ISSN 0078 - 2009

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS

15

AGNES BENEDEK
EDGARDO FERNANDEZ STACCO
y
RAFAEL PANZONE

LECCIONES COMPLEMENTARIAS DE ANALISIS SUPERIOR

1987

INMABB - CONICET
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA es una colección destinada principalmente a reunir los trabajos de investigación, notas de curso, conferencias, seminarios, realizados en la Universidad Nacional del Sur en el campo de la Lógica Matemática.

Esta publicación no tendrá un carácter periódico. Los fascículos —cada uno de los cuales contendrá en general un solo trabajo— serán numerados en forma continuada.

Las Universidades, Academias, Sociedades Científicas, y los Editores de Revistas de Matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Toda la correspondencia relativa a esta colección deberá ser dirigida a:

SERVICIO DE CANJE
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE LOGICA MATEMATICA est une collection destinée principalement a reunir les travaux de recherches, notes de cours, conférences, séminaires, réalisés dans l'Université Nationale du Sud dans le domaine de la Logique Mathématique.

Cette publication n'aura pas un caractère périodique. Les fascicules —chacun desquels aura en général un seul travail— seront numérotés d'une façon continuée.

Les Universités, les Académies, les Sociétés Savantes et les Editeurs de Revues de Mathématiques sont instamment priés d'échanger leurs publications contre celles de l'Institut de Mathématique de l'Université Nationale du Sud.

Toute la correspondance relative à cette collection doit être adressée à:

SERVICIO DE CANJE
INSTITUTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS (*)

N° 15

LECCIONES COMPLEMENTARIAS DE ANALISIS SUPERIOR

por

Agnes Benedek

Edgardo Fernández Stacco

y

Rafael Panzone

INMABB - CONICET

1987

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

Los dos primeros capítulos de estos apuntes se basan en lecciones impartidas por uno de los autores y publicadas como Informes Técnicos del INMABB (N°5 y 7) y el tercer capítulo en borradores preparados por A. Benedek y el que firma.
El objetivo perseguido es presentar al estudiante algunos tópicos del Análisis que en general no son temas de nuestra Licenciatura en Matemática y con la intención de que los jóvenes interesados recurran, a continuación, a los textos citados en las referencias.
Los capítulos están ordenados por su grado de dificultad pero son independientes uno del otro.

R.P.

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

CAPITULO I.

1. ECUACIONES INTEGRALES DE VOLTERRA

Sean $0 \leqslant x \leqslant b$; $f(x)$ y $K(x,t)$ funciones continuas dadas; la ecuación

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\ \phi(t)\ dt \tag{1}$$

se llama ecuación integral de Volterra de segunda especie; $\phi(x)$ es la función incógnita y λ un parámetro numérico. La función $K(x,t)$ se denomina núcleo de la ecuación de Volterra.

Las ecuaciones

$$\phi(x) = \lambda\int_0^x K(x,t)\ \phi(t)\ dt \tag{2}$$

$$\int_0^x K(x,t)\ \phi(t)\ dt = f(x) \tag{3}$$

se denominan ecuación homogénea de Volterra de segunda especie y ecuación integral de Volterra de primera especie respectivamente.

<u>Ejemplos</u>: 1) $$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\,\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\ dt$$

2) $$x\ e^x = \operatorname{sen} x + 2\int_0^x \cos(x-t)\ t\ e^t\ dt$$

Podemos calcular la integral y llegar al resultado; otro método de verificación es derivar y plantear una ecuación diferencial.

La resolución de una ecuación diferencial de orden n con condiciones iniciales puede reducirse a la resolución de una ecuación integral de Volterra de segunda especie. Veámoslo para n=2.

Sean $a_1(x)$, $a_2(x)$, $F(x)$ funciones continuas; consideremos la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y''(x) + a_1(x)\ y'(x) + a_2(x)\ y(x) = F(x) \tag{4}$$

y las condiciones iniciales:

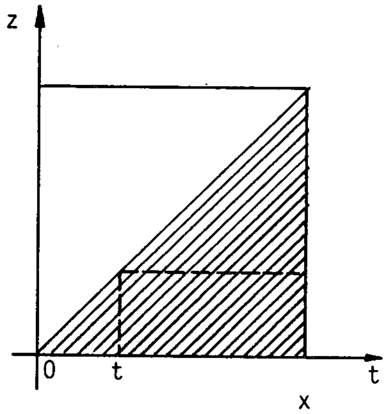
$$y(0) = C_0 \qquad y'(0) = C_1 \tag{5}$$

Sea $\phi(x) = y''(x)$; integrando obtenemos

$$y'(x) = \int_0^x \phi(t)\, dt + C_1$$

$$y(x) = \int_0^x (x-t)\, \phi(t)\, dt + C_1\, x + C_0$$

pues $\int_0^x dt \int_0^t \phi(z)\, dz = \int_0^x \phi(z)\, dz \int_z^x dt$



Reemplazando lo obtenido en la ecuación (4)

$$\phi(x) + a_1(x)\, [\int_0^x \phi(t)\, dt + C_1] + a_2(x)\, [\int_0^x (x-t)\, \phi(t)\, dt + C_1\, x + C_0] = F(x)$$

o bien

$$\phi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)\, (x-t)]\phi(t)\, dt = F(x) - C_1\, a_1(x) - C_1\, x\, a_2(x) - C_0\, a_2(x) =:$$

$$=: f(x)$$

Si

$$- [a_1(x) + a_2(x)\, (x-t)] = K(x,t) \qquad \text{resulta:}$$

(6) $$\phi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\, \phi(t)\, dt$$

La existencia de una solución de (6) resulta de la existencia de solución para el problema (4), (5); recíprocamente, resolviendo la ecuación integral (6) y reemplazando $\phi(x)$ obtenemos $y(x)$ que es la solución de la ecuación (4) que satisface (5). En efecto, $\int_0^x (x-t)\,\phi(t)\,dt$ se anula junto con su derivada en $x = 0$.

Si $a_1(x) = \alpha_1$ y $a_2(x) = \alpha_2$ $\quad K(x,t) = -[\alpha_1 + \alpha_2(x-t)] = k(x-t)$,

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\,\phi(t)\,dt \tag{7}$$

Es decir una ecuación diferencial con coeficientes constantes y condiciones iniciales se lleva a una ecuación de convolución (7).

Sea el operador $\mathcal{L} = \sum_{j\leq k} a_j D^j$, $D = \frac{d}{dx}$, $x \in R$, a_j constantes , $k \geq 1$.

Se sabe que existe g perteneciente a $C^\infty(R)$ tal que: $\mathcal{L}g = 0$;

$$g^{(\mu)}(0) = 0 \ , \ \mu = 0, 1, \ldots , k-2 \ ; \ g^{(k-1)}(0) = \frac{1}{a_k}$$

Vale entonces el siguiente ([J]):

TEOREMA 1.1. Sea $U(x)$ continua en $x > a$, nula en $x \leq a$ y acotada en un entorno de $x = 0$. La ecuación $\mathcal{L}Y = U$ tiene solución (en el sentido de las distribuciones):

$$Y(x) = \int_0^x (gH)(x-t)\,U(t)\,dt \ , \ H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} ,$$

$Y(x)$ pertenece a $C^{(k-1)}(R)$; $Y(0) = \ldots = Y^{(k-1)}(0) = 0$.

$Y(x) = 0$ en $x \leq a$ y es la única solución con esa propiedad. Si U es continua en R, Y es solución en el sentido ordinario y tiene k derivadas continuas y vale $Y^{(k)}(0) = 0$. gH es núcleo de Green para el problema de condiciones iniciales.

2. FUNCION GAMMA O INTEGRAL DE EULER DE SEGUNDA ESPECIE

Para $Re(z) > 0$ definimos la función gamma por la igualdad:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \tag{1}$$

Integrando por partes en (1) : $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z}\, dz = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$, luego

$$z\,\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \tag{2}$$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$; aplicando (2) tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\;\Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= 2\;\Gamma(2) = 2 \\ \Gamma(4) &= 3\;\Gamma(3) = 3 \times 2 = 3! \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma(n) &= (n-1)\;\Gamma(n-1) = (n-1)! \end{aligned}$$

Para $Re(z) \leqslant 0$ la definición (1) no tiene sentido puesto que la integral diverge. Por prolongación analítica podemos definir $\Gamma(z)$ en todo el plano complejo. Los puntos $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$ serán polos simples de la función $\Gamma(z)$.

Propiedades:

(i) $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$

si $z = \frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$; entonces $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(ii) $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \dfrac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$; $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(iii) <u>Fórmula de duplicación de Legendre</u>

$$\Gamma(z)\;\Gamma(z + \tfrac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\;\Gamma(2z)$$

(iv) <u>Fórmula asintótica de Stirling</u>: sea $0 < \delta < \pi$ y $-\pi + \delta \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \pi - \delta$.

Entonces $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\;\, z^{z-\frac{1}{2}}\, e^{-z}$.

(v) <u>Definición de Weierstrass</u>

$$(3) \qquad \frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}$$

$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m\right) = 0.57721\dots$ es la constante de Euler.

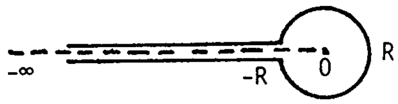
La igualdad (3) define una función entera (de orden 1)

(vi) Si $\operatorname{Im} s \neq 0$, $\Gamma(s) = \overline{\Gamma(\bar{s})}$. Vale $|\Gamma(it)|^2 = \dfrac{2\pi}{t(e^{\pi t} - e^{-\pi t})}$.

(vii) De (3) sigue enseguida que

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

(viii) $$2\pi i\, \Gamma^{-1}(s) = \int z^{-s} e^{z}\, dz \qquad \text{(Hankel).}$$



NOTA: Para la demostración de i) - v) ver Cap.2, pags. 59 - 64.

3. FUNCION BETA O INTEGRAL DE EULER DE PRIMERA ESPECIE.

Para $\operatorname{Re}(p) > 0$ y $\operatorname{Re}(q) > 0$ definimos la función Beta por

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1}\, dx$$

La relación entre las integrales de Euler de primera y segunda especie está dada por la igualdad

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q,p)$$

(NOTA: Ver demostración, Cap.2, pag. 61)

4. PROBLEMA DE ABEL.

Supongamos que un punto material se desliza sin fricción sobre una curva en el plano (ξ,η) bajo la acción de la fuerza de gravedad; que comienza su movimiento sin velocidad inicial en el punto de la curva de ordenada x y tarda un tiempo $t = f_1(x)$ en llegar a $\eta = 0$.

El problema consiste en determinar la curva conociendo la función $f_1(x)$.

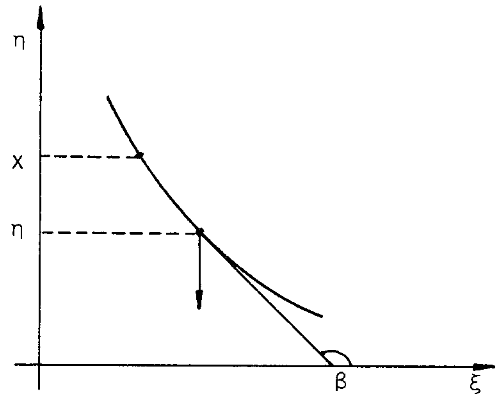


Fig. 4.1

$$\frac{1}{2} v^2(\eta) = g(x - \eta) \qquad g = \text{aceleración de la gravedad.}$$

Si β es el ángulo que forma la tangente a la curva en el punto de ordenada η

$$\frac{d\eta}{dt} = -v(\eta) \text{ sen } \beta(\eta) = -\sqrt{2g(x - \eta)} \text{ sen } \beta(\eta)$$

Si

(1) $$\phi(\eta) = \frac{1}{\text{sen } \beta(\eta)}$$

entonces,

$$dt = \frac{-\phi(\eta)\, d\eta}{\sqrt{2g(x - \eta)}}$$

integrando

$$f_1(x) = -\int_0^x \frac{\phi(\eta)\, d\eta}{\sqrt{2g(x - \eta)}}$$

luego

$$-\sqrt{2g}\, f_1(x) = \int_0^x \frac{\phi(\eta)\, d\eta}{\sqrt{x - \eta}}$$

Llamando $f(x) := -\sqrt{2g}\, f_1(x)$, tenemos la ecuación de Abel

$$(1') \qquad f(x) = \int_0^x \frac{\phi(\eta)\, d\eta}{\sqrt{x - \eta}}$$

Esta es una ecuación integral de Volterra de primera especie, de convolución, cuyo núcleo no es de cuadrado integrable.
Puesto que $f(x)$ es dato, hallando $\phi(\eta)$ obtenemos la ecuación de la curva. De (1)

$$\eta = \Phi_2(\beta)$$

además:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \beta \qquad ; \qquad d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg} \beta}$$

Luego:

$$\xi = \int^{\beta} \frac{\Phi_2'(s)\, ds}{\operatorname{tg} s} = \Phi_1(\beta)$$

En consecuencia obtenemos la que, presumiblemente, es la ecuación paramétrica de la trayectoria descripta por el móvil:

$$\begin{cases} \xi = \Phi_1(\beta) \\ \eta = \Phi_2(\beta) \end{cases}$$

ECUACION GENERALIZADA DE ABEL

Sea $f(x)$ dada y $0 < \alpha < 1$, queremos resolver la ecuación

$$(2) \qquad f(x) = \int_0^x \frac{\phi(t)\, dt}{(x - t)^{\alpha}}$$

Multipliquemos ambos miembros de (2) por $\dfrac{ds}{(x - s)^{1-\alpha}}$ e integremos respecto de s entre 0 y x

$$(3) \qquad \int_0^x \frac{f(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}} = \int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\phi(t)\,dt}{(s-t)^{\alpha}} = \int_0^x \phi(t)\,dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}}$$

Haciendo $s = t + y(x - t)$

$$(4) \qquad \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \int_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}\,dy = B(1-\alpha,\alpha) = \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) =$$

$$= \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\alpha}$$

Reemplazando en (3)

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}} = \int_0^x \frac{\pi}{\operatorname{sen} \alpha\pi}\,\phi(t)\,dt$$

luego

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi}\,F(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt$$

entonces

$$\phi(x) = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi}\,F'(x) = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi}\left[\int_0^x \frac{f(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\right]'$$

Integrando por partes obtenemos

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{f(0)\,x^{\alpha}}{\alpha} + \int_0^x f'(s)\,\frac{(x-s)^{\alpha}}{\alpha}\,ds\right] \text{ , y}$$

$$(5) \qquad \phi(x) = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)\,ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\right]$$

<u>Problema de la tautócrona</u>: hallar la curva (ξ,η) (cf. §4) para la cual la partícula alcanza el eje ξ al cabo de un mismo tiempo cualquiera sea la posición inicial. Corresponde a $f_1(x)$ = cte.. O sea, $f(x) \equiv C$ y $\alpha = \frac{1}{2}$ en (2). La solución de

este problema de Abel es una cicloide.

De (5)

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{c}{\sqrt{x}}$$

de donde

$$\operatorname{sen}\beta(\eta) = \frac{1}{\phi(\eta)} = \frac{\pi\sqrt{\eta}}{c}$$

entonces

$$\eta = \frac{c^2}{\pi^2}\operatorname{sen}^2\beta(\eta) = \frac{c^2}{\pi^2}\frac{1-\cos 2\beta}{2}$$

$$d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{c^2}{\pi^2}\frac{\operatorname{sen} 2\beta\, d\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{c^2}{\pi^2}\, 2\cos^2\beta\, d\beta = \frac{c^2}{\pi^2}(1+\cos 2\beta)d\beta$$

$$\xi = \frac{c^2}{\pi^2}\left(\beta + \frac{\operatorname{sen} 2\beta}{2}\right) + c'$$

La curva obtenida es:

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{c^2}{2\pi^2}(2\beta + \operatorname{sen} 2\beta) + c' \\[2ex] \eta = \dfrac{c^2}{2\pi^2}(1 - \cos 2\beta) \end{cases}$$

La ecuación paramétrica de la cicloide es:

$$\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

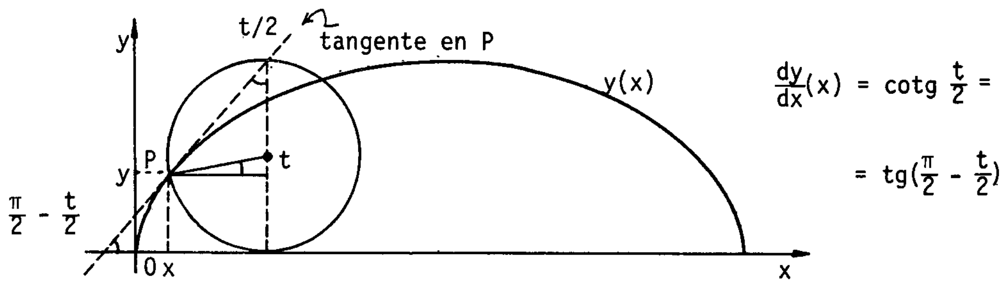


Fig.4.2.

Consideremos:

$X = x$
$Y = -y + 2r$

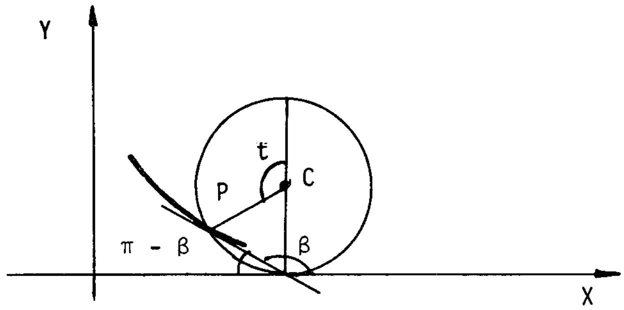


Fig.4.3.

Se ve que $\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{t}{2}$, o sea, $t = 2\beta - \pi$; reemplazando

$$X = r(2\beta + \text{sen } 2\beta) - r\pi$$
$$Y = r(1 - \cos 2\beta)$$

tomando $r = \frac{c^2}{2\pi^2}$, $c' = -r\pi$ obtenemos (6).

Los móviles 1, 2 y 3 tardan el mismo tiempo para llegar a F si son abandonados a la gravedad y en C no hay rozamiento.

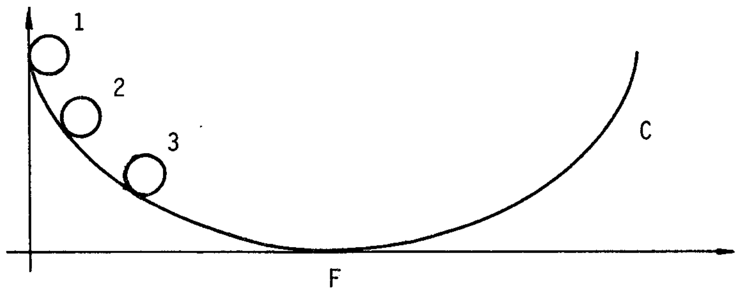


Fig.4.4.

Nota. La cicloide es también braquistócrona, es decir, entre todas las rampas que pueden tenderse entre A y C para el descenso sin rozamiento de un grave es la que exige el tiempo mínimo.

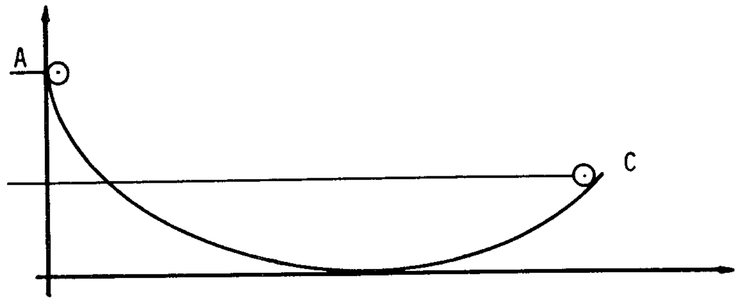


Fig. 4.5.

5. RESOLUCION DE UNA ECUACION INTEGRAL MEDIANTE LA RESOLVENTE

Sea la ecuación integral de Volterra de segunda especie

(1) $$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\ \phi(t)\ dt$$

El siguiente teorema da las condiciones que deben verificar las funciones $f(x)$ y $K(x,t)$ para que la ecuación tenga única solución.

TEOREMA 5.1. Si $f(x) \in L^2(0,a)$ y $K(x,t) \in L^2((0,a) \times (0,a))$ la ecuación (1) tiene exactamente una solución en $L^2(0,a)$.

Esta solución viene dada por la fórmula

(2) $$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x R(x,t,\lambda)\ f(t)\ dt$$

$R(x,t,\lambda)$ es el núcleo resolvente perteneciente a $L^2((0,a) \times (0,a))$ que se obtiene por la serie uniformemente convergente:

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu}\ K_{\nu+1}(x,t)$$

$K_{\nu+1}$ es el núcleo iterado definido del siguiente modo:

$$K_1(x,t) = K(x,t)\ ,\ K_{\nu+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)\ K_{\nu}(z,t)\ dz \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Ejemplo:

$$K = K_1(x,t) = 1,\ K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)\, K_1(z,t)\, dt = x - t,\ \dots,\ K_n = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1} = \exp \lambda(x - t).$$

Nota 1. El teorema 5.1 implica que el operador definido por un núcleo de tipo Volterra en L^2 tiene su espectro contenido en $\{0\}$. Como debe ser no vacío: $\sigma = \{0\}$. Esto se ve directamente observando que para todo $\phi \in L^2$, $K\phi \in C([0,a])$, o sea, K no es sobre. Además σ no es necesariamente igual a σ_p.

Nota 2. Si $K(x,t) = k(x - t)$ entonces el núcleo resolvente es de la forma:
$$R(x,t,\lambda) = r(x-t,\lambda).$$

El teorema dado nos asegura la unicidad de la solución en el espacio $L^2(0,a)$; a continuación daremos un ejemplo de una ecuación que tiene solución en $L^2(0,a)$ que es única y también tiene "solución" en otro espacio de funciones que contiene al primero.

Sea

$$\phi(x) = \int_0^x K(x,t)\, \phi(t)\, dt \qquad (f(x) \equiv 0 \quad \lambda = 1)$$

Definimos $K(x,t)$ en $[0,1] \times [0,1]$ como sigue:

$$K(x,t) = \begin{cases} t.e^{\frac{1}{x^2} - 1} & 0 \leqslant t \leqslant x.e^{1 - \frac{1}{x^2}} \\ x & x.e^{1 - \frac{1}{x^2}} \leqslant t \leqslant x \\ 0 & t > x \end{cases}$$

$K(x,t)$ es continuo en $0 \leqslant t \leqslant x$ y acotado en $[0,1] \times [0,1]$.

La función $\phi \equiv 0$ es solución de la ecuación y es la única en $L^2(0,a)$.

Consideremos las funciones no sumables en $(0,1)$: $\phi(x) = \frac{C}{x}$; veamos que también son soluciones de la ecuación:

$$\int_0^x K(x,t)\ \phi(t)\ dt = \int_0^{xe^{1-1/x^2}} t\ e^{1/x^2-1}\ \frac{c}{t}\ dt + \int_{xe^{1-1/x^2}}^{x} x\ \frac{c}{t}\ dt =$$

$$= Cx + Cx.\ln e^{1/x^2-1} = \frac{c}{x} = \phi(x).$$

6. LA VIGA VIBRANTE

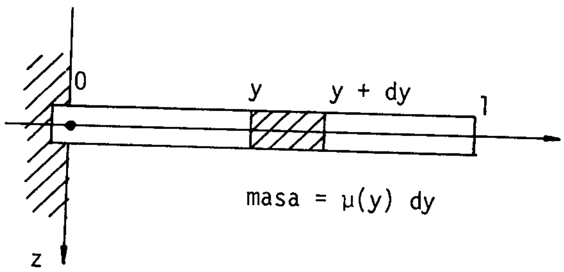


Fig. 6.1.

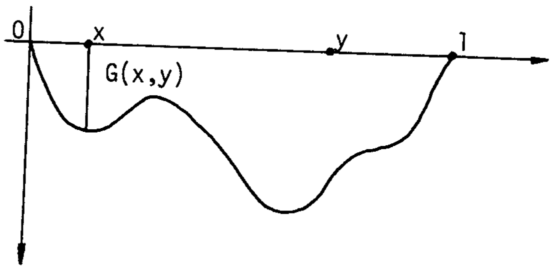


Fig. 6.2.

Consideremos una viga de longitud 1 (Fig. 6.1) y coloquemos en y una carga unitaria que deforme la viga (Fig. 6.2).
Si G(x,y) es la deflexión de la viga en el punto x en la dirección Oz por esa carga en y, entonces

(1) $$z(x) = \int_0^1 G(x,y)\ p(y)\ dy\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

es la deflexión total en x provocada por una carga continua a lo largo de la viga (principio de superposición).
El principio de reciprocidad elástica de Betti-Maxwell asegura que $G(y,x) = G(x,y)$.
Supongamos ahora a la viga en movimiento; la deflexión es ahora función de x y de t.
Entonces

$$z(x,t) = \int_0^1 G(x,y)\left[p(y) - \mu(y)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(y,t)\right] dy. \tag{2}$$

Aquí $\mu(y)$ es la densidad lineal del material. De la ecuación de equilibrio (1) se pasa a la ecuación dinámica (2) utilizando el principio de D'Alembert que consiste en reemplazar en la primera las fuerzas activas por las correspondientes fuerzas perdidas.

En el caso de vibraciones armónicas: $z(x,t) = Z(x)e^{i\omega t}$, y si suponemos que no hay cargas ($p = 0$), de la ecuación integrodiferencial (2) obtenemos la ecuación de Fredholm, homogênea de segunda especie:

$$Z(x) - \omega^2 \int_0^1 G(x,y)\,\mu(y)\,Z(y)\,dy = 0 \tag{3}$$

Si la densidad es constante estamos en el caso de una viga uniforme, y

$$Z(x) - \omega^2\mu \int_0^1 G(x,y)\,Z(y)\,dy = 0 \tag{4}$$

Vamos a resolver el problema por otro camino. Consideremos la ecuación diferencial que gobierna el movimiento transversal

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\mu}{E.I}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

donde E es la elasticidad; I el momento de inercia; $j = EI$ = rigidez a la flexión.
Las condiciones de contorno correspondientes a una viga empotrada en un extremo son:

$$(6) \qquad \begin{cases} z(0,t) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,t) = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}(1,t) = 0 \end{cases}$$

Nos proponemos hallar las frecuencias naturales ν, en este caso el sistema vibrará según un modo normal; por consiguiente

$$z(x,t) = Z(x)e^{i\omega t} \quad , \ \nu = \omega/2\pi.$$

La ecuación (5) y las condiciones (6) se transforman en:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^4Z}{dx^4} - k^4 Z = 0 \ ; \ k^4 = \dfrac{\omega^2\mu}{E.I} = \omega^2\mu/J \ ; \\ Z(0) = Z'(0) = 0 \\ Z''(1) = Z'''(1) = 0. \end{cases}$$

Busquemos la solución más general de la ecuación diferencial (7) que satisfaga:

$$Z(0) = Z'(0) = 0$$

$$Z''(0) = C_2 \ , \ Z'''(0) = C_3.$$

Escribamos la ecuación diferencial en (7) en la forma:

$$\frac{d^4W}{dx^4} = k^4 Z$$

Por el teorema 1.1 existe solución

$$W(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} k^4 \, Z(t) \, dt, \text{ con } W(0) = W'(0) = W''(0) = W'''(0).$$

Sea $P(x) = C_2 \dfrac{x^2}{2!} + C_3 \dfrac{x^3}{3!}$. Luego $P(0) = P'(0) = 0$, $P''(0) = C_2$, $P'''(0) = C_3$.

Entonces: $\frac{d^4(W + P)}{dx^4} = k^4Z$, y puesto que la solución de (7) es única:

$$W + P = Z$$

La función Z satisface la ecuación integral de Volterra de segunda especie.

$$Z(x) - k^4 \int_0^x \frac{(x - t)^3}{3!} Z(t)\, dt = C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x^3}{3!} \tag{8}$$

que tiene una resolvente de convolución.

En lo que sigue hallaremos la solución de la ecuación diferencial (7) por otro método.
Sean

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = \cosh x + \cos x \\ \Phi_2(x) = \operatorname{senh} x + \operatorname{sen} x \\ \Phi_3(x) = \cosh x - \cos x \\ \Phi_4(x) = \operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x \end{cases} \tag{9}$$

Obsérvese que: $\Phi'_1 = \Phi_4$, $\Phi'_4 = \Phi_3$, $\Phi'_3 = \Phi_2$, $\Phi'_2 = \Phi_1$.

Si $Z(x) = \frac{C_2}{2k^2} \Phi_3(kx) + \frac{C_3}{2k^3} \Phi_4(kx)$

se verifica

$$\begin{cases} \frac{d^4Z}{dx^4} - k^2Z = 0 \\ Z(0) = Z'(0) = 0 \\ Z''(0) = C_2 \ , \ Z'''(0) = C_3 \end{cases} \tag{10}$$

Queremos que $Z''(1) = Z'''(1) = 0$, y tenemos dos constantes (C_2,C_3) a elegir

$$Z''(x) = \frac{C_2}{2}\Phi_1(kx) + \frac{C_3}{2k}\Phi_2(kx)$$

$$Z'''(x) = \frac{C_2}{2}k\Phi_4(kx) + \frac{C_3}{2}\Phi_1(kx)$$

Si tomamos x = l e igualamos a cero obtenemos el siguiente sistema:

$$(11)\qquad \begin{cases} C_2[\cosh(kl) + \cos(kl)] + \frac{1}{k}C_3[\operatorname{senh}(kl) + \operatorname{sen}(kl)] = 0 \\ k\,C_2[\operatorname{senh}(kl) - \operatorname{sen}(kl)] + C_3[\cosh(kl) + \cos(kl)] = 0 \end{cases}$$

La condición necesaria y suficiente para que exista solución no trivial es que:

$$(12)\qquad 1 + \cosh(kl)\cos kl \equiv 0$$

Los k que satisfacen esta ecuación elevados a la cuarta son los autovalores de la ecuación y de $\nu = \frac{k^2}{2\pi}\sqrt{\frac{j}{\mu}}$ se obtienen las frecuencias de vibración.

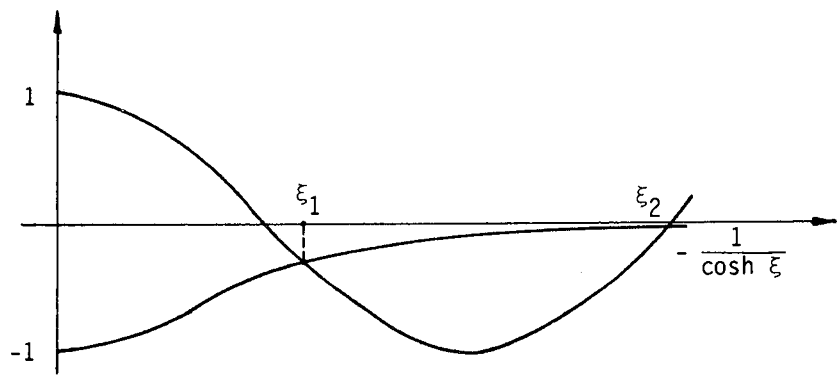


Fig. 6.3.

$$\xi_1 = 1.875$$
$$\xi_2 = 4.694$$
$$\vdots$$
$$\nu_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{j}{\mu}}\cdot\frac{\xi_n^2}{l^2}$$

7. TRASFORMADA DE LAPLACE

Sea $\phi(t)$ una función compleja de la variable real t, localmente sumable, nula en $t < 0$ y tal que $|\phi(t)| \leqslant M(t) e^{s_0 t}$ para casi todo t donde $s_0 \geqslant 0$, $M(t) \in L^1(0,\infty)$. En estas condiciones llamaremos a $\phi(t)$ función objeto; s_0 es un índice de crecimiento de ϕ.

LLamaremos Transformada de Laplace de la función objeto $\phi(t)$ a la función $\Phi(p)$ de la variable compleja $p = s + i\sigma$ definida por la igualdad:

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \phi(t)\, dt \tag{1}$$

$\Phi(p)$ define una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > s_0$. Para indicar que $\Phi(p)$ es la Transformada de Laplace de la función $\phi(t)$ escribimos

$$\phi(t) \risingdotseq \Phi(p),$$

o bien:

$$\Phi(p) = (\mathcal{L}\phi)(p).$$

Denotaremos con L la clase de las funciones objeto

$$L := \{\phi\colon \phi = 0 \text{ en } t < 0,\ \phi e^{-s_0 t} \in L^1(0,\infty) \text{ donde } s_0 = s_0(\phi)\}$$

TEOREMA 7.1 (de inversión). Sea $\phi \in C^1(a,b) \cap L$, $\Phi = \mathcal{L}\phi$, $c > s_0 = s_0(\phi)$ = un índice de crecimiento de f y $t \in (a,b)$. Entonces

$$\phi(t) = (\mathcal{L}^{-1}\Phi)(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{M\to\infty} \int_{c-iM}^{c+iM} \Phi(p)\, e^{pt}\, dp. \tag{2}$$

Es decir, Φ determina a ϕ en (a,b) bajo las hipótesis mencionadas.
Más aún,

TEOREMA 7.2 (de unicidad). Sea $f(t) \in L^1(0,R)$ para todo $R > 0$ y

$\lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-pt} f(t)\, dt \equiv 0$ para todo p tal que Re(p) > a. Entonces f(t) = 0 c.d..

TEOREMA 7.3. Sea Re(p) > α un semiplano donde $\Phi(p)$ es holomorfa. Supongamos que exista a > max(0,α) tal que si Re(p) $\geqslant$ a entonces $|\Phi(p)| \leqslant B|p|^{-2}$, B > 0. Si calculamos usando (2) $\phi = \mathcal{L}^{-1}\Phi$ sobre Re(p) = c $\geqslant$ a entonces $\phi(t) = 0$ para t < 0, $\phi \in L$ y $\mathcal{L}\phi = \Phi$ en Re(p) $\geqslant$ a.

TEOREMA 7.4. Sea $\Phi(p) = M(p)/N(p)$, M y N polinomios en p con grado M < grado N. Si $\Phi(p)$ tiene sólo l polos simples, $a_1, \dots, a_l$, entonces

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{M(a_k)}{N'(a_k)} e^{a_k t} \doteqdot \frac{M(p)}{N(p)} .$$

Recordamos a continuación algunas fórmulas y relaciones importantes sin precisar las hipótesis bajo las cuales ellas valen, y también una pequeña pero útil tabla de transformadas.

(3) $e^{at} \phi(t) \doteqdot \Phi(p-a)$.

(4) Si a > 0, $\phi(t+a) \doteqdot e^{ap}(\Phi(p) - \int_0^a e^{-ps} \phi(s)\, ds)$, y

(5) $\phi(at) \doteqdot \frac{1}{a} \Phi(\frac{p}{a})$, y

(6) $\phi(t-a) \chi_{[a,\infty)} \doteqdot e^{-ap} \Phi(p)$.

(7) $\frac{\phi(t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty \Phi(s)\, ds$.

(8) $\int_0^\infty e^{-st} y'(t)\, dt = -y(0) + s\int_0^\infty e^{-st} y(t)\, dt$.

(9) $\int_0^\infty e^{-st}\, y''(t)\, dt = -y'(0) - sy(0) + s^2\int_0^\infty e^{-st}\, y(t)\, dt.$

(10) $\int_0^\infty e^{-st} y'''(t)\, dt = -y''(0) - sy'(0) - s^2 y(0) + s^3\int_0^\infty e^{-st}\, y(t)\, dt.$

((8) vale, por ejemplo, si $y \in C^1([0,\infty))$, y e y' son $O(e^{ct})$).

$\phi(t)$	$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\phi(t)\, dt$	Condiciones
t^{a-1}	$\Gamma(a).p^{-a}$	$a > 0$, $\mathrm{Re}(p) > 0$
e^{at}	$(p - a)^{-1}$	$\mathrm{Re}\, p > a$
sen at	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\mathrm{Re}\, p > 0$
cos at	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\mathrm{Re}\, p > 0$
sh at	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\mathrm{Re}\, p > \lvert a\rvert$
ch at	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\mathrm{Re}\, p > \lvert a\rvert$
$\ln t$	$\frac{-\gamma + \ln p}{p}$	$\mathrm{Re}\, p > 0$, γ = cte. de Euler
$t^\nu \ln t$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}\left(\frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} + \ln\frac{1}{p}\right)$	$\mathrm{Re}\, \nu > -1$, $\mathrm{Re}\, p > 0$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}$	$\mathrm{Re}\, p > 0$, $a > 0$
$J_0(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{p}\, e^{-a/p}$	$\mathrm{Re}\, p > 0$, $a > 0$
$t^{\nu/2}\, J_\nu(a\sqrt{t})$	$\frac{a^\nu}{2^\nu}\, \frac{e^{-a^2/4p}}{p^{\nu+1}}$	$\mathrm{Re}\, p > 0$, $\mathrm{Re}\, \nu > -1$
t sen at	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$	$\mathrm{Re}\, p > 0$

sen at - at cos at	$\dfrac{2a^3}{(p^2 + a^2)^2}$	Re $p > 0$

TEOREMA 7.5 (del producto). Supongamos que $f(t)$ y $\phi(t)$ son funciones objeto

$$f(t) \doteq F(p) \text{ y } \phi(t) \doteq \Phi(p)$$

Entonces $F(p)\ \Phi(p) \doteq \int_0^t f(u)\ \phi(t-u)\ du = f(t) * \phi(t)$.

Resolver ecuaciones mediante la aplicación de la Transformada de Laplace tiene sus inconvenientes, veamos el siguiente ejemplo.

Sea la ecuación

$$y'(t) + ay(t) = \phi(t) \text{ , a constante,}$$

con la condición

$$y(0) = A.$$

Aplicando la transformada de Laplace resulta:

$$-A + sY(p) + aY(p) = \Phi(p)$$

De donde

$$Y(p) = \frac{\Phi(p) + A}{p + a} = \frac{A}{p + a} + \frac{\Phi(p)}{p + a}$$

entonces

(11) $$y(t) = Ae^{-at} + e^{-at} * \phi(t) = e^{-at}[A + \int_0^t e^{au}\phi(u)\ du]$$

Se puede verificar por reemplazo que (11) es la solución de $y' + ay = \phi$ que vale A en $t = 0$.

Si $\phi(t) = e^{t^2}$ no podemos aplicar el método pues no existe la Transformada de Laplace de dicha función, pero (11) sigue siendo la solución buscada pues la convolución está bien definida.

Vamos a usar la transformada de Laplace para resolver <u>ecuaciones integrales de Volterra de convolución</u>.

Sea

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\,\phi(t)\,dt$$

Si

$$f(x) \doteqdot F(p)\ ,\ F(p) \neq 1 \text{ para todo } p,$$

$$\phi(x) \doteqdot \Phi(p)$$

$$k(x) \doteqdot K(p)$$

Entonces

$$\Phi(p) = F(p) + K(p).\Phi(p)$$

de donde

(12) $$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}$$

Sabemos por el teorema 5.1 que la ecuación integral de convolución tiene solución dada por:

$$\phi(x) = f(x) + \int_0^x r(x-t,1)\,f(t)\,dt$$

Si

$$r(x) \doteqdot R(p)$$

entonces

$$\Phi(p) = F(p) + R(p).F(p)$$

luego

$$R(p) = \frac{\Phi(p) - F(p)}{F(p)} = \frac{\Phi(p)}{F(p)} - 1 = \frac{1}{1 - K(p)} - 1 = \frac{K(p)}{1 - K(p)}$$

Ejemplo: si $k(x) = \text{sen } x$, $K(p) = \dfrac{1}{1 + p^2}$; entonces $R(p) = \dfrac{1}{p^2}$ y $r(x-t,1) = x - t$.

Resolvamos la ecuación

$$\phi(x) = \text{sen } x + \int_0^x 2\cos(x-t)\,\phi(t)\,dt$$

$$\Phi(p) = \frac{\dfrac{1}{1 + p^2}}{1 - \dfrac{2p}{1 + p^2}} = \frac{1}{(p - 1)^2}$$

en consecuencia

$$\phi(t) = e^t * e^t = te^t$$

Puesto que $\phi(t)$ es una función objeto es correcta la aplicación del método.

RESOLUCION DE ECUACIONES INTEGRODIFERENCIALES MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Supongamos a_0, a_1, a_2 constantes; $f(x)$, $k_i(x-t)$, $i = 0, 1, 2$, funciones conocidas.

Resolveremos usando transformada de Laplace la siguiente ecuación integrodiferencial:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y + \int_0^x k_0(x-t)y(t)\,dt + \int_0^x k_1(x-t)y'(t)\,dt + \int_0^x k_2(x-t)y''(t)\,dt =$$

$$= f(x)$$

La solución $y(x)$ que buscamos deberá satisfacer las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$.

Si

$$f(x) \risingdotseq F(p) \;;$$

$$k_i(x) \risingdotseq K_i(p) \quad , \; i = 0, 1, 2,$$

$$y(x) \risingdotseq Y(p)$$

$$a_2(-y'(0) - py(0) + p^2Y(p)) + a_1(-y(0) + pY(p)) + a_0Y(p) + K_0(p)Y(p) +$$

$$+ K_1(p)(-y(0) + pY(p)) + K_2(p)(-y'(0) - py(0) + p^2Y(p)) = F(p)$$

O sea,

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^2(a_2 + K_2(p)) + p(a_1 + K_1(p)) + (a_0 + K_0(p))}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos $y(x)$.

Ejemplos: 1) $\int_0^x e^{x-t}\phi(t)\,dt = x$

$$\Phi(p).\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2}$$

ó $$\Phi(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \quad . \text{ Entonces}$$

(13) $$\phi(x) = 1 - x$$

2) $$\int_0^x (x-t)\,\phi(t)\,dt = x$$

$$\Phi(p).\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}$$

entonces $$\Phi(p) = 1$$

Debemos tener presente al encontrar la solución el campo al cual ella pertenece. La ecuación del ejemplo 2) tiene solución en el campo de las distribuciones pero no en el de las funciones:

(14) $$\phi = \delta = \text{delta de Dirac.}$$

3) $$\int_0^x \ln(x-t)\,\phi(t)\,dt = f(x)\ ,\ f(0) = 0$$

$$\Phi(p).\left(-\frac{\gamma + \ln p}{p}\right) = F(p)$$

de donde

$$\Phi(p) = -\frac{pF(p)}{\gamma + \ln p} = -\frac{p^2F(p)}{p\gamma + p\ln p} = -\frac{p^2F(p) - pf(0) - f'(0)}{p(\gamma + \ln p)} - \frac{f'(0)}{p(\gamma + \ln p)}\ .$$

Recordemos que

$$\frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \doteqdot \frac{1}{p^{\nu+1}}$$

integrando respecto a ν

$$\int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^\infty \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu,$$

Como $\int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p\ \ln p}$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \doteqdot \frac{1}{p\ \ln p}$$

y
$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \doteqdot \frac{a}{ap\ \ln(ap)} = \frac{1}{p\ \ln a + p\ \ln p}$$

Si $a = e^\gamma$:

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu\ e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \doteqdot \frac{1}{p(\gamma + \ln\ p)}$$

luego

$$\int_0^x f''(t)\left[\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu\ e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu\right] dt \doteqdot \frac{p^2F(p) - f'(0)}{p(\gamma + \ln\ p)} .$$

De este modo la solución $\phi(x)$ de la ecuación integral tiene la forma:

$$\phi(x) = -\int_0^x f''(t)\left[\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu\ e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu\right] dt - f'(0)\int_0^\infty \frac{x^\nu\ e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu$$

Si $f(x) = x$, $f(0) = 0$, se obtiene

(15)
$$\phi(x) = -\int_0^\infty \frac{x^\nu\ e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu.$$

Compárese (15) con (13) y (14).

8. ECUACIONES DE FREDHOLM

Sea $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$; $f(x)$ y $K(x,t)$ funciones dadas; $K(x,t) \in L^2((a,b)\times(a,b))$; $\phi(x)$ es la incógnita y λ el parámetro numérico. La ecuación

(1) $$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\,\phi(t)\,dt = f(x)$$

se llama ecuación integral de Fredholm de segunda especie no homogénea. La función $K(x,t)$ se denomina núcleo de la ecuación (1).
Si $f(x) \equiv 0$ la ecuación (1) se llama homogénea.
La ecuación

$$\int_a^b K(x,t)\,\phi(t)\,dt = f(x)$$

se llama ecuación de Fredholm de primera especie.
Veamos que la resolución de una ecuación diferencial con condiciones de contorno se reduce a la resolución de una ecuación integral de Fredholm.
Consideremos la ecuación diferencial

(2) $$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y(x) = 0$$

con $p_0(x)$, $p_1(x)$, ... , $p_n(x)$, continuas en $[a,b]$ y las condiciones de contorno

(3) $$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)}y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(a) +$$

$$+ \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)}y'(b) + \dots + \beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

las formas lineales V_1, ... , V_n, son linealmente independientes.
Se llama función de Green del problema de contorno (2) - (3) a la función $G(x,\xi)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a < \xi < b$, que satisface las propiedades siguientes:

(I) $G(x,\xi)$ es continua y $\dfrac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}$ es continua en $a \leqslant x \leqslant b$ para ξ perteneciente a (a,b), $j = 1, \dots, n-2$,

(II) $$\left.\frac{\partial^{(n-1)}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{(n-1)}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)},$$

(III) En cada intervalo $[a,\xi)$ y $(\xi, b]$ la función $G(x,\xi)$ considerada como función de x satisface (2):

$$\mathbb{L}[G] = 0$$

(IV) $V_k(G) = 0$ $(k = 1, 2, \dots , n)$ para todo $\xi \in (a,b)$.

TEOREMA 8.1. Si $L[y] = 0$, $V_k(y) = 0$, tiene sólo la solución trivial entonces existe una única función de Green.

TEOREMA 8.2. Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $L[y] = f(x)$ entonces si se satisfacen las hipótesis del teorema 8.1

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)\ f(\xi)\ d\xi$$

En general los problemas que se presentan tienen la forma

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} L[y] = \lambda y + h(x) \\ V_k(y) = 0 \end{cases}$$

Para $h(x) \equiv 0$ se tiene el problema homogéneo

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} L[y] = \lambda y \\ V_k(y) = 0 \end{cases}$$

Los λ para los cuales existe para (5) solución no trivial se llaman autovalores (ó valores propios).

TEOREMA 8.3. Si el problema $L[y] = 0$, $V_k(y) = 0$, admite sólo la solución trivial entonces el problema (4) es equivalente a la ecuación integral de Fredholm

$$y(x) = \lambda\int_a^b G(x,\xi)\ y(\xi)\ d\xi + f(x)$$

donde

$$f(x) = \int_a^b G(x,\xi)\ h(\xi)\ d\xi$$

En particular el problema de contorno (5) es equivalente a la ecuación integral homogénea

$$y(x) = \lambda\int_a^b G(x,\xi)\ y(\xi)\ d\xi$$

PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE.

Sea $p(x) \in C^1([a,b])$, $p(x) > 0$; $q(x) \in C[a,b]$, $a \leqslant x \leqslant b$.

$$\begin{cases} L[y] \equiv (p(x)\, y')' + q(x)\, y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

Existe una solución y_1 tal que (cf.T.1.1.):

$$L[y_1] = 0,\ y_1(a) = 0,\ y_1'(a) \neq 0.$$

Análogamente existe y_2 solución de:

$$L[y_2] = 0,\ y_2(b) = 0,\ y_2'(b) \neq 0.$$

Supongamos que exista x_0 tal que $W(y_1,y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$, entonces $W(y_1,y_2)(x) \neq 0$ para todo x y esto implica que y_1 e y_2 son linealmente independientes.

Si $y(x)$ satisface $L[y] = 0$ y además $y(a) = y(b) = 0$ entonces

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

$$y(a) = C_1y_1(a) + C_2y_2(a) = C_2y_2(a)$$

Si $y_2(a) = 0$ el wronskiano es cero en a, contradicción. En consecuencia, debe ser

$C_2 = 0$; análogamente conluímos que $C_1 = 0$.

La única solución del problema es $y(x) \equiv 0$, entonces existe la función de Green que en este caso es igual a:

$$G(x,\xi) \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\ y_2(\xi)}{p(\xi)\ W(\xi)} & a \leqslant x \leqslant \xi \\ \\ \dfrac{y_1(\xi)\ y_2(x)}{p(\xi)\ W(\xi)} & \xi \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $y'' + k^2 y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ k \text{ real} \neq 0.$

$y(0) = y(1) = 0$

$y_1(x) = \text{sen } kx$

$y_2(x) = \text{sen } k(x-1)$

Entonces $W(y_1,y_2) = k \text{ sen } k$. Por lo tanto $W(y_1,y_2) = 0$ si y sólo si $k^2 = n^2\pi^2$; $n = 1, 2, \ldots$. La función sen $n\pi x$ es autofunción del problema correspondiente al autovalor $(n\pi)^2$.

Si $k^2 \neq n^2\pi^2$ construímos

$$G(x,\xi) \begin{cases} \dfrac{\text{sen } kx \text{ sen } k(\xi-1)}{k \text{ sen } k} & 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ \\ \dfrac{\text{sen } k\xi \text{ sen } k(x-1)}{k \text{ sen } k} & \xi \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Si tenemos

$$y'' + k^2 y = f(x) \quad 0 < x < 1$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

por el teorema 8.2 la solución es:

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\ f(\xi)\ d\xi$$

2) $$y'' - k^2 y = 0\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ k \text{ real} \neq 0.$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

Las soluciones linealmente independientes son: $y_1(x) = e^{kx}$; $y_2(x) = e^{-kx}$; la solución general es: $y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$; para que $y(x)$ satisfaga las condiciones de contorno deben ser $C_1 = C_2 = 0$.

La única solución es la trivial y por tanto existe la función de Green:

$$G(x,\xi) \begin{cases} \dfrac{\text{senh } kx.\text{senh } k(\xi-1)}{k \text{ senh } k} & 0 \leqslant x \leqslant \xi \\[2ex] \dfrac{\text{senh } k\xi.\text{senh } k(x-1)}{k \text{ senh } k} & \xi \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

3) $$y'' = 0 \ , \ 0 < x < 1 \ ,$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Construyo $y_1(x) = x$; $y_2(x) = x - 1$. Resulta $W(y_1,y_2) = 1$ y

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(\xi - 1) & 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ \xi(x - 1) & \xi \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Este caso completa a 1) y 2) anteriores. La ecuación

$$y'' + \lambda y = f \ , \ y(0) = y(1) = 0$$

es equivalente a:

$$y(x) = F(x) - \lambda \int_0^1 G(x,t)\, y(t)\, dt \ ,$$

donde $F = \int G f \, d\xi$.

Enunciamos a continuación tres teoremas de Fredholm. Suponemos $\lambda \neq 0$, $K(x,t) \in L^2((a,b) \times (a,b))$, y las funciones (complejas) ϕ, ψ, f, g en $L^2(a,b)$.

TEOREMA 8.1 (de la alternativa). O bien la ecuación

(6) $$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\ \phi(t)\ dt = f(x)$$

tiene exactamente una solución para toda f, o bien la ecuación homogénea

(7) $$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\ \phi(t)\ dt = 0$$

tiene una solución distinta de cero.

TEOREMA 8.2. Si para (6) vale el primer caso de la alternativa ésta vale también para la ecuación:

(8) $$\psi(x) - \lambda\int_a^b K(t,x)\ \psi(t)\ dt = g(x).$$

Si $K^*(x,t) := \overline{K(t,x)}$ entonces la ecuación (7) y su ecuación conjugada

(9) $$\psi(x) - \overline{\lambda}\int_a^b K^*(x,t)\ \psi(t)\ dt = 0$$

tienen el mismo número finito de soluciones linealmente independientes.

Definamos: $N = \{\phi\colon \phi - \lambda\int K\phi\ dt = 0\}$, $N^* = \{\psi\colon \psi - \overline{\lambda}\int K^*\psi\ dt = 0\}$.

TEOREMA 8.3. Condición necesaria y suficiente de existencia de solución ϕ_0 de (6) en el segundo caso de la alternativa es la condición de perpendicularidad: existe ϕ_0 sii $f \perp N^*$, es decir, si y sólo si $\int_a^b f(x)\ \overline{\psi}(x)\ dx = 0$ para todo $\psi \in N^*$. En ese caso, todas las funciones en $\phi_0 + N$ resuelven la ecuación.

* 9. LA ECUACION INTEGRAL POLAR (HILBERT).

Sea $K(x,t)$ un núcleo continuo definido en $(0,1) \times (0,1)$, real y simétrico; sea $p(x)$ una función continua en $0 \leqslant x \leqslant 1$. Supongamos además que el operador.

$K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, $(Ky)(x) = \int_0^1 K(x,t)\, y(t)\, dt$ es positivo, es decir, $(Ku,u) > 0$ para todo $u \neq 0$. Sabemos que la ecuación $Ky = \mu y$ tiene una familia numerable de autovalores $\{\mu_j\}$ positivos. Además $\{\phi_j\}$, la familia correspondiente de autofunciones (reales), es ortogonal y completa. La supondremos normalizada. Si $p(x) \geqslant 0$ en $[0,1]$, la ecuación

(1) $$\psi(x) = \lambda \int_0^1 (K(x,z)\, p(z))\, \psi(z)\, dz$$

es equivalente a la ecuación

(2) $$\Psi(x) = \lambda \int_0^1 \tilde{K}(x,z)\, \Psi(z)\, dz,$$

si ponemos $\Psi = \sqrt{p}\psi$, $\tilde{K}(x,z) = \sqrt{p(x)}\, K(x,z)\, \sqrt{p(z)}$. Este núcleo $\tilde{K}$ tiene las mismas propiedades exigidas a K. Si en lugar de $p(z)$ en (1) se tiene $p(x)$, (1) también se reduce a (2), pero con $\Psi = \psi/\sqrt{p}$, supuesto que $p(x) > 0$ para todo x.
Supongamos ahora que p tenga ceros en $[0,1]$. El estudio del problema de autovalores (1) puede siempre reducirse al de

(3) $$y(x) = \lambda \int_0^1 [K(x,z)\, p(x)]\, y(z)\, dz = p(x).Ky,$$

pues $K.p(x) = (K.p(z))^*$.
Supondremos en lo que sigue que $p(x)$ cambia de signo, y es $\neq 0$ casi doquier. El problema no homogéneo para (3) es entonces

(4) $$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,z)\, p(x)\, y(z)\, dz + f(x).$$

El teorema de Mercer asegura que si $\lambda_n = \mu_n^{-1}$:

(5) $$K(x,z) \doteq \sum \mu_n\, \phi_n(x)\, \phi_n(z) = \sum \frac{1}{\lambda_n}\, \phi_n(x)\, \phi_n(z).$$

Definimos:

(6) $$H(x,z) = \sum \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \phi_n(x)\ \phi_n(z)\ , \text{ (c.d.)}$$

Entonces $H(x,z) \in L^2(0 \leq z \leq 1)$ para todo $x \in [0,1]$. En efecto,

$\sum \left(\frac{\phi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right)^2 = K(x,x) < \infty$. Más aún, $H(x,z)$ es real, simétrico y $\|H(.,.)\|_2^2 = \sum \frac{1}{\lambda_n} =$

$= \int_0^1 K(x,x)\, dx < \infty$.

Además

(7) $$K(x,z) = \int_0^1 H(x,u)\ H(z,u)\ du \quad \text{para todo } (x,z).$$

Si $y(x)$ es solución de la ecuación polar (4) entonces

$$Y(v) := \int_0^1 y(x)\ H(x,v)\ dx =$$

$$= \lambda \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 H(x,u)\ H(z,u)\ du\right) y(z)\ dz\right] H(x,v)\ p(x)\ dx + \int_0^1 f(x)\ H(x,v)\ dx\ .$$

Llamando $F(v)$ al último sumando y definiendo

(8) $$L(u,v) := \int_0^1 H(x,u)\ H(x,v)\ p(x)\ dx = L(v,u)$$

tenemos

(9) $$Y(v) = \lambda \int_0^1 L(u,v)\ Y(u)\ du + F(v)\ ,\ L \in L^2((0,1)^2).$$

En efecto, como $\int |H(x,u)\ H(z,u)|du \leq \left(\sum \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n}\right)^{1/2} \left(\sum \frac{\phi_n^2(z)}{\lambda_n}\right)^{1/2} = I$, resulta

$\int I.P.|H(x,v)|\, dx \leq \max|p|.\sqrt{K(z,z)}.\left(\sum \frac{1}{\lambda_n}\right)^{1/2}.\left(\sum \frac{\phi_n^2(v)}{\lambda_n}\right)^{1/2} = O(1).$

Luego $\iiint |H(x,u)\ H(z,u)\ H(x,v)|.|y(z)\ p(x)|dx\ du\ dz < \infty$, y puede aplicarse el Teorema de Fubini.

Por otra parte, si $f \in L^2$ y $c_n(f) = \int_0^1 f\phi_n\, dx$ se tiene

$$(10)\quad \iint L(u,v)\, f(u)\, f(v)\, du\, dv = \iiint H(x,u)\, H(x,v)\, p(x)\, f(u)\, f(v)\, du\, dv\, dx =$$

$$= \int [\int H(x,u)\, f(u)\, du]^2\, p(x)\, dx.$$

Si $0 = \int H(x,u)\, f(u)\, du = \sum \frac{c_n(f)}{\lambda_n}\, \phi_n(x)$ entonces $c_n(f) = 0$ para todo n, y en consecuencia f = 0. Luego, del teorema de la alternativa de Fredholm sigue que $\int H(x,u)\, f(u)\, du$ recorre $L^2((0,1))$ cuando f lo hace. Por lo tanto, (10) toma valores positivos y negativos según se elija f. De esto sigue que el operador

$$(11)\qquad Lf = \int_0^1 L(u,v)\, f(v)\, dv$$

tiene autovalores positivos y negativos. En efecto, $\sup_{\|f\|=1} (Lf,f)$ e $\inf_{\|f\|=1} (Lf,f)$ son, respectivamente, el mayor y el menor autovalor de L.

PROPOSICION. Una ecuación integral polar tiene autovalores positivos y negativos.

DEMOSTRACION. Sea Φ autofunción del operador (11) correspondiente al autovalor λ^{-1}, y

$$(12)\qquad \eta(x) = \int_0^1 p(x)\, H(x,u)\, \Phi(u)\, du.$$

Entonces $\eta \neq 0$ y vale (cf.(8)):

$$\eta(x) = \lambda \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p(x)\, H(x,u) [H(z,u)\, H(z,v)\, p(z)] \Phi(v)\, dz\, dv\, du =$$

$$(\text{por } 7) = \lambda \int_0^1 \int_0^1 K(x,z)\, p(x)\, p(z)\, H(z,v)\, \Phi(v)\, dv\, dz = (\text{por } (12)) =$$

$$= \lambda \int_0^1 K(x,z)\, p(x)\, \eta(z)\, dz. \qquad \text{QED.}$$

Hemos probado en la proposición que todo autovalor no nulo de L lo es de (3), y cuando dedujimos (9), la recíproca. Pero $Lf = 0$ implica

$$\int_0^1 H(x,u)\, dx \int_0^1 p(x)\, H(x,v)\, f(v)\, dv = \int_0^1 H(x,u)\, \eta(x)\, dx = 0.$$

Por lo tanto $\eta = 0$. Luego $f = 0$. Es decir, L no tiene al cero por autovalor, y por lo tanto tampoco el operador P definido a continuación.

TEOREMA 9.1. El operador polar

$$(13) \qquad (Py)(x) = \int_0^1 p(x)\, K(x,z)\, y(z)\, dz$$

tiene sus autovalores no nulos, reales, positivos y negativos, y las autofunciones correspondientes $\{\eta_i\}$ forman un sistema completo en $L^2((0,1))$.

DEMOSTRACION. Si $g \perp \{\eta_i\}$ donde $\eta_j = \int_0^1 p(x)\, H(x,u)\, \Phi_j(u)\, du$, Φ_j autofunción de L, entonces: $0 = \int_0^1 g(x)\, p(x)\, dx \int_0^1 H(x,u)\, \Phi_j(u)\, du$. O sea,

$$g.p \perp \{\int_0^1 H(x,u)\, \Phi_i(u)\, du\}_{i=1}^{\infty} .$$

Como la familia de los Φ_j es densa en L^2, lo mismo le ocurre a { ... }. O sea $g.p = 0$, y de aquí sigue que $g = 0$. QED.

* 10. ALGUNOS RESULTADOS AUXILIARES.

i) Sean f y g funciones sumables. *Definimos*

$$(f * g)(x) = h(x), \qquad h(x) = \int_0^1 f(x-y)g(y)\,dy.$$

Supondremos que f y g son periódicas de período uno, o bien que son nulas en $(-\infty,0)$. En este último caso,

$$h(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\,dy,$$

y en ambos: $f * g = g * f$.

TEOREMA 1 (W.H. Young). *Sea* $f \in L^p$, $g \in L^q$, *donde* $p,q \geqslant 1$, $1/p + 1/q > 1$. *Sea* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. *La función* $h(x) = (f * g)(x)$ *pertenece a* L^r *y*

$$\|h\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

DEMOSTRACION. Basta demostrar el teorema para el caso periódico con $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Pongamos $\lambda = r$, $1/\mu = 1/p - 1/\lambda$, $1/\nu = 1/q - 1/\lambda$. Entonces $1/\lambda + 1/\mu + 1/\nu = 1$ y aplicando la desigualdad de Hölder a $f(x-t)g(t) = f^{p/\lambda}g^{q/\lambda}.f^{p/\mu}g^{q/\nu}$, obtenemos

$$|h(x)| \leqslant \left(\int_0^1 f^p(x-t)g^q(t)\,dt\right)^{1/\lambda}.\|f\|_p^{p/\mu}.\|g\|_q^{q/\nu}.$$

Por lo tanto

$$\|h\|_r = \|h\|_\lambda \leqslant \|f\|_p^{p/\mu}.\|g\|_q^{q/\nu}.\left(\iint f^p(x-t)g^q(t)\,dt\,dt\right)^{1/r} =$$

$$= \|f\|_p.\|g\|_q, \qquad \text{QED.}$$

TEOREMA 2. *Si* $1/p + 1/q = 1$, $h(x)$ $C([0,1])$ *y*

$$\|h\|_\infty \leqslant \|f\|_p.\|g\|_q.$$

ii) TEOREMA 3. *Sean* $f \in L^1(0,1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n \geqslant 1$. *Entonces*

(1) $$\int_0^x f(t_1)\,dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2)\,dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n = \frac{1}{n!}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^n .$$

DEMOSTRACION. Supongamos $F \in C([0,1])$. Entonces

(2) $$\int_0^x F(y)\left(\int_0^y F(t)\,dt\right)^{n-1} dy = \frac{1}{n}\left(\int_0^x F(t)\,dt\right)^n.$$

Un pasaje al límite permite probar (2) aún para funciones F integrables en (0,1). Para $n = 1$, (1) es obvia. Si la fórmula se supone demostrada para $n - 1$, $(n \geqslant 2)$, tendremos

$$(n-1)! \int_0^{t_1} f(t_2)\,dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n = \left(\int_0^{t_1} f(t)\,dt\right)^{n-1}.$$

Haciendo $F(t) = f(t)$ en (2), sigue inmediatamente (1), qed.

iii) Sea $\beta > 0$, $f \in L^1(0,1)$. La integral fraccionaria de f en [0,1] se *define* por

(3) $$I_\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\beta}}\,dt.$$

Si $\beta = n$ tenemos

(4) $$I_n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Sea $H(x) = 1$ si $x \geqslant 0$, $= 0$ si $x < 0$ (el escalón de Heaviside). Entonces, usando la fórmula para la transformada de Laplace: $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f).\mathcal{L}(g)$ obtenemos

(5) $$H * \overset{n}{\cdots} * H = x^{n-1}/(n-1)!\,,$$

pues $\mathcal{L}(t^r) = \Gamma(r+1)/s^{r+1}$ para $r \geqslant 0$. Como

(6) $$(H * f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

obtenemos de (5) y (6) la fórmula de Liouville:

(7) $$H * \overset{n}{\smile\!\!\!\!\ldots} * H * f = \int_0^x \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} f(t_n)\, dt_n \ldots dt_1 = I_n(f).$$

Es decir, I_n es *la n-ésima primitiva* de f que se anula en x = 0 junto con todas sus n - 1 primeras derivadas, y esto explica la denominación de integral fraccionaria para I_β. Obviamente: $I_m I_n f = I_{m+n} f$. Veamos que esto mismo vale para todo $\alpha,\beta > 0$. (NB. La función $\Gamma(x)$ se estudia en el capítulo siguiente).

TEOREMA 4. *$I_{\alpha+\beta} f(x) = I_\alpha(I_\beta f)(x) = I_\beta(I_\alpha f)(x)$, si $f \in L^1(0,1)$.*

DEMOSTRACION.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).I_\beta I_\alpha f(x) = \int_0^x (x - t)^{\beta-1}\, dt \int_0^t (t - u)^{\alpha-1} f(u)\, du =$$

$$= \int_0^1 f(u)\, du \int_u^x (x - t)^{\beta-1}(t - u)^{\alpha-1}\, dt = \int_0^1 f(u)\, du \int_0^{x-u} (x - u - t)^{\beta-t} t^{\alpha-1}\, dt =$$

$$= \int_0^1 (x - u)^{\alpha+\beta-1} f(u)\, du \int_0^1 (1 - t)^{\beta-1} t^{\alpha-1}\, dt = B(\beta,\alpha).\Gamma(\alpha+\beta) I_{\alpha+\beta} f(x), \quad \text{QED.}$$

El cambio de variables practicado en la demostración precedente puede justificarse, por ejemplo, utilizando el teorema de Young y el de Fubini-Tonelli.

* 11. NORMA MIXTA.

i) Sean T(x,y) una función medible en $[0,1] \times [0,1]$ y $1 \leq p,\ q \leq \infty$. Si la función en y: $\|T(.,y)\|_p$, pertenece a $L^q(0,1)$, *definimos:*

(1) $$\|T\|_{p,q} := \|\|T(x,y)\|_{p|x}\|_{q|y}.$$

Cuando $p = q$, $\|T\|_{p,q} = \|T\|_{p,p} = \|T\|_p$ = la norma-p de T como función de las dos variables x,y:

$$\|T\|_p := (\iint |T(x,y)|^p \, dx \, dy)^{1/p} \text{ si } p < \infty: \quad \|T\|_\infty = \sup \text{es } |T(x,y)|.$$

Si por el contrario $\|T(x,.)\|_q$ es una función en $L^p(0,1)$, definimos:

(2) $$|||T|||_{p,q} := \|\|T(x,y)\|_{q|y}\|_{p|x}.$$

En general, $|||T||| \neq \|T\|$. (Si $\infty \geqslant q > p > 1$ se obtiene, utilizando la desigualdad integral de Minkowski, que $\|T\| \leqslant |||T|||$).
Cuando $1/p + 1/q = 1$ diremos que $|||.|||$ es una *doble norma,* y se la utiliza para estimar la norma de la transformación

(3) $$(\tilde{T}f)(x) = \int_0^1 T(x,y)f(y) \, dy,$$

como operador de $L^p(0,1)$ en $L^p(0,1)$ ([Z] p.177 y 241). Si p y $q \in [1,\infty]$, $|||.|||_{p,q}$ puede usarse para definir espacios que generalizan a los L^p, $L^{(p,q)}$, y que pueden denominarse espacios de *norma mixta,* ([B]), que por otra parte son un caso particular de los así llamados *espacios de funciones.* Diversos problemas del análisis sugieren la necesidad de estudiar los espacios de norma mixta. En particular, su estudio ya fue propuesto en [C].
Si $|||T|||_{p,q} < \infty$ entonces para $f \in L^p$ tenemos ($1/q = 1/p^* := 1 - 1/p$):

(4) $$|\tilde{T}f(x)| \leqslant \|T(x,.)\|_{p^*} \|f\|_p \text{ c.d.}; \quad \|\tilde{T}f\|_p \leqslant |||T|||.\|f\|_p,$$

y $|||T||| \geqslant \|\tilde{T}\|$.

ii) TRANSFORMACIONES CON DOBLE NORMA FINITA Y $1 < p < \infty$. Observando que $X = \{T(x,y): |||T|||_{p,p^*} < \infty\}$ es un espacio normado, en realidad de Banach, en el que son densas las funciones acotadas, se deduce que X es *separable.* Su dual $Y = \{S(x,y): |||S|||_{p^*,p} < \infty\}$. Además es un espacio reflexivo cuya esfera unitaria Σ_X es *débilmente secuencialmente completa:* toda sucesión $\{h_n\}$ en Σ_X contiene una subsucesión para la cual existe $h \in X$ tal que

(5) $$\int_0^1\int_0^1 h_n(x,y)g(x,y)\,dx\,dy \to \int_0^1\int_0^1 h(x,y)g(x,y)\,dx\,dy,$$

para toda $g \in Y$. Esto vale aún en los casos $p = 1$, $p = \infty$, ([B], §5, T.2), si suponemos de antemano que el miembro izquierdo de (5) converge a una funcional (lineal y finita) $B(g)$. Esto, naturalmente, vale también para los espacios de Lebesgue $L^p(0,1)$.

TEOREMA 1. *Toda función T de doble norma finita define un operador $\tilde{T}$ compacto en L^p.*

DEMOSTRACION. Sea $\{h_n\}$ una sucesión de norma-p acotada. Existe una subsucesión, que numeramos de la misma forma, y existe $h_0 \in L^p(0,1)$ tal que:

$$g_n(x) = \int T(x,y)h_n(y)\,dy \to g(x) := \int T(x,y)h(y)\,dy, \text{ c.d.x.}$$

Además, $|g_n(x) - g(x)| \leq \|h_n - h\|_p \cdot (\int |T(x,y)|^{p^*}\,dy)^{1/p^*}$ c.d.x. Luego, como el último factor pertenece a L^p, resulta $\|g_n - g\|_p \to 0$ para $n \to \infty$, QED.

iii) TRANSFORMACIONES CON DOBLE NORMA FINITA Y $p = 1$. En esta situación no vale, en general, el resultado precedente, pero se tiene el

TEOREMA 2. *$T \in X$, $p = 1 \Rightarrow \tilde{T}^2$ es compacta en $L^1(0,1)$.*

DEMOSTRACION. Sea $S(x) = \|T(x,.)\|_\infty$. Entonces S es integrable y se tiene

$$|h(x)| = |\tilde{T}f(x)| = |\int_0^1 T(x,y)f(y)\,dy| \leq S(x)\|f\|_1.$$

De esto se deduce que si $\{f_n\}$ es una sucesión acotada por r en $L^1(0,1)$, la sucesión $\{h_n\}$ correspondiente es secuencialmente débilmente compacta en el mismo espacio ([B], p.308). Luego, existe h_0 tal que $(h_{n_j},\phi)_j \to (h_0,\phi)$ para todo $\phi \in L^\infty(0,1)$. En particular,

$$\int_0^1 h_{n_j}(y)T(x,y)\,dy \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_0^1 h_0(y)T(x,y)\,dy.$$

En consecuencia, después de renumerar, se verifica en casi todas partes

$$\tilde{T}^2(f_j(x) - f_k(x)) = \int T(x,y)(h_j(y) - h_k(y))\,dy \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0.$$

Además, $|\tilde{T}^2 f_j(x)| \leqslant S(x)\|\tilde{T}f_j\|_1 \leqslant \|T\|S(x).\|f_j\|_1$, y la tesis sigue inmediatamente, QED.

* 12. LA INTEGRAL FRACCIONARIA.

Consideremos el operador

$$\text{(1)} \qquad \tilde{H}f(x) := \int_0^x (x-t)^{\beta-1} f(t)\,dt, \qquad \beta > 0.$$

Si $\beta \geqslant 1$ entonces $\tilde{H}$ define una transformación compacta de $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, en $C([0,1])$, como se ve aplicando el teorema de Arzelá-Ascoli. Supongamos ahora $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1 - \beta$. Entonces

$$\text{(2)} \qquad \tilde{H}_\alpha f(x) := \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt.$$

Como $1/x^\alpha \in L^1$, $\tilde{H}_\alpha$ es un operador continuo de $L^p(0,1)$ en $C([0,1])$, $p \in [1,\infty]$.

Por otra parte, salvo por un factor constante, $\tilde{H}^m f$ es igual a (§10):

$$\int_0^x (x-t)^{m\beta-1} f(t)\,dt.$$

En consecuencia, cualquiera sea $\beta > 0$ existe $n = n(\beta)$ tal que si $m > n$ entonces $\tilde{H}^m$ es un operador compacto de L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, en $C([0,1])$, y por lo tanto de L^p en L^p.

TEOREMA 1. $\tilde{H}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, *es compacto de* L^p *en* L^p *siempre que* $1 < p < \infty$.

DEMOSTRACION. Sea $0 < 1/p < 1 - \alpha$. Entonces $1/p^* > \alpha$. Como $T(x,y) = |x - y|^{-\alpha}$ tiene doble norma finita es aplicable el T.1 del §11 Para ese intervalo de valores de p. El operador adjunto de $\tilde{H}_\alpha$ es

$$\int_y^1 \frac{g(x)}{(x - y)^\alpha}\, dx.$$

En consecuencia, también es compacto en L^p para $1/p < 1 - \alpha$. Por tanto, su adjunto $\tilde{H}_\alpha$ lo es para los valores de p^* del intervalo $\alpha < 1/p^*$. Si $0 < \alpha < 1/2$, todos los $p \in (1,\infty)$ satisfacen una de estas desigualdades, y el teorema queda probado. Si $\alpha \in [\frac{1}{2},1)$ es necesario modificar la demostración, cosa que no haremos en estas notas, QED.

* 13. OPERADORES DE VOLTERRA.

Hemos visto que los operadores de doble norma finita, o son compactos o bien su cuadrado es compacto (en $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$). No continuaremos con el estudio de sus propiedades espectrales, que es semejante al de los operadores con núcleo de cuadrado integrable, sino que nos limitaremos al caso de operadores de Volterra:

$$(1) \qquad \tilde{T}f(x) = \int_0^1 T(x,y)f(y)\, dy, \quad T(x,y) = 0 \quad \text{si } 1 \geqslant y > x \geqslant 0.$$

TEOREMA 1. *i) Sean* $1 \leqslant p < \infty$ *y* T *de doble norma finita:* $|||T|||_{p,q} < \infty$. *Entonces,* $\sigma(\tilde{T}) = \{0\}$, *y si* $\lambda \neq 0$:

$$(2) \qquad (\tilde{T} - \lambda I)^{-1} = R_\lambda := -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{T}{\lambda} + \frac{T^2}{\lambda^2} + \ldots\right).$$

ii) El resultado es falso para $p = \infty$.
iii) Si $|||T|||_{p^*,\infty} < \infty$ *y* $\|T\|_{p,\infty} < \infty$ *entonces la serie de Neumann*

$$T(x,y) + T_2(x,y)/\lambda + T_3(x,y)/\lambda^2 + \ldots,$$

converge uniformemente (para todo $\lambda \neq 0$) al núcleo de $-\lambda(I + \lambda R_\lambda)$; $T_n(x,y)$ *es el núcleo iterado n-ésimo:*

$$T_n(x,y) = \int_y^x T(x,z)T_{n-1}(z,y)\, dx.$$

DEMOSTRACION. Se sabe que el espectro de un operador acotado en un espacio de Banach no es vacío. Para demostrar que $\sigma(\tilde{T})$ consiste solamente del origen bastará con construir el operador resolvente R_λ para todo $\lambda \neq 0$. Para esto definamos

$$(3) \qquad \alpha(x) = \|T(x,.)\|_{p*}.$$

Entonces, $|\tilde{T}g(x)| \leq \alpha(x)\|g\|_p$, y como $\tilde{T}f(x) = \int_0^x T(x,y)f(y)\, dy$, tenemos

$$(4) \qquad |\tilde{T}^n g(x)| \leq$$

$$\leq \alpha(x)\|g\| [\int_0^x \alpha^p(t_{n-1})\, dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} \alpha^p(t_{n-2})\, dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_2} \alpha^p(t_1)\, dt_1]^{1/p} =$$

$$= (\text{cf.}\ \S 10) = \alpha(x)\|g\|.[(\int_0^x \alpha^p(y)\, dy)^{n-1}/(n-1)!]^{1/p}.$$

En consecuencia,

$$(5) \qquad \|\tilde{T}^n g\|_p \leq \frac{|\|T\||^n}{((n-1)!)^{1/p}} \|g\|_p;$$

y la serie (3) converge en la norma de operadores, uniformemente sobre compactos de $C\setminus\{0\}$; a $(T - \lambda)^{-1}$ pues $R_\lambda(\tilde{T} - \lambda I) = (\tilde{T} - \lambda I)R_\lambda = I$.

ii), iii) La demostración de estas proposiciones y las de otros resultados vinculados a los operadores de Volterra pueden verse en [Z], ch.13, QED.

TEOREMA 2. *Si el núcleo de Volterra $T(x,y)$ define un operador acotado, $\tilde{T}$, de L^p en L^p, $p \in [1,\infty)$, y si $T_j(x,y)$ es de doble norma finita entonces vale (2).*

DEMOSTRACION. De lo visto se deduce que

(6) $$I + \tilde{T}^j/\lambda^j + \tilde{T}^{-2j}/\lambda^{2j} + \dots$$

converge en norma de operadores. Luego, para $k = 1, 2, \dots, j - 1$,

$$\tilde{T}^k/\lambda^k + \tilde{T}^{j+k}/\lambda^{j+k} + \tilde{T}^{2j+k}/\lambda^{2j+k} + \dots$$

también converge. Sumando en k obtenemos la tesis, QED!.

* 14. LA ECUACION DE ABEL.

Queremos demostrar que la solución de

(1) $$\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1/2}}\,dy = \sqrt{\pi}$$

es $f(x) = 1/\sqrt{\pi x}$. Este es un caso particular de la ecuación

(2) $$I_\beta f := \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\beta}}\,dy = x^q, \qquad \beta > 0,\ q > \beta - 1,$$

cuya solución es

(3) $$f(x) = x^{q-\beta}\Gamma(q+1)/\Gamma(q+1-\beta).$$

En efecto,

$$I_\beta x^p = x^{p+\beta}\Gamma^{-1}(\beta).B(p+1,\beta) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+\beta)}\,x^{\beta+p},$$

y se obtene (3) haciendo $q = \beta + p$.
Obviamente $I_1 f = 0$ implica $f = 0$. Como $I_\alpha I_\beta f = I_{\alpha+\beta} f$ cuando $\alpha,\beta > 0$, resulta que si $\beta < 1$ e $I_\beta f = 0$ entonces $I_1 f = 0$, y en consecuencia $f = 0$. Si $\beta > 1$, $I_\beta f = 0$ implica $I_{\beta-1} f = 0$ y sigue que $f = 0$. Es decir, $\lambda = 0$ *no* pertenece al espectro puntual de I_β, de donde deducimos que *las soluciones halladas son únicas.*

REFERENCIAS.

[B] BENEDEK, A. and PANZONE, R., *The spaces L^P, with mixed norm,* Duke Math. J., (1961), pp. 301 - 324.

[C] COTLAR, M., *Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert,* Cursos y Seminarios de Matemática, Fd. de Cs. Exactas, Univ. Nac. de Bs.As..

[H] HAMEL, G., *Integralgleichungen, Einführung in Lehre und Gebrauch,* Springer, (1949).

[J] JANTSCHER, L., *Distributionen,* W. de Gruyter, (1971).

[K] KRASNOV, M.L., KISELIOV, A.I., MAKARENKO, G.I., *Ecuaciones Integrales,* Mir, (1970).

[R] REY PASTOR, J., PI CALLEJA, P., TREJO, C. A., *Análisis Matemático,* I, II, III, Kapelusz, (1952).

[T] TRICOMI, F.G., *Lezioni sulle Equazioni Integrali,* Gheroni, (1954).

[W] WIDDER, D.V., *An Introduction to Transform Theory,* Academic Press, (1971).

[Z] ZAANEN, A.C., *Linear Analysis,* North-Holland Co., (1956).

[Zy] ZYGMUND, A., *Trigonometric Series,* I, Cambridge, (1959).

CAPITULO II

1. PRODUCTOS INFINITOS.

Sea dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales o complejos. Se llama producto infinito al "producto de todos los elementos de la sucesión" y se escribe

$$a_1.a_2\ldots a_n\ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si con p_n indicamos el producto parcial n-ésimo, esto es,

$$p_n = a_1.a_2\ldots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

podríamos decir que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si es convergente a un número p la sucesión $\{p_n\}$ de productos parciales y convenir en que

$$p := \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Sin embargo esta definición no sería acertada ya que todo producto que tuviera un factor igual a cero sería convergente sin tener en cuenta el comportamiento de los demás factores. La definición siguiente resulta más adecuada.

DEFINICION 1.1. Dada la sucesión $\{a_n\}$ de números reales o complejos, sea $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

a) Si $a_n \neq 0$ para todo n, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge cuando existe un número $p \neq 0$ tal que $\lim_{n \to \infty} p_n = p$.

En tal caso p es, por definición, el valor del producto. Esto es,

$$p := \prod_{n=1}^{\infty} a_n.$$

b) Si existe un número n tal que para todo $j > n$ es $a_j \neq 0$, se dice que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si converge $\prod_{j=n+1}^{\infty} a_j$.

En este caso el valor del producto es, por definición

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := a_1.a_2\ldots a_n.\prod_{j=n+1}^{\infty} a_j.$$

El producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice divergente si no es convergente.

TEOREMA 1.1. *La condición necesaria y suficiente para que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es que para todo $\varepsilon > 0$, exista un n_o tal que si $n > n_o$ entonces*

$$|a_{n+1}.a_{n+2}\ldots a_{n+k} - 1| < \varepsilon, \quad para\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

DEMOSTRACION. Supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Podemos suponer que $a_i \neq 0$ para todo i.

Sea $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Por hipótesis, existe el $\lim_{n \to \infty} p_n = p$, $p \neq 0$. Por lo tanto, existe un $w > 0$ tal que $|p_n| > w$, si $n \geqslant n_o(w)$. Además, como $\{p_n\}$ es una sucesión convergente satisface la condición de Cauchy, esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe n_1 tal que si $n \geqslant n_1$ entonces

$$|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon.w, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Dividiendo la desigualdad por $|p_n|$, $n \geqslant n_o \vee n_1$, se tiene que:

$$|a_{n+1}.a_{n+2}\ldots a_{n+k} - 1| \leqslant \frac{\varepsilon w}{|p_n|} < \varepsilon.$$

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_o tal que para todo $n \geqslant n_o$ es $|a_{n+1}.a_{n+2}\ldots a_{n+k} - 1| < \varepsilon$, para $k = 1, 2, 3, \ldots.$

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, sea n_o' el correspondiente n_o, y consideremos el producto

$$p'_n = a_{n'_0+1} \cdot a_{n'_0+2} \cdots a_n, \quad \text{si } n > n'_0.$$

Entonces

$$|p'_n - 1| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{para todo } n \geqslant n'_0.$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{2} \leqslant |p'_n| \leqslant \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto si $\{p'_n\}$ converge su límite es distinto de cero. Veamos que efectivamente $\{p'_n\}$ es convergente.

Sea $\varepsilon > 0$ y escribamos para n suficientemente grande:

$$\left| \frac{a_{n'_0+1} \cdot a_{n'_0+2} \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots a_{n+k}}{a_{n'_0+1} \cdot a_{n'_0+2} \cdots a_n} - 1 \right| = \left| \frac{p'_{n+k}}{p'_n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Multiplicando por $|p'_n|$ se obtiene:

$$|p'_{n+k} - p'_n| < \varepsilon |p'_n| < \varepsilon . \frac{3}{2} \quad \text{para todo } n \geqslant n_0.$$

Esto es, $\{p'_n\}$ satisface la condición de Cauchy, luego es convergente y como hemos observado, su límite es distinto de cero, lo que implica que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

COROLARIO 1.1. *Si* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente entonces el* $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$.

OBSERVACION 1.1. Escribiendo los factores de un producto infinito en la forma $a_n = 1 + u_n$, la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ implica, por el corolario anterior, que $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

TEOREMA 1.2. *Sea* $u_n \geq 0$ *para todo* n. *El producto* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ *es convergente si y sólo si es convergente la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

DEMOSTRACION. Se tiene en cuenta la desigualdad

$$1 + x \leq e^x$$

la cual es válida para todo x real. (Esta desigualdad sigue del teorema del valor medio para $f(x) = e^x$)

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ y $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k)$. Es evidente que:

$$p_n \geq 1 + S_n. \tag{1.1}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la desigualdad mencionada anteriormente, se tiene que:

$$p_n = (1 + u_1).(1 + u_2)\ldots(1 + u_n) \leq e^{u_1}.e^{u_2}\ldots e^{u_n} = e^{S_n}.$$

Sea entonces $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergente. Esto es, existe el $\lim_{n \to \infty} S_n = S < \infty$. Entonces, como $\{p_n\}$ es monótona no decreciente, es convergente y de la desigualdad (1.1) se deduce que si p es su límite, p es distinto de cero. Recíprocamente, si $\lim_{n \to \infty} p_n = p$, $p \neq 0$, como la sucesión $\{S_n\}$ es monótona no decreciente, de (1.1) se deduce que $\{S_n\}$ es convergente. QED.

DEFINICION 1.2. El producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ se dice absolutamente convergente si es convergente el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$.

OBSERVACION 1.2. Por el teorema anterior, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ es absolutamente convergente si y sólo si es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

TEOREMA 1.3. *Si el producto* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ *converge absolutamente entonces:*

a) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ *converge.*

b) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ *converge incondicionalmente.*

c) Cualquier reordenación converge al mismo límite.

DEMOSTRACION. a) y b). Supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge absolutamente. Esto es, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ es convergente y por lo tanto se verifica la condición necesaria de convergencia: para todo $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$

$$|(1 + |u_{n+1}|).(1 + |u_{n+2}|)\ldots(1 + |u_{n+k}|) - 1| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

De

$$|(1+u_{n+1}).(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k}) - 1| \leqslant |(1+|u_{n+1}|).(1+|u_{n+2}|)\ldots(1+|u_{n+k}|) - 1|$$

se ve que se verifica también la condición suficiente de convergencia para el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$.

c) Sea k_1, k_2, ..., k_n, ... una permutación de los índices 1, 2, ..., n, ... y pongamos

$$p_n = (1 + u_1).(1 + u_2)\ldots(1 + u_n); \quad p'_n = (1 + u_{k_1}).(1 + u_{k_2})\ldots(1 + u_{k_n}).$$

Supongamos:

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p \neq 0 \text{ y } \lim_{n \to \infty} p'_n = p' \neq 0.$$

Probemos que $p = p'$ de lo cual seguirá c).

Es posible calcular el cociente p'_n/p_n y, eliminando los factores comunes, obtendremos:

$$\frac{p'_n}{p_n} = \frac{(1 + u_{k_1})(1 + u_{k_2})\dots(1 + u_{k_n})}{(1 + u_1)(1 + u_2)\dots(1 + u_n)} = \frac{(1 + u_{i_1})\dots(1 + u_{i_r})}{(1 + u_{h_1})\dots(1 + u_{h_r})},$$

$i_1 < i_2 < \dots < i_r$ y $h_1 < h_2 < \dots < h_r$, donde $i_1 = i_1(n)$ y $h_1 = h_1(n)$ tienden a ∞ con n.

Como

$$|(1+u_{h_1})\dots(1+u_{h_r}) - 1| \leqslant (1+|u_{h_1}|)\dots(1+|u_{h_r}|) - 1 \leqslant e^{|u_{h_1}|+\dots+|u_{h_r}|} - 1 \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} (1 + u_{h_1})\dots(1 + u_{h_r}) = 1,$$

lo que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p'_n}{p_n} = 1$, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} p'_n = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$, QED.

TEOREMA 1.4. *Si $v_n \geqslant 0$ para todo n, el producto $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - v_n)$ converge, si y sólo si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ es convergente.*

DEMOSTRACION. Supongamos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |-v_n|$ es convergente, entonces el producto $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - v_n)$ es absolutamente convergente y, por el teorema anterior, es incondicionalmente convergente.

Para probar la recíproca usaremos la desigualdad

$$1 - x \leqslant e^{-x} \quad \text{para } x \geqslant 0.$$

Supongamos que $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - v_n)$ converge. Entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. Podemos suponer, prescindiendo de algunos têrminos si fuese necesario, que $1 - v_n > 0$.

Sea

$$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Considerando la desigualdad anteriormente mencionada se tiene que:

$$p_n = (1 - v_1).(1 - v_2)\ldots(1 - v_n) \leqslant e^{-(v_1+v_2+\ldots+v_n)} = e^{-S_n}.$$

Además, como $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - v_n)$ converge, existe $\lim_{n \to \infty} p_n = p > 0$.

Por consiguiente S_n no puede ser divergente, esto es, existe el $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, QED.

2. PRODUCTOS FUNCIONALES.

Consideraremos productos infinitos de la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n(z)$$

donde a veces escribiremos:

$$\alpha_n(z) = 1 + u_n(z),$$

con z perteneciente a una cierta región G del plano complejo y $\{u_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en G.

TEOREMA 2.1. *Sea $\{u_n(z)\}$ una sucesión de funciones holomorfas en G tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge uniformemente sobre G a una función $\Phi(z)$. Entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ converge uniformemente a una función F(z) holomorfa en G, si $\Phi(z)$ es acotada allí. Además $F(z_o) = 0$ para algún $z_o \in G$ si y sólo si existe n_o tal que $1 + u_{n_o}(z_o) = 0$.*

DEMOSTRACION. La convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ en G implica la convergencia puntual de $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$. Esto es, existe F(z) tal que si

$p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k(z))$ entonces $\lim_{n \to \infty} p_n(z) = F(z)$.

Debemos probar que la convergencia a F(z) es uniforme y que F(z) es holomorfa en G. La hipótesis implica que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k(z)| < C, \quad \text{para todo } z \in G, \text{ para todo } n.$$

Por otra parte, como $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k(z))$, entonces

$$|p_n(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + |u_k(z)|) \leqslant e^{\sum_{k=1}^{n} |u_k(z)|} \leqslant e^C = M.$$

Escribamos

$$p_n(z) = p_{n-1}(z)(1 + u_n(z)),$$

entonces

$$p_n(z) - p_{n-1}(z) = p_{n-1}(z).u_n(z).$$

Además

$$p_n(z) = p_1 + \sum_{k=2}^{n} (p_k - p_{k-1}) = p_1 + \sum_{k=2}^{n} p_{k-1}.u_k(z).$$

Como

$$|p_{k-1}(z)u_k(z)| \leqslant M|u_k(z)|,$$

los términos de la serie $\sum p_{k-1}(z)u_k(z)$ están acotados por los términos de la serie $M.\sum |u_k(z)|$, lo que implica que la serie $\sum p_{k-1}(z)u_k(z)$ es uniformemente convergente. Por consiguiente $p_n(z)$ converge uniformemente a una función F(z) que es holomorfa por ser límite uniforme de funciones holomorfas. QED.

En lo que sigue usaremos el siguiente resultado:

LEMA 2.1. *Sea G una región simplemente conexa del plano complejo* $\mathbb{C}$ *y* $F(z)$ *una función holomorfa no nula en G. Entonces existe una rama holomórfica de* $\log F(z)$.

TEOREMA 2.2. *El producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *es convergente si y sólo si es convergente la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} \alpha_n$, *supuesto que* $\alpha_n \neq 0$ *para todo n.*

DEMOSTRACION. Sea

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k; \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} \alpha_k.$$

Observemos que

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} e^{\operatorname{Log} \alpha_k} = e^{S_n} \neq 0 \text{ para todo } n.$$

Por lo tanto, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} \alpha_n$ es convergente, la sucesión $\{p_n\}$ es convergente.

Recíprocamente: supongamos ahora que

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p, \quad p \neq 0$$

y que

$$S_n = \operatorname{Log} p_n + i\, 2\pi q_n; \quad q_n \text{ número entero.}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Arg} \alpha_i = \operatorname{Arg} p_n + 2\pi q_n$$

entonces

$$\text{Arg } \alpha_{n+1} - (\text{Arg } p_{n+1} - \text{Arg } p_n) = 2\pi(q_{n+1} - q_n).$$

Como $\alpha_n \to 1$ y $p_n \to p \neq 0$ resulta que

$$\text{Arg } \alpha_{n+1} \to 0$$

y que

$$\text{Arg } p_{n+1} - \text{Arg } p_n \to 0.$$

Entonces

$$q_{n+1} - q_n \to 0, \quad (n \to \infty).$$

Esto es, existe un número entero q y un entero n_0 tal que $q_n = q$ para todo $n > n_0$. Por consiguiente S_n converge a $S = \text{Log } p + i2\pi q$. QED.

TEOREMA 2.3. *Sea $\{\alpha_n(z)\}$ una sucesión de funciones holomorfas, no nulas, en una región G, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \log \alpha_n(z)$ converge uniformemente en G (aquí $\log \alpha_n(z)$ es una función holomorfa obtenida con alguna determinación del logaritmo que puede cambiar con n) y sus sumas parciales están uniformemente acotadas allí. Entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n(z)$ converge uniformemente a una función $p(z)$ holomorfa en G.*

(La demostración se deja al lector).

EJERCICIO 2.1. Demostrar el siguiente resultado.

Sea $\{u_n\}$ una sucesión tal que $0 < |u_n| < 1$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\text{Log } (1 + u_n)|$ es equiconvergente con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. (Sugerencia: Si $0 < |u_n| < 1/2$ entonces $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{\text{Log } (1 + u_n)}{u_n}\right| \leq \frac{3}{2}$).

3. TEOREMA DE WEIERSTRASS.

Introduciremos las siguientes funciones:

$$E(u,p) = (1 - u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}}, \quad \text{para } p = 1, 2, 3, \ldots; \ u \in C.$$

Convenimos en que

$$E(u,0) = 1 - u.$$

Si escribimos $p_n(u) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^n}{n}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$E(u,n) = (1 - u)e^{p_n(u)}.$$

LEMA 3.1. *Sea* $|u| \leqslant \varepsilon < 1$ *y* $p = 0, 1, 2, \ldots$. *Entonces*

$$|Log\ E(u,p)| \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon} |u|^{p+1}.$$

En efecto, recordemos que en $|z| < 1$, $\text{Log}\ (1 - z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Entonces

$$\text{Log}\ E(u,p) = \text{Log}\ (1 - u) + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} = - \sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{|u|^j}{j}.$$

Por lo tanto

$$|\text{Log}\ E(u,p)| \leqslant |u|^{p+1} \sum_{j=0}^{\infty} |u|^j \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon} |u|^{p+1}. \qquad \text{QED.}$$

TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Sea* $f(z)$ *una función entera y no nula. Sea* $\{z_1, z_2, \ldots\}$ *la familia de ceros no nulos de* $f(z)$ *ordenada de manera tal que* $0 < |z_1| < |z_2| < \ldots$, *contando los ceros tantas veces como su orden de multiplicidad. Entonces existe una función entera* $g(z)$ *tal que*

$$f(z) = z^m . e^{g(z)} . \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, n),$$

donde m es el orden de multiplicidad del cero $z = 0$.

DEMOSTRACION. Observemos que la familia $\{z_1, z_2, \ldots\}$ puede ser vacía, finita o infinita. En lo que sigue supondremos que la familia es infinita, pues los casos restantes están contenidos en la argumentación de la demostración del teorema.

Probaremos primero que $\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, n)$ converge uniformemente en $|z| \leqslant R$, para todo R.

Fijado R, sea n_0 tal que $|z_n| > 2R$ para todo $n \geqslant n_0$.

El lema 3.1 implica, tomando $\varepsilon = 1/2$, que:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |\mathrm{Log}\, E(z/z_n, n)| \leqslant 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} |z/z_n|^{n+1} \leqslant 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{n+1}, \quad \text{si } |z| \leqslant R.$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{Log}\, E(z/z_n, n)$ converge uniforme y acotadamente en el círculo $|z| \leqslant R$.

Del Teorema 2.3 sigue que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, n)$ converge uniformemente a una función holomorfa $\Phi(z)$ en $|z| \leqslant R$.

Como R es arbitrario, $\Phi(z)$ es una función entera y sus ceros no nulos son los de $f(z)$ y sólo ellos. Sea

$$h(z) = \frac{f(z)}{z^m \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, n)},$$

entonces $h(z)$ es una función entera, sin ceros en todo el plano complejo. Según el lema 2.1, existe una rama $g(z)$, entera, de Log $h(z)$. Esto es

$$\mathrm{Log}\, h(z) = g(z).$$

Por consiguiente

$$h(z) = e^{g(z)}, \qquad \text{QED.}$$

OBSERVACION 3.1. En la demostración se ve que la condición

$$(3.1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |z/z_n|^{n+1} < \infty$$

implica la convergencia uniforme de

$$\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n,n).$$

Supongamos que exista q entero, $q \geqslant 0$ tal que

$$(3.2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}} < \infty.$$

(La condición (3.2) dice que el crecimiento de f(z) no es muy rápido).
Entonces

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |\mathrm{Log}\ E(z/z_n,q)| \leqslant 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} |z/z_n|^{q+1} = 2|z|^{q+1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}} \leqslant$$

$$\leqslant 2|R|^{q+1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}}$$

para $|z| \leqslant R$.

Por consiguiente, $\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n,q)$ es convergente en $|z| < R$ para todo R, y ese producto puede reemplazar a $\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n,n)$ en el Teorema de Weierstrass.

DEFINICION 3.1. Se llama "género de p(z)" a $p = \inf \left\{ q \text{ entero} \geqslant 0 \colon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}} < \infty \right\}$ y el producto $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n,p)$ se llama "producto canónico de género p".

OBSERVACION 3.2. Si la familia $\{z_n\}$ de ceros no nulos de una función f(z) verifica la condición (3.2), el resultado del Teorema de Weierstrass puede expresarse:

$$f(z) = z^m . e^{t(z)} . P(z)$$

donde t(z) es una función entera, P(z) es el producto canónico de género p y

$p = \inf \left\{ q \text{ entero} \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}} < \infty \right\}$. (Esta es la forma que nos interesará).

DEFINICION 3.2. Sea f(z) una función entera, f(z) se dice de tipo exponencial si existen dos constantes A y B tales que

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|}.$$

DEFINICION 3.3. Sea f(z) una función entera, n(r) := número de ceros de f(z) en $|z| \leq r$.

El siguiente resultado será demostrado más adelante.

TEOREMA 3.1. *Si f(z) es una función entera de tipo exponencial entonces n(r) = O(r), si f(0) ≠ 0.*

EJERCICIO 3.1. Si f(z) es tal que n(r) = O(r) entonces $\sum \frac{1}{|z_n|} < \infty$ o bien,

$\sum \frac{1}{|z_n|^2} < \infty$. (Esto es, p = 0 o p = 1).

Antes de seguir con el estudio de la teoría general de funciones enteras veamos algunas propiedades de una muy importante: $\Gamma^{-1}(z)$. La función meromorfa $\Gamma(z)$ se define en Re z > 0 por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt. \tag{3.3}$$

Si definimos

$$\Phi(z) := \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} \, dt \; ; \quad \Psi(z) := \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt, \tag{3.4}$$

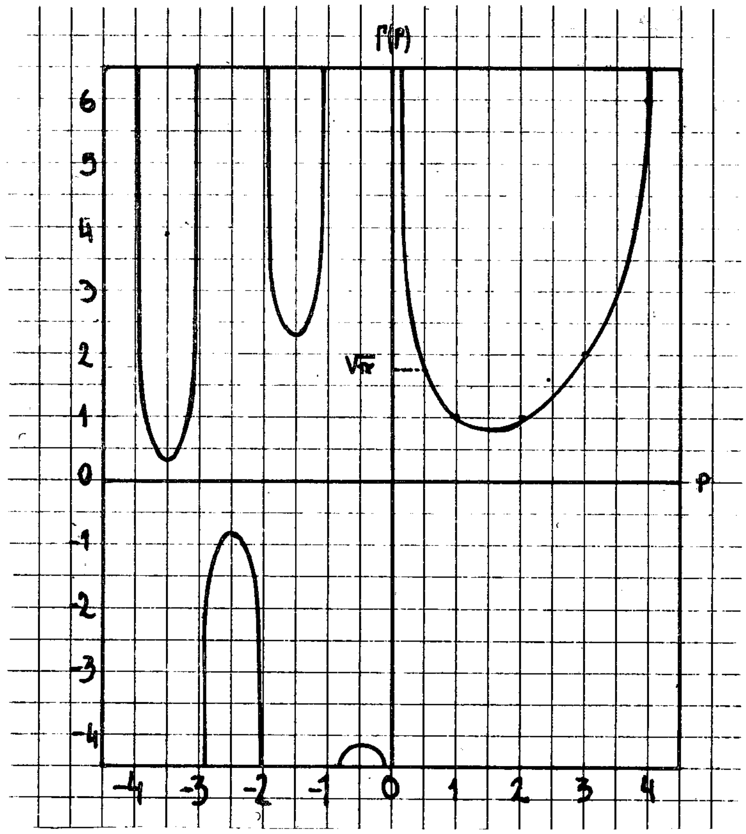
donde t^{z-1} denota la determinación de esa potencia que es positiva para $z = \text{Re } z > 0$, vemos inmediatamente que la expresión que define a Ψ tiene aún sentido para todo z, y define una función entera de z. Esto no ocurre en el caso de la Φ, pero si reemplazamos en el integrando e^{-t} por su desarrollo $\sum_0^\infty (-t)^n/n!$ obtenemos, en Re z > 0,

$$\Phi(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} . \tag{3.5}$$

Esta serie es absoluta y uniformemente convergente sobre todo compacto que no contenga puntos de $N^- = \{0,-1,-2,-3,...\}$ y define una función holomorfa en $C \setminus N^-$ prolongación analítica de Φ, y que denotaremos con la misma letra. Entonces, en $C \setminus N^-$

$$\Gamma(z) := \Psi(z) + \Phi(z), \tag{3.6}$$

tiene como únicas singularidades polos simples en n = 0, -1, -2, ... con residuos $(-1)^n/n!$.



TEOREMA 3.2. *El* $\Gamma(z,n) := \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$, *n = 1, 2, 3, ..., converge unifor-*

memente sobre compactos contenidos en $C\setminus W^-$ *a* $\Gamma(z)$,

ii) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, *para todo* $z \in C\setminus W^-$,

iii) $\Gamma(n) = (n-1)!$,

iv) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\mathrm{sen}\,\pi z$, $z \in C$,

v) $\Gamma(z) \neq 0$ *para todo* $z \in C$,

vi) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,

vii) $\Gamma(n+1/2) = (n-1/2)(n-3/2)\ldots.(1/2).\Gamma(1/2)$, $n \in N$,

viii) $\Gamma(2z)\Gamma(1/2) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$, $z \in C\setminus W^-$,

ix) $\Gamma(z)/\sqrt{2\pi}\, e^{-z}z^{z-1/2} \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 1$ *para* $|\arg z| < \pi - \delta$ *cualquiera sea* $\delta > 0$.

i) es la fórmula de Gauss, también llamada de Euler.

ii) es la fórmula de recurrencia de la función Gamma;

iii) sigue inmediatamente de ii) observando que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1.$$

v) y vi) siguen de iv), y vii) de ii). Esta última basta verla para $z = x > 0$ pues del resultado final da cuenta la continuación analítica:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^{x}\, dt = \Gamma(x+1)/x.$$

Antes de continuar con la demostración del teorema conviene introducir *la función* $B(x,y)$ (función beta):

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \quad x,y > 0. \tag{3.7}$$

El miembro derecho puede simetrizarse con el cambio de variables $t = \tau + 1/2$:

$$B(x,y) = \int_{-1/2}^{1/2} (\tau + 1/2)^{x-1}(-\tau + 1/2)^{y-1}\, d\tau.$$

Luego, $(2s)^{x+y-1}B(x,y) = \int_{-s}^{s} (s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}\, dt$, y por tanto, haciendo $\sigma = s + t$, $\tau = s - t$, tenemos,

$$\tfrac{1}{2}B(x,y)\Gamma(x+y) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\sigma-\tau}\sigma^{x-1}\tau^{y-1}|\partial(s,t)/\partial(\sigma,\tau)|\, d\sigma\, d\tau.$$

Como el jacobiano tiene módulo igual a 1/2 resulta

(3.8) $$B(x,y).\Gamma(x+y) = \Gamma(x).\Gamma(y),$$ QED.

Así como $\Gamma(x)$ está relacionada con el factorial, $B(x,y)$ lo está con los números combinatorios.

EJERCICIO 3.2. Reemplazar x por m e y por n en $1/(x + y + 1)B(x+1,y+1)$.

EJERCICIO 3.3. Efectuando el cambio de variables $t = \text{sen}^2\,\Phi$ en (3.7) obténgase:

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^\alpha\, t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^\alpha\, t\, dt = \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) / \, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\alpha.$$

DEMOSTRACION DE iv) T.3.2. Sea $0 < a < 1$. Entonces

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^1 t^{a-1}(1 - t)^{-a}\, dt = (y = t/(1 - t)) = \int_0^\infty y^{a-1}\frac{dy}{1 + y} = \frac{\pi}{\text{sen}\,\pi a}.$$

En efecto, la última integral es igual a $(t = e^x)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx$. Si integramos en el rectángulo limitado por $y = 0$, $y = 2\pi i$, $x = R > 0$, $x = -S < 0$, recorrido en sentido positivo, a $h(z) = e^{az}/(1 + e^z)$ vemos que al hacer tender a $+\infty$ a S y R resulta:

$$2\pi i.\underset{z=\pi i}{\text{residuo}}\, h(z) = (1 - a^{2\pi i})\int_{-\infty}^{+\infty} [e^{ax}/(1 + e^x)]\, dx,$$

pues las integrales sobre los lados verticales tienden a cero. Como el residuo de h en πi es igual a $-e^{a\pi i}$, obtenemos:

(3.9) $$\frac{\pi}{\text{sen}\,\pi a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\, dx,$$ QED.

DEMOSTRACION DE viii) T.2. (Fórmula de duplicación de Legendre). Sea $p > 0$. Entonces

$$\Gamma^2(p)/\Gamma(2p) = 2\int_0^{1/2} x^{p-1}(1 - x)^{p-1}\, dx = (x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{y}) =$$

$$= 2^{1-2p}\int_0^1 (1 - y)^{p-1} y^{\frac{1}{2}-1}\, dy = 2^{1-2p}\Gamma(p)\Gamma(1/2)/\Gamma(p+1/2), \qquad \text{QED.}$$

La fórmula de Stirling ix) no la probaremos aquí (para su demostración puede consultarse [C_n], [S], [T], [Z], etc.) pues creemos que es más natural presentar esta fórmula en el marco de la teoría de desarrollos asintóticos. Por otra parte sólo necesitaremos ix) para $z = p > 0$.

DEMOSTRACION DE i) T.3.2. De la observación 3.1 sobre el teorema de Weierstrass y lo ya dicho sobre la función Gamma resulta que:

$$(3.10) \qquad 1/\Gamma(z) = e^{h(z)}.z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/n)e^{-z/n}, \qquad h \text{ entera, } z \in C.$$

Sea $\gamma = \lim\limits_{n \to \infty} (\sum\limits_{j=1}^{n} 1/j - \text{Log } n)$ el número de Euler. Queremos ver que $h(z) = \gamma z$.
Definamos:

$$F(z) := e^{\gamma z}.z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/n).e^{-z/n}.$$

Basta ver que $F^{-1}(p) = \Gamma(p)$ para todo $p > 0$. Como

$$(3.11) \qquad F(z) = \lim_{n \to \infty} (\exp z(\sum_1^n \frac{1}{j} - \text{Log } n)).z \prod_1^n (\frac{z + j}{j}).(\exp -z \sum_1^n \frac{1}{j})$$

basta ver que

$$\frac{\Gamma(p)\ p\ (p + 1) \ldots (p + n)}{n^p.n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

O sea, basta demostrar que $\Gamma(p+n+1)/n!n^p \to 1$ cuando $n \to \infty$. Utilizando la fórmula de Stirling para la gamma y el factorial, tenemos

$$\frac{\Gamma(p+n+1)}{n!n^p} \sim \frac{e^{-p}(p+n+1)^{n+p+1/2}}{(n+1)^{n+1/2}(n+1)^p} \sim \frac{1}{e^p}\left(\frac{p}{n+1}+1\right)^{n+p+1/2} \sim 1.$$

De (3.11) sigue entonces que

$$\frac{z\,(z+1)\,\ldots\,(z+n)}{n!n^z} \to 1/\Gamma(z)$$

uniformemente sobre compactos de C. De v) sigue ahora la tesis, QED .

4. CRECIMIENTO DE UNA FUNCION ENTERA. ORDEN. EXPONENTE.

Sea $f(z)$ una función entera y sea

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)|.$$

Si $f(z)$ no es una función constante, $M(r)$ es una función no decreciente en r que en virtud del Teorema de Liouville satisface la condición

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty.$$

Más aún, usando el teorema del módulo máximo se ve que si $f(z)$ no es constante entonces $M(r)$ es estrictamente creciente con r.

TEOREMA 4.1. *Si $M(r) = O(r^n)$ entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que n.*

Demostraremos un resultado ligeramente más general.

TEOREMA 4.2. *Sea $\{r_j\}$ una sucesión tal que $r_j \to \infty$ si $j \to \infty$ y $M(r_j) = O(r_j^n)$. Entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que n.*

DEMOSTRACION.

$$f^{(n+k)}(0) = \frac{(n+k)!}{2\pi i}\int_{|z|=r_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+k+1}}\,d\zeta.$$

$$|f^{(n+k)}(0)| \leqslant \frac{(n+k)!}{2\pi} \max_{|\zeta|=r_j} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^n}\right| \frac{2\pi r_j}{r_j^{k+1}} .$$

Como, por hipótesis, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\max_{|\zeta|=r_j} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^n}\right| \leqslant C$$

y $r_j \to \infty$ cuando $j \to \infty$, entonces, para todo $k \geqslant 1$, las derivadas $f^{(n+k)}(0) = 0$. Luego, el desarrollo de $f(z)$ en serie de Taylor será de la forma

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j(0)z^j}{j!} , \qquad \text{QED.}$$

DEFINICION 4.1. Se dice que la función $f(z)$ es de orden finito, o bien, $f(z)$ tiene orden finito de crecimiento, si existe un número positivo k tal que

$$M(r) \leqslant e^{r^k}, \quad \text{para } r > r_0(k).$$

DEFINICION 4.2. Se llama orden de $f(z)$ al número

$$\rho = \inf \left\{k: \exists\ r_0(k) \text{ tal que } M(r) \leqslant e^{r^k},\ \text{si } r > r_0(k)\right\}.$$

OBSERVACION 4.1. De acuerdo con la definición anterior, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $r_1(\varepsilon)$ tal que

$$M(r) \leqslant e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{si } r > r_1.$$

EJERCICIO 4.1. $\rho = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\text{Log Log } M(r)}{\text{Log } r}$ si $f(z) \neq 0$.

EJERCICIO 4.2. Verificar la siguiente tabla

Función	ρ
Polinomio	0
e^z	1
$\cos z$	1
$\cos \sqrt{z}$	1/2
de tipo exponencial	≤ 1
e^{e^z}	∞

TEOREMA 4.3. *Sea $f(z)$ una función entera de orden finito ρ. Entonces $n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon})$, para todo $\varepsilon > 0$, si $f(0) \neq 0$.*

(Se demostrará más adelante).

DEFINICION 4.3. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos. Se llama exponente de convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ al número

$$\lambda = \inf \left\{\alpha > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}} < \infty\right\}.$$

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}}$ es divergente para todo $\alpha > 0$, $\lambda = \infty$.

Si la sucesión es finita, $\lambda = 0$.

EJERCICIO 4.3. Verificar la siguiente tabla.

$\{z_n\}$	λ
e^n	0
$(\beta > 0) n^{1/\beta}$	β — $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lvert z_n\rvert^{\lambda}} = \infty$
$n(\log^2 n)^{1/\beta}$	β — $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lvert z_n\rvert^{\lambda}} < \infty$
$\log n$	∞

TEOREMA 4.4. (Hadamard). *Sea $f(z)$ una función entera de orden finito ρ y λ el exponente de convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ de ceros no nulos de $f(z)$. Entonces $\lambda \leq \rho$.*

DEMOSTRACION. Supongamos $\{z_n\}$ ordenada tal que $0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots$ y sea $\alpha > \rho$. Sea β tal que $\alpha > \beta > \rho$.

El teorema 4.3 implica que $n(r) \leqslant Cr^{\rho+\varepsilon}$, C = cte, $r \geqslant a > 0$. Sea $\rho + \varepsilon = \beta$, luego $n(r) \leqslant Cr^{\beta}$.

Si $r = |z_n|$ entonces

$$n \leqslant n(r) \leqslant C|z_n|^{\beta}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|z_n|^{\alpha}} \leqslant C^{\alpha/\beta} \frac{1}{n^{\alpha/\beta}} \qquad (\alpha/\beta > 1).$$

En consecuencia la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}}$ es convergente para todo $\alpha > \rho$, lo que implica que $\lambda \leqslant \rho$, QED.

TEOREMA 4.5. *Sea $f(z)$ una función de orden finito ρ. Sea $\{z_n\}$ la familia de ceros no nulos de $f(z)$. Entonces el producto de Weierstrass toma la forma*

$$(*) \qquad f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p)$$

donde $p \leqslant \rho$ y es el menor entero q tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-q-1} < \infty$.

DEMOSTRACION. Sea q entero tal que $q + 1 > \rho \geqslant q$. Por el teorema anterior: $q + 1 > \lambda$, por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}}$ es convergente lo que implica la tesis. QED.

Al producto $P(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p)$ se lo denomina "producto canónico" y queda unívocamente determinado por la sucesión de ceros no nulos $\{z_n\}$.

(*) es la "factorización canónica" de f. En ella cada uno de los factores está unívocamente determinado.

COROLARIO 4.5-1. *Si p es el género del producto canónico P(z), entonces* $p \leqslant \lambda \leqslant p + 1$.

LEMA 4.1.

$$\int_0^{2\pi} Log\ |1 - e^{i\theta}|\ d\theta = 0.$$

DEMOSTRACION. Probaremos primero que si $r < 1$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \text{Log}\ |1 - re^{i\theta}|d\theta = 0.$$

La funicón $h(z) = \text{Log}\ (1 - z)$ es holomorfa en $\{z: |z| < 1\}$, por lo tanto

$$\text{Re Log}\ (1 - z) = \text{Log}\ |1 - z|$$

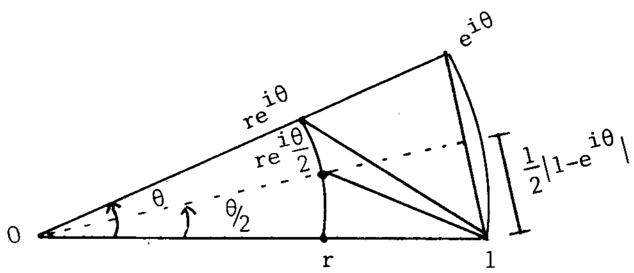
es una función armónica en ese recinto, luego si $z = re^{i\theta}$, $r < 1$, se verifica:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log}\ |1 - re^{i\theta}|\ d\theta = \text{Log}\ |1 - z|\Big|_{z=0} = 0.$$

Probemos ahora que para todo $r < 1$, la función $\text{Log}\ |1 - re^{i\theta}|$ está acotada por una función integrable. El teorema de convergencia dominada de Lebesgue implicará la demostración del lema.

Tal acotación sólo es necesaria para valores de r próximos a uno y valores de θ próximos a cero.

De acuerdo con la figura se tiene la siguiente desigualdad para $|\theta| < \varepsilon$ y $|1 - r| < \varepsilon$, ε convenientemente pequeño:



$$1 > |1 - re^{i\theta}| \geqslant |1 - re^{i\frac{\theta}{2}}| \geqslant \frac{1}{2}\,|1 - e^{i\theta}| \geqslant \frac{1}{2}\,|\text{sen }\theta| \geqslant \frac{1}{\pi}\,|\theta|.$$

Por consiguiente:

$$\text{Log }|1 - re^{i\theta}| \leqslant |\text{Log }\pi| + |\text{Log }|\theta||$$

siendo el segundo miembro de la desigualdad una función integrable en $(-\pi,\pi)$. QED.

EJERCICIO 4.4. Mostrar que

$$\int_0^{\pi} \text{Log sen }\theta\, d\theta = -\pi \text{ Log } 2.$$

FORMULA DE JENSEN.

Sea $f(z)$ una función analítica en $|z| < R$ tal que $f(0) \neq 0$. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ los ceros de $f(z)$ en $\{z: |z| \leqslant r\}$ con $0 < r < R$. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log }|f(re^{i\theta})|\, d\theta = \text{Log }|f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \text{Log }(\frac{r}{|z_k|}).$$

(Si f tuviera un cero de orden k en cero, la fórmula puede aplicarse a la función $\frac{f(z)}{z^k}$. Obsérvese que los ceros se cuentan según su multiplicidad).

DEMOSTRACION. Consideraremos tres casos:

a) $f(z) \neq 0$ para todo z: $|z| \leqslant r$.

En tal caso $n = 0$. La función $\text{Log }|f(re^{i\theta})|$ es armónica y por consiguiente verifica que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log }|f(re^{i\theta})|\, d\theta = \text{Log }|f(0)|.$$

b) $f(z) \neq 0$ para todo z: $|z| < r$.

Sea

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{z_k}{z_k - z};$$

$g(z) \neq 0$ para todo z: $|z| \leq r$. Por consiguiente, a) implica que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log } |g(re^{i\theta})| \, d\theta = \text{Log } |g(0)| = \text{Log } |f(0)|.$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log } |g(re^{i\theta})| \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log } |f(re^{i\theta})| \, d\theta - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log } |1 - e^{i(\theta-\theta_k)}| \, d\theta.$$

El Lema 4.1. implica que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log } |1 - e^{i(\theta-\theta_k)}| \, d\theta = 0,$$

y por consiguiente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log } |f(re^{i\theta})| \, d\theta = \text{Log } |f(0)|.$$

c) $f(z)$ es tal que $z_k \in \{z: |z| \leq r\}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Sea

$$F(z) = f(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{r^2 - \bar{z}_k . z}{r(z_k - z)} .$$

Si $|z| < r$ entonces $F(z) \neq 0$.

Si $|z_k| = r$ entonces $\dfrac{r^2 - \bar{z}_k z}{r(z_k - z)} = \dfrac{\bar{z}_k}{r}$ y $F(z_k) = 0$.

Como para estos k, $r^2 - \bar{z}_k z$ no se anula en $z \neq z_k$, concluimos que en otros puntos que no sean los z_k es $F(z) \neq 0$ en $|z| = r$, y en $|z| = r$ tiene exactamente los mismos ceros que $f(z)$.

Notemos que si $|z| = r$ entonces

$$\left|\frac{r^2 - \bar{z}_k z}{r(z_k - z)}\right| = 1$$

y por lo tanto

$$|F(z)| = |f(z)|.$$

Luego F(z) cumple la hipótesis de b); o sea,

$$\text{Log } |F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log } |F(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{Log } |f(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Como

$$\text{Log } |F(0)| = \text{Log } |f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \text{Log } \left(\frac{r}{|z_k|}\right),$$

obtenemos la tesis. QED.

Probaremos ahora los teoremas 3.1 y 4.1 ya enunciados.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3.1. (Si f(z) es una función entera de tipo exponencial entonces n(r) = O(r).)

Si f(0) = 0 y m es el orden de multiplicidad de cero, entonces

$$f(z) = z^m g(z) \quad \text{y} \quad g(0) \neq 0.$$

La función

$$h(z) = \frac{g(z)}{g(0)}$$

es tal que

$$h(0) = 1.$$

Luego, sin pérdida de generalidad se puede suponer f(0) = 1. Estimaremos

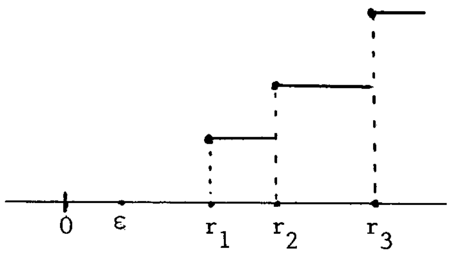
$$\sum_{k=1}^{n=n(r)} \text{Log } \left|\frac{r}{z_k}\right| = n(r).\text{Log } r - \sum_{k=1}^{n=n(r)} \text{Log } |z_k|.$$

La función

$$n(t) = \text{n° de ceros de } f(z) \text{ en } |z| \leqslant t,$$

es no decreciente en $(0,r)$ y a puros saltos; por lo tanto podemos considerar la integral de Stieltjes:

$$\int_0^r \mathrm{Log}(t)\, dn(t) = \int_\varepsilon^r \mathrm{Log}(t)\, dn(t) = \sum_{k=1}^{n=n(r)} \mathrm{Log}\, |z_k| .$$



Por consiguiente:

$$\sum_{k=1}^{n=n(r)} \mathrm{Log} \left|\frac{r}{z_k}\right| = n(r)\, \mathrm{Log}\, r - \int_\varepsilon^r \mathrm{Log}(t)\, dn(t) = \int_\varepsilon^r n(t)\, d\mathrm{Log}(t) =$$

$$= \int_\varepsilon^r \frac{n(t)}{t}\, dt = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt.$$

Llevando esta expresión a la fórmula de Jensen y teniendo en cuenta que $f(0) = 1$, obtenemos:

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\, |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt.$$

Como $f(z)$ es de tipo exponencial, entonces

$$|f(z)| = |f(re^{i\theta})| \leqslant Ae^{Br} \quad (A,\ B \text{ ctes}).$$

Teniendo en cuenta (*) y esta última desigualdad se obtiene:

$$n(r)\, \mathrm{Log}\, 2 = \int_r^{2r} \frac{n(r)}{t}\, dt \leqslant \int_r^{2r} \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant \int_0^{2r} \frac{n(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\, |f(2re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{Log}\, A + 2Br)\, d\theta = O(r). \qquad \text{QED.}$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.3. (Si $f(z)$ es entera de orden finito ρ, entonces para todo $\varepsilon > 0$ es $n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon})$).

$$|f(z)| = |f(re^{i\theta})| \leqslant e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \quad \text{si } r \geqslant r_0(\varepsilon).$$

Del teorema anterior:

(**) $$n(r) \text{ Log } 2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log } |f(2re^{i\theta})| \, d\theta$$

implica

$$n(r) \text{ Log } 2 \leqslant (2r)^{\rho+\varepsilon}$$

si r es suficientemente grande, y por lo tanto

$$n(r) \leqslant Kr^{\rho+\varepsilon}, \quad \text{para todo } r \text{ y cierto } K. \qquad \text{QED.}$$

Los dos teoremas que siguen se demostrarán más adelante. Recordemos que $\lambda \leqslant \rho$, $p \leqslant \rho$, $p \leqslant \lambda \leqslant p + 1$.

TEOREMA 4.6. (Borel). *Sea $P(z)$ un producto canónico y sea λ el exponente de convergencia de la familia de ceros no nulos de $P(z)$. Entonces $\lambda = \rho$.*

TEOREMA 4.7. *Sea $P(z)$ un producto canónico de orden de crecimiento ρ. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\{r_j\}$, $r_j \to \infty$, tal que*

$$|P(z)| \geqslant e^{-r_j^{\rho+\varepsilon}}, \quad \text{para todo } z\text{: } |z| = r_j.$$

El siguiente resultado mejora un criterio ya visto y permite determinar si una función entera es un polinomio atendiendo solamente al crecimiento de su parte real.

TEOREMA 4.8. (Hadamard, 1893). *Sea $H(z)$ una función entera. Si para todo $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de circunferencias de radios $r = r_j$, $r_j \to \infty$, tal que*

$$\text{Re } H(z) \leqslant r^{\rho+\varepsilon} \quad \text{para } |z| = r,$$

entonces $H(z)$ es un polinomio de grado no superior a ρ.

DEMOSTRACION. Sea $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint H(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} .$$

Sea $n > 0$, $\varepsilon > 0$ y elijamos $r = r_j(\varepsilon)$:

$$\oint_{|z|=r} \overline{H(z)} \frac{dz}{z^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m r^{m-n} \int_0^{2\pi} e^{-i(m+n)\theta} \, i d\theta = 0.$$

Entonces

$$\oint_{|z|=r} 2\text{Re } H(z) \frac{dz}{z^{n+1}} = \oint_{|z|=r} H(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

luego, si $n > 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi i} \oint_{|z|=r} \text{Re } H(z) \frac{dz}{z^{n+1}} \quad y$$

$$\pi |a_n| r^n \leqslant \int_0^{2\pi} |\text{Re } H(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Por otra parte, si $n = 0$, se tiene:

$$2\text{Re } a_o = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re } H(re^{i\theta}) \, d\theta.$$

Luego,

$$2\text{Re } a_o + |a_n| r^n \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (0 \vee \text{Re } H(re^{i\theta})) \, d\theta \leqslant 4r^{\rho+\varepsilon}.$$

Se deduce entonces que $a_n = 0$ para todo $n > \rho$. QED.

Para una función entera $f(z)$ de orden de crecimiento finito ρ se verifica:

$$p \leqslant \lambda \leqslant \rho < \infty.$$

Luego en el producto infinito que aparece en el teorema de Weierstrass podemos sustituir el factor $E(z/z_n, n)$ por $E(z/z_n, p)$ donde p es el género de f, o sea, el menor entero q tal que $\sum_{n=1} |z_n|^{-q-1} < \infty$. Entonces:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p).$$

TEOREMA DE HADAMARD 4.9. *Sea $f(z)$ una función entera de orden de crecimiento finito ρ y $f(z) = z^m e^{g(z)} P(z)$ la factorización canónica de $f(z)$. Entonces $g(z)$ es un polinomio de grado no superior a ρ.*

DEMOSTRACION. Como el exponente de convergencia de la familia de ceros no nulos de $P(z)$ es igual a λ, del Teorema 4.4 y del Teorema 4.6 (Borel) resulta que

$$\text{orden de crecimiento de } P(z) = \lambda \leqslant \rho.$$

Por el Teorema 4.7, dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de circunferencias de radio $r = r_j$, $r_j \to \infty$, tal que

$$|P(z)| > e^{-r^{\lambda+\varepsilon}} \qquad \text{para todo } z\text{: } |z| = r.$$

Luego

$$\text{Log } |P(z)| > -r^{\lambda+\varepsilon} \geqslant -r^{\rho+\varepsilon}.$$

Como

$$e^{g(z)} = \frac{f(z)}{z^m P(z)},$$

entonces

$$e^{\text{Re } g(z)} = \left|\frac{f(z)}{z^m P(z)}\right| .$$

Considerando la última desigualdad y la hipótesis resulta que

$$\text{Re } g(z) \leqslant \text{Log } |f(z)| - \text{Log } r^m - \text{Log } |P(z)| \leqslant 3r^{\rho+\varepsilon}.$$

Luego, del teorema anterior sigue que $g(z)$ es un polinomio de grado no superior a ρ. QED.

EJERCICIO 4.5. El orden de crecimiento de un producto de funciones enteras es menor ó igual que el máximo de los órdenes de los factores.

COROLARIO 4.9-1. *Si $f(z)$ es de orden de crecimiento finito ρ entonces $\rho = max$ (λ, grado de $g(z)$).*

En efecto, ya hemos observado que $\lambda \leqslant \rho$, por lo tanto λ v grado $g(z) \leqslant \rho$. El Corolario sigue ahora del ejercicio precedente.

COROLARIO 4.9-2. *Sea $f(z)$ de orden de crecimiento finito ρ y tal que ρ no es entero. Entonces $\lambda = \rho$ y $p = [\rho]$.*

DEMOSTRACION. grado $g(z) \leqslant [\rho]$ implica $\rho = \lambda$. Luego, si ρ no es entero se tiene

$$[\rho] < \lambda < [\rho] + 1.$$

Entonces

$$p = [\rho].$$

EJEMPLO 4.1. Sea $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{n})e^{z/n}$. $P(z)$ es un producto canónico de gênero $p = 1$ y como el exponente de convergencia de $z_n = n$ es $\lambda = 1$, su orden de crecimiento es $\rho = \lambda = 1$.

Lo mismo vale para $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n})e^{-z/n}$.

EJEMPLO 4.2. $P(z) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n(\log n)^2}\right)$ es un producto canónico de gênero $p = 0$ pues $z_n = n(\log n)^2$ y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|z_n|} < \infty$; además $\lambda = \rho = 1$.

EJEMPLO 4.3. La función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} \pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}}$ es una función entera y tiene órden de crecimiento $\rho = 1/2$.

Ella admite una factorización canónica de la forma $f(z) = C.\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$; (C: constante) ya que $f(z)$ no se anula en el origen y $g(z)$ es constante (pues grado $g(z) \leqslant 1/2$). Como $f(0) = 1$ entonces $C = 1$. Por lo tanto

$$\frac{\operatorname{sen} \pi\sqrt{z}}{\pi\sqrt{z}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right) .$$

$$\text{sen}\ \pi w = \pi w \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{n^2}\right) = \pi w \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{n}\right)\left(1 - \frac{w}{(-n)}\right) =$$

$$= \pi w \lim_{n \to \infty} \prod_{\substack{j=-n \\ j\neq 0}}^{n} \left(1 - \frac{w}{j}\right) = \pi w \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(1 - \frac{w}{n}\right).$$

EJERCICIO 4.6. Demostrar que si $f(z)$ es de tipo exponencial, $f'(z)$ también lo es. (Sugerencia: usar la expresión integral del coeficiente a_1).

EJERCICIO 4.7. Demostrar que $f(z)$ y $f'(z)$ tienen el mismo orden de crecimiento. (Sugerencia: usar teorema de Cauchy y fórmula de Barrow-Newton).

EJEMPLO 4.4. Sea $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = z.e^{\gamma z}. \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n})e^{-z/n}$, ($\gamma$ es el número de Euler). El orden de crecimiento de $f(z)$ es $\rho \leqslant 1$. Probaremos que $\rho = 1$. Para ello basta probar que $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$ no es de tipo exponencial.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen}\ \pi z} \Rightarrow \Gamma(z)\ \text{sen}\ \pi z = \frac{\pi}{\Gamma(1-z)} .$$

Supongamos que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ es de tipo exponencial. Esto es, existen constantes A y B tales que

$$|\Gamma^{-1}(z)| \leqslant Ae^{B|z|}.$$

Luego

$$|\Gamma(z)\ \text{sen}\ \pi z| \leqslant \pi|\Gamma^{-1}(1-z)| \leqslant Ce^{B|1-z|}; \quad C: \text{constante.}$$

Si $z = n + \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$(n - 1)! = \Gamma(n) \leqslant |\Gamma(n+1/2)| \leqslant Ce^{B(n-1/2)} = C'e^{B(n-1)},$$

lo cual es un absurdo, pues para n suficientemente grande es

$$(n - 1)! > C'e^{B(n-1)}.$$

EJERCICIO 4.8. Sea f(z) una función entera de orden de crecimiento finito y no entero. Entonces f(z) = 0 tiene infinitas raíces. (Sugerencia: usar el Corolario 4.9-2).

La definición siguiente es equivalente a la Definición 3.2.

DEFINICION 4.4. Se dice que una función f(z) entera es de tipo exponencial si

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\operatorname{Log} M(r)}{r}$$

es finito, donde

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

El número

$$\sigma = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\operatorname{Log} M(r)}{r}$$

es llamado el "exponente de f(z)".

Teniendo en cuenta esta última definición, f(z) es una función entera de tipo exponencial y con exponente σ si para cada $\varepsilon > 0$, se verifican las dos desigualdades siguientes:

$$M(r) \leqslant e^{(\sigma+\varepsilon)r},$$

para $|z| = r$ suficientemente grande,

$$M(r) > e^{(\sigma-\varepsilon)r_j},$$

para una sucesión de valores arbitrariamente grandes de r: $r_1, r_2, \ldots, r_j, \ldots$.
Llamaremos E_σ a la clase de funciones enteras de exponente σ.

EJEMPLO 4.5. Las siguientes funciones pertenecen a E_σ: $e^{\sigma z}.P(z)$; $\cos(\sigma z+\alpha).P(z)$, donde P(z) es un polinomio arbitrario.

TEOREMA 4.10. *Si f(z) pertenece a E_σ entonces*

$$\sigma = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!|c_n|}$$

donde $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$.

DEMOSTRACION. Probaremos primero que

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\text{Log } M(r)}{r} \leq \sigma \iff \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n}{e} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \sigma \iff \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!|c_n|} \leq \sigma .$$

La última equivalencia es inmediata teniendo en cuenta la fórmula de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n ,$$

o lo que es lo mismo

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n [1 + o(1)] ,$$

lo que permite probar que

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{n}{e} \sqrt[n]{|c_n|} = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!|c_n|} .$$

Supongamos ahora que $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \frac{\text{Log } M(r)}{r} \leq \sigma$.

Esto implica que dado $\varepsilon > 0$ existe $r_0(\varepsilon)$ tal que

$$M(r) \leq e^{(\sigma+\varepsilon)r}, \quad \text{para todo } r > r_0(\varepsilon),$$

y en virtud de la desigualdad de Cauchy:

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

se tiene que

$$|c_n| \leq \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)r}}{r^n} \quad \text{para todo } r > r_0(\varepsilon).$$

Para $n \geqslant n_o(\varepsilon)$ puede elegirse r de manera que

$$(\sigma + \varepsilon).r = n, \quad r > r_o(\varepsilon).$$

Por lo tanto, para $r = \frac{n}{\sigma + \varepsilon}$ es:

$$|c_n| \leqslant \frac{e^n}{\left(\frac{n}{\sigma + \varepsilon}\right)^n} \Longrightarrow \frac{n}{e} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \sigma + \varepsilon.$$

Luego

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\frac{n}{e}\right) \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \sigma.$$

Probemos ahora que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n!|c_n|} \leqslant \sigma \Longrightarrow \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\operatorname{Log} M(r)}{r} \leqslant \sigma.$$

Como $f(z) = c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$, entonces

$$M(r) \leqslant |c_o| + |c_1| r + |c_2| r^2 + \ldots$$

La hipótesis implica que dado $\varepsilon > 0$, para todo $n > N(\varepsilon)$ es:

$$|c_n| \leqslant \frac{(\sigma + \varepsilon/2)^n}{n!}$$

en consecuencia

$$M(r) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| r^j \leqslant \sum_{j=0}^{N} |c_j| r^j + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(\sigma + \varepsilon/2)^j r^j}{j!} \leqslant e^{(\sigma+\varepsilon)r}$$

para $r > r_o(\varepsilon)$ y para todo $\varepsilon > 0$.
Por lo tanto

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\operatorname{Log} M(r)}{r} \leqslant \sigma, \qquad \text{QED.}$$

Probaremos ahora los teoremas 4.6 y 4.7 ya enunciados.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.6. (Sea $P(z)$ un producto canónico y λ el exponente de convergencia de la familia de ceros no nulos de $P(z)$. Entonces $\lambda = \rho$).
Bastará probar que $\lambda \geqslant \rho$.

Sea $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n,p)$; $z \neq z_n$ para todo n, $r = |z|$, $r_n = |z_n|$.

Sea n_o tal que para todo $n > n_o$ es $r_n > 2r$, entonces

$$\mathrm{Log}\,|P(z)| = \sum_{r_n \leqslant 2r} \mathrm{Log}\,|E(z/z_n,p)| + \sum_{r_n > 2r} \mathrm{Log}\,|E(z/z_n,p)| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Del lema 3.1, con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $u = \frac{z}{z_n}$, se deduce que:

$$\mathrm{Log}\,|E(z/z_n,p)| \leqslant 2(r/r_n)^{p+1}, \quad \text{si } r_n > 2r.$$

Entonces,

$$\Sigma_2 = \sum_{r_n>2r} \mathrm{Log}\,|E(z/z_n,p)| \leqslant \sum_{r_n>2r} 2\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} = 2r^{p+1} \sum_{r_n>2r} \frac{1}{(r_n)^{p+1}}.$$

Consideremos dos casos: $\lambda = p + 1$, $\lambda < p + 1$.

Sea $\lambda = p + 1$, la serie $\sum \frac{1}{|r_n|^{p+1}}$ es convergente, por lo tanto

$$\Sigma_2 = O(r^{\lambda}).$$

Si $\lambda < p + 1$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda + \varepsilon < p + 1$, entonces la serie $\sum \frac{1}{|r_n|^{\lambda+\varepsilon}}$ es convergente. Como

$$2r^{p+1}. \sum_{r_n>2r} \frac{1}{(r_n)^{p+1}} = 2r^{p+1} \sum_{r_n>2r} r_n^{\lambda+\varepsilon-p-1}. \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant 2r^{p+1}(2r)^{\lambda+\varepsilon-p-1}. \sum_{r_n>2r} \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}},$$

entonces

$$\sum_2 = O(r^{\lambda+\varepsilon}).$$

Luego, hemos probado que en ambos casos ($\lambda = p + 1$, $\lambda < p + 1$) es $\sum_2 = O(r^{\lambda+\varepsilon})$, donde ε es un número cualquiera positivo y suficientemente pequeño.
Probemos ahora que también

$$\sum_1 = \sum_{r_n \leqslant 2r} \operatorname{Log} |E(z/z_n, p)| = O(r^{\lambda+\varepsilon}).$$

Sea $p > 0$. Escribamos $u = \frac{z}{z_n}$, $|u| = \frac{r}{r_n}$. Si $r_n \leqslant 2r$ entonces

$$|u| \geqslant \frac{1}{2} \quad y \quad 1 \leqslant (2|u|)^{p-k} \text{ cuando } k \leqslant p.$$

Por consiguiente

$$|u|^k \leqslant 2^{p-k}|u|^p$$

y de aquí

$$|u| + \frac{|u|^2}{2} + \dots + \frac{|u|^p}{p} \leqslant |u|^p(2^{p-1} + 2^{p-2} + \dots + 1) \leqslant 2^p|u|^p.$$

Entonces,

$$|E(u,p)| \leqslant (1 + |u|)e^{|u| + \frac{|u|^2}{2} + \dots + \frac{|u|^p}{p}} \leqslant e^{|u|} . e^{2^p|u|^p} \leqslant e^{(2^{p-1}+2^p)|u|^p} \leqslant$$

$$\leqslant e^{2^{p+1}} . |u|^p.$$

Por lo tanto, como $\lambda + \varepsilon > p$ tenemos:

$$\sum_1 \leqslant 2^{p+1} . \sum_{r_n \leqslant 2r} \left(\frac{r}{r_n}\right)^p = 2^{p+1} r^p \sum_{r_n \leqslant 2r} r_n^{\lambda+\varepsilon-p} . \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p+1} r^p (2r)^{\lambda+\varepsilon-p} \sum_{r_n \leqslant 2r} \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} = O(r^{\lambda+\varepsilon}),$$

si $p > 0$.
Si $p = 0$

$$|E(u,0)| \leqslant 1 + |u| \leqslant \begin{cases} e^{|u|^{\varepsilon}}, \text{ si } |u| \geqslant c(\varepsilon) \\ \\ (1 + c(\varepsilon))e^{|u|^{\varepsilon}} \text{ si } |u| < c(\varepsilon) \end{cases}$$

donde $c(\varepsilon)$ es un número que depende de ε. Luego, como $|u| \geqslant 1/2$:

$$\text{Log } |E(u,0)| = O(|u|^{\varepsilon}).$$

En consecuencia:

$$\sum\nolimits_1 \leqslant K \sum_{r_n \leqslant 2r} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\varepsilon} = K \sum_{r_n \leqslant 2r} r_n^{\lambda} . r_n^{-\lambda-\varepsilon} \leqslant K(2r)^{\lambda} \sum_{r_n \leqslant 2r} \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} = O(r^{\lambda}).$$

Esto es

$$\sum\nolimits_1 = O(r^{\lambda+\varepsilon}) \text{ en todo caso.}$$

Entonces

$$\text{Log } |P(z)| = O(r^{\lambda+\varepsilon}).$$

De esto último se deduce que $\rho \leqslant \lambda$, QED.

LEMA 4.2. *Sea $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$, ... una sucesión de funciones holomorfas en una región G tal que $\infty \notin G$.*

Supóngamos que el producto $\prod_{j=1}^{\infty} \alpha_j(z)$ converge uniformemente en G a la función holomorfa $F(z)$.

Entonces en todo punto donde $F(z) \neq 0$ es:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j'(z)}{\alpha_j(z)} .$$

La serie de derivadas logarítmicas tiene a lo sumo un número finito de términos con singularidades en G. Si descartamos estos, la serie remanente es uniformemente convergente sobre compactos de G.

DEMOSTRACION. $\alpha_j(z) \neq 0$ en G si $j \geqslant n_0$.

Sea $n > n_0$ y

$$f_n(z) = \alpha_{n_0}(z)\ldots\alpha_n(z), \qquad f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z).$$

$f(z)$ es holomorfa en G pues es límite uniforme de funciones holomorfas. Sea K un compacto en G. Como $f \neq 0$ en K, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z)| > \varepsilon$ allí. Luego, si $n > n_1(\varepsilon)$ tendremos

$$|f_n(z)| > \varepsilon/2 \text{ en K.}$$

Además la sucesión de derivadas $\{f_n'(z)\}$ tiende uniformemente a $f'(z)$ en K. Luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n_1 < n}} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=n_0}^{n} \frac{\alpha_j'(z)}{\alpha_j(z)} = \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{\alpha_j'(z)}{\alpha_j(z)} ,$$

si $z \in K$ y la convergencia es uniforme sobre K. Como

$$F(z) = g(z).f(z)$$

y $g(z)$ consta de un número finito de factores el resultado buscado sigue inmediatamente, QED.

Una aplicación interesante del teorema de Hadamard es el siguiente teorema debido a Laguerre:

TEOREMA 4.11. *Sea $f(z)$ una función no constante, real en el eje real, de orden $\rho < 2$ y con ceros reales si existen. Entonces:*

a) Si $f'(z)$ tiene ceros estos son reales.

b) Estrictamente entre dos ceros de $f(z)$ existe exactamente un cero de $f'(z)$.

DEMOSTRACION.

$$p \leqslant \rho < 2 \Longrightarrow p = 0 \text{ o } p = 1.$$

En cualquiera de los dos casos podemos escribir:

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/z_n)e^{z/z_n}.e^{Az+B}.$$

Sea $z = u + iv$. Como

$$f(u) = \overline{f(u)}$$

tenemos

$$e^{Au+B} = e^{\overline{A}u+\overline{B}}$$

de donde sigue que:

$$C = e^B \text{ es real y que } A = \overline{A}.$$

Sea ahora $f(z) \neq 0$. Entonces, aplicando el Lema 4.2 obtenemos:

$$(1) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + A + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n(z - z_n)} = \frac{m}{z} + A + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_n - z}\right\} .$$

En consecuencia,

$$(2) \qquad \operatorname{Im} \frac{f'(z)}{f(z)} = - \left|\frac{m}{u^2 + v^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(u - z_n)^2 + v^2}\right| .v.$$

Supongamos $v \neq 0$ e $\operatorname{Im}(f'/f)(z) = 0$. Entonces de (2) sigue que

$$m = 0 \text{ y } \{z_n\} = \emptyset.$$

Luego

$$f(z) = Ce^{Az}.$$

Así a) queda probada.

Derivando (1) obtenemos:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f'}{f}\right) = -\frac{m}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_n)^2},$$

de lo cual sigue que en el segmento comprendido entre dos ceros consecutivos de $f(z)$, $(f'/f)(z)$ tiene derivada negativa. Luego $f'(z)$, que se anula en el segmento abierto cuyos extremos son ceros consecutivos de f, lo hace sólo una vez. QED.

Otro resultado interesante que no demostraremos es el siguiente:
Un producto canónico de género cero es una función entera de tipo exponencial y exponente cero.

Hemos visto que si una función entera $H(z)$ verifica:

$$\text{Re } H(z) < r^{\rho+\varepsilon}, \text{ si } |z| = r > r_0(\varepsilon) \text{ para todo } \varepsilon > 0,$$

entonces $H(z)$ es un polinomio de grado $\leqslant \rho$.
Esto puede deducirse también del teorema de Borel-Carathéodory que demostraremos a continuación. De este teorema se deduce para toda función entera la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2} M(R/2) \leqslant \max_{|z|=R} \text{Re } f(z) + \frac{3}{2} |f(0)|$$

la cual implica el resultado de Hadamard mencionado.
Pero antes recordemos el enunciado del siguiente lema:

LEMA DE SCHWARZ. *Sea $f(z)$ holomorfa en $|z| \leqslant R$; $|f(z)| \leqslant M$ en $|z| = R$, y $f(0) = 0$. Entonces $|f(re^{i\theta})| \leqslant \frac{M.r}{R}$, $0 \leqslant r \leqslant R$.*

TEOREMA DE BOREL-CARATHEODORY. *Sea $f(z)$ analítica en $|z| \leqslant R$, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $\max_{|z|=r} \text{Re } f(z) = A(r)$. Sea $0 < r < R$. Entonces:*

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R - r} A(R) + \frac{R + r}{R - r} |f(0)|.$$

DEMOSTRACION. Si $f(z)$ es constante, o sea, si $M(r) = f(0)$, entonces se verifica que

$$(R - r)M(r) \leqslant 2rA(R) + (R + r)|f(0)|.$$

Sea $f(z)$ no constante, $f(0) = 0$.
Como

$$e^{A(r)} = \max_{|z|=r} |e^{f(z)}|$$

resulta que $A(r)$ es estrictamente creciente. Por lo tanto

$$A(R) > A(0) = 0.$$

Sea

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)} .$$

Como

$$\mathrm{Re}\ (2A(R) - f(z)) \neq 0 \quad \text{en } |z| \leqslant R,$$

$\phi(z)$ es holomorfa en $|z| < R$, $\phi(0) = 0$ y si $f(z) = u + iv$ se tiene que:

$$|\phi(z)|^2 = \frac{u^2 + v^2}{(2A(R) - u)^2 + v^2} \leqslant 1,$$

lo que implica, por el lema de Schwarz, que

$$|\phi(z)| \leqslant \frac{r}{R} .$$

Por lo tanto

$$|f(z)| = \left|\frac{2A(R)\phi(z)}{1 + \phi(z)}\right| \leqslant \frac{2A(R).r}{R - r}$$

$$\left(\text{pues } \left|\frac{\phi(z)}{1 + \phi(z)}\right| \leqslant \frac{|\phi(z)|}{1 - |\phi(z)|} \leqslant \frac{r}{R - r}\right).$$

Sea $f(z)$ no constante, $f(0) \neq 0$. Apliquemos la última desigualdad a $f(z) - f(0)$.
Luego

$$|f(z) - f(0)| \leqslant \frac{2r}{R - r} \max_{|z|=R} \mathrm{Re}\,(f(z) - f(0)) \leqslant \frac{2r}{R - r} (A(R) - |f(0)|), \qquad \text{QED.}$$

COROLARIO 1. *Si* $A(R) \geqslant 0$, *entonces*

$$M(r) \leqslant \frac{R + r}{R - r} (A(R) + |f(0)|).$$

COROLARIO 2. *Si* $A(R) \geqslant 0$ *entonces*

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{2^{n+2}.n!R}{(R - r)^{n+1}} . (A(r) + |f(0)|).$$

REFERENCIAS.

[A] ACHIESER, N.J., *Theory of Approximation*, New York, (1956).

[B] BIEBERBACH, L., *Einführung in die Funktionentheorie*, Bielefeld, (1952).

[Bo] BOAS, R.P., *Entire Functions*, New York, (1954).

[Cn] COPSON, E.T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford, (1955).

[K] KNOPP, K., *Teoría de Funciones*, Barcelona y Buenos Aires, (1926).

[S] SAKS, S. and ZYGMUND, A., *Analytic Functions*, Varsovia, (1952).

[T] TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, Oxford, (1939).

[Z] BENEDEK, A.I., MURPHY, E.R. y PANZONE, R., *Cuestiones del análisis de Fourier*; *Convergencia en media de algunas series ortogonales*, Notas de Algebra y Análisis #5, INMABB, (1976).

CAPITULO III.

LOS PROBLEMAS DE DIRICHLET Y NEUMANN, SOLUCION POR EL METODO DE FREDHOLM.

Sea J una curva de Jordan cerrada tal que localmente sea una curva C^2, es decir, existe una representación de la curva: $\vec{f}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, tal que para todo $t_0 \in [0,1]$ existe un entorno V_0 para el cual $\vec{f} \mid V_0$ es un homeomorfismo dos veces continuamente diferenciable. Supongamos que $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \neq 0$ para todo t. Se sabe que en este caso J es una curva de Jordan (cerrada) rectificable de longitud $S > 0$ y tal que sus coordenadas $x(s)$, $y(s)$ referidas al parámetro longitud de arco s son dos veces continuamente diferenciables. Luego $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ en $[0,S]$ y su curvatura (continua) es igual a:

$$(1) \qquad k(s) = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{3/2}} = (x'y'' - x''y')(s).$$

A un punto P del plano lo denotaremos P, o (x,y) si estas son sus coordenadas, o s si está en J en el lugar en que el parámetro longitud vale s. La región interior a J será denotada con D o D_i según convenga, y la exterior siempre con D_e.

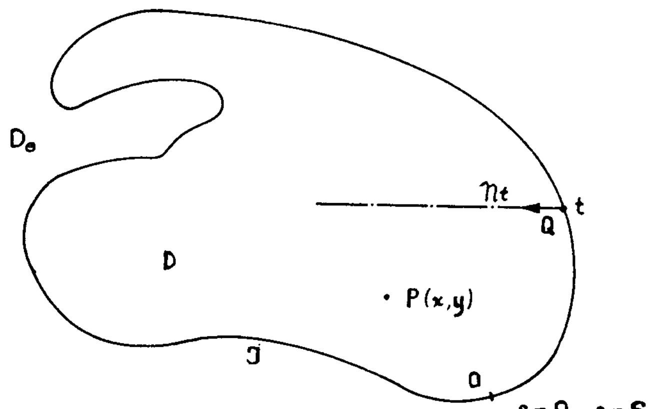


Fig. 1

Obsérvese que la situación descripta -y aceptada como hipótesis sobre la curva J- es equivalente a la siguiente: en todo $P \in J$ puede ubicarse un sistema ortogonal de coordenadas X, Y, con ese punto como centro tal que la curva, localmente, es representable en la forma $Y = F(X)$, F una función dos veces continuamente diferenciable tal que $\frac{dY}{dX}(0) = 0$. Finalmente recordemos que el parámetro longitud s está determinado unívocamente -salvo constante aditiva- por

$$s = \int_0^{t(s)} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{1/2}\, dt.$$

O sea, para la representación $Y = F(X)$ localmente tenemos:

$$s = \int_0^{X(s)} \left[1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{1/2} dX,$$

y por lo tanto :$s = O(X)$, $X = O(s)$.

A. El *problema* (interior) *de Dirichlet* consiste en encontrar una función $u(x,y)$ armónica en D, continua en $\bar{D} = D \cup J$, tal que $u|_J = g$, donde $g(s)$ es un dato continuo sobre J (= ∂D).
Siguiendo una idea de C. Neumann se busca la solución por medio de un potencial de una doble hoja instalada en J de densidad $\mu(s) \in C([0,S])$:

$$(2) \qquad u(P) = u(x,y) = \int_0^S \mu(t) \frac{\partial}{\partial n_t} \lg\frac{1}{|P - Q_t|}\, dt, \quad P \in D \cup D_e,$$

donde n_t indica la normal interior en el punto $Q = Q_t \in J$.

Calculemos: $\frac{\partial}{\partial n_t} \lg\frac{1}{|R - Q_t|}$. Es igual a (fig. 2):

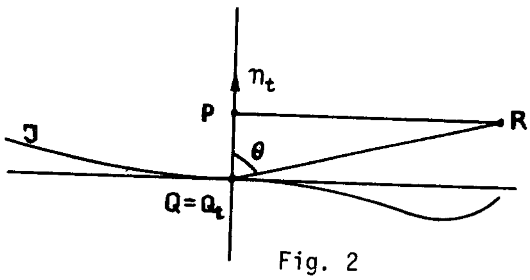


Fig. 2

$$\lim_{P \to Q} \lg\frac{|Q - R|}{|P - R|} \Big/ |P - Q| =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{P \to Q} \frac{\lg((|P - Q|^2 + |Q - R|^2 - 2|P - Q|.|Q - R|.\cos\theta)/|Q - R|^2)}{|P - Q|} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{P \to Q} \frac{\lg\left[1 + \left(\frac{|P - Q|}{|Q - R|}\right)^2 - 2\frac{|P - Q|}{|Q - R|}\cos\theta\right]}{|P - Q|} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{P\to Q}\left[\left(\frac{|P - Q|}{|Q - R|}\right)^2 - 2\frac{|P - Q|}{|Q - R|}\cos\theta + \dots\right] \Big/ |P - Q| = \frac{\cos\theta}{|Q - R|} .$$

O sea,

(4) $$\frac{\partial}{\partial n_t}\lg\frac{1}{|R - Q_t|} = \frac{\cos\theta}{|R - Q_t|} = \frac{\cos(R - Q_t, n_t)}{|R - Q_t|} .$$

Luego, si en (2) hacemos $P \to \infty$ resulta que $u(\infty) := \lim u(P) = 0$. Por otra parte, si $R = Q_s$, podemos definir para $s \neq t$,

(5) $$\pi K(s,t) := \frac{\partial}{\partial n_t}\lg\frac{1}{|Q_s - Q_t|} = \frac{\cos(Q_s - Q_t, n_t)}{|Q_s - Q_t|} .$$

Veamos que ocurre si $s \to t$. Como el vector tangente es (x',y') de norma 1, el versor n_t es igual a $(-y',x')$.

Luego,

$$\frac{\cos\theta(s,t)}{|Q_s - Q_t|} = \frac{(x(s) - x(t))(-y'(t)) + (y(s) - y(t))x'(t)}{(x(s) - x(t))^2 + (y(s) - y(t))^2} =$$

$$= \frac{[(s - t)x'(t) + \frac{1}{2}(s - t)^2x''(t) + o(s - t)^2)](-y'(t)) + \dots}{(s - t)^2x'(t)^2 + o((s - t)^2) + \dots} \xrightarrow[s \to t]{}$$

$$(y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t))/2.$$

O sea,

(6) $$\lim_{s\to t}\frac{\cos\theta(s,t)}{|Q_s - Q_t|} = k(t)/2 .$$

Análogamente se deduce que $K(s,t) \longrightarrow k(t_0)/2\pi$ si $(s,t) \longrightarrow (t_0,t_0)$. Definiendo $K(t,t) := k(t)/2\pi$ resulta que el núcleo (5) es continuo en $[0,S] \times [0,S]$. Por lo tanto también puede definirse $u(s) := u(Q_s)$ por medio de la expresión

(7) $$u(s) = \pi\int_0^S K(s,t)\,\mu(t)\,dt = \pi K(\mu).$$

El operador así definido lleva $L^2(0,S)$ en $C([0,S])$.

PROPOSICION 1. *a) Sean* $u_i(s) = \lim_{\substack{P \to Q_s \\ P \in D}} u(P)$, $u_e(s) = \lim_{\substack{P \to Q_s \\ P \in D_e}} u(P)$.

Bajo las hipótesis enunciadas $u_i(s)$ *y* $u_e(s)$ *existen y verifican*

$$(8) \qquad u_i(s) = u(s) + \pi\mu(s) \, , \; u_e(s) = u(s) - \pi\mu(s).$$

b) Por el contrario vale

$$(9) \qquad \lim_{P \to Q_s} \left[\frac{\partial u_i}{\partial n}(P) - \frac{\partial u_e}{\partial n}(P')\right] = 0,$$

donde $P \in D$ *y se encuentra sobre la normal interior* $n = n_s$ *en* Q_s; P' *es el punto simétrico a* P *respecto a la tangente en* Q_s $(P \in D_e)$*. Luego, si* $\frac{\partial u_i}{\partial n}(P)$ *converge a un límite cuando* $P \to Q_s$, $P \in n$*, entonces también existe el límite de* $\frac{\partial u_e}{\partial n}(P')$ *y coincide con aquél.*

No demostraremos por ahora esta proposición. Pero ella implica que el potencial u deberá satisfacer a la siguiente ecuación integral:

$$(10) \qquad g(s)/\pi = \mu(s) + \int_0^S K(s,t)\, \mu(t)\, dt = \mu + K(\mu),$$

si u resuelve el problema de Dirichlet: $u_i(s) = g(s)$ para todo s.

Consideremos la ecuación homogénea:

$$(11) \qquad f(s) + \int_0^S K(s,t)\, f(t)\, dt = 0.$$

Sea f una solución de (11) en $L^2(0,S)$. Entonces $f \in C([0,S])$ y si:

$$(12) \qquad v(P) = \int_0^S f(t) \frac{\partial}{\partial n_t} \lg \frac{1}{|P - Q_t|}\, dt,$$

de la proposición 1 resulta que $v_i(Q) = 0$ en todo $Q \in J$. Como v es armónica necesariamente $v \equiv 0$. Por lo tanto $\frac{\partial v_i}{\partial n_t} = 0$ para todo $t \in J$. Entonces $\frac{\partial v_e}{\partial n_t} = 0$ en J.

Pero (cf. B más adelante), si $w = v_e$ se tiene:

$$\iint_{D_e} (w_x^2 + w_y^2)\, dx\, dy = -\int_0^S w \frac{\partial w}{\partial n_t}\, dt = 0. \tag{13}$$

En consecuencia, $w_x = w_y = 0$ y $v_e \equiv v(\infty) = 0$. Por otra parte:
$f(t) = \frac{v_i(t) - v_e(t)}{2\pi} = 0$. Es decir, la ecuación homogénea (11) sólo admite la solución trivial lo que asegura que (10) tiene exactamente una solución para toda $g \in L^2(0,S)$. Como $g \in C([0,S])$ la solución $\mu(t)$ también es continua. Entonces, usando el principio de máximo para funciones armónicas se obtiene:

TEOREMA 1. *Existe exactamente un potencial de doble hoja $\mu(t)$ en L^2, necesariamente continuo, tal que (2) define una función armónica en D que converge, al tender P al borde, a una g dada, definida y continua sobre ∂D. Y por lo tanto existe exactamente una solución al problema interior de Dirichlet.*

B. (13) sigue de la fórmula de Green aplicada a la región $G \subset D_e$ comprendida entre J y una circunferencia C de radio R y centro 0 que tiende a infinito, y la siguiente:

PROPOSICION 2. *Sea $z = x + iy = R\, e^{i\alpha} \in C$. Entonces*

$$\int_C w(z) \frac{\partial w}{\partial n}(z)\, d\sigma(z) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0, \tag{14}$$

donde n es la normal exterior en $z \in C$.

DEMOSTRACION. $\int_C \dots = \int_C w\left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \operatorname{sen} \alpha\right) d\sigma.$

Si $\xi = X + iY = 1/z$, $u(\xi) = w(z)$ y C' es la circunferencia de radio 1/R, la última integral es igual a

$$\int_{C'} u(\xi)[u_X(\xi)O\left(\frac{1}{R^2}\right) + u_Y(\xi)O\left(\frac{1}{R^2}\right)]R^2 d\sigma'(\xi) =$$

$$= \int_{C'} v(\infty)(1 + o(1))[u_X O(1) + u_Y O(1)]d\sigma'.$$

Como existe el $\lim_{(X,Y)\to(0,0)} u(X,Y) = v(\infty)$, u es armónica en un entorno del origen, y u_X y u_Y están acotadas allí. Por tanto:

$$\int_C \cdots = v(\infty)\int_{C'} O(1)\, d\sigma' = v(\infty)o(1) \qquad , \qquad \text{QED.}$$

C. a) y b) de la proposición 1 para μ constante siguen de la siguiente fórmula:

$$(15) \qquad d = d(P) = \int_0^S \frac{\partial}{\partial n_t} \lg\frac{1}{|P - Q_t|}\, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } P \in D, \\ \pi & \text{si } P \in J, \\ 0 & \text{si } P \in D_e. \end{cases}$$

Para demostrarla observemos que si v es una armónica conjugada de la función armónica u entonces de las ecuaciones de Cauchy-Riemann sigue que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\beta = \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\beta + \pi/2) + \frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{sen}(\beta + \pi/2).$$

Es decir, la derivada de u en una dirección coincide con la de v en la dirección obtenida girando aquella en 90° en sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces (fig. 3):

$$-\frac{\partial}{\partial n_s}\lg|P - Q_s| = \frac{\partial}{\partial(-n_s)}\lg|Q_s - P| =$$

$$= \frac{d\alpha_P}{ds}(s).$$

Luego $d = \int_0^S d\alpha_P(s)$ y (15) sigue inmediatamente.

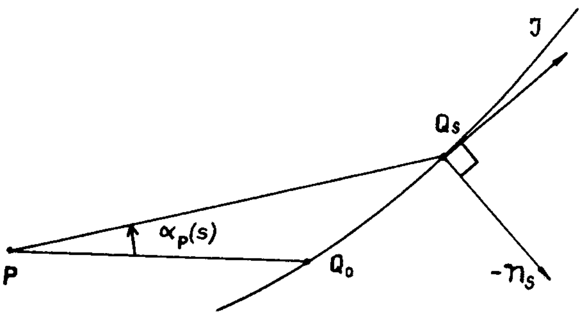


Fig. 3

Veamos a) de la proposición 1. Sea $\mu \in C^1$ (ver fig. 4):

Para R bastante cerca de J, existe un único $Q_t \in J$ tal que $|R - Q_t|$ = distancia de R a J. Entonces:

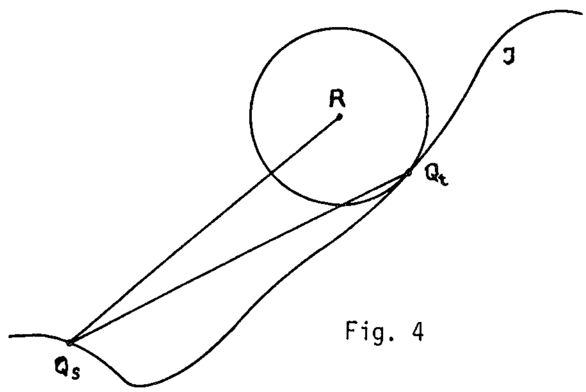


Fig. 4

(16) $$\int_0^S \mu(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \lg \frac{1}{|R - Q_s|} \, ds =$$

$$= \int_0^S (\mu(s) - \mu(t)) \frac{\partial}{\partial n_s} \lg \frac{1}{|R - Q_s|} \, ds + \mu(t) \, d(R) =$$

$$= \int_0^S (\mu(s) - \mu(t)) \frac{\cos(R - Q_s, n_s)}{|R - Q_s|} \, ds + \mu(t) \, d.$$

Observando que $\frac{|Q_s - Q_t|}{|R - Q_s|} \leqslant \frac{|R - Q_s| + |R - Q_t|}{|R - Q_s|} \leqslant 2$, resulta que el integrando en la última integral está acotado. Entonces, si $R \to Q_{s_0}$, también $t \to s_0$ y dicha integral converge a un número $h(s_0)$ independientemente de la posición de R con respecto a J.

Luego:

(17) $\quad L(s) = u_i(s) - 2\pi\mu(s) \quad$ si $R \in D$, $R \to Q_s$,

(18) $\quad L(s) = u(s) - \pi\mu(s) \quad$ si $R \in \partial D$, $R \to Q_s$,

(19) $\quad L(s) = u_e(s) \quad$ si $R \in D_e$, $R \to Q_s$.

Sea ahora $\{\mu_j(t)\} \subset C^1$, una sucesión convergente uniformemente a $\mu(t) \in C$, y $u_{i,j}$, $u_{e,j}$, $u_j(s)$ las funciones correspondientes definidas según (2) o (7). En este último caso es fácil ver que $u_j(s) \xrightarrow{\cdot} u(s)$. Por lo tanto $L_j(s) \xrightarrow{\cdot} L(s) =$ $= u(s) - \pi\mu(s)$ y obtenemos (18) para μ continua. En consecuencia, $u_{i,j} \xrightarrow{\cdot} U(s)$, $u_{e,j}(s) \xrightarrow{\cdot} V(s)$.

Pero entonces la función armónica $u_{i,j}(P)$ converge uniformemente a una armónica cuyo valor de contorno es $U(s)$. Sin embargo,

$$u_{i,j}(P) \to u(P) = \int_0^S \mu(t) \frac{\partial}{\partial n_t} \lg \frac{1}{|P - Q_t|} dt \text{ si } P \in D.$$

O sea, $U(s) = u_i(s)$. Análogamente $V(s) = u_e(s)$, y siguen (17), (19) para μ continua. Esto prueba (8) de la proposición 1.

b) Consideremos un potencial u de doble hoja sobre el intervalo [-1,1] en y = 0 de densidad $\mu(x)$:

$$u(x,y) = -\int_{-1}^{1} \frac{y}{y^2 + (x - t)^2} \mu(t)\, dt.$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = \int_{-1}^{1} \left[\frac{2y^2}{(y^2 + t^2)^2} - \frac{1}{y^2 + t^2}\right] \mu(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{y^2 - t^2}{(y^2 + t^2)^2} \mu(t)\, dt.$$

Estudiaremos el comportamiento de esta derivada cuando $y \to 0$ en distintos casos.

CASO 1: $\mu(t) \equiv 1$. Sea $0 < |y| < 1$. Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = \frac{1}{|y|} \int_{-1/|y|}^{1/|y|} \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} du = \frac{1}{|y|} G(y).$$

Pero,

$$G(y) = \int_C \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} du + \int_T \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} du \ , \ C = C_1 + C_2 \ , \ T = -C_2.$$

Luego tenemos:

$G(y) = 2\pi i.$residuo en i de $(1 - u^2)/(1 + u^2)^2$ +

$$+ \, i|y| \int_{\pi}^{0} \frac{y^2 - e^{2i\phi}}{(y^2 + e^{2i\phi})^2} e^{i\phi}\, d\phi.$$

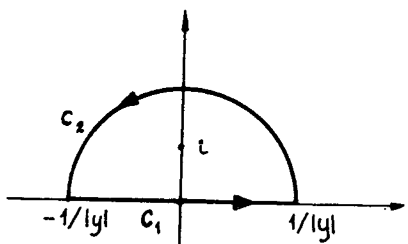


Fig. 4 bis

Sin embargo,

$$\text{Residuo en } i = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}\, du,$$

y de esto sigue que: $G(y) = \pm i|y|\int_0^{\pi} (1 + o(1))\; e^{-i\phi}\, d\phi$. (para $y \to 0$).

En consecuencia,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = G(y)/|y| \xrightarrow[y \to 0]{} i\int_0^{\pi} e^{i\phi}\, d\phi = -2.$$

CASO 2: $\mu(t) = |t|^{1/2}$ en $[-1/2,1/2]$, $\mu(t)$ continua en $[-1,1]$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{y^2 - t^2}{(y^2 + t^2)^2}\, |t|^{1/2}\, dt + \int_{\frac{1}{2} < |t| < 1} \frac{y^2 - t^2}{(y^2 + t^2)^2}\, \mu(t)\, dt =$$

$$= I_1(y) + I_2(y).$$

$I_2(y)$ converge para $y \to 0$. En cambio $I_1(y)$ tiende a $-\infty$ si $|y| \to 0$. En efecto, si $t = |y|u$,

$$I_1(y) = \frac{1}{|y|^{1/2}} \int_{-1/2|y|}^{1/2|y|} \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}\, |u|^{1/2}\, du.$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}\, |u|^{1/2}\, du < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}\, du = 0\ ,$$

y sigue que $I_1(y) \to -\infty$ para $y \to 0$.

Conclusión: $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)$ no tiene límite necesariamente para $|y| \to 0$ si $\mu(t)$ es solamente continua; sin embargo, $\frac{\partial u}{\partial y}(y,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(-y,0)$ en ambos casos.

Veamos ahora una demostración de (9).
Sea $R \in D$ (cf. fig. 5). Entonces:

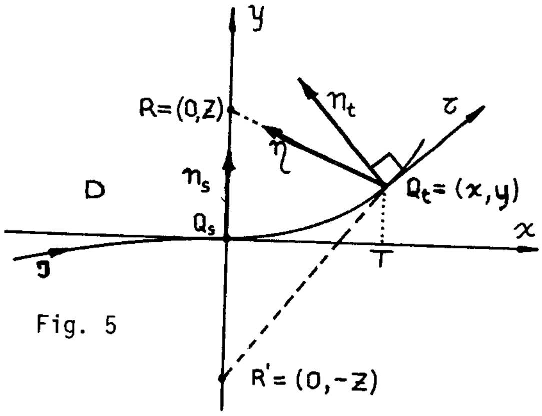


Fig. 5

$$\frac{\partial}{\partial n_s}\int_0^S \frac{\cos(R - Q_t, n_t)}{|R - Q_t|}\mu(t)\,dt =$$

$$= \int_0^S \frac{\partial}{\partial n_s}\left\{\frac{(R - Q_t).n_t}{|R - Q_t|^2}\right\}\mu(t)\,dt.$$

Por otra parte sabemos que: $\frac{\partial}{\partial n_s}(R - Q_t) = n_s$. Luego

$$\frac{\partial}{\partial n_s}\left\{\frac{(R - Q_t).n_t}{|R - Q_t|^2}\right\} = \frac{(n_s.n_t)|R - Q_t|^2 - (2(R - Q_t)\cdot\frac{\partial}{\partial n_s}(R - Q_t))(n_t.(R - Q_t))}{|R - Q_t|^4} =$$

$$= \frac{(n_s.n_t)|R - Q_t|^2 - 2(n_s.(R - Q_t))(n_t.(R - Q_t))}{|R - Q_t|^4} =$$

$$= \frac{(n_s.n_t) - 2(n_s.\eta)(n_t.\eta)}{|R - Q_t|^2},$$

donde: $|n_s| = |n_t| = |\tau| = 1$, $\eta = (R - Q_t)/|R - Q_t|$. Observemos que $t - s = O(x)$, $|Q_t - T| = y = O(x^2)$, $|x| = |Q_s - T|$, $y'(t) = y''(\xi)(t - s) = O(x)$. Además,

$$\tau = (x'(t),y'(t)),\ n_s = (0,1),\ n_t = (-y'(t),x'(t)),$$

$$\eta = (-x(t),z - y(t))/(x^2 + (z - y)^2)^{1/2}.$$

Reemplazando en el último cociente obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial n_s}\{\ldots\} = \left[x'(t) - \frac{2(z - y(t))(y'(t)x(t) + x'(t)(z - y(t)))}{x^2 + (z - y)^2}\right]\Big/[x^2 + (z - y)^2] =$$

$$= \frac{x'x^2 - x'(z - y)^2 - 2y'x(z - y)}{(x^2 + (z - y)^2)^2}\qquad ;\ \text{luego,}$$

(*) $$\frac{\partial}{\partial n_s}\left\{\frac{(R - Q_t).n_t}{|R - Q_t|^2}\right\} = \frac{\alpha}{(x^2 + (z - y)^2)^2} - \frac{\beta}{(x^2 + (z - y)^2)^2},$$

donde $\alpha = x'(x^2 - z^2 - y^2) + 2y'xy$, $\beta = 2z(x'y - y'x)$. En consecuencia (fig. 5):

(**) $$\frac{\partial}{\partial n_s}\left\{\frac{(R' - Q_t).n_t}{|R' - Q_t|^2}\right\} = \frac{\alpha}{(x^2 + (z + y)^2)^2} + \frac{\beta}{(x^2 + (z + y)^2)^2}.$$

Por lo tanto

$$(*) - (**) = \alpha A - \beta B.$$

$$A = \frac{1}{(x^2 + (z - y)^2)^2} - \frac{1}{(x^2 + (z + y)^2)^2}, \quad B = \frac{1}{(x^2 + (z - y)^2)^2} + \frac{1}{(x^2 + (z + y)^2)^2},$$

donde $$A = O\left(\frac{zy(z^2 + y^2)}{(x^2 + z^2)^2}\right), \quad B = O\left(\frac{1}{(x^2 + z^2)^2}\right).$$

Luego, como $\alpha = O(1)$ y $\beta = O(|zy| + |zy'x|) = O(zx^2)$, resulta

$$|(*) - (**)| = O\left(\frac{zy}{(x^2 + z^2)^2}\right) + O\left(\frac{zx^2}{(x^2 + z^2)^2}\right) =$$

$$= O\left(\frac{zx^2}{(x^2 + z^2)^2}\right).$$

Para probar la proposición basta mostrar que

(***) $$\frac{\partial}{\partial n_s}\int_0^S \left\{\frac{\cos(R - Q_t, n_t)}{|R - Q_t|} - \frac{\cos(R' - Q_t, n_t)}{|R' - Q_t|}\right\} \mu(t)\, dt \longrightarrow 0$$

cuando $R \to Q_s$, es decir, cuando $z \to 0$. De (15) sigue que podemos suponer $\mu(s) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, sea d tal que $|\mu(t) - \mu(s)| = |\mu(t)| < \varepsilon$ si $|t - s| < d$. Si descomponemos la última integral en:

$$\int_{|s - t| \geqslant \varepsilon}, \int_{|s - t| < \varepsilon},$$

vemos enseguida que para probar (***) basta demostrar que

$$\int_{|s - t| < \varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_s} \left\{ \frac{\cos(R - Q_t, n_t)}{|R - Q_t|} - \frac{\cos(R' - Q_t, n_t)}{|R' - Q_t|} \right\} \mu(t)\, dt = O(\varepsilon).$$

Pero el miembro izquierdo es

$$O\left(\varepsilon \int_{|s - t| < \varepsilon} |(*) - (**)|\, dt \right).$$

Es suficiente entonces ver que la última integral es acotada. En efecto,

$$\int_{|s - t| < \varepsilon} |(*) - (**)|\, dt = O\left(\int_0^\infty \frac{zx^2}{(x^2 + z^2)^2}\, dx \right) = O\left(\int_0^\infty \frac{t^2}{(1 + t^2)^2}\, dt \right),$$

y la proposición queda demostrada. QED.

D. El problema *interior de Neumann* es análogo al de Dirichlet pero con otro dato que consiste en este caso en dar el valor de la derivada normal en cada punto y precisamente por medio de una función continua $h(t)$.

Para estudiar este problema consideraremos el potencial de *simple hoja* de densidad $\rho(t)$ continua:

$$w(P) = \int_0^S \rho(t)\, \lg \frac{1}{|P - Q_t|}\, dt. \tag{20}$$

Evidentemente w es armónica en $D \cup D_e$. Además vale la:

PROPOSICION 3. *a) w puede extenderse en forma continua hasta el borde J,*

b) $$\left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_i + \pi\rho(s) = \left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_e - \pi\rho(s) = \int_0^S \rho(t) \frac{\partial}{\partial n_s} lg \frac{1}{|Q_s - Q_t|}\, dt.$$

Así que la derivada normal es la que presenta ahora discontinuidades, (ver demostración en E).
Admitiendo la proposición, el problema de Neumann planteado para w es:
$\left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_i (s) = h(s)$, y por lo tanto consiste en encontrar una $\rho(t)$ que satisfaga:

$$(21) \qquad - \frac{h(s)}{\pi} = \rho(s) - \frac{1}{\pi} \int_0^S \rho(t) \frac{\partial}{\partial n_s} \lg \frac{1}{|Q_s - Q_t|} dt.$$

Recordemos que $K(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_s} \lg \frac{1}{|Q_s - Q_t|}$. Luego

$$(22) \qquad K^*(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_s} \lg \frac{1}{|Q_t - Q_s|} = K(t,s),$$

y (21) se reduce a

$$(23) \qquad - \frac{h(s)}{\pi} = \rho(s) - \int_0^S \rho(t) K^*(s,t) \, dt = \rho(s) - \int_0^S \rho(t) \, K(t,s) \, dt.$$

De (15) resulta que $\int_0^S K(s,t) \, dt = 1$, es decir,

$$(24) \qquad \mu(s) - \int_0^S K(s,t) \, \mu(t) \, dt = 0$$

admite soluciones constantes no nulas. O sea, 1 es un autovalor para el operador K. Sea μ otra autofunción no constante. Entonces, de la proposición 1 obtenemos:

$$\pi\mu(s) = \int_0^S \mu(t) \frac{\partial}{\partial n_t} \lg \frac{1}{|Q_s - Q_t|} dt = u(s),$$

y así: $u_e(s) = u(s) - \pi\mu(s) = 0$. En consecuencia: $u_e \equiv 0$.

Luego, $\frac{\partial u_e}{\partial n_s} = 0 = \frac{\partial u_i}{\partial n_s}$. Por lo tanto, en D:

$$(25) \qquad \iint_D (u_x^2 + u_y^2) \, dx \, dy = - \int_0^S u_i(t) \frac{\partial u_i}{\partial n_t} dt = 0$$

Y esto implica: $u_x = u_y \equiv 0$, $u = $ cte.. Es decir, 1 es un autovalor de multiplicidad uno para K. Entonces, la ecuación (23) tiene solución en L^2 (y necesariamente continua) si y sólo si $h \perp 1$:

$$\int_0^S h(t)\, dt = 0. \tag{26}$$

TEOREMA 2. *El problema (interior) de Neumann tiene solución si el dato tiene media cero en el contorno. Dos soluciones difieren en una constante.*

DEMOSTRACION. Sea u_0 la solución obtenida por el potencial de simple hoja y u otra solución; $v := u - u_0$. Entonces de

$$\iint_D w\, \Delta v\, dx\, dy = -\iint_D \nabla w\, \nabla v - \int_J w \frac{\partial v}{\partial n_{int}}, \tag{27}$$

con $w = v$ resulta: $\iint_D |\nabla v|^2 = 0$ y $v = $ cte.. QED.

Obsérvese que el dato h debe tener *necesariamente* media cero pues (27) se reduce, si $w \equiv 1$, a $\iint \Delta v = -\int \frac{\partial v}{\partial n_{int}}$.

E. DEMOSTRACION DE LA PROPOSICION 3.

a) (cf. fig. 5 bis).

$$I_\varepsilon = \left|\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \rho(t)\, \lg|P - Q_t|\, dt\right| \leq$$

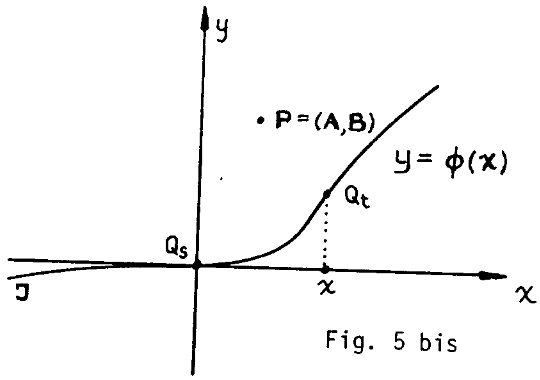


Fig. 5 bis

$$\leq \max|\rho| \int_{-h_1}^{h_2} \left|\lg\sqrt{(x - A)^2 + (\phi(x) - B)^2}\right| (1 + \phi'(x)^2)^{1/2}\, dx,$$

y donde $h_i \to 0$ si $\varepsilon \to 0$. Entonces, si ε es bastante pequeño y P bastante próximo a Q_s:

$$I_\varepsilon \leqslant M \int_{-h_1}^{h_2} |\lg|x - A|| \, dx \leqslant M \int_0^{h_1+h_2} |\ln x| \, dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

De aquí sigue que w(P) definida en (20) es continua sobre J, y por lo tanto lo es en todo el plano. En efecto, la integral (20) calculada fuera de un entorno lineal del punto $Q_s \in J$ define una función continua en un entorno plano de ese punto.

b) Recordemos que:

$$\frac{\partial}{\partial n_s} \lg \frac{1}{|Q_s - Q_t|} = \frac{\cos(Q_t - Q_s, n_s)}{|Q_t - Q_s|} . \tag{28}$$

Debemos probar que:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_e (s) = \pi\rho(s) - \int_0^S \rho(t) \frac{\cos(Q_s - Q_t, n_s)}{|Q_s - Q_t|} dt = \pi\rho(s) - C(s), \tag{29}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_i (s) = -\pi\rho(s) - \int_0^S \rho(t) \frac{\cos(Q_s - Q_t, n_s)}{|Q_s - Q_t|} dt = -\pi\rho(s) - C(s), \tag{30}$$

suponiendo que: $w(P) = \int_0^S \rho(t) \lg \frac{1}{|P - Q_t|} dt$. Sea u un potencial de doble hoja con densidad ρ. Entonces, si $Q \notin J$:

$$\frac{\partial w}{\partial n_s}(Q) + u(Q) = \int_0^S \rho(t) \frac{\cos(Q - Q_t, n_t) - \cos(Q - Q_t, n_s)}{|Q - Q_t|} dt , \tag{31}$$

como se ve usando relaciones análogas a (28).

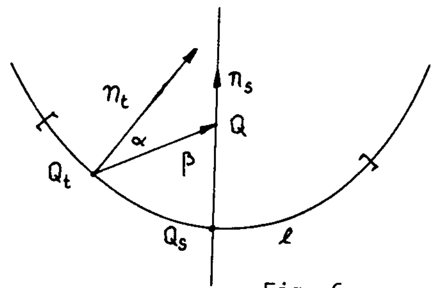


Fig. 6

Si l es una pequeña porción de J alrededor de Q_s, la integral en (31), pero sobre l, no supera, salvo por un factor constante, a:

$$\int_l \left| \frac{\cos(Q - Q_t, n_t) - \cos(Q - Q_t, n_s)}{|Q_t - Q|} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_1 \frac{|1.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)|}{|Q_t - Q|}\,dt = 2\int_1 \frac{|\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(n_s,n_t)|}{|Q_t - Q|}\,dt \leqslant \int_1 \frac{|(n_s,n_t)|}{|Q - Q_t|}\,dt$$

Pero: $|(n_s,n_t)| = |\int_s^t k(\sigma)\,d\sigma| = O(|s - t|)$. Entonces, la última integral no supera, salvo factor constante, a:

$$\int_1 \frac{|s - t|}{|Q - Q_t|}\,dt = \int_1 O(1)\,\frac{|s - t|}{|s - t|}\,dt = O(|1|)$$

En consecuencia, si $Q \to Q_s$ a lo largo de n_s, (31) tiende a un límite. Precisamente a, (cf. (5)):

$$\text{(32)} \qquad \int_0^S \rho(t)\,\frac{\cos(Q_s - Q_t,n_t) - \cos(Q_s - Q_t,n_s)}{|Q_s - Q_t|}\,dt = u(s) - C(s)$$

Luego,

$$\lim_{\substack{Q \in n_s \\ Q \to Q_s}} \left(\frac{\partial w}{\partial n_s}(Q) + u(Q)\right) = \lim_{\substack{Q \in n_s \\ Q \to Q_s}} \left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)(Q) + u_i(s) = u(s) - C(s).$$

Como w es continua hasta el borde el último límite coincide con $\left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_{int}(s)$. Recordando que $u_i(s) = u(s) + \pi\rho(s)$, obtenemos:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_{int}(s) + \pi\rho(s) = -C(s),$$

que es la relación (30). Análogamente se procede con la (29). QED.

F. EL PROBLEMA EXTERIOR DE DIRICHLET. Supongamos que $(0,0) \in D$. Sea G una función continua definida en J. El problema consiste en hallar una función U armónica en D_e (es decir, con límite en el infinito) continua en $\overline{D}_e$ y tal que $U|_J = G$.

La inversión $z \to \xi = 1/z$ respecto el origen lleva el estudio del problema exterior de Dirichlet al del problema interior. Así, la transformación lleva J en j, D_e en el interior de j y la función G en g. Sigue entonces que el problema exterior de Dirichlet tiene siempre solución única. La solución U es la transformada de la u obtenida al resolver el problema de Dirichlet en el interior de j con el valor de contorno g. Si tratáramos de aplicar el método de la sección A obtendríamos la ecuación integral:

$$\frac{G}{\pi} = -\mu + \int_0^S K(s,t)\,\mu(t)\,dt \tag{33}$$

donde μ es la densidad del potencial de una doble hoja instalada en J.
Pero ahora, la ecuación homogénea

$$0 = -\mu + K(\mu) \tag{34}$$

admite soluciones no triviales (las constantes, cf. (15)) que ocupan una variedad unidimensional de L^2. Luego, G/π está en el rango de $-I + K$ si y sólo si es ortogonal a las soluciones de

$$0 = -w + \int_0^S K^*(s,t)\,w(t)\,dt = -w + \int_0^S K(t,s)\,w(t)\,dt. \tag{35}$$

Sea $w_0 \neq 0$ solución de (35). Toda otra solución es de la forma: constante $\times\, w_0$. Entonces, G es una función (continua) para la cual existe un potencial de doble hoja

$$\int_0^S \mu(t)\,\frac{\partial}{\partial n_t}\,\lg\frac{1}{|P - Q_t|}\,dt\ ,\quad P \in D_e, \tag{36}$$

que converge a G(Q) cuando $P \to Q \in J$ si y sólo si

$$\int_0^S G\,w_0\,dt = 0. \tag{37}$$

Veamos que esto está de acuerdo con lo visto más arriba. Para u armónica en el interior de j y con valor g en el contorno existe una w sobre j tal que

$$u(0,0) = \int_j g\,w\,d\sigma.$$

(Esto es el teorema del valor medio si j es una circunferencia con centro (0,0). En el caso general sigue por transformación conforme del interior de j en una tal circunferencia, preservando el orígen. Cf. K, Teorema 3).
Ahora bien, los potenciales U de la forma (36) se anulan en el ∞. En consecuencia la correspondiente u se anula en el origen. Luego su valor en el contorno debe verificar

$$\int_j g\, w\, d\sigma = 0$$

Esto es precisamente el significado de la condición (37), que es necesaria y suficiente para la existencia de U.

G. EL PROBLEMA EXTERIOR DE NEUMANN. Sea dada una solución V del problema: dada H definida y continua en J hallar una función armónica en D_e con límite (finito) en ∞ tal que $\frac{\partial V}{\partial n_s}(Q) \to H(s)$ cuando $Q \in -n_s$, $Q \neq Q_s$, $Q \to Q_s$. Esta V está indeterminada en por lo menos una constante aditiva. La transformación conforme $z \to \xi = \frac{1}{z}$ lleva esa solución V en una v de un problema interior de Neumann, y como v es indetermindada en exactamente una constante aditiva lo mismo le ocurre a V. Veamos que si bien no hay unicidad el problema siempre admite solución. De la proposición 3 b) sigue que para que exista una solución via un potencial de simple hoja, la densidad ρ del mismo debe satisfacer a:

$$H(s) = \pi\rho(s) + \int_0^S \rho(t) \frac{\partial}{\partial n_s} \lg \frac{1}{|Q_s - Q_t|}\, dt.$$

O sea,

$$(38) \qquad H/\pi = \rho(s) + \int_0^S \rho(t)\, K^*(s,t)\, dt = (I + K^*)(\rho).$$

Pero la ecuación $(I + K)(v) = 0$ sólo admite la solución trivial (cf. (11)). Es decir, (38) siempre tiene solución.

H. EQUIVALENCIA DE LOS PROBLEMAS INTERIORES. Supongamos que u resuelva el PN con un dato f continuo y de manera que u, u_x, u_y sean prolongables continuamente hasta el borde J. Por medio de las ecuaciones de Cauchy-Riemann queda determinada -salvo por una constante aditiva- una función v, la función conjugada a la u:

(39) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En D, la derivada de u en una dirección coincide con la derivada de v en la dirección obtenida rotando aquella en 90° en sentido contrario a las agujas del reloj. Además, v_x y v_y son prolongables hasta el borde definiendo funciones continuas en $\overline{D}$. Luego v es uniformemente continua en D y prolongable con continuidad hasta ∂D. Veamos que la restricción de v a J tiene una derivada sobre J igual a la obtenida por límite de la derivada direccional interior en la misma dirección que la tangente a la curva. Siempre podemos suponer que la situación es como en la figura 7. Como la curva es C^2 tenemos la siguiente relación entre infinitésimos:

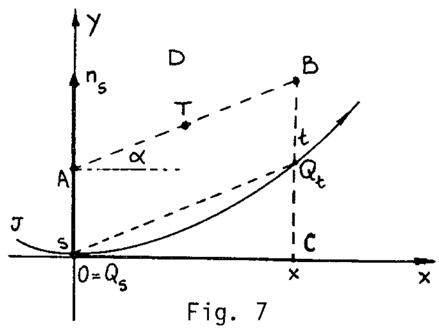


Fig. 7

$$|x| \sim |s - t|, \quad |Q_t - C| \sim |s - t|^2.$$

Supongamos $|A - 0| = |B - Q_t| = M|s - t|^{3/2}$ con $M > |v_x(R)| + |v_y(R)|$, para todo R en un entorno de Q_s. Si t - s es bastante pequeño entonces A y B $\in$ D. Luego

(40) $$\frac{v(Q_t) - v(Q_s)}{t - s} = \frac{v(B) - v(A)}{|B - A|} + o(1) = (v_x \cos\alpha + v_y \operatorname{sen}\alpha)(T) + o(1).$$

Pero: sen α = o(1) para $t \to s$. Por lo tanto el miembro izquierdo de (40) converge a $\lim\limits_{T \to Q_s} v_x(T) = v_x(Q_s)$. En consecuencia:

(41) $$\frac{dv}{ds}(s) = \lim_{\substack{A \to Q_s \\ A \in n_s}} \frac{\partial v}{\partial \text{ tg en } Q_s}(A) = -\lim_{\substack{A \to Q_s \\ A \in n_s}} \frac{\partial u}{\partial n_s}(A) := -f(s)$$

Si fijamos el valor de v en un punto s_0 de la curva:

(42) $$v(Q_t) - v(Q_{s_0}) = \int_{s_o}^{t} -f(r)\, dr.$$

Como $\int_J f = 0$, v vuelve al mismo valor al dar Q_t una vuelta a J. Concluímos entonces que si el PN tiene solución entonces también él PD tiene solución -las indeterminaciones en uno y otro caso ya las conocemos- para datos C^1 en el contorno. Recíprocamente, supongamos que para toda $g \in C^1([0,S])$ exista v que resuelva el PD con g como dato en el contorno. El argumento precedente prueba que existe u que resuelve el PN para f continua en el contorno de media cero, si el dato g para el PD se define por

(43) $$g(t) = v(Q_{s_0}) - \int_{s_o}^{t} f(r)\, dr.$$

La solución u es conjugada de v solución del PD con dato g en el contorno.

I. EL PROBLEMA DE DIRICHLET CUANDO J ES UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO R. De $\cos(Q_s - Q_t, n_t) = \frac{|Q_s - Q_t|}{2R}$ sigue que

(44) $$K(s,t) = \frac{1}{2\pi R}.$$

Por lo tanto la ecuación (10) se escribe de la siguiente forma:

(45) $$g/\pi = \mu + \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} \mu(s)\, ds.$$

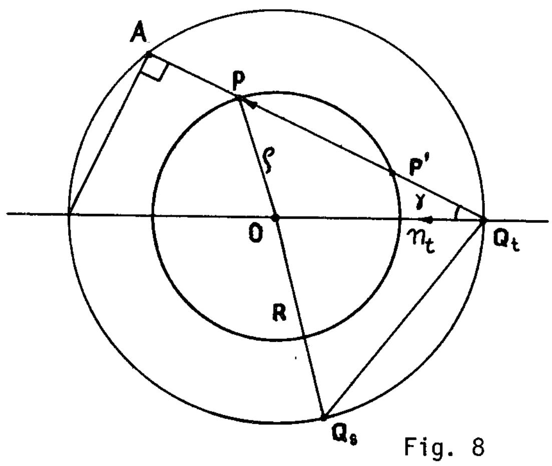


Fig. 8

Integrando entre 0 y $2\pi R$, obtenemos: $\int_0^{2\pi R} \mu\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi R} g\, ds$. Luego, de (45) sigue que:

(46) $$\mu = \frac{g}{\pi} - \frac{1}{4\pi^2 R}\int_0^{2\pi R} g\, ds,$$

y de (2) y (4) para $P \in D = \{(x,y): x^2 + y^2 < R\}$, (cf. (15)):

$$(47) \qquad u(P) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi R} g(t)\,\frac{\cos(P - Q_t, n_t)}{|P - Q_t|}\,dt - \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} g(t)\,dt.$$

Es decir:

$$(48) \qquad u(P) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} \frac{(2R.\cos\gamma(t) - |P - Q_t|)|P - Q_t|}{|P - Q_t|^2}\,g(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(2R.\cos\gamma(t(\psi)) - |Q_\psi - P|)|Q_\psi - P|}{|Q_\psi - P|^2}\,g(Re^{i\psi})d\psi\,.$$

El numerador de la fracción en (48) es igual a $(|A - Q_t| - |P - Q_t|)|P - Q_t| =$ $= |A - P||P - Q_t| = |P' - Q_t||P - Q_t|$. Pero esta es la potencia de Q_t respecto de la circunferencia de radio ρ y por lo tanto igual a:

$$(R - \rho)(R + \rho).$$

Entonces, si $P = \rho e^{i\Phi}$:

$$(49) \qquad u(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\Phi - \psi)}\,g(Re^{i\psi})\,d\psi$$

que es la conocida fórmula de Poisson que suministra una función armónica en $|P| < R$, continua en $|P| \leqslant R$ y que vale $g(Re^{i\psi}) = g(t)$ en el contorno, y que como vimos es única.

De (47) y (49) sigue la relación que vincula al núcleo de Poisson con el núcleo del potencial de doble hoja:

$$(50) \qquad \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\Phi - \psi)} = 2R\,\frac{\partial}{\partial n_\psi}\lg\frac{1}{|P - Q_\psi|} - 1.$$

K. EL PROBLEMA INTERIOR DE DIRICHLET CUANDO J ES UNA CURVA DE JORDAN CERRADA CUALQUIERA. Queremos demostrar el siguiente resultado:

TEOREMA 3. *Sea J una curva de Jordan y D su región interior. Sea g una función continua definida sobre el contorno J. Entonces, existe una y sólo una función armónica en D, continua en $\overline{D}$, que coincide con g sobre J.*

Esto es el corolario del correspondiente teorema cuando J es una circunferencia, de la conocida propiedad que las transformaciones conformes llevan funciones armónicas en armónicas y de la siguiente:

PROPOSICION 4. *Dado un punto $w_0 \in D$ existe una función $F(z)$, holomorfa e inyectiva en $\{|z| < 1\}$, la cual lleva este dominio sobre D de manera que $F(0) = w_0$. Esta función puede ser extendida continuamente a $\{|z| \leqslant 1\}$ y la función extendida, $\widetilde{F}(z)$, define un homeomorfismo entre $\{|z| \leqslant 1\}$ y $\overline{D}$. Obviamente, $\widetilde{F}$: $\{|z| = 1\} \to J$ en forma bicontinua.*

REFERENCIAS.

[1] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, III, Gauthier-Villars, Paris (1956),

[2] O.D. KELLOG, *Foundations of Potential Theory*, Dover, New York (1953).

[3] I.G. PETROVSKY, *Lectures on Partial Differential Equations*, Interscience Pub., Inc., New York (1957).

[4] RIESZ, F. et SZ. -NAGY, B., *Leçons d'Analyse Fonctionelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest (1953).

[5] PANZONE, R., *Lecciones Preliminares de Análisis Funcional*, Notas de Algebra y Análisis n° 11, INMABB-CONICET, Bahía Blanca (1983).

INDICE TEMATICO