro que para funciones $f \in L^\infty(R^n)$, el operador maximal Mf está bien definido y verifica

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

con lo cual apelando al teorema de interpolación de Marcinkiewicz basta probar i).

Dada $f \in L^1(R^n)$ y $\lambda > 0$ consideramos el conjunto

$$E_\lambda = \{x: Mf(x) > \lambda\}$$

Si $x \in E_\lambda$, existe un cubo (que depende de x) tal que

$$\frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| \, dy > \lambda \tag{2.5}$$

Por tanto

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in Q_\lambda} Q_x \tag{2.6}$$

Supongamos demostrado el siguiente

(2.7) LEMA. *Sea* E *un conjunto medible de* R^n *que está cubierto por una unión de cubos* Q *de diámetro acotado. Entonces existe una sucesión de cubos disjuntos* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots$ *tal que*

$$\sum_k |Q_k| \geq C\,|E|$$

Las desigualdades (2.5) y (2.6) nos garantizan las hipótesis del lema (pués $|Q_x| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$) por tanto podemos extraer una sucesión $Q_1, \ldots, Q_k, \ldots$ disjunta tal que

$$|E_\lambda| \leq C \sum_k |Q_k| \leq C \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} |f(y)|\, dy \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 . \quad \blacksquare$$

DEMOSTRACION DEL LEMA 2.7. Sea Q_1 tal que $\mathrm{diam}(Q_1) \geq \frac{1}{2} \sup \{d(Q)\}$.
Sea Q_2 tal que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ y $\mathrm{diam}(Q_2) \geq \frac{1}{2} \sup \{d(Q) : Q \cap Q_1 = \emptyset\}$ en el paso k sea Q_k tal que $Q_k \cap (\bigcup_{j=1}^{k-1} Q_j) = \emptyset$ y $\mathrm{diam}\ (Q_k) \geq$
$\geq \frac{1}{2} \sup\{d(Q) : Q \cap (\bigcup_{1}^{k-1} Q_j) = \emptyset\}$.
Si $\sum |Q_k| = \infty$ no hay nada que demostrar.
Si $\sum |Q_k| < \infty$, entonces $\mathrm{diam}(Q_k) \longrightarrow 0$ y por tanto dado un cubo Q del recubrimiento existirá un k tal que

(2.8) $\qquad d(Q_{k+1}) < \frac{1}{2} d(Q) \leq d(Q_k) \leq \ldots \leq d(Q_1)$

Si $Q \cap (\bigcup_{j=1}^{k} Q_j) = \emptyset$, entonces $d(Q_{k+1}) \geq \frac{1}{2} d(Q)$ lo cual contradice (2.8).
Por tanto $Q \cap (\bigcup_{j=1}^{k} Q_j) \neq \emptyset$, es decir existe j tal que $Q \cap Q_j \neq \emptyset$ con $d(Q) \leq$ $\leq 2\, d(Q_j)$, esto permite asegurar que $Q \subset Q_j^*$, siendo Q_j^* el cubo concéntrico Q_j y radio 5 veces el de Q_j. Es decir $E \subset \cup Q_j^*$ y $|E| \leq \sum |Q_j^*| = 5^n \sum |Q_j|$ $\blacksquare$

NOTAS. (2.9) Si definimos la función maximal "centrada"

$$M_c\varphi(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |\varphi(y)|\, dy$$

de modo que el supremo se toma sobre los cubos Q centrados en x es fácil ver que

$$\frac{1}{2^n} M \varphi(x) \leq M_c\varphi(x) \leq M \varphi(x)$$

por lo que se tienen los resultados del teorema 2.4 también para la función maximal centrada.

(2.10) En general dada una familia de conjuntos medibles $\mathcal{B} = \{B\}$ con excentricidad acotada p.e. rectángulos, elipses etc. puede definirse la función maximal correspondiente y se verifica el teorema (2.4).

(2.11) En el caso de que se tome una familia de Bolas y la función maximal centrada, puede verse que las constantes C_p , $1 < p \leq \infty$ no dependen de n, ver Stein 2.

En cuanto a la constante de la desigualdad (1,1)-débil recientemente se ha probado que su crecimiento está acotado por $n \log n$ E.M.Stein, J.O.Stromberg 1.

(2.12) El teorema (2.4) tiene consecuencias clásicas en la teoría de diferenciación de integrales como por ejemplo el Teorema de diferenciación de Lebesgue que asegura para funciones localmente integrables la siguiente igualdad en casi todo x

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} f(y)\, dy = f(x)$$

Q_r denotan cubos centrados en x y de radio r, ver De Guzman 1.

(2.13) Todo lo anterior vale para funciones valoradas en espacios de Banach cambiando módulo por norma.

En concreto para funciones simples $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x)$ con $c_i \in B$, donde B es un Banach, puede definirse

$$M\,\varphi(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q \|\varphi(x)\|_B \, dx$$

y el operador $\varphi \longrightarrow M\varphi$ definido en principio de {simples integrables B-valoradas} en {Medibles B-valoradas} admite las extensiones acotadas que se demuestran en el Teorema 2.4 y por tanto todas sus consecuencias.

(2.14) La desigualdad (1,1)-fuerte no puede darse en el teorema (2.3), para verlo basta coger $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ en R y entonces $Mf(x)$ no es integrable pues es esencialmente $\frac{1}{x}$ cuando $x \longrightarrow \infty$ ver De Guzman 1.

3. DESCOMPOSICION DE CALDERON-ZYGMUND.

En este parágrafo nos vamos a ocupar de un resultado técnico que fue introducido por A.P.Calderón y A.Zygmund en Acta Math.1952 y que es en cierto modo un "mecanismo de relojería" (en palabras de J.L.Rubio de Francia) a aplicar a las integrales singulares.

(3.1) TEOREMA. (Descomposición de Calderón-Zygmund). *Sea* $f \in L^1(R^n)$. *Dado* $\alpha > 0$ *existen unos cubos disjuntos* $\{Q_j\}_1^\infty$ *y una descomposición*

$$f = g+b = g + \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

con las propiedades siguientes:

i) $|g(x)| \leqslant C\,\alpha \qquad \|g\|_1 \leqslant \|f\|_1$

ii) $\operatorname{sop} b_j \subset Q_j$

iii) $\displaystyle\int_{Q_j} b_j(x)\,dx = 0 \quad , \quad \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |b_j(x)|\,dx \leqslant C\,\alpha$

iv) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leqslant \frac{C}{\alpha}\,\|f\|_1$

C *denota una constante que no tiene porque ser la misma en cada caso.*

DEMOSTRACION. Dividimos R^n en una red de cubos disjuntos todos iguales tales que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \leqslant \alpha$$

se puede lograr haciendo Q grande por ser $f \in L^1(R^n)$.

Cada cubo de esta red lo dividimos en 2^n cubos congruentes, sin más que dividir por 2 todas sus aristas. De este modo obtenemos unos cubos (cubos "hijos") de radio mitad del radio de los anteriores (cubos "padres").

En estos cubos hijos hay dos posibilidades

$$\text{I.-} \quad \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(y)|\,dy \leqslant \alpha$$

$$\text{II.-} \quad \frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} |f(y)|\,dy > \alpha$$

Los cubos del segundo caso se conservan y en el primer caso se repite el proceso.

El proceso se reitera mientras sea posible y se obtiene de este modo una sucesión de cubos disjuntos $\{Q_j\}$ que nos verifica el teorema como vamos a comprobar.

Dado un cubo Q_j llamamos $\tilde{Q}_j$ al padre de Q_j y así tenemos

$$(3.2)\qquad \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|dx \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{\tilde{Q}_j}|f(x)|dx \leq \frac{2^n}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j}|f(x)|dx < 2^n\,\alpha$$

Se definen

$$g(x) = \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \qquad \text{para } x \in Q_j,$$

$$g(x) = f(x) \quad \text{en otro caso y}$$

$$b_j(x) = \Big(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f\Big)\, \chi_{Q_j}(x)$$

Es claro que $f = g + \sum_{j=1}^{\infty} b_j$.

Además teniendo en cuenta (3.2) y la definición de b_j se tiene:

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b_j(x)|\, dx \leq 2\,\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\, dx \leq 2^{n+1}\,\alpha$$

La construcción de los cubos es tal que $|Q_j| \leq \frac{1}{\alpha}\int_{Q_j}|f|$ por tanto teniendo en cuenta que son disjuntos $\sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|f\|_1$.

En cuanto a g es obvio que

$$\int_{R^n}|g(x)|\, dx = \int_{\cup_j Q_j}|g(x)|\, dx \quad \int_{(\cup_j Q_j)^c}|g(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \sum_j \int_{Q_j}|f(x)|\, dx + \int_{(\cup_j Q_j)^c}|f(x)|\, dx = \int_{R^n}|f(x)|\, dx.$$

Si $x \in Q_j$ entonces $|g(x)| \leq 2^n\alpha$. Si $x \notin \bigcup_j Q_j$ quiere decir que todos los cubos que aparecen en esta construcción y que contienen a x verifican que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \leq \alpha$$

por tanto por el Teorema de diferenciación de Lebesgue (2.12) $|f(x)| \leq \alpha$ en c.t.p.x.

NOTAS. (3.2) La descomposición anterior también es válida si se toman como "cubos" los conjuntos

$$\{x: \max_{1\leq i\leq n} |x_i - c_i|^{1/a_i} \leq r\}$$

donde $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ son enteros.

Estos cubos permiten desarrollar la teoría para el caso de dilataciones no isotrópicas del tipo

$$\delta(x) = (\delta^{a_1}x_1,\dots,\delta^{a_n}x_n)$$

Ver Stein-Wainger 1, Coifman-Weiss 1.

(3.3) Al igual que pasaba para la función maximal de Hardy-Littlewood la descomposición es válida para funciones valoradas en espacios de Banach.

4. DESIGUALDADES CON PESO.

Llamaremos "peso" a una función w(x) medible, no negativa y localmente integrable.

Sea $1 < p < \infty$, diremos que $w \in A_p$ si

$$(4.1) \qquad \sup\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1} \leq C$$

donde el supremo está tomado sobre todos los cubos de R^n.

Al ínfimo de las constantes que verifican (4.1) se le llama "constante A_p" de w.

Diremos que un peso $w \in A_1$ si verifica alguna de las dos condiciones siguientes que son equivalentes entre sí

$$(4.2) \qquad M\,w(x) \leq C\,w(x) \quad \text{en c.t.p.x}$$

$$(4.2)' \quad \text{Para todo cubo } Q \quad \frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\,dy \leq C \inf \operatorname{ess}_Q w(x) \quad \text{en c.t.p.x de } Q.$$

Las clases A_p verifican las siguientes relaciones

$$(4.3) \qquad \text{Si } 1 < p < q \;, \quad \text{entonces} \quad A_1 \subset A_p \subset A_q$$

$$(4.4) \qquad w \in A_p, \quad 1 < p < \infty \;, \quad \text{si y solo sí} \quad w^{1-p'} \in A_{p'}$$

(4.3) es consecuencia de la desigualdad de Hölder y (4.4) de la relación $(p-1)(p'-1) = 1$. Ver Coifman-Fefferman

La relación de las clases A_p con la función maximal de Hardy-Littlewood fue puesta de manifiesto en 1972 por Muckenhoupt mediante el siguiente

(4.5) TEOREMA. *Sea* w *un peso. Son equivalentes*

i) $w \in A_p \quad 1 \leq p < \infty$

ii) $\displaystyle\int_{\{x:Mf(x)>\lambda\}} w(y)\,dy \leq \frac{C_p}{\lambda^p}\int_{R^n} |f(y)|^p\,w(y)\,dy$

La constante p *no depende de las funciones* f.

Es decir el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado de $L^p(w(x)dx)$ en débil-$L^p(w(x)dx)$ si y solo sí w está en A_p.

El teorema anterior permite obtener más información sobre las clases A_p y puede demostrarse por ejemplo que si $w \in A_p$ con constante C y Q_λ denota un cubo concéntrico con Q y con radio λ veces el radio de Q entonces

$$w(Q_\lambda) \leqslant C\, \lambda^{np}\, w(Q)$$

Especial importancia tiene el siguiente teorema (ver Coifman-Fefferman).

(4.6) TEOREMA. *Sea* w *un peso. Son equivalentes:*

i) $w \in A_p$ *para algún* $p \in [1,\infty)$.

ii) *Para cada* $\alpha \in (0,1)$ *existe* $\beta \in (0,1)$ *dependiente de* α *tal que si* E *es un conjunto medible contenido en un cubo* Q *y* $|E| < \alpha|Q|$, *entonces* $w(E) \leqslant \beta w(Q)$.

iii) *Existe un* $\varepsilon > 0$ *que depende de* w *tal que para todo cubo* Q

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx$$

La constante C *no depende del cubo.*

iv) *Existen dos constantes* C,δ *positivas que dependen de* w *tales que para todo conjunto* $E \subset Q$

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leqslant C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta}$$

En el teorema anterior se entiende que

$$w(E) = \int_E w(x)\,dx$$

El punto iii) es conocido como "Desigualdad de Hölder al revés" ya que la desigualdad contraria para C=1 la da la desigualdad de Hölder.

Un corolario importante y no inmediato del punto iii) es el siguiente

(4.7) COROLARIO. *Si* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, *entonces existe un* $q < p$ *tal que* $w \in A_q$.

Una apelación al teorema de interpolación de Marcinkiewicz y al teorema (4.5) da el siguiente

(4.8) TEOREMA. *Para un peso* w *las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $w \in A_p$, $1 < p < \infty$.

ii) $$\int_{\{x:Mf(x)>\lambda\}} w(y)\,dy \leqslant \frac{C_p}{\lambda^p}\int_{R^n} |f(y)|^p\, w(y)\,dy$$

iii) $$\int_{R^n} Mf(x)^p\, w(x)\,dx \leqslant C'_p \int |f(x)|^p\, w(x)\,dx$$

C_p y C'_p *son constantes independientes de* f.

El teorema (4.8) no puede tener una versión análoga para p=1 como se deduce de (2.14).

Si se plantea el problema de caracterizar las clases de pesos (u,w) para las que el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado de $L^p(w(x)dx)$ en $L^p(u(x)\,dx)$ (ó en débil-$L^p(u(x)dx)$) puede probarse el análogo del teorema (4.5) siguiente

(4.9) TEOREMA. *Para dos pesos* u,w *las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *Existe una constante* C *tal que para todo cubo* Q

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{(p-1)}}\,dx\right)^{p-1} \leq C$$

ii)
$$\int_{\{x\in R^n:Mf(x)>\lambda\}} u(x)\,dx \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{R^n}|f(x)|^p\,w(x)\,dx$$

Se entiende que para p=1 la condición i) es

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\,dx \leq C\,\inf\,\mathrm{ess}_Q\,w$$

Sin embargo el teorema (4.8) no tiene análogo y tiene que sustituirse por el siguiente

(4.10) TEOREMA. *Para dos pesos* u,w *las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *Existe una constante* C *tal que para todo cubo* Q

$$\int_Q M(\chi_Q.w^{1-p'})(x)^p u(x)\,dx \leq C\left(\int_Q w(x)^{1-p'}\,dx\right)^{1/p} < \infty$$

ii)
$$\int_{R^n}|Mf(x)|^p\,u(x)\,dx \leq C_p\int_{R^n}|f(x)|^p w(x)\,dx$$

El teorema anterior es debido a E.Sawyer. Este teorema da una nueva demostración de (4.8) gracias a una observación de Hunt, Kurtz y Neugebauer que establece que todo peso $w \in A_p$ verifica i) de (4.10).

Existe otra demostración de (4.8) y (4.10) debida a M.Christ, ver la introducción del artículo de M.Christ y R.Fefferman y las referencias citadas allí.

(4.11) NOTA. La clase A_1 admite la siguiente caracterización debida a Coifman y Rochberg.

Sea $w(x) \geqslant 0$ *finita en c.t.p.x. Entonces* $w \in A_1$ *si y sólo si* $w(x) = k(x)\,(Mf(x))^{\gamma}$ *con* $0 < \gamma < 1$, f *una función integrable y* k *función tal que* k *y* $k^{-1} \in L^{\infty}$.

En general puede probarse que si μ es una medida de Borel positiva, tal que $M\mu(x) < +\infty$ en c.t.p.x y $\gamma \in (0,1)$. Entonces el peso $w(x) = (M\mu(x))^{\gamma} \in A_1$.
Una consecuencia de esto es que si δ es la delta de Dirac en el origen $(M\delta(x))^{\gamma} \in A_1$.
Ahora bien $M\delta(x) = \dfrac{1}{\|x\|_{\infty}^{n}} = \dfrac{C}{\|x\|^{n}}$, por tanto $\dfrac{1}{\|x\|^{\alpha}} \in A_1$ si $0 < \alpha < n$.

(4.12) NOTA. La teoría de pesos ha experimentado en el último año una cierta "ebullición" debido al nuevo enfoque dado por los trabajos de J.L.Rubio de Francia. El método de Rubio de Francia (ver J.L.Rubio de Francia 1) permite entre otras cosas obtener el siguiente resultado de extrapolación.
Sea T un operador lineal tal que

$$\int_{\{x:|Tf(x)|>\lambda\}} w(x)\,dx \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{R^n} f(x)\,w(x)\,dx$$

para todo peso $w \in A_1$ con constante C dependiendo de w. Entonces T es acotado de $L^p(w(x)dx)$ en $L^p(w(x)dx)$ para todo peso $w \in A_p$, $1 < p < \infty$.

(4.13) Las demostraciones de todos los resultados enunciados en esta sección, así como un desarrollo general de la teoría de pesos puede verse en J.García Cuerva.

5. B.M.O.

El "operador maximal agudo" (terminología castellana debida a J.García Cuerva para "#-maximal operator") $M^{\#}$ se define como aquel que a cada función real f localmente integrable en R^n, le asigna la función

$$M^{\#}f(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-f_Q|\, dy \tag{5.1}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos que contienen a x y donde f_Q designa la media de f sobre Q es decir $f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(x)\, dx$.

Para $\alpha \in R$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-f_Q|\, dy \leqslant \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-\alpha|\, dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_Q-\alpha|\, dy =$$

$$= \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-\alpha|\, dy + \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q (f(y)-\alpha)\, dy\right| \leqslant \frac{2}{|Q|} \int_Q |f(y)-\alpha|\, dy$$

Es decir

$$M^{\#}f(x) \leqslant 2 \sup_{Q \ni x} \inf_{\alpha \in R} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-\alpha|\, dy \tag{5.2}$$

y como es obvio que $\sup_{Q \ni x} \inf_{\alpha \in R} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-\alpha|\, dy \leqslant M^{\#}f(x)$ se tiene que

$$M^{\#}f(x) \sim \sup_{Q \ni x} \inf_{\alpha \in R} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-\alpha|\, dy \tag{5.3}$$

en el sentido de que el cociente de ambos miembros está acotado superior e inferiormente.

Por tanto observando que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q ||f(y)|-|f_Q||\, dy \leqslant \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-f_Q|\, dy \leqslant M^{\#}f(x)$$

se tiene

$$M^{\#}(|f|)(x) \leqslant 2\, M^{\#}f(x) \tag{5.4}$$

La relación con el operador maximal viene dada por la siguiente desigualdad obvia

$$M^{\#}f(x) \leqslant 2\, Mf(x) \tag{5.5}$$

Se define el espacio B.M.O. de las funciones de oscilación media acotada

(Bounded mean oscilation) como el conjunto de funciones localmente integrables tales que $M^{\#}f \in L^{\infty}$.

Para $f \in$ B.M.O. se define

$$\|f\|_* = \|M^{\#}f\|_{\infty}$$

La aplicación $f \longrightarrow \|f\|_*$ es una seminorma en B.M.O. $\|f\|_* = 0$ si y sólo si f es constante. Pasando al cociente y considerando a B.M.O. como un espacio de clases de equivalencia módulo constantes se tiene un espacio normado que resulta ser de Banach.

El siguiente teorema nos da la relación que existe entre B.M.O. y las clases de pesos A_p.

(5.6) TEOREMA. *Sea φ real y localmente integrable. Entonces* $e^{\varphi} \in A_2$ *si y sólo si existe* $C > 0$ *tal que para todo cubo* Q *se tiene*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{|\varphi(x)-\varphi_Q|}\,dx \leq C.$$

Una consecuencia inmediata de este teorema y de la desigualdad obvia

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |\varphi(x)-\varphi_Q|\,dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q e^{|\varphi(x)-\varphi_Q|}\,dx$$

es que si $w \in A_2$ entonces $\log w \in$ B.M.O. Por tanto teniendo en cuenta (4.10) podemos afirmar que $\log \frac{1}{|x|}$ y $\log |x|$ son funciones de B.M.O.
Es decir $L^{\infty} \subsetneq$ B.M.O.
Por otro lado la desigualdad $M^{\#}(|f|)(x) \leq 2M^{\#}f(x)$ nos dice que si $f \in$ B.M.O. entonces $|f| \in$ B.M.O. La consecuencia inmediata es que B.M.O. es un retículo (si $f,g \in$ B.M.O. $\max(f,g) = \frac{1}{2}(|f-g|+f+g)$ y $\min(f,g) = = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ están en B.M.O.).
Sin embargo puede ocurrir que $|f| \in$ B.M.O. y que $f \notin$ B.M.O.
Por ejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ -\log |x| & \text{si } 0 < x < 1 \\ \log |x| & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

es tal que $|f(x)| = \max(\log \frac{1}{|x|}, 0)$ está en B.M.O. pero como f es impar se tiene

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} |f(y)-f_Q|\,dy = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} |f(y)|\,dy = \frac{1}{a}\int_0^a \log\frac{1}{x}\,dx = 1-\log a$$

y 1-log a $\longrightarrow \infty$ si a $\longrightarrow$ 0.

En cierto sentido puede decirse que el crecimiento logarítmico es el crítico para estar en B.M.O. pues para todo $\alpha > 0$ $\frac{1}{|x|^\alpha} \notin$ B.M.O.

Para ver que $\frac{1}{|x|^\alpha} \notin$ B.M.O. basta limitarse a, $0 < \alpha < 1$, pues es el rango de integrabilidad local.

$$m_{[0,a]}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) = \frac{1}{(1-\alpha)a^\alpha}$$

$$\frac{1}{a}\int_0^a \left|\frac{1}{x^\alpha} - m_{[0,a]}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| dx = \frac{1}{a}\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^a \left|\frac{1}{x^\alpha} - m_{[0,a]}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| dx$$

eligiendo ε tal que $\frac{1}{\varepsilon^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)a^\alpha}$ tenemos

$$\frac{1}{a}\int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)a^\alpha}\right)dx = \frac{\varepsilon}{(1-\alpha)a}\left(\frac{1}{\varepsilon^\alpha} - \frac{1}{a^\alpha}\right) = \frac{(1-\alpha)^{1/\alpha}}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{1-\alpha} - 1\right)\frac{1}{a^\alpha}$$

por tanto $\frac{1}{a}\int_0^a \left|\frac{1}{x^\alpha} - m_{[0,a]}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| dx \longrightarrow \infty$ si $a \longrightarrow 0$.

Los operadores M y $M^{\#}$ están estrechamente relacionados como se pone de manifiesto con el siguiente resultado debido a C.Fefferman y E.Stein.

(5.7) TEOREMA. *Sea* $w \in A_\infty$ *y sea* f *tal que* $Mf \in L^{p_0}(w)$ *para algún* p_0, $0 < p_0 < \infty$. *Entonces para todo* p , $p_0 \leq p < \infty$, *es:*

$$\int_{R^n} (Mf(x))^p\, w(x)\, dx \leq C \int_{R^n} (M^{\#}f(x))^p\, w(x)\, dx$$

La demostración que no exponemos aquí se basa en observar que debido a que es $Mf(x) = M(|f|)(x)$ y $M^{\#}f(x) \leq 2M^{\#}(|f|)(x)$ basta demostrar el teorema para funciones positivas, esto se hace mediante una descomposición de Calderón-Zygmund que recuerda a la que se utiliza para demostrar (4.6).

Posteriormente nos encontraremos con operadores que llevan L^∞ a B.M.O. En ese caso tendrá especial importancia el siguiente teorema de interpolación debido a C.Fefferman y E.Stein.

(5.8) TEOREMA. *Sea* T *un operador lineal, acotado en* L^{p_0} *para un* p_0, $1 < p_0 < \infty$. *Supongamos que* T *lleva en forma continua* L^∞ *en* B.M.O. *Entonces para cualquier* p *con* $p_0 < p < \infty$, T *es acotado en* L^p.

DEMOSTRACION. Componemos T con $M^{\#}$.

Si $f \in L^{p_0}$ entonces por (2.4) $Mf \in L^{p_0}$ y por (5.5) $M^{\#}f \in L^{p_0}$. Es decir

$M^{\#} \circ T$ lleva L^{p_0} en L^{p_0}.

Por otra parte si $f \in$ B.M.O. $M^{\#}f \in L^{\infty}$ y $\|M^{\#}f\|_{\infty} = \|f\|_*$. Es decir $M^{\#} \circ T$ lleva L^{∞} en L^{∞}.

El teorema de interpolación de Marcinkiewicz dice que $M^{\#} \circ T$ lleva L^p en L^p $p_0 < p < \infty$.

Si f buena $Tf \in L^{p_0}$ y por (2.4) $M(Tf) \in L^{p_0}$ luego el teorema (5.7) dice que

$$\int M(Tf)^p \leqslant C \int M^{\#}(Tf)^p \leqslant C \int f^p \qquad p_0 < p < \infty.$$

El teorema de diferenciación de Lebesgue da ahora el resultado. ■

Estrechamente relacionado con B.M.O. se tiene el espacio llamado H^1-atómico que pasamos a describir.

(5.6) DEFINICION. Se llama *átomo* a una función medible $a(x)$ para la cual existe un cubo Q tal que

$$\text{i)} \quad \operatorname{sop}(a) \subset Q$$

$$\text{ii)} \quad |a(x)| \leqslant \frac{1}{|Q|} \quad \text{para todo } x$$

$$\text{iii)} \quad \int a(x)\,dx = 0$$

Se define el espacio H^1-atómico, $H^1_{at}(R^n)$, como el conjunto

$$\{\sum \lambda_j\, a_j : a_j \text{ átomos }, \ \sum |\lambda_j| < +\infty\}$$

La aplicación

$$\sum \lambda_j\, a_j \longrightarrow \|\sum \lambda_j\, a_j\| = \inf \sum |\lambda_j| \ ,$$

donde el íntimo se toma en todas las posibles representaciones de $\sum \lambda_j\, a_j$, es una norma en H^1_{at} que lo convierte en espacio de Banach.

Toda función $f \in$ B.M.O. define un funcional sobre H^1_{at} del modo siguiente

$$\langle f,g \rangle = \int fg$$

Para verlo basta observar que si $\underline{a}$ es átomo

$$\left|\int fa\right| = \left|\int_Q (f-f_Q)a\right| \leqslant \frac{1}{|Q|} \int_Q |f-f_Q| \leqslant \|f\|_*$$

El recíproco es cierto y se tiene $(H^1_{at})^* =$ B.M.O. ver J.L.Journé.

Los átomos fueron introducidos en un contexto más general, ver Coifman-Weiss 1 y J.L.Journé y la bibliografía citada allí.

NOTAS.

(5.7) Las funciones de B.M.O. satisfacen el siguiente resultado (Teorema de F.John y L.Nirenberg).

Existen constantes C_1, C_2 *que sólo dependen de la dimensión tales que para toda* $f \in$ B.M.O. *y para cada cubo* Q *y cada* $t > 0$ *es:*

$$|Q|^{-1} \; |\{x \in Q: \; |f(x)-f_Q| > t\}| \leqslant C_1 \; e^{-(C_2/\|f\|_*)t}$$

Como consecuencia se tiene que toda función $f \in$ B.M.O. pertenece a una clase exponencial ya que

$$\int_Q e^{\lambda|f(x)-f_Q|} \, dx = \int_0^\infty \lambda e^{\lambda t} \; |\{x \in Q: \; |f(x)-f_Q| > t\}| \; dt \leqslant$$

$$C_1 \int_0^\infty \lambda e^{\lambda t} \; e^{-(C_2/\|f\|_*)t} \; |Q| \; dt = C_1 \; \lambda \int_0^\infty e^{(\lambda-C_2/\|f\|_*)t} \; |Q| \; dt$$

y esta integral es convergente si $\lambda < \dfrac{C_2}{\|f\|_*}$.

En particular para ese λ es

$$\int_Q e^{\lambda|f(x)|} \, dx < +\infty$$

(5.8) En el caso del toro, el espacio B.M.O. fue caracterizado por C.Fefferman como el dual del espacio Re H^1, donde Re H^1 consiste en el conjunto de funciones f que son la parte real de las funciones F^* que pertenecen al espacio H^1 clásico, es decir funciones holomorfas en el disco unidad y tales que

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})| \; d\theta < +\infty$$

Posteriormente se dió la caracterización de Re $H^1 = H^1_{at}$ con equivalencia de normas, ver Coifman-Weiss 1 y bibliografía citada allí.

Puede demostrarse el siguiente resultado

Sea $f \in$ Re H^1. *Entonces existe una sucesión de átomos* (a_j) *y una sucesión de números reales* (λ_j) *con* $\sum_j |\lambda_j| \leqslant C \, \|f\|_{\text{Re } H^1}$, *tal que*

$$f(x) = \sum_j \lambda_j \; a_j(x) \qquad \text{c.p.t.x.}$$

además la serie en Re H^1.

Recíprocamente si f *es una función medible real tal que* $f(x) = \sum_j \lambda_j \; a_j(x)$

c.p.t.x, *con* $\sum_j |\lambda_j| < \infty$, *y los* a_j *átomos, entonces* $f \in \mathrm{Re}\, H^1$ *y*
$\|f\|_{\mathrm{Re}\, H^1} \leqslant C \sum_j |\lambda_j|$.

(5.9) Para funciones f valoradas en espacios de Banach todo lo desarrollado en esta sección se mantiene cambiando módulo por norma, excepto la nota anterior que en principio sólo es válida para los espacios de Banach ξ-convexos, es decir para los espacios de Banach B en los cuales la transformada de Hilbert es un operador acotado de $L^p(R,B)$ en $L^p(R,B)$ para algún p, $1 < p < \infty$, ver Burkholder.

Ejemplos de espacios ξ-convexos son los espacios $L^q(\Omega,A,\mu)$ con (Ω,A,μ) espacio de medida arbitrario y $1 < q < \infty$. En particular los espacios de sucesiones ℓ^q, $1 < q < \infty$, son espacios ξ-convexos y en ellos es válida la nota (5.8), una consecuencia de ello es que la norma $H^1(R^n)$ de una función $F = (f_j)$ ℓ^q-valorada puede venir dada por la suma de las normas $L^1(R^n)$ de sus transformadas de Riesz, es decir

$$\|F\|_{H^1(\ell^q)} \sim \sum_{i=0}^{n} \|(\sum_{j=1}^{\infty} |R_i f_j|^q)^{1/q}\|_1$$

6. INTEGRALES SINGULARES.

A lo largo de toda esta sección estamos en R^n, consideremos en R^n la norma $|x| = \max\{|x^i|: 1 \leq i \leq n\}$. A y B denotan espacios de Banach y $\mathcal{L}(A,B)$ el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de A en B.

Por $L^p(A)$ denotamos el espacio de Bochner-Lebesgue de funciones medibles valoradas en A y con potencia $|f(x)|^p$ integrable con respecto a la medida de Lebesgue.

$L_0^\infty(A)$ designará el conjunto de las funciones esencialmente acotadas (ver sección 1) y tales que se anulan fuera de un compacto $F \subset R^n$. A ese compacto F se le llama soporte de f.

Sea T un operador lineal que manda $L_0^\infty(A)$ en {funciones medibles B-valoradas} y sea $K: R^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathcal{L}(A,B)$ una función medible y localmente integrable fuera del origen (es decir la integral de $\|K(x)\|$ sobre los compactos que no contienen al origen es finita).

Supongamos que T y K son tales que

i) Si $f \in L_0^\infty(A)$ y $x \notin \operatorname{sop} f$ entonces $Tf(x) = \int K(x-y)\, f(y)\, dy$

ii) T se extiende acotadamente de $L^r(A)$ en $L^r(B)$ para un r, $1 < r \leq \infty$.

Enunciamos el siguiente teorema, cuyo antecedente se encuentra en Benedek, Calderón y Panzone

(6.1) TEOREMA. *En las condiciones anteriores para* T *y* K *si además es:*

$$(H_1) \qquad \int_{|x|>2|y|} \|K(x-y)-K(x)\|\, dx \leq C \qquad y\neq 0$$

Entonces:

a) T *es de tipo débil* (1,1)

b) T *es de tipo fuerte* (p,p) $\quad 1 \leq p < \infty$

c) T *lleva contínuamente* $H^1_{at}(A)$ en $L^1(B)$

d) T *lleva contínuamente* $L^\infty(A)$ *en* B.M.O.(B).

e) *Si* $r=\infty$, a),b) y c) *son ciertos y además* T *lleva* $L^\infty(A)$ en $L^\infty(B)$.

Antes de pasar a la demostración damos un ejemplo de un operador que se ajusta a esta situación. El ejemplo es la transformada de Hilbert y es donde se inspira en cierto modo una gran parte de la teoría de integrales singulares.

Sean A=C , B=C y la función $K(x) = \frac{1}{\pi x}$.

Se demuestra (ver Stein-Weiss) que la transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

está definida en casi todo x para funciones integrables y además $f \longrightarrow Hf$ es un operador acotado de $L^2(R)$ en sí mismo.

Si $f \in L_0^\infty(R)$ es claro que

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(y)}{x-y}\, dy \qquad x \notin \text{sop } f$$

Además $\left|\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x}\right| \leq 2 \frac{|y|}{|x|^2}$ si $|x| > 2|y|$ y en particular

$$\int_{|x|>2|y|} \left|\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x}\right| dx < C$$

DEMOSTRACION DE (6.1). La demostración de a) y b) se encuentra esencialmente en el trabajo de Benedek, Calderón y Panzone.

CASO $1 < r < \infty$. Dada $f \in L_0^\infty(A)$ queremos estimar la medida del conjunto

$$\{x:\ |Tf(x)| > \lambda\}$$

Consideramos la descomposición que se asegura en (3.1) para λ y f y estimaremos las medidas de

$$\{x:\ |Tg(x)| > \lambda/2\} \quad \text{y} \quad \{x:\ |Tb(x)| > \lambda/2\}$$

$$|\{x:\ |Tg(x)| > \lambda/2\}| = |\{x:\ |Tg(x)|^r > \frac{\lambda^r}{2^r}\}| \leq \frac{2^r}{\lambda^r} \int_{R^n} |Tg(x)|^r\, dx \leq$$

$$\leq \frac{2^r}{\lambda^r} C \int_{R^n} |g(x)|^r\, dx = \frac{2^r}{\lambda^r} C \int_{R^n} |g(x)|^{r-1}\, |g(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \frac{C\ 2^r\ \lambda^{r-1}}{\lambda^r} \int_{R^n} |g(x)|\, dx \leq \frac{C}{\lambda} \int_{R^n} |f(x)|\, dx$$

donde hemos denotado por C a distintas constantes absolutas.

Como $f \in L_0^\infty(A)$, b y b_j también serán funciones de $L_0^\infty(A)$ en particular están en $L^r(A)$ y además

$$\|b\|_r = \sum_j \|b_j\|_r$$

es decir $b = \sum_j b_j$ en $L^r(A)$ y por las hipótesis sobre T se tendrá

$Tb = \sum_j Tb_j$ en $L^r(B)$, por consiguiente $Tb(x) = \sum_j Tb_j(x)$ y $|Tb(x)| \leqslant$ $\leqslant \sum_j |Tb_j(x)|$ en casi todo punto x.

Para estimar la medida del conjunto

$$E_\lambda = \{x: |Tb(x)| > \tfrac{\lambda}{2}\}$$

se consideran los cubos Q_j^* concéntricos con los Q_j que asegura la descomposición (3.1) y con radio doble.

Entonces

$$\begin{aligned}
|E_\lambda| &= |E_\lambda \cap (\bigcup_j Q_j^*)^c| + |E_\lambda \cap (\bigcup_j Q_j^*)| \leqslant \\
&\leqslant |\{x \in (\bigcup_j Q_j^*)^c : |Tb(x)| > \tfrac{\lambda}{2}\}| + |\bigcup_j Q_j^*| \leqslant \\
&\leqslant \frac{2}{\lambda} \int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c} |Tb(x)|\, dx + \sum_j |Q_j^*| \leqslant \\
&\leqslant \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c} |Tb_j(x)|\, dx + \sum_j 2^n\, |Q_j|
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta iv) en (3.1) se tiene

$$(6.2) \qquad |E_\lambda| \leqslant \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c} |Tb_j(x)|\, dx + \frac{2^n\, C}{\lambda} \|f\|_1$$

Falta solamente estimar

$$\int_{(\bigcup_j Q_j^*)^c} |Tb_j(x)|\, dx$$

de hecho estimaremos algo mayor, como es:

$$\int_{(Q_j^*)^c} |Tb_j(x)|\, dx$$

Sea Q_j uno de los cubos con centro y^j.

Si $x \notin Q_j$, $Tb_j(x) = \int_{Q_j} K(x-y) b_j(y)\, dy$. Como b_j tiene integral cero se podrá escribir

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} (K(x-y) - K(x-y^j))\, b_j(y)\, dy$$

Integrando en $(Q_j^*)^c$ con respecto a x:

$$\int_{(Q_j^*)^c} |Tb_j(x)|\, dx \leqslant \int_{(Q_j^*)^c} \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-y^j)|\, |b_j(y)|\, dy\, dx \quad =$$

$$= \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{(Q_j^*)^c} |K(x-y)-K(x-y^j)|dx\ dy =$$

$$= \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{(Q_j^*)^c-y^j} |K(x-(y-y^j))-K(x)|\ dx\ dy$$

Pero $|x| = |x+y^j-y^j| \geqslant 2r$ y $|y-y^j| < r$ luego teniendo en cuenta la hipótesis (H_1) tenemos:

$$(6.3) \qquad \int_{(Q_j^*)^c} |Tb_j(x)|\ dx \leqslant C \int_{Q_j} |b_j(x)|\ dx$$

Teniendo en cuenta (6.2) se obtiene

$$|E_\lambda| \leqslant \frac{2}{\lambda} C \sum_j \int_{Q_j} |b_j(y)|\ dy + 2^n \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\lambda} C\ \lambda \sum_j |Q_j| + 2^n \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 \leqslant \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$$

donde las dos últimas desigualdades se deben a iii) y iv) de (3.1).

Hasta aquí hemos obtenido que T es de tipo débil (1;1) el teorema de interpolación de Marcinkiewicz nos asegura el tipo fuerte (q,q) para $1 < q < r$.

Para obtener el tipo fuerte para índices mayores que r, Benedek, Calderón y Panzone usan dualidad observando que, gracias a sus hipótesis sobre K, puede asegurarse que el operador T*, adjunto de T, debe de ser esencialmente un operador del mismo tipo que T con núcleo $\overline{K}(x) = K^*(-x)$ que también verifica (H_1). En nuestro caso no puede asegurarse en general que T* manda funciones en funciones.

Las técnicas desarrolladas en la sección 5 nos permiten hacer la demostración sin el uso de la dualidad. Para ello basta demostrar d) y aplicar el resultado (5.8).

Dada $f \in L_0^\infty(A)$, $Tf \in L^r(A) \subset L^1_{loc}(A)$ por tanto para ver que $Tf \in$ B.M.O. basta ver que para todo cubo Q

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf(x)-a_Q|_B\ dx < C\ \|f\|_\infty$$

donde a_Q es una constante ($a_Q \in B$) que depende del cubo.

Sea Q* el cubo concéntrico con Q y con radio doble.

Sean $f_1(x) = f(x)\ \chi_{Q^*}(x)$ y $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf(x)-a_Q|\ dx \leqslant \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1(x)|\ dx + \frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_2(x)-a_Q|\ dx$$

Como T es acotado de $L^r(A)$ en $L^r(B)$ es:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|\ dx \leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_{R^n}|Tf_1(x)|^r\ dx\right)^{1/r}\ |Q|^{1/r'} \leq$$

$$\leq C\ \|f_1\|_r\ |Q|^{1/r} \leq C\ \|f\|_\infty$$

Para la estimación del segundo sumando tenemos en cuenta que como $x \notin \text{sop}\, f_2$ y $f_2 \in L_0^\infty(A)$

$$Tf_2(x) = \int_{R^n} K(x-y)\ f_2(y)\ dy$$

si $\bar{x}$ es el centro de Q se elige $a_Q = \int_{R^n} K(\bar{x}-y)\ f_2(y)\ dy$ con lo cual

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x)-a_Q|\ dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \int_{(Q^*)^c} |K(x-y)-K(\bar{x}-y)|\,|f_2(y)|\ dy\ dx \leq$$

$$\leq \|f\|_\infty \frac{1}{|Q|}\int_Q \int_{(Q^*)^c}|K(x-y)-K(\bar{x}-y)|dy\ dx =$$

$$= \|f\|_\infty \frac{1}{|Q|}\int_Q \int_{\bar{x}-(Q^*)^c} |K(y-(\bar{x}-x)-K(y)|\ dy\ dx \leq C\ \|f\|_\infty$$

donde en la última desigualdad se ha tenido en cuenta la hipótesis (H_1).

Falta demostrar c). Para ello basta ver que para todo átomo a $\|Ta\|_1 \leq C$.

Supongamos que a es un átomo soportado en el cubo Q, el comportamiento es como los b_j y los cubos Q_j por tanto se puede obtener de modo análogo a (6.3) que

$$\int_{(Q^*)^c} |Ta(x)|\ dx \leq C \int_{(Q^*)^c} |a(x)|\ dx \leq C$$

por otro lado

$$\int_{Q^*} |Ta(x)|\ dx \leq \|Ta\|_r\ |Q^*|^{1/r'} \leq C\ \|a\|_r\ |Q|^{1/r'} \leq$$

$$\leq C\ \frac{1}{|Q|}\ |Q|^{1/r}\ |Q|^{1/r'} \leq C.$$

CASO $r = \infty$.

Se procede como en el caso $1 < r < \infty$. La función g estará en $L_0^\infty(R^n)$ y por tanto

$$\|Tg\|_\infty \leq \|g\|_\infty \leq C\ \lambda$$

por consiguiente

$$|\{x: |Tf(x)| > 2C\lambda\}| \leq |\{x: |Tg(x)| > C\lambda\}| + |\{x: |Tb(x)| > C\lambda\}| =$$

$$= |\{x: |Tb(x)| > C\lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 \qquad \blacksquare$$

(6.4) NOTA. El apartado d) del teorema anterior sugiere la siguiente pregunta. ¿Es T un operador acotado de $L^\infty(A)$ en B.M.O.(B)? La no densidad de $L_0^\infty(A)$ en $L^\infty(A)$ hace que la respuesta a la pregunta anterior pase necesariamente por una definición de T sobre las funciones de $L^\infty(A)$. Una manera de hacer esto es la siguiente: (ver Coifman-Meyer).

Para $f \in L^\infty(A)$ definir Tf como la clase de equivalencia módulo constantes de las funciones $x \longrightarrow F(x,x')$ con x' recorriendo casi todo x. Donde $F(x,x')$ es la función definida como sigue:

Sea Q un cubo que contiene a x y x', sea $f_1 = f.\chi_{Q*}$ y $f_2 = f-f_1$.

$$F(x,x') = Tf_1(x)-Tf_1(x') + \int (K(x-y)-K(x'-y))\, f_2(y)\, dy$$

la integral es absolutamente convergente por ser $f_2 \in L^\infty$ y verificar K la condición (H_1).

La definición de F no depende del cubo Q y además $F(x,x')-F(x,x'')$ es una constante como función de x, con lo cual la definición de Tf tiene sentido.

Con esta definición de Tf, el hecho de que $Tf \in$ B.M.O. sigue el mismo camino que el usado para la demostración de d).

Dado un espacio de Banach A denotaremos por $\ell^q(A)$ al conjunto de sucesiones de elementos de A tales que la sucesión de sus normas esté en ℓ^q. Es decir

$$\ell^q(A) = \{\{\alpha_n\}_1^\infty \subset A: \{|\alpha_n|\}_1^\infty \in \ell^q\}$$

El espacio vectorial $\ell^q(A)$, $1 \leq q \leq \infty$, es de Banach con la norma

$$\|\{\alpha_n\}\|_q = \|\{|\alpha_n|\}\|_{\ell^q}$$

El teorema (6.1) se automejora y puede enunciarse el siguiente

(6.5) TEOREMA. *Si* T *es un operador que satisface las hipótesis de* (6.1) *y* $1 < q < \infty$. *Entonces es:*

a) $|\{x: \sum_j |Tf_j(x)|_B^q > \lambda^q\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|(\sum_j |f_j|_A^q)^{1/q}\|_1$

b) $\|(\sum_j |Tf_j|_B^q)^{1/q}\|_p \leq C_p \|(\sum_j |f_j|_A^q)^{1/q}\|_p \quad , \quad 1 < p < \infty$

c) $\|(\sum_j |Tf_j|_B^q)^{1/q}\|_{B.M.O.} \leq C \|(\sum_j |f_j|_A^q)^{1/q}\|_\infty$

d) $\|(\sum_j |Tf_j|_B^q)^{1/q}\|_1 \leqslant C \|\{f_j\}\|_{H^1_{at}(\ell^q(A))}$

Donde C, C_p *denotan constantes absolutas que no tienen porque ser las mismas en cada caso y las desigualdades ocurren siempre que el miembro de la derecha sea finito.*

DEMOSTRACION. La demostración consiste en ver que el operador $\tilde{T}$ definido en $L_0^\infty(\ell^q(A))$ por $\tilde{T}F = (Tf_j)$ es un operador que satisface las hipótesis del teorema (6.1).

En primer lugar como T es acotado de $L^q(A)$ en $L^q(B)$

$$(*) \qquad \int \sum_j |Tf_j(x)|^q \, dx \leqslant C \int \sum_j |f_j(x)|^q \, dx$$

por tanto si $F = (f_j) \in L_0^\infty(\ell^q(A))$ $\tilde{T}F(x) \in \ell^q(B)$ para casi todo x. Además la sucesión de funciones simples $S_N(x) = (Tf_j(x))_{j=1}^N$ tiende a $\tilde{T}F$ puntualmente. En otras palabras T manda $L_0^\infty(\ell^q(A))$ en {medibles $\ell^q(B)$-valoradas}. La desigualdad (*) nos dice que $\tilde{T}$ se extiende acotadamente de $L^q(\ell^q(A))$ en $L^q(\ell^q(B))$.

Por otra parte definimos la función

$$\tilde{K} : R^n - \{0\} \longrightarrow \mathcal{L}(\ell^q(A), \ell^q(B))$$

como

$$\tilde{K}(x)\ \{\alpha_n\} = \{K(x).\alpha_n\}.$$

Es una comprobación ver que $\tilde{K}$ está bien definida y además

$$(**) \qquad \|\tilde{K}(x)\|_{\mathcal{L}(\ell^q(A), \ell^q(B))} \leqslant \|K(x)\|_{\mathcal{L}(A,B)}$$

Esta última desigualdad nos dice que $\tilde{K}$ es medible, pues como K lo es existirá una sucesión de simples s_n $\mathcal{L}(A,B)$-valoradas que convergerán a K(x) en la norma $\mathcal{L}(A,B)$ y en casi todo x, por tanto $\tilde{s}_n(x)$ convergerá a $\tilde{K}(x)$ en la norma de $\mathcal{L}(\ell^q(A), \ell^q(B))$.

Además (**) establece asimismo que $\tilde{K}$ verifica la condición (H_1).

Falta comprobar finalmente que para $F \in L^\infty(\ell^q(A))$ y $x \notin \text{sop}\, F$ se tiene la igualdad

$$\tilde{T}F(x) = \int \tilde{K}(x-y)\ F(y)\ dy$$

o lo que es lo mismo

$$(Tf_j(x))_j = \int \{K(x-y)\ f_j(y)\}_j\ dy \qquad x \notin \text{sop}\, F$$

teniendo en cuenta que sop $f_j \subset$ sop F la igualdad anterior quedará demostrada si se demuestra

$$\{\int K(x-y)\; f_j(y)\, dy\}_j = \int \{K(x-y)\; f_j(y)\}_j\, dy \qquad x \notin \text{sop } F$$

Basta tener en cuenta que $G(y) = \{K(x-y)\; f_j(y)\}_j$ es una función en $L(\ell^q(B))$ con lo que las propiedades de la integral de Bochner nos garantizan la última igualdad ■

OBSERVACION. En el caso de que A sea ξ-convexo, $\ell^q(A)$ será ξ-convexo y la desigualdad d) del teorema podrá escribirse teniendo en cuenta la nota (5.9) como

$$\|(\sum_j |Tf_j|_B^q)^{1/q}\|_1 \leqslant C \sum_{i=0}^{n} \|(\sum_{j=1}^{\infty} |R_i f_j|_A^q)^{1/q}\|_1$$

El teorema (6.1) da acotaciones entre espacios $L^p(R^n)$ para obtener acotaciones en espacios $L^p(w(x)\, dx, B)$ para ciertos pesos w es necesario imponer una condición más fuerte que (H_1). En concreto demostraremos el siguiente

(6.7) TEOREMA. *En las condiciones que preceden al teorema 6.1. si* K *es tal que*

(H_∞) $\quad \|K(x-y)-K(x)\| \leqslant C \dfrac{|y|}{|x|^{n+1}} \quad$ *si* $\;|x| > 2|y| \quad y \neq 0$

(W) $\quad \|K(x)\| \leqslant \dfrac{C}{|x|^n} \quad$ *para todo* x

entonces

a) T *es acotado de* $L^1(w(x)dx,A)$ *en* $L^1_*(w(x)dx,B)$ *para todo peso* w *de* A_1

b) T *es acotado de* $L^p(w(x)dx,A)$ *en* $L^p(w(x)dx,B)$ *para todo peso* $w \in A_p$ $1 < p < \infty$

(6.8) NOTA. El siguiente recíproco es cierto. Si w es un peso tal que la transformada de Hilbert (en el caso 1-dimensional) o cualquier transformada de Riesz (en el caso n-dimensional) es acotada en $L^p(w(x)\, dx)$ entonces $w \in A_p$, $1 \leqslant p < \infty$ (para p=1 se entiende acotación (1,1)-débil) (ver Coifman-Fefferman)

DEMOSTRACION DEL TEOREMA (6.7). La parte a) se deduce de la parte b) haciendo unos ligeros cambios en la demostración de (6.1) que da la acotación (1,1)-débil a partir de la (r,r)-fuerte.

En concreto queremos demostrar que para $f \in L_0^\infty(A)$ y $w \in A_1$

$$w(\{x: |Tf(x)| > \lambda\}) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, w(x)\, dx$$

Hacemos una descomposición de Calderón-Zygmund para f y λ: $f = g+b$.

La estimación de la medida de Lebesgue del conjunto

$$\{x:\ |Tg(x)| > \lambda/2\}$$

se basaba en el hecho de que

$$\int_{R^n} |g(x)|\ dx \leq C \int_{R^n} |f(x)|\ dx$$

En el caso de w

$$\int_{Q_j} |g(x)|\ w(x)\ dx = \int_{Q_j} \left|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\ dy\right|\ w(x)\ dx = \frac{w(Q_j)}{|Q_j|} \left|\int_{Q_j} f(y)dy\right| \leq$$

$$\leq \frac{w(Q_j)}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(y)|\ dy \leq \int_{Q_j} |f(y)|\ w(y)\ dy$$

donde la última desigualdad es por ser $w \in A_1$. El argumento usado en (6.1) se traslada ahora aquí sin mas que tener en cuenta que $w \in A_r$.

En cuanto a la estimación de la medida del conjunto

$$\{x:\ |Tb(x)| > \lambda/2\}$$

se basaba en tres acotaciones:

a) $\sum_j |Q_j^*| \leq C \sum_j |Q_j|$

b) $\sum_j |Q_j| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{R^n} |f(x)|dx$

c) $\int_{(Q_j^*)^c} |Tb_j(x)|\ dx \leq C \int_{Q_j} |b_j(x)|\ dx$

La estimación a) en el caso de w (es decir $\sum w(Q_j^*) \leq C \sum w(Q_j)$) es una consecuencia inmediata de los comentarios que preceden al teorema (4.6).

Con respecto a b) tenemos:

$$\sum_j w(Q_j) = \sum \frac{w(Q_j)}{|Q_j|} |Q_j| \leq C \frac{1}{\lambda} \sum \int_{Q_j} |f(x)| \frac{w(Q_j)}{|Q_j|}\ dx \leq$$

$$\leq C \sum \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} |f(x)|\ w(x)\ dx \leq C \frac{1}{\lambda} \int_{R^n} |f(x)|\ w(x)\ dx$$

donde la penúltima desigualdad es por ser $w \in A_1$.

En cuanto a c) recordemos que para $x \notin Q_j^*$

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} (K(x-y)-K(x-y^j))\ b_j(y)\ dy$$

luego

$$\int_{(Q_j^*)^c} |Tb_j(x)|\ w(x)dx \leq \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{(Q_j^*)^c} |K(x-y)-K(x-y^j)|\ w(x)dxdy$$

la hipótesis (H_∞) nos dice que esto es menor o igual que

$$C \int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{(Q_j^*)^c} \frac{|y-y^j|}{|x-y^j|^{n+1}}\ w(x)\ dx\ dy$$

Pero

$$\int_{(Q_j^*)^c} \frac{w(x)}{|x-y^j|^{n+1}}\ dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_j^{2^k} \setminus Q_j^{2^{k-1}}} \frac{w(x)}{|x-y^j|^{n+1}}\ dx \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k \ell)^{n+1}} \int_{Q_j^{2^k}} w(x)\ dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k\ell)^{n+1}}\ w(Q_j^{2^k}) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\ 2^{kn}}{(2^k\ell)^{n+1}}\ w(Q_j) = \frac{1}{2\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{w(Q_j)}{|Q_j|} \leq C\ w(y) \quad \text{para c.t.p. } y \in Q_j$$

por tanto

$$\int_{(Q_j^*)^c} |Tb_j(x)|\ w(x)\ dx \leq C \int_{Q_j} |b_j(x)|\ w(x)\ dx$$

El razonamiento de (6.1) se traslada ahora punto por punto.

Para demostrar la parte b) necesitamos los dos lemas siguientes cuya demostración daremos posteriormente:

(6.9) LEMA. (Fefferman-Stein). *Sea* T *un operador en las condiciones del teorema (6.7) entonces para todo* $1 < r < \infty$ *es*

$$M^{\#}(Tf)(x) \leq C_r\ M_r\ f(x) \quad \textit{para todo} \quad x, \quad f \in L_0^\infty(A)$$

donde $$M_r f(x) = (M(|f|^r)(x)^{1/r}$$

(6.10) LEMA. *Con las mismas hipótesis sobre* T *si* $w \in A_p$ $p > 1$ *y* $f \in L_0^\infty(A)$, *entonces* $M(Tf) \in L^{p_0}(w)$ *para un cierto* $p_0 < p$.

Estamos pues en situación de aplicar (5.7) y así establecer la siguiente cadena de desigualdades para $w \in A_p$ y $f \in L_0^\infty(A)$

$$\int |Tf(x)|^p\ w(x)\ dx \leq C \int |M(Tf)(x)|^p\ w(x)\ dx \leq$$

$$\leq C \int M^{\#}(Tf)(x)^p\ w(x)\ dx \leq C \int M_r f(x)^p\ w(x)\ dx =$$

$$= C \int (M|f|^r(x))^{p/r}\ w(x)\ dx \leq C \int |f(x)|^p\ w(x)\ dx$$

donde la última desigualdad es válida para aquellos $r > 1$ tales que $w \in A_{p/r}$ y que existen según (4.5).

DEMOSTRACION DEL LEMA (6.9). La haremos para x=0 por sencillez de cálculo. Comencemos observando que el teorema (6.1) garantiza la acotación del operador T de $L^p(A)$ en $L^p(B)$ $1 < p < \infty$.

Dado un cubo Q centrado en el origen, sean Q* el cubo con radio doble, $f_1 = f.\chi_{Q*}$ y $f_2 = f-f_1$. Como $f_2 \in L_0^\infty(A)$

$$Tf_2(0) = \int K(-y)\ f_2(y)\ dy$$

Entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x)-m_Q(Tf)|\ dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)-m_Q(Tf_1)|dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x)-m_Q(Tf_2)|dx$$

El primer sumando es menor o igual que

$$\frac{2}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|\ dx \leq (\frac{2}{|Q|}\int_Q |Tf_1|^r)^{1/r} \leq (\frac{2}{|Q|}\ C\int_Q |f_1|^r)^{1/r} \leq C\ M_r f(0)$$

sumando y restando $Tf_2(0)$ en el segundo sumando podemos escribirlo

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x)-Tf_2(0)-m_Q(Tf_2(x)-Tf_2(0))|\ dx$$

como $x \notin$ sop f_2

$$|Tf_2(x)-Tf_2(0)| = |\int_{R^n} (K(x-y)-K(-y))\ f_2(y)\ dy| \leq$$

Teniendo en cuenta que el soporte de f_2 está en $|y| > 2|x|$ lo anterior es menor o igual que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k|x|<|-y|\leq 2^{k+1}|x|} |K(x-y)-K(-y)|\,|f(y)|\ dy \leq$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|}{(2^k|x|)^{n+1}} \int_{2^k|x|<|-y|<2^{k+1}|x|} |f(y)|\ dy$$

donde la última desigualdad se debe a la condición H_∞.

En resumen tenemos

$$|Tf_2(x)-Tf_2(0)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{(2^k|x|)^n}\int_{|y|<2^{k+1}|x|} |f(y)|\ dy \leq$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{(2^k|x|)^n} \int_{|y|<2^{k+1}|x|} |f(y)|^r \, dy\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} M_r f(0) = C\, M_r f(0)$$

DEMOSTRACION DEL LEMA (6.10). Si $f \in L_0^\infty(A)$, sop $f \subset \{|x| < R\}$ y $|x| > 2R$

$$|Tf(x)| \leqslant \int_{|y|<R} |K(x-y)|\,|f(y)| \, dy \leqslant \int_{|y|<R} \frac{C}{|x-y|^n} f(y) \, dy \leqslant \frac{C}{|x|^n}$$

donde hemos tenido en cuenta las dos hipótesis (H_∞) y (W) sobre el núcleo. Entonces basta ver que para un $p_0 < p$

$$I = \int_{|x|<2R} |Tf(x)|^{p_0} w(x) \, dx < +\infty$$

y

$$II = \int_{|x|>2R} \frac{w(x)}{|x|^{np_0}} \, dx < +\infty$$

$$I \leqslant \left(\int |Tf(x)|^{p_0(1+\frac{1}{\varepsilon})} dx\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon}}} \left(\int_{|x|<2R} w(x)^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$$

Como T es acotado de L^r en L^r para $1 < r < \infty$ lo será para $r = p_0(1+\frac{1}{\varepsilon})$ entonces para asegurar que I es finito basta elegir ε de modo que w verifique la desigualdad de Hölder al revés.

Por otra parte

$$II \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^kR<|x|<2^{k+1}R} \frac{w(x)}{|x|^{np_0}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k+1}R)^{np_0}} w(B(0,2^{k+1}R))$$

Según observamos en capítulo 4 puede verse que si $w \in A_p$ entonces

$$w(B(0,\lambda R)) \leqslant C\, \lambda^{np}\, w(B(0,R))$$

Entonces ahora hacemos una elección de p_0 y ε tal que $w \in A_{p_0-\varepsilon}$ con lo cual

$$II \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} (2^{k+1}R)^{-\varepsilon} < +\infty. \qquad \blacksquare$$

Al igual que ocurre con el teorema (6.1), el teorema (6.7) se automejora y puede enunciarse

Si T *es un operador que satisface las hipótesis de* (6.7) *y* $1 < q < \infty$. *Entonces*

a) *Si* $w \in A_1$ *es*: $w\{x:|Tf_j(x)|^q > \lambda^q\} \leqslant \frac{C}{\lambda} \int (\sum_j |f_j(x)|^q)^{1/q}\, w(x)\, dx$

b) *Si* $w \in A_p$ *es*: $\int (\sum_j |Tf_j(x)|^q)^{p/q}\, w(x) dx \leqslant C_p \int (\sum_j |f_j(x)|^q)^{p/q}\, w(x)\, dx$

NOTAS. (6.11). Si la condición (H_∞) sobre el núcleo K se cambia por la condición siguiente:

Para todo $k \geqslant 1$ y todo $y \in R^n$

$$\left(\int_{S_K(|y|)} \|K(x-y)-K(x)\|^r\, dx\right)^{1/r} \leqslant C_K\ |S_K(|y|)|^{-1/r'}$$

donde $S_K(|y|)$ denota la corona $2^K|y| < |x| \leqslant 2^{K+1}\ |y|$ y los C_K son tales que $\sum_K C_K < \infty$ entonces puede probarse que los pesos para los que el operador está acotado son las clases $A_{p/r'}$, si $r' < p < \infty$, o las clases $A_p^{r'}$ si $1 < p < r$ donde por $A_p^{r'}$ se denota la clase de los pesos w tales que

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int w^{\frac{r}{r-p}}\right)^{\frac{r-p}{p}} \left(\frac{1}{|Q|} \int w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leqslant C$$

ver F.Ruiz 1.

(6.12) Analizando la demostración del Teorema (6.1) veremos que tiene esencialmente dos partes. En la primera se hace una descomposición de Calderón-Zygmund, se usa para la función g la acotación en L^r de la hipótesis y para la función b se usa la estimación:

$$\int_{|x-y'|>2|y-y'|} |K(x-y)-K(x-y')|\ dx < C$$

Mientras que en la segunda se usa para la acotación de $M^\#$ la estimación:

$$\int_{|y-\bar{x}|>2|x-\bar{x}|} |K(x-y)-K(\bar{x}-y)|\ dy < C$$

Algo análogo ocurre en la demostración de (6.5) donde se usan

$$|K(x-y)-K(x-y')| \leqslant C\ \frac{|y-y'|}{|x-y|^{n+1}} \qquad |x-y'| > 2|y-y'|$$

$$|K(x-y)-K(\bar{x}-y)| \leqslant C\ \frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n+1}} \qquad |y-\bar{x}| > 2|x-\bar{x}|$$

A continuación pasamos a tratar operadores dados por núcleos de dos variables. Nuestra situación general será la siguiente:

Sean A,B espacios de Banach y sea

$$K: R^n \times R^n \setminus \{(x,x):\ x \in R^n\} \longrightarrow \mathcal{L}(A,B)$$

una función medible y localmente integrable fuera de la diagonal.

Sea T un operador lineal de $L_0^\infty(A)$ en $L^1_{loc}(B)$ tal que

i) $Tf(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy \qquad f \in L_0^\infty(A) \quad , \quad x \notin \text{sop } f$

ii) T se extiende acotadamente de $L^r(A)$ en $L^r(B)$ para un r, $1 < r < \infty$.

Diremos que K verifica la condición (α_1) si

$$\int_{|x-y'|>2|y-y'|} |K(x,y)-K(x,y')|\ dx \leqslant C$$

Diremos que K verifica (β_1) si

$$\int_{|y-\bar{x}|>2|x-\bar{x}|} |K(x,y)-K(\bar{x},y)|\ dy \leqslant C.$$

Diremos que K verifica (α_∞) si

$$|K(x,y)-K(x,y')| \leqslant C\ \frac{|y-y'|}{|x-y|^{n+1}} \qquad |x-y'| > 2|y-y'|$$

Finalmente K verifica (β_∞) si

$$|K(x,y)-K(\bar{x},y)| \leqslant C\ \frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^{n+1}} \qquad |y-\bar{x}| > 2|x-\bar{x}|$$

La nota (6.12) sugiere que las demostraciones para núcleos de una variable pueden adaptarse aquí, ello en efecto es así y pueden demostrarse los siguientes teoremas con demostraciones análogas a las de (6.1) y (6.7).

(6.13) TEOREMA. *Sea* T *un operador lineal de* $L_0^\infty(A)$ *en* $L^1_{loc}(B)$ *dado por un núcleo* K *de dos variables como se indica más arriba.*

a) *Si* K *verifica* (α_1) , *Entonces:*

i) T *es de tipo débil* (1,1)

ii) T *es de tipo fuerte* (p,p) $\quad 1 < p \leqslant r$

iii) T *lleva* $H^1_{at}(A)$ *en* $L^1(B)$

b) *Si* K *verifica* (β_1), *Entonces:*

i) T *lleva* $L^\infty(A)$ *en* B.M.O.(B)

ii) T *es de tipo fuerte* (p,p) $\quad r \leqslant p < \infty$

Puede definirse T, de modo análogo al hecho en (6.4), para funciones de $L^{\infty}(A)$ y su imágen está en B.M.O.

(6.14) TEOREMA. *Sea* T *un operador lineal de* $L_0^{\infty}(A)$ *en* $L^1_{loc}(B)$ *dado por un núcleo* K *de dos variables como se indica más arriba. Si* K *verifica* (β_{∞}) *y además*
$$|K(x,y)| \leqslant \frac{C}{|x-y|^n}$$
Entonces:

i) $M^{\#}(Tf)(x) \leqslant C_r\ (M(|f|^r)(x))^{1/r}$

ii) T *es acotado de* $L^p(w(x)dx,A)$ *en* $L^p(w(x)dx\ ,B)$ *para* $w \in A_{p/r}$; $r < p < \infty$.

(6.15) TEOREMA. *Sea* T *un operador lineal de* $L_0^{\infty}(A)$ *en* $L^1_{loc}(B)$ *dado por un núcleo* K *de dos variables como se indica más arriba. Si* K *verifica* (α_{∞}) *y* T *es acotado de* $L^r(w(x)dx,A)$ *en* $L^r(w(x)dx,B)$ *para todo peso* $w \in A_1$. *Entonces:*

i) T *es acotado de* $L^1(w(x)dx,A)$ *en* $L^1_*(w(x)dx,B)$ *para todo peso* $w \in A_1$

ii) T *es acotado de* $L^p(w(x)dx,A)$ *en* $L^p(w(x)dx,B)$ *para todo peso* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$.

Con el procedimiento de obtención de la mejora vectorial desarrollado en (6.5) pueden obtenerse los siguientes teoremas:

(6.13') TEOREMA. *Sea* T *como en (6.13).*

a) *Si* K *verifica* (α_1) *y* $1 < q \leqslant r$. *Entonces:*

i) T *es acotado de* $L^1(\ell^q(A))$ *en* $L^1_*(\ell^q(B))$

ii) T *es acotado de* $L^p(\ell^q(A))$ *en* $L^p(\ell^q(B))$ $\quad 1 < p \leqslant q$

iii) T *lleva* $H^1_{at}(\ell^q(A))$ *en* $L^1(\ell^q(B))$

b) *Si* K *verifica* (β_1) *y* $r \leqslant q < \infty$. *Entonces:*

i) T *lleva* $L^{\infty}(\ell^q(A))$ *en* $B.M.O.(\ell^q(B))$

ii) T *es acotado de* $L^p(\ell^q(A))$ *en* $L^p(\ell^q(B))$ $\quad q \leqslant p < \infty$

(6.14') TEOREMA. *Sea* T *como en* (6.14) *y* $r \leqslant q < \infty$. *Entonces:*

i) $M^{\#}(Tf)(x) \leqslant C_r(M(|f|^q_{\ell^q(A)})(x))^{1/q}$

ii) T *es acotado de* $L^p(w(x)dx,\ell^q(A))$ *en* $L^p(w(x)dx,\ell^q(B))$ *para* $w \in A_{p/q}$, $q < p < \infty$.

(6.15') TEOREMA. *Sea* T *como en (6.15) y* $1 < q < \infty$. *Entonces:*

i) T *es acotado de* $L^1(w(x)dx,\ell^q(A))$ *en* $L^1_*(w(x)dx,\ell^q(B))$ *para todo peso* $w \in A_1$

ii) T *es acotado de* $L^p(w(x)dx,\ell^q(A))$ *en* $L^p(w(x)dx,\ell^q(B))$ *para todo peso* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$.

(6.16) Las constantes que aparecen en todas las acotaciones de los teoremas (6.1),(6.7),(6.13),(6.14) y (6.15) dependen de la norma del operador T como operador acotado en L^r y de la constante que aparece en las condiciones (H_1) ó (H_∞) según los casos nunca de la constante de la condición (W) que sólo se utiliza para saber que una función está en un cierto espacio $L^{p_0}(w(x)dx)$.

(6.17) Los operadores dados por núcleos K(x,y) fueron estudiados sistemáticamente por Coifman y Meyer, ver también J.L.Journé.

7. APLICACION A FUNCIONES MAXIMALES.

Si φ es una función acotada de soporte compacto y definimos $\varphi_\delta(x) = \delta^{-n}\ \varphi(\frac{x}{\delta})$ $x \in R^n$, $\delta > 0$, entonces el operador $\varphi \longrightarrow M_\varphi f$, con

(7.1) $$M_\varphi\ f(x) = \sup_{\delta>0} |f*\varphi_\delta(x)| \quad ,$$

es de tipo débil (1,1) y de tipo fuerte (p,p), $1 < p \leq \infty$.

La razón de todo esto es que si Q es un cubo fijo que contiene al soporte de φ, entonces podemos elegir una cierta constante k tal que $|\varphi(x)| \leq k\ \chi_Q(x)$ y tendremos

$$|\varphi_\delta(x)| \leq k \frac{|Q|}{|Q_\delta|} \chi_{Q_\delta}(x) \quad \text{con} \quad Q_\delta = \{\delta x:\ x \in Q\}$$

por tanto

$$|f*\varphi_\delta(x)| \leq k|Q||f| * \frac{\chi_{Q_\delta}}{|Q_\delta|}(x) \leq k|Q|.Mf(x)$$

y las acotaciones para Mf serán válidas para M_φ.

Las condiciones sobre φ pueden rebajarse y así puede demostrarse el siguiente resultado debido a F.Zo. Nosotros daremos la demostración como aplicación de las técnicas desarrolladas en la sección 6.

(7.2) TEOREMA. *Sea* $\varphi \in L^1(R^n)$ *con*

(Z_1) $$\int_{|x|>2|y|} \sup_{\delta>0} |\varphi_\delta(x-y)-\varphi_\delta(x)|dx \leq A < \infty \qquad y\neq 0$$

Entonces el operador maximal M_φ *es de tipo débil* (1,1) *y de tipo fuerte* (p,p) $1 < p \leq \infty$.

DEMOSTRACION. Comencemos observando que debido a la continuidad de la función $\delta \longrightarrow f*\varphi_\delta(x)$ basta tomar un conjunto numerable y denso de δ's para calcular el supremo en la definición de M_φ.

Para cada subconjunto *finito* J de Q^+ consideremos el operador

$$M_\varphi^J f(x) = \sup_{\delta\varepsilon J} |f*\varphi_\delta(x)|$$

Por la observación anterior podemos elegir una sucesión de J_n tal que

(7.5) $$M_\varphi^{J_n} f(x) \longrightarrow M_\varphi f(x) \qquad \text{para todo } x.$$

Por tanto acotaciones para los operadores $M_\varphi^J f$ que sean uniformes en J darán las acotaciones deseadas para $M_\varphi f$.

La idea consiste ahora en ver que el operador $M_\varphi^J f$ se le puede aplicar la maquinaria desarrollada en la sección 6. Para ello consideramos el **siguiente** operador *lineal*

$$T^J: L_0^\infty(dx) \longrightarrow \{\text{Medibles } \ell^\infty(J)\text{-valoradas}\}$$
$$f \longrightarrow \{f*\varphi_\delta\}_{\delta\in J}$$

El operador T^J está bien definido pues

$$f*\varphi_\delta(x) \leq \|f\|_\infty . \|\varphi_\delta\|_1 = \|f\|_\infty \|\varphi\|_1$$

Es obvio además que $\|T^J f(x)\|_{\ell^\infty(J)} = M_\varphi f(x)$ por lo tanto acotaciones de $L^p(d\mu)$ en $L^p(d\mu)$ para M_φ son equivalentes a acotaciones $L^p(d\mu)$ en $L^p(d\mu,\ell^\infty(J))$ para T^J.

Sea $K^J: R^n \longrightarrow \mathcal{L}(C,\ell^\infty(J))$ la función dada por

$$K^J(x)\lambda = \{\varphi_\delta(x)\lambda\}_{\delta\in J}$$

Esta función es integrable ya que

$$\int \|K^J(x)\|_{\mathcal{L}(C,\ell^\infty(J))} dx \leq \int \|\varphi_\delta(x)\|_{\ell^\infty(J)} dx =$$

$$= \int \sup_{\delta\in J} |\varphi_\delta(x)| \, dx \leq \sum_{\delta\in J} \int |\varphi_\delta(x)| \, dx \leq \|\varphi\|_1 \operatorname{card}(J).$$

Además si $f \in L_0^\infty(dx)$ y $x \in R^n$

$$T^J f(x) = \{f*\varphi_\delta(x)\}_{\delta\in J} = \{\int_{R^n} \varphi_\delta(x-y)f(y)\,dy\}_{\delta\in J} =$$

$$= \int_{R^n} \{\varphi_\delta(x-y)f(y)\}_\delta \, dy = \int_{R^n} K^J(x-y)f(y)dy$$

Por otra parte

$$\|T^J f\|_{L^\infty(\ell^\infty(J))} = \| \|T^J f\|_{\ell^\infty(J)} \|_{L^\infty} =$$

$$= \| \|f*\varphi_\delta(x)\|_{\ell^\infty(J)} \|_{L^\infty} = \| \|f*\varphi_\delta(x)\|_{L^\infty} \|_{\ell^\infty(J)} \leq$$

$$\leq \| \|f\|_\infty \|\varphi_\delta\|_1 \|_{\ell^\infty(J)} = \| \|f\|_\infty \|\varphi\|_1 \|_{\ell^\infty(J)} = \|\varphi\|_1 \|f\|_\infty$$

es decir T^J es acotado de L^∞ en $L^\infty(\ell^\infty(J))$ con constante independiente de J. Para tener el teorema sólo nos falta ver que K^J verifica la condición (H_1) pero

$$\int_{|x|>2|y|} \|K^J(x-y)-K^J(x)\|dx = \int_{|x|>2|y|} \sup_{\delta\in J} |\varphi_\delta(x-y)-\varphi_\delta(x)| \, dx \leq$$

$$\leq \int_{|x|>2|y|} \sup_{\delta>0} |\varphi_\delta(x-y)-\varphi_\delta(x)|\, dx < A$$

Por tanto el teorema (6.1) nos dice que T^J es un operador de tipo débil (1,1) y de tipo fuerte (p,p), $1 < p \leq \infty$ con constante independiente de J (ver nota (6.18)).

Los comentarios hechos al comienzo de esta demostración dicen que M_φ es de tipo débil (1,1) y de tipo fuerte (p,p) como queríamos demostrar. ■

Teniendo en cuenta (6.5) tenemos el siguiente refinamiento del teorema de Zo.

(7.6) TEOREMA. *Sea* $\varphi \in L^1(R^n)$ *con*

$$(Z_1) \qquad \int_{|x|>2|y|} \sup_{\delta>0} |\varphi_\delta(x-y)-\varphi_\delta(x)|\, dx \leq A < \infty \qquad y\neq 0$$

Entonces se verifican para $1 < q < \infty$

a) $$|\{x: \sum_j (M_\varphi f_j(x))^q > \lambda^q\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|(\sum_j |f_j|^q)^{1/q}\|_1$$

b) $$\|(\sum_j (M_\varphi f_j)^q)^{1/q}\|_p \leq C_p \|(\sum_j |f_j|^q)^{1/q}\|_p \quad , \quad 1 < p < \infty$$

c) $$\|(\sum_j (M_\varphi f_j)^q)^{1/q}\|_{B.M.O.} \leq C \|(\sum_j |f_j|^q)^{1/q}\|_\infty$$

d) $$\|(\sum_j (M_\varphi f_j)^q)^{1/q}\|_1 \leq C \sum_{i=0}^{n} \|(\sum_j |R_i f_j|^q)^{1/q}\|_1$$

Donde C, C_p *denotan constantes absolutas que no tienen porque ser las mismas en cada caso y las desigualdades ocurren siempre que el miembro de la derecha sea finito.*

La demostración del teorema (7.2) sugiere el enunciado del siguiente teorema

(7.7) TEOREMA. *Sea* $\varphi \in L^1(R^n)$ *tal que*

$$(Z_\infty) \qquad \sup_{\delta>0} |\varphi_\delta(x-y)-\varphi_\delta(x)| < C \frac{|y|}{|x|^{n+1}} \quad si \ |x| > 2|y| \ , \quad y\neq 0$$

y para cada J *subconjunto finito en* R

$$|x|^n (\sup_{\delta\in J} |\varphi_\delta(x)|) < C(J)$$

Sea $1 < q < \infty$, *entonces*

a) *Si* $w \in A_1$

$$w\{x: \sum_j (M_\varphi f_j(x))^q > \lambda^q\} \leqslant \frac{C_q}{\lambda} \int_{R^n} (\sum_j |f_j(x)|^q)^{1/q} \, w(x)\, dx$$

b) *Si* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$

$$\int_{R^n} (\sum_j (M_\varphi f_j(x))^q)^{p/q} w(x) dx \leqslant C_{p,q} \int_{R^n} (\sum_j |f_j(x)|^q)^{p/q} w(x) dx$$

Este teorema es una consecuencia del teorema (6.7). Para verlo basta hacer un desarrollo como en la demostración de (7.2), obteniendo que T^J tiene un núcleo K^J que verifica la condición (H_∞). Por otra parte la observación (6.18) dice que la condición

$$|x|^n \, \|K^J(x)\| < C(J)$$

asegura las acotaciones de T^J sin influir en las constantes. Es decir se tienen acotaciones uniformes sobre T^J que dan las acotaciones deseadas para M_φ.

(7.8) LEMA. *Sea φ una función positiva con soporte compacto, tal que $\varphi \in S(R^n)$ y $\varphi(x) = 1$ para todo $|x| \leqslant 1$. Entonces φ satisface las hipótesis del teorema anterior.*

DEMOSTRACION. La demostración es un ejercicio de cálculo, donde usaremos el teorema del valor medio.

$$|\varphi_\delta(x-y) - \varphi_\delta(x)| = \delta^{-n} |\varphi(\tfrac{x-y}{\delta}) - \varphi(\tfrac{x}{\delta})| \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{-n} \frac{|y|}{\delta} \|\nabla\varphi(\tfrac{x-\theta y}{\delta})\| \leqslant C \, \delta^{-(n+1)} \, |y| \, \frac{\delta^{n+1}}{|x-\theta y|^{n+1}}$$

donde la última desigualdad se debe a que

$$\|\nabla\varphi(x)\| \leqslant \frac{C}{|x|^{n+1}} \quad \text{por ser } \varphi \in S(R^n)$$

Además si $|x| > 2|y|$ entonces

$$|x-\theta y| > |x| - |\theta y| > |x| - |y| > \frac{|x|}{2}$$

por tanto

$$|\varphi_\delta(x-y) - \varphi_\delta(x)| < C \, \frac{|y|}{|x|^{n+1}}$$

Por otro lado como $|x|^n |\varphi(x)| \leqslant C$ se tendrá:

$$\sup_{\delta \geq 0} |\varphi_\delta(x)| = \sup_{\delta \geq 0} |\delta^{-n} \varphi(\tfrac{x}{\delta})| \leqslant \sup_{\delta \geq 0} C |\delta^{-n} \, |\tfrac{x}{\delta}|^{-n}| = \frac{C}{|x|^n} \qquad \blacksquare$$

Ahora estamos en condiciones de obtener como corolarios de los teoremas (7.6) y (7.7) los resultados de Fefferman-Stein y de Andersen y John.

(7.9) TEOREMA. (Fefferman-Stein) *El operador maximal de Hardy-Littlewood verifica las siguientes desigualdades vectoriales para* $1 < q < \infty$

i) $$|\{x: (\sum_j (Mf_j(x))^q)^{1/q} > \lambda\}| \leqslant \frac{C_q}{\lambda} \int_{R^n} (\sum (f_j(x))^q)^{1/q}\, dx$$

ii) $$\| (\sum_j (Mf_j)^q)^{1/q} \|_p \leqslant C_{p,q} \| (\sum_j |f_j|^q)^{1/q} \|_p \qquad 1 < p < \infty$$

iii) $$\| (\sum_j (Mf_j)^q)^{1/q} \|_1 \leqslant C_q \sum_{i=0}^{n} \| (\sum_j |R_i f_j|^q)^{1/q} \|_1$$

iv) M *manda continuamente* $L^\infty(\ell^q)$ *en la clase* $\exp L(\ell^q)$

DEMOSTRACION. Basta tener en cuenta que si $\varphi \in S(R^n)$, $\varphi \geqslant 0$, φ tiene soporte compacto y $\varphi \equiv 1$ en el cubo unidad entonces

$$Mf(x) \leqslant C\, M_\varphi(|f|)(x) \qquad x \in R^n$$

El teorema (7.6), el lema (7.8) y la nota (5.7) dan el resultado. ■

(7.10) TEOREMA. (Andersen-John) *El operador maximal de Hardy-Littlewood verifica las siguientes desigualdades vectoriales para* $1 < q < \infty$

i) *Si* $w \in A_1$

$$w\{x: \sum_j |Mf_j(x)|^q > \lambda^q\} \leqslant \frac{C_q}{\lambda} \int_{R^n} (\sum_j |f_j(x)|^q)^{1/q} w(x)\, dx$$

ii) *Si* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$

$$\int_{R^n} (\sum_j |Mf_j(x)|^q)^{p/q} w(x)dx \leqslant C_{p,q} \int_{R^n} (\sum_j |f_j(x)|^q)^{p/q} w(x)dx$$

La demostración se sigue como en el teorema (7.9) del lema (7.8) y del teorema (7.7).

(7.10) NOTA. Los teoremas (7.9) y (7.10) tienen una consecuencia obvia y es que todos los operadores que están mayorados por el operador de Hardy-Littlewood verificarán el mismo tipo de desigualdades vectoriales, este es el caso del maximal S_*^δ de los operadores de Bochner-Riesz S_R^δ para $\delta > \frac{(n-1)}{2}$ donde

$$S_R^\delta f(x) = \sum_{|K| \leq R} \left(1 - \frac{|K|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}(K)\, e^{2\pi i k.x}$$

y $$S_*^\delta f(x) = \sup_{0<R<\infty} |S_R^\delta f(x)|$$

Otro ejemplo de este tipo sería el operador maximal de Stein (ver Stein-Wainger)

$$Mf(x) = \sup_{t>0} |M_t f(x)|$$

donde $$M_t f(x) \doteq \frac{1}{w_{n-1}} \int_{|y|=1} f(x-ty)\, d\sigma(y)$$

este operador se demuestra que es de tipo fuerte (p,p) para $p > \frac{n}{n-1}$

Para ello se construye una familia analítica de operadores M_α que para $\alpha=1$ es la función maximal (por tanto valen las desigualdades vectoriales de (7.9)) y para $\alpha > 1 - \frac{n}{2}$ se prueba una acotación en L^2 que se extiende d› modo automático a valores en ℓ^2. La apelación al teorema de Stein de interpolación de familias analíticas de operadores (ver Stein-Weiss) da

$$\|(\sum |Mf_j|^q)^{1/q}\|_p \leq \|(\sum |f_j|^q)^{1/q}\|_p \qquad 1 < p,q < \infty \qquad q,p > \frac{n}{n-1}$$

El método desarrollado para el operador maximal sirve también para otros operadores que no están mayorados por el operador maximal.

Por ejemplo si consideramos el maximal a lo largo de una curva $\gamma(t)$ (ver Stein-Wainger)

$$Mf(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x-\gamma(t))\, dt$$

donde la curva es $\gamma(t) = (t^{a_1}u,\dots,t^{a_n}u_n)$ con $1 = a_1 < \dots < a_n$ puede probarse el siguiente

(7.11) TEOREMA.

i) $$\|(\sum_j |Mf_j|^q)^{1/q}\|_p \leq C_p \|(\sum_j |f_j|^q)^{1/q}\|_p \qquad 1 < p,q < \infty$$

ii) $$|\{x: \sum_j |Mf_j|^q > \lambda^q\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|(\sum_j |f_j|^q)^{1/q}\|_1 \qquad 1 < q < \infty$$

La demostración de este resultado para el caso escalar puede verse en Stein-Wainger.

La primera observación que debe hacerse es que toda la teoría desarrollada hasta aquí (función maximal, descomposición de Calderón-Zygmund, teorema de Benedek, Calderón y Panzone y teorema de F.Zo) es válida si se cambia la norma habitual en R^n por la "norma"

$$|x| = \max_{1\le i\le n} |x_i|^{1/a_i}$$

esta "norma" engendra una seudodistancia en la que los "cubos" son rectángu los, y además si se define la dilatación no isotrópica

$$\delta(x) = (\delta^{a_1} x_1, \dots, \delta^{a_n} x_n)$$

es claro que $|\delta(x)| = \delta|x|$. En este orden de ideas el teorema de F.Zo es válido para $\varphi_\delta(x) = \delta^{-a}\,\varphi(\delta^{-1}(x))$.

La demostración concreta de (7.10) en el caso escalar es conducida del modo siguiente (ver Stein-Wainger, Guzman 2).

Se considera la siguiente modificación del operador M

$$M^\circ f(x) = \sup_{h>0} |M_h^\circ f(x)|$$

donde
$$M_h^\circ f(x) = \frac{1}{h}\int_h^{2h} f(x-\gamma(t))\,dt$$

se comprueba que $(M_h^\circ f)^\wedge(\xi) = m(h(\xi))\hat{f}(\xi)$ con

$$m(\xi) = \int_1^2 e^{-2\pi i\gamma(t).\xi}\,dt$$

se definen para cada z los operadores $M_h^z f$ tales que $(M_h^z f)^\wedge(\xi) = m_z(h(\xi))\hat{f}(\xi)$ con $m_z(\xi) = (\eta(\xi)+(1-\eta(\xi))|\xi|^z)m(\xi)$ con $\eta \in C_0^\infty$, $\eta=1$ en un entorno de 0.

Y se considera el maximal

$$M^z f(x) = \sup_h |M_h^z f(x)|$$

Se verifican los siguientes hechos:

HECHO 1. Si $-a < \mathrm{Re}(z) < \theta$ el núcleo M^z tal que $M_h^z f(x) = f * M_h^z$ verifica la condición (Z) de (7.2) para $1 < p < \infty$.

M^z es acotado de L^p en L^p.

HECHO 2. Si $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{n}$, M^z es acotado de L^2 en sí mismo.

HECHO 3. Todas las normas crecen polinómicamente en z por tanto el teorema de interpolación de Stein da la acotación de M^0 de L^p en L^p para $1 < p < \infty$.

HECHO 4. La acotación de M^0 da la acotación de M debido a las siguientes identidades

$$\sup_{h>0} M_h^0 f(x) \geqslant \sup_h \frac{1}{h}\int_0^h M_s^0 f(x)\,ds = \sup_h \frac{1}{h}\int_s^h \frac{ds}{s}\int_s^{2s} f(x-\gamma(t))\,dt =$$

$$= \sup_h \left\{\frac{1}{h}\int_0^h f(x-\gamma(t))\,dt \int_{t/2}^t \frac{ds}{s} + \frac{1}{h}\int_h^{2s} dt \int_{t/2}^h f(x-\gamma(t))\,\frac{ds}{s}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_h \frac{\log 2}{h} \int_0^h f(x-\gamma(t))\, dt$$

donde la última desigualdad es cierta para $f \geqslant 0$.

Para obtener las desigualdades vectoriales basta observar dos cosas:

I. Del Hecho 1 se deduce por (7.2) que para $-a < \mathrm{Re}(z) < 0$ M^z es acotado de $L^p(\ell^q)$ en $L^p(\ell^q)$ $1 < p,q < \infty$.

II. Toda acotación en L^2 (como la que se da cuando $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{n}$) tiene una extensión trivial a ℓ^2 sin variar la norma.

El teorema de interpolación de familias analíticas da finalmente el resultado.

(7.12) NOTA. Para la transformada de Hilbert a lo largo de curvas, es decir

$$\mathcal{H}f(x) = \text{v.p. } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-\gamma(t))}{t}\, dt$$

con $\gamma(t) = (t^{a_1}u_1, \dots, t^{a_n}u_n)$, se tiene un teorema análogo al (7.10), la demostración consiste al igual que en ese caso en una interpolación entre una estimación en L^2 y otra en L^p que con núcleo verifica la condición (H_1) de (6.1) lo cual da la extensión vectorial.

8. TEORIA DE LITTLEWOOD-PALEY.

En esta sección nos limitamos a R por sencillez de cálculo.

Sea $f \in L^p \cap L^2(dx)$, $1 \leq p < \infty$, y sea I un intervalo de **R**. Denotaremos por $S_I f$ a la función tal que su transformada de Fourier sea

$$(S_I f)^\wedge(\xi) = \chi_I(\xi)\, \hat{f}(\xi)$$

El teorema de Plancherel asegura que $S_I f$ existe y además que $S_I f \in L^2(dx)$. Puede probarse el siguiente:

(8.1) TEOREMA. *Si* $f \in L^p \cap L^2$, $1 < p < \infty$, *entonces es*

$$\|S_I f\|_p \leq C_p\, \|f\|_p$$

con constante C_p *independiente de* f *y de* I.

DEMOSTRACION. Sea Hf la transformada de Hilbert de f.

Si $I = (0,\infty)$ basta observar que

$$S_I f = \frac{1}{2}\,(f+iHf)$$

Si $I = (a,\infty)$

$$S_I f = \frac{1}{2}\,(f+ie^{2\pi ix.a}\, H(e^{-2\pi ixa}\, f))$$

Si $I = (a,b)$

$$S_I = S_{(a,\infty)} . S_{(-\infty,b)} \qquad \blacksquare$$

(8.2) TEOREMA. *Sea* $\{I_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ *una sucesión de intervalos de* **R** *y* $\{f_j\}$ *una sucesión de funciones en* $L^2 \cap L^p(dx)$. *Entonces es:*

$$\|(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |S_{I_j} f_j|^2)^{1/2}\|_p \leq C_p\, \|(\sum_j |f_j|^2)^{1/2}\|_p \qquad 1 < p < \infty$$

DEMOSTRACION. El hecho de que H es un operador en las condiciones del teorema (6.1) nos permite asegurar:

$$\text{(8.3)} \qquad \|(\sum_j |Hf_j|^2)^{1/2}\|_p \leq C_p\, \|(\sum_j |f_j|^2)^{1/2}\|_p \qquad 1 < p < \infty$$

Si todos los I_j son del tipo (a_j,∞) entonces

$$(S_{I_j} f_j) = \left(\frac{f_j + ie^{2\pi ixa_j}\, H(e^{-2\pi ixa_j}\, f_j)}{2} \right)$$

Por tanto teniendo en cuenta (8.3)

$$\|(\sum_j |S_{I_j} f_j|^2)^{1/2}\|_p \leq C_p \|(\sum_j |f_j|^2)^{1/2}\|_p$$

En el caso general $I_j = (a_j, b_j)$ basta observar

$$S_{I_j} f_j = S_{(a_j,\infty)} \cdot S_{(-\infty,b_j)} f_j \qquad \blacksquare$$

Nosotros estamos interesados en una familia especial de intervalos en R. En concreto la familia de intervalos $[2^K, 2^{K+1}]$ $-\infty < K < +\infty$ y $[-2^K, -2^{K+1}]$ $-\infty < K < +\infty$. A esta familia que forma una descomposición de $R-\{0\}$, en el sentido de que los interiores son disjuntos, se la llama *descomposición diádica* de R.

A la familia anterior se le suele denotar por Δ, y a los intervalos se los llama intervalos diádicos.

El teorema de Plancherel permite afirmar que

$$(8.4) \qquad \|(\sum_{I\in\Delta} |S_I f|^2)^{1/2}\|_2 = \|f\|_2 \qquad f \in L^2(dx)$$

Es decir la aplicación $f \longrightarrow (\sum_{I\in\Delta} |S_I f|^2)^{1/2}$ es una isometría en $L^2(dx)$. Lo anterior puede también verse como una isometría entre $L^2(dx)$ y $L^2(dx, \ell^2)$ dada por

$$f \longrightarrow (S_I f)_{I\in\Delta}$$

Esta manera nos va a ser especialmente útil para demostrar el siguiente

(8.5) TEOREMA. *Sea* $f \in L^p(dx)$, $1 < p < \infty$, *entonces*

$$c_p \|f\|_p \leq \|(\sum_{I\in\Delta} |S_I f|^2)^{1/2}\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

donde c_p, C_p *son dos constantes independientes de* f.

Supongamos que hemos probado el siguiente:

(8.6) TEOREMA. *Sea* $\varphi \in S(R)$ *tal que* $\hat{\varphi}(0) = 0$ *y* $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ *si* $\xi \in [\frac{1}{2}, 1]$. *Definimos para cada* $f \in L^p(dx)$ $1 < p < \infty$ *la función*

$$Gf(x) = (\sum_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{2^j} * f(x)|^2)^{1/2} \quad con \quad \varphi_{2^j}(x) = 2^j \varphi(2^j x)$$

Entonces es

$$\|Gf\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

Veamos como se deduce el teorema (8.5) a partir del teorema (8.6)

DEMOSTRACION DE (8.5). Como $\hat{\varphi}_{2^j}(\xi) = \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2^j})$ entonces $\hat{\varphi}_{2^j}(\xi) = 1$ si $\xi \in [2^{j-1}, 2^j]$ por tanto

$$S_{I_j} f = S_{I_j} (\varphi_{2^j} * f) \quad \text{si} \quad I_j = [2^{j-1}, 2^j]$$

los teoremas (8.6) y (8.2) nos dan

$$\| (\sum_j |S_{I_j} f|^2)^{1/2} \|_p \leq C_p \|f\|_p \tag{8.7}$$

Para obtener la desigualdad contraria observar que (8.7) dice que el operador $f \longrightarrow (S_{I_j} f)_j$ es acotado de L^p en $L^p(\ell^2)$, por tanto el operador adjunto $(f_j)_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} S_{I_j} f_j$ será acotado de $L^{p'}(\ell^2)$ en $L^{p'}$, $1 < p' < \infty$. Es decir

$$\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_{I_j} f_j \|_{p'} \leq C_{p'} \| (\sum_j |f_j|^2)^{1/2} \|_{p'} \tag{8.8}$$

donde la desigualdad vale para $f_j \in S(R)$ en principio y luego se extiende para $f_j \in L^{p'}(R)$ siempre que el miembro de la derecha sea finito.

Si en (8.8) hacemos $f_j = S_{I_j} f$ tenemos

$$\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_{I_j} f \|_{p'} \leq C_{p'} \| (\sum_j |S_{I_j} f|^2)^{1/2} \|_{p'}$$

Pero
$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_{I_j} f = f \quad \text{si} \quad f \in L^{p'} \cap L^2$$

Por tanto se tiene

$$\|f\|_{p'} \leq C_{p'} \| (\sum_j |S_{I_j} f|^2)^{1/2} \|_{p'}, \qquad f \in L^{p'} \cap L^2$$

La desigualdad se extiende a toda $f \in L^{p'}$. ∎

DEMOSTRACION DEL TEOREMA (8.6). La idea consiste en tratar al operador

$$f \longrightarrow Tf = (\varphi_{2^j} * f)_{j=-\infty}^{+\infty}$$

como una integral singular ℓ^2-valorada y ver que se ajusta al modelo del teorema (6.1).

Para verificar todas las condiciones necesitamos poner de manifiesto unas propiedades de φ que enunciamos como Lema y cuya demostración daremos posteriormente.

(8.9) **LEMA.** *Si φ es como en (8.6) entonces es*

i) $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_{2^j}(\xi)|^2 \leq C$

ii) $\displaystyle\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\varphi_{2^j}(x)|^2\right)^{1/2} \leq \frac{C}{|x|}$

iii) $\displaystyle\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\varphi_{2^j}(x-y)-\varphi_{2^j}(x)|^2\right)^{1/2} \leq C\,\frac{|y|}{|x|^2}$ *si* $|x| > 2|y|$

C es una constante absoluta.

Veamos que $Tf = (\varphi_{2^j}*f)_{j=-\infty}^{+\infty}$ se ajusta al teorema (6.1).
Si $f \in L_0^\infty(dx)$, $Tf(x)$ es una función $\ell^2(Z)$-valorada, pues teniendo en cuenta la parte i) del Lema se tiene

$$\int_R \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\varphi_{2^j}*f(x)|^2\, dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_R |\varphi_{2^j}*f(x)|^2\, dx =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_R |\hat{\varphi}_{2^j}(\xi)\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq C \int_R |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = C\, \|f\|_2$$

por tanto $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\varphi_{2^j}*f(x)|^2 < +\infty$ en casi todo x.

Tf es una función medible, para ello basta ver que la función $x \longrightarrow \langle Tf(x),\xi\rangle$ es medible para todo $\xi \in \ell^2(Z)$ (por ser ℓ^2 separable). Si $\xi = \{\alpha_j\}$ $\displaystyle\langle Tf(x),\xi\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_{2^j}*f(x).\alpha_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j\, \varphi_{2^j}*f(x)$ que es medible trivialmente.

El operador T se extiende acotadamente de L^2 en $L^2(\ell^2)$ pues hemos visto más arriba que

$$\int_R \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\varphi_{2^j}*f(x)|^2\, dx \leq C\, \|f\|_2$$

Por otro lado definimos la función $K\colon R^n \longrightarrow \mathcal{L}(C,\ell^2)$

$$K(x)\colon C \longrightarrow \ell^2(Z)$$
$$\lambda \longrightarrow K(x)\lambda = (\varphi_{2^j}(x).\lambda)_j$$

Esta función está bien definida como se deduce de la parte ii) del Lema.
En cuanto a la medibilidad, debido a la isometría entre $\mathcal{L}(C,\ell^2)$ y ℓ^2 basta ver que $x \longrightarrow (\varphi_{2^j}(x))_j$ es medible y para ello basta ver que $x \longrightarrow \sum_j \alpha_j\, \varphi_{2^j}(x)$ es medible para toda $(\alpha_j)_j \in \ell^2$ y eso es obvio.

El hecho de que K sea localmente integrable fuera del origen es una consecuencia de la parte ii) del Lema.

Por otra parte el apartado iii) del Lema dice que K verifica la condición (H_∞), en particular verifica (H_1).

Por último sólo nos falta ver que K es el núcleo de T. Para ello sea $f \in L_0^\infty$

$$Tf(x) = (\varphi_{2^j} * f(x))_{j=-\infty}^{+\infty} = \left(\int_R \varphi_{2^j}(x-y)f(y)dy\right)_{j=-\infty}^{+\infty}$$

Si $x \notin \operatorname{sop} f$ se tiene

$$\int_R K(x-y)\, f(y)\, dy = \int_{R^n} (\varphi_{2^j}(x-y)f(y))_j\, dy$$

Por tanto para $f \in L_0^\infty$ y $x \notin \operatorname{sop} f$

$$Tf(x) = \int_R K(x-y)f(y)\, dy$$

El teorema (8.6) se sigue ahora de (6.1) teniendo en cuenta que $\|Tf(x)\|_{\ell^2} = Gf(x)$. ∎

DEMOSTRACION DEL LEMA (8.9). i) Supongamos $1 < |\xi| < 2$

$$\sum_0^\infty |\hat\varphi(2^{-j}\xi)|^2 \leqslant \sum_0^\infty |2^{-j}\xi|^2\, \|\hat\varphi'\|_\infty \leqslant C\sum_0^\infty 2^{-2j} = C$$

donde se ha tenido en cuenta $\hat\varphi(0) = 0$ y el teorema del valor medio.

$$\sum_{-\infty}^0 |\hat\varphi(2^{-j}\xi)|^2 = \sum_0^\infty |\hat\varphi(2^j\xi)|^2 \leqslant \sum_0^\infty 2^{-2j}\, |2^j|\xi|\hat\varphi(2^j\xi)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_0^\infty 2^{-2j} = C.$$

En el caso general $\xi = 2^k\,\xi'$ con $1 < |\xi'| < 2$ y por tanto

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat\varphi(2^{-j}\xi)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat\varphi(2^{-j+k}\xi')|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat\varphi(2^{-j}\xi)|^2 < C$$

ii) Supongamos $1 < |x| < 2$

$$\sum_0^\infty |x|^2\, |\varphi_{2^j}(x)|^2 = \sum_0^\infty |2^jx|^2\, |\varphi(2^jx)|^2 =$$

$$= \sum_0^\infty |2^jx|^{-2}||2^jx|^2\, \varphi(2^jx)|^2 \leqslant C\sum_0^\infty |2^jx|^{-2} = \frac{C}{|x|^2} \leqslant C.$$

$$\sum_{-\infty}^1 |x|^2\, |\varphi_{2^j}(x)|^2 = \sum_{-\infty}^1 |2^jx|^2\, |\varphi(2^jx)|^2 =$$

$$\sum_{1}^{\infty} |2^{-j}x|^2 \ |\varphi(2^{-j}x)|^2 \leqslant \sum_{1}^{\infty} |2^{-j}|^2 \ |x|^2 < C.$$

Caso general $x = 2^k\, x'$ con $1 < |x'| < 2$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 \ |\varphi_{2^j}(\dot{x})|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |2^k x'|^2 \ |2^j \ \varphi(2^{j+k}x')|^2 =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} |2^{j+k}x'|^2 \ |\varphi(2^{j+k}x')|^2 < C.$$

iii) Supongamos $1 < |x| < 2$ y $|x| > 2|y|$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{2^j}(x-y) - \varphi_{2^j}(x)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |2^j(\varphi(2^j(x-y)) - \varphi(2^jx))|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} |2^j \ \varphi'(2^jx_j)2^jy|^2 \quad \text{con} \quad x_j = x - t_jy \quad , \quad 0 \leqslant t_j \leqslant 1.$$

Como $\varphi \in S(R^n)$ lo mismo ocurre con φ' y serán:

$$|2^jx_j|^3 \ \varphi'(2^jx_j) \leqslant C \qquad y \qquad \varphi'(2^jx_j) \leqslant C$$

por tanto

$$\sum_{0}^{\infty} |2^{2j} \ \varphi'(2^jx_j)y|^2 \leqslant \sum_{0}^{\infty} \left|\frac{2^{2j}}{2^{3j}|x_j|^3} \ |y|\right|^2 =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j}\frac{|y|}{|x_j|^3}\right)^2 \leqslant C \sum_{0}^{\infty} 2^{-2j} \ |y|^2 = C \ |y|^2 \leqslant C' \ \frac{|y|^2}{|x|^4}$$

pues $|x_j| > |x| - |t_jy| > |x| - \frac{|x|}{2} > \frac{1}{2}$

$$\sum_{-\infty}^{1} |2^{2j} \ \varphi'(2^jx_j)y|^2 \leqslant C \ |y|^2 \ \sum_{-\infty}^{1} (2^{2j})^2 \leqslant C \ \frac{|y|^2}{|x|^4}$$

En el caso general $x = 2^k\, x'$ con $1 < |x'| < 2$ y $k \in Z$ y si $|y| < \frac{|x|}{2}$ se podrá escoger y' con $y = 2^k\, y'$ y $|y'| < \frac{|x'|}{2}$

Entonces

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |2^j(\varphi(2^j(x-y)) - \varphi(2^jx)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{2j}|\varphi(2^{j+k}(x'-y')) - \varphi(2^{j+k}x')|^2 =$$

$$= 2^{-2k} \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{2(j+k)} \ |\varphi(2^{j+k}(x'-y')) - \varphi(2^{j+k}x')|^2 =$$

$$= 2^{-2k} \sum_{-\infty}^{+\infty} |2^j(\varphi(2^j(x'-y')) - \varphi(2^jx')|^2 < C \ 2^{-2k} \ \frac{|y'|^2}{|x'|^4} = C \ \frac{|y|^2}{|x|^4} \ .$$

El teorema (8.5) admite una extensión a valores vectoriales. En concreto si denotamos

$$\Delta f(x) = \Big(\sum_{I\in\Delta} |S_I f(x)|^2\Big)^{1/2}$$

(8.10) TEOREMA. *Si* $1 < p,q < \infty$, *entonces es*

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta f_k|^q\Big)^{1/q}\Big\|_p \sim \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\Big)^{1/q}\Big\|_p$$

para toda sucesión (f_k) *con* $\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\Big)^{1/q} \in L^p(dx)$.

El signo $\sim$ *indica que el cociente entre ambos números está acotado superior e inferiormente.*

DEMOSTRACION. Consiste en ver que los teoremas (8.2) y (8.6) admiten las correspondientes extensiones vectoriales.

El caso de (8.6) es una consecuencia obvia de (6.1).

En cuanto a (8.2) hay que observar que el operador

$$(f_j)_j \longrightarrow (Hf_j)_j$$

tiene por núcleo $K(x) = (\frac{1}{\pi x})_j \in \mathcal{L}(\ell^2,\ell^2) = \ell^\infty$. Este núcleo es trivialmente (H_∞) por tanto existe una extensión a $\ell^q(\ell^2)$. De modo que el operador

$$(f_j^k) \longrightarrow (Hf_j^k)_{j,k}$$

verifica

$$\int \Big(\sum_k\Big(\sum_j |Hf_j^k(x)|^2\Big)^{q/2}\Big)^{p/q} dx \leqslant C \int \Big(\sum_k\Big(\sum_j |f_j^k(x)|^2\Big)^{q/2}\Big)^{p/q} dx$$

es decir es acotado de $L^p(dx,\ell^q(\ell^2))$ en sí mismo por tanto el operador

$$(f_j^k)_{j,k} \longrightarrow (S_{I_j} f_j^k)_{j,k}$$

es acotado de $L^p(dx,\ell^q(\ell^2))$ en sí mismo.

Por tanto como $S_{I_j} f = S_{I_j}(\varphi_{2^j} * f)$ si $I_j = [2^{j-1},2^j]$ tenemos que

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta f_k|^q\Big)^{1/q}\Big\|_p \leqslant C_p \Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\Big)^{1/q}\Big\|_p$$

esto nos dice además que el operador

$$(f_k)_k \longrightarrow (S_{I_j} f_k)_{k,j}$$

es acotado de $L^p(\ell^q)$ en $L^p(\ell^q(\ell^2))$ por tanto su adjunto

$$(f_k^j)_{k,j} \longrightarrow \Big(\sum_j S_{I_j} f_k^j\Big)_k$$

lo será de $L^{p'}(\ell^{q'}(\ell^2))$ en $L^{p'}(\ell^{q'})$ $1 < p', q' < \infty$

es decir

$$\| (\sum_k | \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_{I_j} f_k^j |^{q'})^{1/q'} \|_{p'} \leq C_{p,q} \| (\sum_k (\sum_j |f_k^j|^2)^{q'/2})^{1/q'} \|_{p'}$$

tomando $f_k^j = S_{I_j} f_k$ obtenemos la desigualdad

$$\| (\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^{q'})^{1/q'} \|_{p'} \leq C_{p',q'} \| (\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta f_k|^{q'})^{1/q'} \|_{p'}$$

■

En cuanto a las acotaciones con peso tenemos el siguiente

(8.11) TEOREMA. *Sea* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, *entonces*

(*) $$\| (\sum_{I \in \Delta} |S_I f|^2)^{1/2} \|_{L^p(w(x))} \sim \| f \|_{L^p(w(x))}$$

es decir su cociente está acotado superior e inferiormente.

Recíprocamente si para un peso w *se da la equivalencia de normas* (*) *entonces* $w \in A_p$.

DEMOSTRACION. Si $w \in A_p$ y G es el operador definido en (8.6) entonces G es acotado de $L^p(w)$ en $L^p(w)$. Para ver esto basta observar que el operador T definido en la demostración de (8.6) satisface todas las condiciones del teorema (6.5), es decir tiene núcleo verificando (H_∞) y (W) y esto es justamente lo que se afirma en iii) y ii) del Lema (8.9).

Por otra parte en el teorema (8.2) también es cierto que si $w \in A_p$ sea

$$\| (\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |S_{I_j} f_j|^2)^{1/2} \|_{L^p(w)} \leq C_p \| (\sum_j |f_j|^2)^{1/2} \|_{L^p(w)}$$

ello se deduce de que H es un operador acotado de $L^p(w(x)dx)$ en $L^p(w(x)dx)$ (consecuencia de (6.5)) y de que el teorema de extensión de Marcinkiewicz y Zydmund es cierto para $L^p(\mu)$ con μ una medida positiva arbitraria.

Es decir si $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, y razonando como en la demostración de (8.2) se tiene que

(8.12) $$\| (\sum_j |S_{I_j} f|^2)^{1/2} \|_{L^p(w)} \leq C_p \| f \|_{L^p(w)}$$

Para obtener la desigualdad inversa, observemos que (8.12) dice que el operador T de la demostracion de (8.6) es acotado de $L^p(w(x)dx)$ en $L^p(w(x)dx, \ell^2)$ por tanto su adjunto T* será acotado de $L^{p'}(w(x)^{-p'/p}dx, \ell^2)$ en $L^{p'}(w(x)^{-p'/p}dx)$ es decir

$$\Big\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_{I_j} f_j \Big\|_{L^{p'}\left(w(x)^{-p'/p}dx\right)} \leq C'_p \Big\| \Big(\sum_j |f_j|^2\Big)^{1/2} \Big\|_{L^{p'}\left(w(x)^{-p'/p}dx\right)}$$

para todo $1 < p' < \infty$ y $w \in A_p$.

Recordando ahora que $w \in A_p$ si y sólo si $w^{-p'/p} \in A_{p'}$, y haciendo $f_j = S_{I_j} f$ obtenemos que

$$\|f\|_{L^{p'}(w)} \leq C'_p \Big\| \Big(\sum |S_{I_j} f|^2\Big)^{1/2} \Big\|_{L^{p'}(w)}$$

para todo p', $1 < p' < \infty$ y $w \in A_{p'}$.

Para el recíproco basta observar que (8.11) implica la acotación en $L^p(w(x)dx)$ de todos los operadores $f \longrightarrow S_I f$ y por tanto de la transformada de Hilbert. ■

El teorema (8.10) también admite la siguiente extensión con demostración análoga al teorema anterior.

(8.13) TEOREMA. *Si* $1 < p,q < \infty$ *y* $w \in A_p$, *entonces es:*

$$(**) \qquad \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta f_k|^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L^p(w(x)dx)} \sim \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q \Big)^{1/q} \Big\|_{L^p(w(x)dx)}$$

y recíprocamente si para un peso w *se verifica* (**) *entonces* $w \in A_p$.

Los razonamientos encerrados en la demostración del teorema (8.10) permiten obtener el siguiente

(8.14) TEOREMA. *Si* $1 < q < \infty$, *entonces:*

$$|\{x: \sum_k |\Delta f_k(x)|^q > \lambda^q\}| \leq C_q \Big(\Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\Big)^{1/q} \Big\|_1 + \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |Hf|^q \Big)^{1/q} \Big\|_1 \Big)$$

DEMOSTRACION. Basta observar lo siguiente.

El operador $(f_j)_j \longrightarrow (Hf_j)_j$ como operador de $L^p(\ell^2)$ en $L^p(\ell^2)$ cumple las hipótesis de (6.5) (como vimos en (8.10)) y por tanto por los razonamientos que hemos hecho que relacionan H y S_I se tiene que

$$|\{x: \sum_k \Big(\sum_j |S_{I_j} f_k^j(x)|^2\Big)^{q/2} > \lambda^q\}| \leq C \Big\| \Big(\sum_k \Big(\sum_j |f_k^j|^2\Big)^{q/2}\Big)^{1/q} \Big\|_1$$

Por otra parte el operador $f \longrightarrow (\varphi_{2^j} * f)_j$ también verifica (6.5) y por tanto

$$\Big\| \Big(\sum_k \Big(\sum_j |\varphi_{2^j} * f_k|^2\Big)^{q/2}\Big)^{1/q} \Big\|_1 \leq C \Big\{ \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^q\Big)^{1/q} \Big\|_1 + \Big\| \Big(\sum_k |Hf_k|^q\Big)^{1/q} \Big\|_1 \Big\}$$

Tomando ahora $f_k^j = \varphi_{2^j} * f_k$ en la primera desigualdad y teniendo en cuenta la segunda se obtiene el teorema.

(8.14) NOTA. En R^n se entiende por intervalo diádico todo intervalo que se obtenga como un producto cartesiano de intervalos diádicos en R.

Razonamientos de inducción permiten demostrar el teorema (8.5). Ver García Cuerva - Rubio de Francia.

Razonamientos de inducción llevan asímismo a probar que el teorema (8.11) es cierto en R^n si w es un peso tal que

$$\left(\frac{1}{|R|}\int_R w(x)\cdot dx\right)\left(\frac{1}{|R|}\int_R w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leqslant C$$

para todo rectángulo de caras paralelas a los ejes (ver Kurtz).

(8.15) NOTA. El uso de la teoría de integrales singulares de funciones valoradas en espacios de Banach es clásico aplicarlo a funciones cuadrado (ver Stein 1 y Benedek-Calderón-Panzone).

9. APLICACION DEL CASO DE NUCLEOS DE DOS VARIABLES. OPERADOR MAXIMAL DE CARLESON.

En esta sección tratamos de obtener acotaciones para el operador maximal de la serie de Fourier

$$S^*f(x) = \sup_n |S_n f(x)|$$

donde f es una función definida sobre el toro y $S_n f(x) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}(K)\, e^{2\pi i K x}$

Ciertos tecnicismos hacen más manejables el operador maximal en la recta, es decir el operador

(9.1) $$S^*f(x) = \sup_{R>0} |S_R f(x)|$$

donde f es una función definida sobre la recta y

$$S_R f(x) = \int_{-R}^{R} e^{2\pi i \xi x}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

Para funciones $f \in L^1(R)$ con transformada de Fourier con soporte compacto se tiene la siguiente identidad

(9.2) $$S_R f(x) = \frac{1}{2i}\{e^{-2\pi i R x} H(e^{2\pi i R \cdot} f(\cdot))(x) - e^{2\pi i R x} H(e^{-2\pi i R \cdot} f(\cdot))(x)\}$$

donde H designa a la transformada de Hilbert.

Existe una igualdad contraria a la (9.2), de modo que se puede obtener la transformada de Hilbert como una combinación lineal, salvo factores unimodulares de operadores S_R. Estas igualdades pueden ser usadas para obtener acotaciones uniformes de los operadores S_R, conocidas acotaciones de H y viceversa.

En el caso que nosotros estamos interesados, usaremos la igualdad (9.2) para obtener acotaciones del operador S^* definido en (9.1), una vez que conozcamos acotaciones del operador

(9.3) $$T^*f(x) = \sup_{R>0} |H(e^{2\pi i R \cdot} f(\cdot))(x)|$$

Así el siguiente:

(9.4) TEOREMA. *Sea* S^* *el operador definido en* (9.1), *entonces:*

i) *Si* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, S^* *es acotado de* $L^p(w(x)dx)$ *en* $L^p(w(x)dx)$.

ii) S^* *manda continuamente* $L^\infty(dx)$ *en la clase* Exp L(dx).

Es una consecuencia inmediata del siguiente resultado referente a T^*.

(9.5) TEOREMA. *Sea* T^* *el operador definido en* (9.3), *entonces:*

i) *Si* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, T^* *es acotado de* $L^p(w(x)dx)$ *en sí mismo.*

ii) T^* *manda continuamente* $L^\infty(dx)$ *en* B.M.O.

DEMOSTRACION DE (9.5). Comencemos observando que si f es suficientemente buena y $x \in R$ entonces las aplicaciones

$$R \longrightarrow S_R f(x)$$

$$R \longrightarrow \int \frac{e^{2\pi i R t}}{x-t} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -i \operatorname{sig} \xi \; e^{2\pi i \xi x} \hat{f}(\xi - R)\, d\xi$$

son continuas. En el segundo caso la igualdad es consecuencia de que $H(f(\cdot)e^{2\pi i R \cdot})^\wedge(\xi) = -i \operatorname{sig} \xi \, \hat{f}(\xi - R)$.

Por tanto en las definiciones de S^* y T^* basta tomar el supremo sobre los $R \in Q^+$.

Al igual que hicimos en la sección 7 tomamos los operadores

$$T^{*J} f(x) = \sup_{R \in J} |H(e^{2\pi i R \cdot} f(\cdot))(x)|$$

donde J es un subconjunto finito de Q^+ y basta obtener acotaciones uniformes sobre estos T^{*J} para deducir las correspondientes sobre T^*.

Consideramos los operadores T^J definidos sobre funciones $f \in L_0^\infty$ como

$$T^J f(x) = \{H(e^{2\pi i R \cdot} f(\cdot))(x)\}_{R \in J}$$

Como la transformada de Hilbert es acotada de L^2 en L^2, cada función $H(e^{2\pi i R \cdot} f(\cdot))(x)$ será medible por tanto como J es finito T^J es un operador lineal de L_0^∞ en {medibles $\ell^\infty(J)$-valoradas}.

El teorema de Carleson-Hunt establece que $\forall \; 1 < r < \infty$ T^* es acotado de $L^r(dx)$ en sí mismo. Por tanto como $\|T^J f(x)\|_{\ell^\infty(J)} \leq |T^* f(x)|$ tenemos que los operadores T^J se extienden acotadamente de $L^r(dx)$ en $L^r(dx, \ell^\infty(J))$ para todo $1 < r < \infty$ y las normas de T^J están todas acotadas por una constante independiente de J que es la norma de T^*.

En cuanto al núcleo de T^J, consideramos la función $K^J \colon R^n \times R^n \longrightarrow \mathcal{L}(C, \ell^\infty(J))$ dada por

$$K^J(x,y)\lambda = \{\lambda \frac{e^{2\pi i R y}}{x-y}\}_{R \in J}$$

La finitud de J hace que K^J esté bien definido y sea medible.

Además como

$$\|K^J(x,y)\lambda\|_{\ell^\infty(J)} \leq |\lambda| \frac{1}{|x-y|}$$

tenemos que

(9.6) $$\|K^J(x,y)\|_{\mathcal{L}(C,\ell^\infty(J))} \leq \frac{1}{|x-y|}$$

y por tanto K^J es localmente integrable fuera de la diagonal.

Por último si $f \in L_0^\infty$ y $x \notin \text{sop } f$

$$T^J f(x) = \{H(e^{2\pi iR\cdot} f(\cdot))(x)\}_{R\in J} = \{\int_R \frac{e^{2\pi iRy} f(y)}{x-y} dy\}_{R\in J} =$$

$$= \int_R \{\frac{e^{2\pi iRy}}{x-y}\}_{R\in J} f(y)\, dy = \int_R K^J(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Es decir T^J y K^J se encuentran en la situación general descrita en la sección 6, de un operador dado por un núcleo de dos variables.

Además teniendo en cuenta la isometría $\mathcal{L}(C,\ell^\infty(J)) \cong \ell^\infty(J)$ tenemos que

$$\|K^J(x,y)-K^J(\bar{x},y)\|_{\ell^\infty(J)} = \|\{e^{2\pi iRy}(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{\bar{x}-y})\}\|_{\ell^\infty(J)} \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{x-y} - \frac{1}{\bar{x}-y}\right| < C\, \frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^2} \quad \text{si} \quad |y-\bar{x}| > 2|x-\bar{x}|$$

Es decir K^J verifica (β_∞) con constante independiente de J.

El teorema (6.14) se aplica y se obtiene

(9.7) $$M^\#(T^J f)(x) \leq C_r(M(|f|^r)(x))^{1/r} \quad 1 < r < \infty$$

(9.8) Si $w \in A_{p/r}$ $\quad 1 < r < p < \infty$ entonces

$$\int_R \|T^J f(x)\|^p_{\ell^\infty(J)} w(x)\, dx \leq C_p \int_R |f(x)|^p\, w(x)\, dx$$

Además C_r y C_p pueden suponerse independientes de J ya que sólo dependen de la constante de la condición (β_∞) y de la norma de T^* como operador de $L^r(dx)$ en sí mismo.

Por tanto como $\|T^J f(x)\|_{\ell^\infty(J)} = T^{*J}f(x)$ y $M^\#(|h|)(x) \leq 2M^\# h(x)$ (ver (5.5)) tenemos que:

(9.9) $$M^\#(T^{*J}f)(x) \leq C_r(M(|f|^r)(x))^{1/r} \quad 1 < r < \infty$$

(9.10) Si $w \in A_{p/r}$ $\quad 1 < r < p < \infty$ entonces

$$\int_R (T^{*J}f(x))^p\, w(x)\, dx \leq C_p \int_R |f(x)|^p\, w(x)\, dx$$

La aplicación del Lema de Fatou da como consecuencia

(9.11) $$M^{\#}(T^*f)(x) \leq C_r (M(|f|^r)(x))^{1/r} \qquad 1 < r < \infty$$

(9.12) Si $w \in A_{p/r}$ $\quad 1 < r < p < \infty$ entonces

$$\int_R (T^*f(x))^p\, w(x)\, dx \leq C_p \int_R |f(x)|^p\, w(x)\, dx$$

La parte ii) del teorema se deduce de (9.11) y la parte i) del hecho de que para todo $w \in A_p$ siempre existe un $r > 1$ tal que $w \in A_{p/r}$. ∎

(9.13) NOTA. La acotación con pesos A_p fue obtenida por Hunt y Wo-San Young en 1974 para el operador maximal de la serie de Fourier. Dicha acotación se basa en la desigualdad

$$S^* \leq C(M+T^*)$$

donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood y T^* es un operador que se puede manejar por el procedimiento anterior, concretamente

$$T^*f(x) = \sup_n \left| \int \frac{e^{iny}}{x-y} f(y)\, dy \right|$$

Como aplicación del teorema (6.14') vemos que el método desarrollado permite deducir acotaciones vectoriales del tipo $L^p(\ell^q)$ para $q < p$. Las extensiones vectoriales sin restricción en q requieren el uso del siguiente teorema (ver Rubio de Francia 2).

(9.14) TEOREMA. *Sea* A *un operador linearizable acotado de* $L^r(w(x)dx)$ *en sí mismo para todo peso* $w \in A_r$, $1 < r < \infty$. *Linearizable significa que dada cualquier función* $f_0 \in L^r(w(x)dx)$ *existe un operador lineal* $\mathcal{U}$ *tal que* $\mathcal{U}f_0 = |Af_0|$ *y* $|\mathcal{U}f| \leq |Af|$ *para toda* $f \in L^r(w(x)dx)$. *Entonces es*

$$\|(\sum_j |Af_j|^r)^{1/r}\|_p \leq C_{p,r} \|(\sum_j |f_j|^r)^{1/r}\|_p \qquad 1 < p < \infty$$

Todo operador maximal es linearizable por tanto teniendo en cuenta el teorema (9.5) tenemos que T^* es acotado de $L^p(\ell^q)$ en $L^p(\ell^q)$ para todo $1 < p,q < \infty$. La repetición de los argumentos de (9.5) para operadores T^J acotados de $L^p(\ell^q)$ en $L^p(\ell^q(\ell^\infty))$ permiten concluir.

(9.15) TEOREMA. *Sea* T^* *el operador definido en* (9.3), $1 < q < \infty$, *entonces:*

i) T^* *manda* $L^\infty(dx,\ell^q)$ *en* $B.M.O.(\ell^q)$

ii) *Si* $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, T^* *es acotado de* $L^p(w(x)dx,\ell^q)$ *en* $L^p(w(x)dx,\ell^q)$.

y como consecuencia:

(9.16) COROLARIO. *El operador* S^* *definido en* (9.1) *es acotado de* $L^p(w(x)dx,\ell^q)$ *en* $L^p(w(x)dx,\ell^q)$ *para todo* $w \in A_p$, $1 < p,q < \infty$. *Además manda* $L^\infty(dx,\ell^q)$ *en* $\operatorname{Exp} L(\ell^q)$, $1 < q < \infty$.

Consideraciones de dualidad nos van a permitir demostrar el siguiente:

(9.17) TEOREMA. *Sea* $w \in A_1$. *Entonces para todo subconjunto finito* $J \subset Q^+$ *es*

$$w(\{x: |\sum_{R\in J} S_R f_R(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_R \sum_{R\in J} |f_R(x)|\, dx$$

con constante C *independiente de* J.

Observar que el Lema de Fatou da lugar a:

(9.18). COROLARIO. *Sea* $w \in A_1$. *Entonces es:*

$$w(\{x: |\sum_{R\in Q} S_R f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_R \sum_{R\in Q} |f_R(x)|\, dx$$

DEMOSTRACION DE (9.17). En la demostración del teorema (9.5) se vió que los operadores T^J son acotados de $L^p(w)$ en $L^p(w,\ell^\infty(J))$ con pesos $w \in A_p$. A partir de esto es una comprobación ver que los operadores

$$\overline{T^J}(\{f_R\}) = \sum_{R\in J}\int \frac{e^{2\pi i R x}}{x-y} f_R(y)\, dy$$

son acotados de $L^{p'}(w,\ell^1(J))$ en $L^{p'}(w)$ con pesos $w \in A_{p'}$. Además la norma de $\overline{T^J}$ se puede suponer independiente de J.

Los operadores $\overline{T^J}$ pueden ser tratados como integrales singulares con núcleo de dos variables dado por

$$\overline{K}^J:\ R^n x R^n \longrightarrow \mathcal{L}(\ell^1(J),C) \cong \ell^\infty(J)$$

$$(x,y) \longrightarrow \{\frac{e^{2\pi i R x}}{x-y}\}_{R\in J}$$

Este núcleo verifica la condición (α_∞) por tanto el teorema (6.15) dice que para todo peso $w \in A_1$

$$w(\{x: |\sum_{R\in J}\int \frac{e^{2\pi i R x}}{x-y} f_R(y)dy| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_R \sum_{R\in J} |f_R(x)|\, dx$$

Si en la desigualdad anterior hacemos $f_R(x) = e^{-2\pi iRx} g_R(x)$ tenemos que para todo peso $w \in A_1$

$$w(\{x: |\sum_{R\in J} e^{2\pi iRx} H(e^{-2\pi iR\cdot} g_R(\cdot))(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_R \sum_{R\in J} |g_R(x)| \, dx$$

y por tanto apelando a la igualdad (9.2) obtenemos el teorema. ∎

(9.19) NOTA. El teorema (9.17) encierra toda la información sobre la serie de Fourier, ya que por el teorema de extrapolación de Rubio de Francia (ver 4.12) se tienen acotaciones de $L^p(w,\ell^1(J))$ en $L^p(w)$ para pesos $w \in A_p$ de los operadores $\overline{T^J}$, que a su vez nos reproducen las acotaciones para pesos $w \in A_p$ de los operadores T^J de $L^p(w)$ en $L^p(w,\ell^\infty(J))$ que dan lugar al teorema de Hunt y Wo San Young.

REFERENCIAS

ANDERSEN ,JOHN: "Weighted inequalities for vector valued maximal functions and singular integrals", Studia Math. 69 (1980).

BENEDEK, CALDERON, PANZONE: "Convolution operators on Banach space valued functions", Proceeding of Nat. Acad. Sciences 48 (1962).

BURKHOLDER: "A geometrical condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach space-valued functions", Proc. Conf. Zygmund Chicago (1981).

CALDERON, ZYGMUND: "On the existence of certain singular integrals", Acta Math. 88.

CHRIST, R.FEFFERMAN: "A note on weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator", Proceeding A.M.S. 87 (1983).

COIFMAN, MEYER: "An delà des operateurs pseudo-differentielles", Asterisque n°57 (1978).

COIFMAN, FEFFERMAN; "Weighted norm inequalities for singular integrals", Studia Math. 57 (1976).

COIFMAN, WEISS 1: " Extension of Hardy spaces and their use in analysis, B.A.M.S. 83 (1977).

COIFMAN, WEISS 2: "Analyse Harmonique Non-Commutative sur certains espaces Homogènes", Lecture Notes 242 Springer Verlag (1971).

FEFFERMAN,C., STEIN: " Some maximal inequalities", Amer. Journal Math.1 (1971).

GARCIA CUERVA, RUBIO DE FRANCIA: Libro en preparación.

DE GUZMAN 1: "Differentiation of integrals in R^n", Lecture Notes 481, Springer Verlag (1975).

DE GUZMAN 2: "Real Variable methods in Fourier Analysis", Notas de Matemática (75) North Holland (1981).

DIESTEL, UHL: "Vector measures", A.M.S. Surveys 15 (1977).

HUNT: "On the convergence of Fourier Series", Proc. Conf. Orthogonal Expansions, Carbondale Pres (1968).

HUNT, W.S.YOUNG: "A weighted norm inequalities for Fourier Series", B.A.M.S. 80 (1974).

JOURNE: "Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Calderón", Lecture Notes 994, Springer Verlag (1983).

KURTZ: "Littlewood-Paley and multiplier theorems on weighted L^p spaces", T.A.M.S. 259 (1980).

MUCKENHOUPT: "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function", T.A.M.S. 165 (1972).

RUBIO DE FRANCIA 1: "Vector valued inequalities for operators in L^p spaces", Bull. London Math. Soc. 12 (1980).

RUBIO DE FRANCIA 2: "Factorization and extrapolation of weigts", B.A.M.S. 7 (1982).

RUBIO DE FRANCIA, RUIZ, TORREA: " Les operateurs de Calderón-Zygmund Vectoriels", por aparecer.

RUIZ: "Teoría de Calderón-Zygmund para funciones vectoriales y desigualdades con peso", Tesis doctoral Zaragoza (1983).

SAWYER: "A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators", Studia Math. 75 (1982).

STEIN 1: "Singular integrals and differentiability properties of functions", Princeton U. Press (1970).

STEIN 2: "The developement of square function in the work of A.Zygmund", B.A.M.S. (1982).

STEIN, WEISS: "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces", Princeton (1971).

STEIN, STROMBERG: "Behavior of maximal functions in R^n for large n", preprint.

STEIN, WAINGER: "Problems in Harmonic Analysis related to curvature", B.A.M.S. 84 (1978).

TORREA: " Análisis de Fourier de Funciones Vectoriales", Tesis doctoral. Zaragoza (1980).

ZO: " A note on approximation of the identity", Studia Math. (1976).