

17

RAFAEL PANZONE

GUIA DE ESTUDIO PARA EL CURSO
VARIABLE COMPLEJA Y FUNCIONES ESPECIALES

1991

INMABB - CONICET
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
BAHIA BLANCA - ARGENTINA

NOTAS DE ALGEBRA Y ANALISIS (*)

Nº 17

GUIA DE ESTUDIO PARA EL CURSO
VARIABLE COMPLEJA Y FUNCIONES ESPECIALES

POR

RAFAEL PANZONE

INMABB - CONICET

1991

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHIA BLANCA - ARGENTINA

(*) La publicación de este volumen ha sido subsidiada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

Este volumen cubre esencialmente el programa del curso "Variable Compleja y Funciones Especiales" que se imparte a los alumnos de la Licenciatura en Matemáticas desde 1987. Fue ensayado también, como parte de un curso de "Análisis Matemático III" para alumnos de Ingeniería Electricista, en 1970 y 1971.

Se denomina "Guía" y no "Notas de curso" pues se espera que sus lectores recurran a algunos de los textos citados en la Bibliografía luego de la lectura de cada capítulo. Su nivel de exposición es el que corresponde al ayudante de cátedra o al de un alumno avanzado.

Los diferentes temas se presentan en la forma acostumbrada quizá con excepción del teorema y la fórmula de Cauchy (Cap. 2, §4 - 6).

R.P.

AGRADECIMIENTOS: a Susana Cuenca por el dactilografiado, a Horacio Cuenca por los dibujos y a Aurora Germani por el apoyo brindado para la publicación de este volumen.

INDICE.

CAPITULO 1.

El número complejo. Propiedades topológicas del plano complejo. Continuidad y diferenciabilidad de funciones a valores complejos. Función holomorfa. Condiciones de Cauchy-Riemann. Series: criterios de convergencia. Series de potencias. El teorema de Cauchy-Hadamard. La distancia cordal.1

CAPITULO 2.

Integral curvilínea. Teoremas de Cauchy y Morera. Fórmula de Cauchy. Las funciones elementales. La función z^α . Convergencia uniforme de funciones holomorfas en una región. Desarrollo en serie de potencias: el teorema de Taylor. Los ceros de una función holomorfa. Determinación de una función holomorfa por uno de sus elementos analíticos. Principio del módulo máximo. Funciones armónicas. El núcleo de Poisson y su conjugado. La transformación conforme. Lema de Schwarz.17

CAPITULO 3.

Propiedades de la representación conforme. La transformación lineal. La transformación bilineal. El teorema de Riemann. La fórmula de Poisson. Campos armónicos planos.48

CAPITULO 4.

La continuación analítica. Singularidades aisladas. Ceros y polos. El punto en el infinito. Teorema de los residuos. Principio del argumento. Teorema de Rouché. Teorema fundamental del álgebra. El comportamiento de una función holomorfa alrededor de un cero. El teorema de monodromía. La función analítica completa. El teorema de Abel.58

CAPITULO 5.

La función Gamma. La fórmula de recurrencia. La función Beta. La fórmula de duplicación de Legendre. La fórmula de Stirling. Productos infinitos. El teorema de Mittag-Leffler y las funciones racionales.73

CAPITULO 6.	
Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. Singularidades. Teorema de Fuchs. Wronskiano. Naturaleza de la solución en un entorno de una singularidad regular. La ecuación de Bessel. Funciones de Bessel, fórmulas de recurrencia, ceros. Fórmula de Lommel. Desarrollos asintóticos. Las funciones de Weber y Hankel.	81
CAPITULO 7.	
La ecuación diferencial de Legendre. Polinomios de Legendre, ceros. La fórmula de Rodrigues. Ortogonalidad de los polinomios de Legendre. ...	101
CAPITULO 8.	
Funciones holomorfas en varias variables complejas. Lema de Hartogs. Teorema de preparación de Weierstrass. Teorema de las funciones implícitas.	105
CAPITULO 9.	
La transformada de Laplace. El teorema de Lerch. Algunas transformadas útiles. Aplicación a las ecuaciones diferenciales ordinarias. La convolución. El teorema del valor inicial.	111
BIBLIOGRAFIA.	117

CAPITULO 1.

El número complejo. Propiedades topológicas del plano complejo. Continuidad y diferenciabilidad de funciones a valores complejos. Función holomorfa. Condiciones de Cauchy-Riemann. Series: criterios de convergencia. Series de potencias. El teorema de Cauchy-Hadamard. La distancia cordal.

1. EL NÚMERO. Supondremos que el lector ya conoce a los números complejos y sus propiedades. Esta sección es sólo un repaso informal e incompleto de esos conocimientos. El conjunto de los números naturales $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ es una familia cerrada bajo dos operaciones fundamentales: $+$, \times .

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ es una ampliación en la que también pueden realizarse las operaciones de suma y producto de dos números siendo el resultado otro número en Z . Estos son los números enteros que en el método genético de introducción del número que estamos describiendo aparecen como la respuesta a la necesidad de restar dos números naturales. La necesidad de dividir dos números en Z , p y q , $q \neq 0$, lleva a la introducción de los números racionales $Q = \{p/q; p, q \in Z, q \neq 0\}$. Esta familia es cerrada bajo las operaciones $+$, \times , $-$, \div con divisor distinto de cero. (El conjunto de los racionales con sus operaciones definen un cuerpo ordenado mínimo: todo cuerpo ordenado K contiene un subcuerpo ordenado isomorfo a Q). El conjunto de los números reales se obtiene extendiendo Q , y como hasta ahora, de manera que se satisfaga el **principio de permanencia de las leyes formales**; es decir, en este caso $R \supset Q$ y las operaciones, $+$, \times , $-$, \div en R restringidas a Q dan los mismos resultados que se obtenían antes de la extensión. En R puede definirse el logaritmo

$\log_{10} x$, $x > 0$, y el concepto de límite: $(1 + 1/n)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$. Pero este último

es un concepto topológico más que aritmético. Números como π , e y $\sqrt{2}$ pertenecen a $R \setminus Q$.

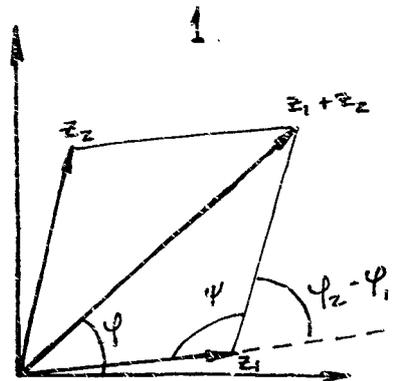
El número real es introducido, por ejemplo, por **cortaduras de Dedekind** y vale para ellos el **teorema fundamental**: si se separan los números de R en dos clases no vacías A , B tales que todo número $a \in A$ es menor o igual que todo número $b \in B$ y $R = A \cup B$ (cortadura) entonces existe un sólo número real r tal que $a \leq r \leq b$ para todo $a \in A$, para todo $b \in B$.

La geometría analítica se basa en el principio que dice que pueden ponerse en correspondencia ordenada los puntos de una recta y el conjunto de números reales. En términos geométricos entonces el teorema fundamental mencionado dice que la recta es "continua", y corresponde a lo que se llamó **postulado**

de continuidad de la recta o postulado geométrico de Cantor. Conceptualmente es equivalente al **principio de encaje**. Diremos que $\{[a_n, b_n]: a_n < b_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, es un encaje de intervalos de números reales si $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$ y $b_n - a_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. El teorema de encaje (de intervalos cerrados) dice que existe un y sólo un número real p tal que $a_n \leq p \leq b_n$ para todo n . (El teorema de **plenitud y unicidad** de los números reales puede enunciarse así: todo cuerpo ordenado completo K es isomorfo a \mathbb{R} . La completitud se define por la existencia de por lo menos un elemento de separación en todo encaje en K). La familia de números complejos $C = \{(a,b): a,b \in \mathbb{R}\}$, o también $C = \{a + ib: a,b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$, aparece al tratar de extender el concepto de número real de manera que puedan realizarse en C operaciones como α^β , $\alpha \neq 0$, o resolver ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$. Recordemos que $\alpha = (a,b)$, o $\alpha = a + ib = a \cdot 1 + b \cdot i$, es igual a cero si y sólo si $a = b = 0$. En otras palabras, las "unidades" 1 e i son "linealmente independientes respecto del cuerpo \mathbb{R} ". El llamado **teorema final de la Aritmética** de Hankel asegura que no puede ampliarse más el concepto de número de manera que se conserven las leyes formales de las operaciones. (Más precisamente, no existe un sistema de números de más de dos unidades que forme un cuerpo conmutativo).

2. EL NÚMERO COMPLEJO. Sea $\alpha = a + ib = [\rho, \phi]$ donde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\phi = \text{arc tg } b/a$. ϕ puede reemplazarse por $\phi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en la representación polar del número complejo α . En general fijaremos de antemano un intervalo semicerrado de longitud 2π donde se encontrará el argumento ϕ , vg. $\phi \in [0, 2\pi)$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, etc.. El módulo $\rho \in [0, \infty)$. Cuando $\alpha = 0$, y sólo en ese caso, $\rho = 0$, y ϕ puede tomar cualquier valor. Sea $|\alpha| := \rho$. Valen:

- a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, y por tanto, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$,
- b) si $\bar{z} := [\rho, -\phi]$ entonces $|\bar{z}| = |z|$ y $z\bar{z} = |z|^2$ pues,
- c) $z_1 \cdot z_2 = [\rho_1 \rho_2, \phi_1 + \phi_2]$,
 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- d) $z_1 + z_2 = [(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \psi)^{1/2}, \phi]$,
- e) $i = [1, \pi/2]$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$,
- f) si $z_2 \neq 0$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$,



- g) parte real de $\alpha = \Re \alpha := a$, parte imaginaria de $\alpha = \Im \alpha := b$; $z + \bar{z} = 2\Re z = 2a$,
 h) de $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$ se deduce la ley del paralelogramo (verificarla):

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2,$$

i) el producto escalar de $z, w \in \mathbb{C}$ es por definición $(z, w) := z\bar{w}$, y por tanto $|(z, w)| = |z| \cdot |w|$.

Identificamos al número real x con $(x, 0)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \text{j) } [1, \phi] &= (\cos \phi, \sin \phi) = (\cos \phi, 0) + i(\sin \phi, 0) = \cos \phi + i \sin \phi = \\ &= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots\right) = 1 + \frac{i\phi}{1!} + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \dots =: e^{i\phi}, \end{aligned}$$

$$\text{k) } e^{i\psi} \cdot \alpha = e^{i\psi} \cdot [\rho, \phi] = [\rho, \phi + \psi],$$

$$\begin{aligned} \text{l) } \alpha = (a, b) &= [\rho, \phi] = \rho \cdot e^{i\phi} = \rho(\cos \phi, \sin \phi) = \rho(\cos \phi + i \sin \phi); \text{ luego,} \\ e^{i\psi} \cdot \alpha &= |\alpha| \cdot e^{i(\phi + \psi)}, \end{aligned}$$

$$\text{m) } e^{i\pi} + 1 = 0, \text{ fórmula de de Moivre-Euler,}$$

$$\text{n) } \bar{z} = z \cdot e^{-2i\phi},$$

o) sea $z \neq 0$; $1/z = 1/[\rho, \phi] = [1/\rho, -\phi] = \rho^{-1} \cdot e^{-i\phi}$. La aplicación $z \rightarrow z' = 1/z$ pone en correspondencia biunívoca al conjunto $|z'| < 1$ con $|z| > 1$, $|z'| > 1$ con $|z| < 1$ y $|z'| = 1$ con $|z| = 1$, y sugiere la introducción de un punto en el infinito, imagen de $z = 0$,

p) sea $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$; $(re^{i\phi})^n = r^n(e^{i\phi})^n = r^n \cdot e^{in\phi} = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$, (fórmula de de Moivre),

$$\text{q) } \sqrt[n]{\Re e^{i\psi}} := (\Re e^{i\psi})^{1/n} = R^{1/n} \cdot (e^{i\psi})^{1/n},$$

r) $(e^{i\psi})^{1/n} = e^{i(\psi + 2k\pi)/n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Todos los valores posibles del argumento son $\frac{\psi}{n}$, $\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}$, \dots , $\frac{\psi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$, que corresponden a $k = 0, 1, \dots, n-1$; si $k = n, n+1, \dots$, o $k = -1, -2, \dots$ vuelven a aparecer los n números distintos:

$$(1) \quad e^{i\psi/n}, e^{i\psi/n} \cdot e^{i2\pi/n}, \dots, e^{i\psi/n} \cdot e^{i(n-1)2\pi/n}.$$

Los factores de $e^{i\psi/n}$ son las raíces n -ésimas de la unidad. Podemos suponer en (1) que $\psi \in [0, 2\pi)$.

3. LA ECUACIÓN CUADRÁTICA. El problema que surge en el campo real al tratar

A S opuesto de N en Σ , le corresponde $z = 0$, y puntos simétricos en la esfera respecto del plano del ecuador se corresponden con puntos inversos respecto a $|z| = 1$ en el plano complejo: $P \rightarrow z, P' \rightarrow a \Rightarrow a = 1/\bar{z}$. En efecto, utilizando semejanza de triángulos y que $(\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = (1 - \zeta)(1 + \zeta)$ obtenemos:

$$(3) \quad \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{|z|}{|b|} = \frac{1}{1 - \zeta}, \quad (\triangle NOZ \sim \triangle Pbz, \text{ etc.}),$$

$$(4) \quad \frac{a}{1} = \frac{\xi + i\eta}{1 + \zeta} = \frac{1 - \zeta}{\xi - i\eta}, \quad (\triangle NOa \sim \triangle NQP'),$$

$$(5) \quad \frac{2}{\text{dist}(N,P)} = \frac{\text{dist}(N,z)}{1}, \quad (\triangle NSP \sim \triangle NzO).$$

Luego, $z = (\xi + i\eta)/(1 - \zeta)$, y $|a \cdot z| = |(\xi + i\eta)/(\xi - i\eta)| = 1$. O sea, $a = 1/\bar{z}$. Además

$$(6) \quad \frac{\xi}{x} = \frac{\text{dist}(N,P)}{\text{dist}(N,z)} = \frac{2}{\text{dist}(N,z)^2} = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} = 1 - \zeta.$$

Por tanto, si $|z| \geq 1$, o equivalentemente para $\zeta \geq 0$:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi + i\eta = \frac{2z}{\bar{z}\bar{z} + 1}, \quad \zeta = \frac{\bar{z}\bar{z} - 1}{\bar{z}\bar{z} + 1}, \\ z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}. \end{cases}$$

Notando que $\zeta(a) = -\zeta(z)$, $1/\bar{z} = a = \frac{1 + \zeta(a)}{\xi - i\eta} = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta(a)} = \frac{\xi + i\eta}{1 + |\zeta(a)|}$, se deduce que (7) también define a la transformación σ restringida al hemisferio sur de Σ y cuya imagen es el círculo unitario $\{|z| \leq 1\}$. Además σ transforma circunferencias en Σ en circunferencias en \mathbb{C} , o rectas. Si consideramos a las rectas como circunferencias (degeneradas), σ pone en correspondencia circunferencias con circunferencias. La transformación es **conforme**: dos curvas en \mathbb{C} que se intersecan en z y cuyas tangentes allí forman un ángulo θ tienen imágenes en Σ que se intersecan en P y cuyas tangentes forman también un ángulo θ .

5. EL PLANO COMPLEJO. Llamaremos **entorno circular** de un punto z_0 a un conjunto $B_\epsilon(z_0)$ de la forma $\{z: |z - z_0| < \epsilon\}$ para algún $\epsilon > 0$, y por entorno de

z_0 entenderemos cualquier conjunto de \mathbb{C} que contenga un entorno circular de z_0 . Luego, $z_n \rightarrow z_0$ si y sólo si $|z_n - z_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ si y sólo si $z_n \in B_\varepsilon$ desde un

n en adelante y cualquiera sea ε . Un entorno (circular) del ∞ será la imagen por la transformación $1/z$ de un entorno (circular) del origen. Llamaremos **acotado** a todo subconjunto M del plano complejo para el que exista un círculo $B_r(0)$ tal que $B_r(0) \supset M$. Llamaremos **abierto** a cualquier unión de entornos circulares: $A = \bigcup \{B_r(\alpha)(z_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$.

Sea I_n un rectángulo $[a_{1,n}, b_{1,n}] \times [a_{2,n}, b_{2,n}]$, $n = 1, 2, \dots$. Si $\text{diam}(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y $I_n \supset I_{n+1}$ diremos que $\{I_n\}$ es un **encaje** de rectángulos.

Vale (demostrarlo): existe un único punto común a todos los rectángulos de un encaje.

Dado un conjunto $M \subset \mathbb{C}$ diremos que z es un **punto de acumulación** de M si para todo $B_\varepsilon(z)$, $B_\varepsilon(z) \cap M$ contiene infinitos puntos. El teorema de Bolzano-Weierstrass afirma que todo conjunto infinito y acotado posee un punto de acumulación al menos.

Un conjunto K se dice **compacto** si además de acotado es cerrado. Esto último significa que su complemento $\mathbb{C} \setminus K$ es abierto. Se demuestra que $K \subset \mathbb{C}$ es compacto si y sólo si todo subconjunto infinito $M \subset K$ tiene un punto de acumulación en K . O también, toda sucesión $\{z_n\} \subset K$ contiene una subsucesión

$\{z_{n_j}\}$ convergente a un punto en K . Teorema de Heine-Borel: un conjunto K es

compacto si de todo cubrimiento de K por círculos, $\bigcup \{B_{\varepsilon_\lambda}(z_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \supset K$, puede extraerse un subcubrimiento finito: $B_{\varepsilon_{\lambda_1}} \cup \dots \cup B_{\varepsilon_{\lambda_N}} \supset K$. (Nótese que

no exigimos que $z_\lambda \in K$ aunque, obviamente, la versión del teorema con esta hipótesis adicional es equivalente a la anterior).

Dado un conjunto $T \subset \mathbb{C}$ designaremos con \bar{T} a su **clausura** que es la unión de T con todos sus puntos de acumulación. Si un punto $a \in \bar{T} \setminus T$ entonces necesariamente existe una sucesión $\{z_n\} \subset T$ tal que $z_n \rightarrow a$. \bar{T} es un conjunto cerrado, y es el menor conjunto cerrado que contiene a T . Llamaremos **disco** a la clausura de un entorno circular de un punto:

$$\bar{B}_r(a) = \{z : |z - a| \leq r\}.$$

Un **arco simple** S es un arco continuo sin puntos múltiples, es decir, la imagen $S(t)$, biunívoca y bicontinua de un intervalo cerrado finito propio $t_0 \leq t \leq t_1$.

Una curva cerrada simple, o **curva de Jordan**, es un arco J continuo con un sólo punto múltiple: $J(t_0) = J(t_1)$.

O sea, una curva de Jordan es la imagen biunívoca y bicontinua de una circunferencia.

Un **dominio** es un abierto conexo: D es **abierto** si para todo punto $z_0 \in D$ existe $B_\epsilon(z_0) \subset D$; D es **conexo** si para cada par de puntos z_1, z_2 en D existe un arco simple que los une contenido en D . El famoso teorema de Jordan-Weblen asegura que el complemento en \mathbb{C} de una curva de Jordan J , $\mathbb{C} \setminus J$, está formado por exactamente dos dominios, uno acotado, el dominio interior, y el otro no acotado, el exterior. Todo arco simple que une un punto de uno con un punto del otro interseca a J .

Para saber si un punto $z \in \mathbb{C} \setminus J$ es interior o exterior basta unirlo por medio de un segmento con un punto de J (por ejemplo $J(t_0)$) y recorrer la curva con el extremo en J . Si al regresar al punto ($J(t_1)$) el ángulo total recorrido es 0 ($2\pi, -2\pi$) entonces z es exterior (interior).

Un dominio Σ se dice **simplemente conexo** si toda curva de Jordan J contenida en Σ , $J \subset \Sigma$, encierra solamente puntos de Σ . Es decir, el interior de J está contenido en Σ . Intuitivamente, un dominio simplemente conexo es un dominio sin agujeros.

6. SUCESIONES Y SERIES. Suponemos aquí que el lector está familiarizado con los conceptos de supremo (\sup) e ínfimo (\inf) de una familia de números reales y el de límite de una sucesión de números reales, y también con los de límite superior ($\overline{\lim}$) y límite inferior ($\underline{\lim}$).

Sea $z_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, una **sucesión** de números complejos, esto es, una aplicación de \mathbb{N} en \mathbb{C} . $z_n \rightarrow z_0$ si y sólo si $|z_n - z_0| \rightarrow 0$, lo que equivale a

$$x_n - x_0 \rightarrow 0, \quad y_n - y_0 \rightarrow 0.$$

Aplicando el **criterio de Cauchy** a $\{x_n\}, \{y_n\}$, resulta éste mismo para $\{z_n\}$: condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión $\{z_n\}$ es que dado $\epsilon > 0$ exista $n = n(\epsilon)$ tal que para todo $p > 0$, $|z_{n+p} - z_n| < \epsilon$. En efecto, $|z_n - z_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \leq 2|z_n - z_m|$.

z_0 es el límite de $\{z_n\}$: $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Si $\{z_n\}$ define un conjunto infinito entonces z_0 es su único punto de acumulación. Vale:

$z_n \rightarrow z, w_n \rightarrow w \Rightarrow z_n \pm w_n \rightarrow z \pm w, z_n w_n \rightarrow zw$, y si $z \neq 0 \neq z_n, w_n/z_n \rightarrow w/z$ (demostrarlo).

Sea $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Recordemos que $\sum_0^{\infty} a_j =: S$ si $S_n := \sum_0^n a_j \rightarrow S$.

El criterio de Cauchy aplicado a $\{S_n\}$ dice que existe la suma de la serie $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $n = n(\epsilon)$ tal que $|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$ cualquiera sea $p \geq 0$.

Recordemos que la serie se dice **absolutamente convergente** si $\sum_0^{\infty} |a_j| = t < \infty$.

Si esto ocurre también la serie original converge a un número S , y cualquier reordenamiento de la misma da lugar a una serie convergente a S (convergencia incondicional). La convergencia absoluta no equivale a la convergencia simple. $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots)$.

7. FUNCIONES COMPLEJAS. Una función compleja, o a valores complejos, es una aplicación f de un conjunto D_f , su dominio, en \mathbb{C} . Si su valores están en $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ diremos que la función es real. Salvo indicación en contrario supondremos siempre $D_f \subset \mathbb{C}$. f se dirá **continua** en $z \in D_f$ si $z_n \rightarrow z$ en D_f implica $f(z_n) \rightarrow f(z)$. Es fácil ver que $f(z)$ es continua en $z = x + iy$ si y sólo si las funciones reales $\Re f(z)$, $\Im f(z)$ son continuas en (x, y) y que si f y g son continuas en z y $D_f = D_g$ entonces $f \pm g$, $f \cdot g$, y f/g si $g(z) \neq 0$, también lo son.

La continuidad de f en $z \in D_f$ significa entonces que $\lim_{z_n \rightarrow z} f(z_n) = f(z)$. Se

dice que f es continua en D_f si y sólo si lo es en cada uno de sus puntos. La continuidad en $z_0 \in D_f$ puede describirse en la siguiente forma equivalente: para todo $\epsilon > 0$ existe un $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tal que si $|z - z_0| < \eta$, $z \in D_f$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, (demostrarlo).

La función $f(x) = 1/x$, $D_f = (0, 1)$, es continua, pero a medida que $x_0 = z_0$ se acerca a 0, el mayor $\eta(\epsilon)$ posible para un ϵ fijo, es cada vez más pequeño. Cuando esto no ocurre se habla de **continuidad uniforme**: f es uniformemente continua en D_f si para todo $\epsilon > 0$ y todo $z_0 \in D_f$ existe un $\eta = \eta(\epsilon)$ tal que $|z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

TEOREMA DE HEINE-CANTOR. *Si f es continua en el conjunto cerrado y acotado A entonces f es acotada y uniformemente continua allí.*

DEMOSTRACION. (El ejemplo precedente prueba que el teorema no vale si A no es

compacto). Dado $a \in A$ existe $B_\eta(a)$, $\eta = \eta(a)$, tal que si $z_1, z_2 \in B_\eta(a) \cap A$ vale $\sup |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$. Esto se expresa diciendo que la **oscilación** de f en $B_\eta(a)$ es menor que ϵ . Cada punto a de A lo cubrimos con un entorno circular $B_{\eta(a)/2}(a)$. El teorema de Heine-Borel asegura que con un número finito de estos entornos queda cubierto todo A . Sean estos los correspondientes a los puntos a_1, \dots, a_N . Sea $z_0 \in A$. Existe entonces a_j tal que $B_{\eta(a_j)/2}(a_j) \ni z_0$. Sea $\eta = \inf \{\eta(a_j)/2\}$. Si $|z - z_0| < \eta$ entonces $z \in B_{\eta(a_j)}(a_j)$ y por tanto $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Además $|f(z)| \leq \sup_j |f(a_j)| + \epsilon$, QED.

8. **DIFERENCIABILIDAD.** Sea D_f un abierto. Diremos que f es diferenciable en $z_0 \in D_f$ si $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow l \in \mathbb{C}$ para $0 < |z - z_0| \rightarrow 0$, y que l es la derivada de f en z_0 : $l = \frac{df}{dz}(z_0)$; escribiremos también $l = f'(z_0)$.

Es claro que si f es diferenciable en z_0 entonces es continua en ese punto. La recíproca es falsa. Por ejemplo, $|z|$ no es diferenciable en $z = 0$ ni en $z = 1$. $\text{Arg } z$ no es diferenciable en $z = 1$.

DEFINICION 1. Sea D_f un abierto. f se dice **holomorfa** en D_f (o **analítica regular**) si es diferenciable en todo punto de su dominio.

Si $D_f = D_g$ y f y g son holomorfas en un abierto entonces $f + g$, $f \cdot g$ y f/g para $g \neq 0$, también lo son y vale:

- i) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$; $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$;
- ii) $\frac{d(f/g)}{dz} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

(Estas fórmulas valen punto a punto, y por tanto son válidas si f y g son sólo diferenciables en un punto.) La última sigue de i) y de

$$(8) \quad \frac{d}{dz}(1/g) = -\frac{g'}{g^2}(z).$$

Sea f holomorfa en un abierto que contiene a $g(D_g)$. Entonces $w(z) = f(g(z))$

es holomorfa en D_g y (cf. §9):

$$(9) \quad w'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z).$$

En efecto, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta z}$ si $\Delta g \neq 0$, y pasando al límite resulta (9). Si g es constante en un entorno de z , $\Delta g = 0 = g'(z)$ pero también w es constante en ese entorno y $w'(z) = 0$, qed.

DEFINICION 2. Una función f se dice holomorfa en un punto a si está definida en un entorno circular $B_r(a)$ donde es holomorfa.

Luego, f es holomorfa si y sólo si es holomorfa en cada uno de los puntos de D_f .

DEFINICION 3. Si f es holomorfa en \mathbb{C} decimos que f es una función entera.

Todo polinomio de grado n , $P(z) := a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$, es una función entera. En efecto; basta ver que z^n lo es. De la identidad

$$(10) \quad z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1})$$

resulta que $\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} n z_0^{n-1}$. Es decir,

$$(11) \quad \frac{dz^n}{dz} = n z^{n-1}.$$

Un teorema de Gauss (que demostraremos más adelante) afirma que en a lo sumo n puntos de \mathbb{C} : $P(z) = 0$. Sean z_1, \dots, z_m . Si Q es otro polinomio, la función racional $Q(z)/P(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$.

9. LOS SIMBOLOS O Y o . Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones complejas definidas en $U = B_r(a) \setminus \{a\}$. Diremos que $f(z) = O(g(z))$ para $z \rightarrow a$ si existe una constante M tal que $|f(z)| \leq M|g(z)|$ para $|z - a| < r_0$, $r_0 \leq r$; y que $f(z) = o(g(z))$ si

para todo $\epsilon > 0$ existe $r_0(\epsilon)$ tal que $|f(z)| \leq \epsilon |g(z)|$ cuando $|z - a| < r_0(\epsilon)$.

Así tenemos, para $(x,y) \rightarrow 0$: $e^{ix} = o(1)$, $z^2 = o(z)$, $z = o(1)$,

$|z|^2 = o(\sqrt{x^2 + y^2}) = o(|z|)$. En particular, si f está definida en un entorno

de z y es derivable en ese punto, o sea, existe el $\lim_{0 \neq \Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = l$, entonces

$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = l \cdot \Delta z + o(1) \Delta z = l \cdot \Delta z + o(\Delta z)$. Si el incremento de f en z verifica esta relación entonces $l = f'(z)$.

Supongamos que la función compuesta $w(z) = f(\zeta(z))$ esté definida en un entorno de z y existan $\zeta'(z)$, $f'(\zeta(z))$. Entonces $\Delta w = f(\zeta(z + \Delta z)) - f(\zeta(z)) =$

$f'(\zeta(z)) \cdot \Delta \zeta + o(1) \Delta \zeta = f'(\zeta(z))(\zeta'(z) \Delta z + o(\Delta z)) + o(1) \Delta z =$

$= f'(\zeta(z)) \cdot \zeta'(z) \Delta z + o(\Delta z)$, y por tanto, $w'(z) = f'(\zeta(z)) \cdot \zeta'(z)$, (cf. (9)).

10. LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN. Sea f diferenciable en $z = (x,y) \in D_f$ abierto. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, u y v reales. Si $\Delta z = h$ real:

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \rightarrow u_x + iv_x = f'(z)$$

Si $\Delta z = ih$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{ih} + i \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{ih} \rightarrow -iu_y + v_y = f'(z).$$

Entonces

$$(12) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{en } z.$$

APLICACION. Sea $f(z)$ holomorfa en $B_r(a)$ con $f'(z) = 0$ allí. Entonces

$u_x = v_x = 0$, y por tanto, $u_y = v_y = 0$ en B_r . Luego, u es constante y v también, es decir, $f(z)$ es igual a una constante.

Vale el

TEOREMA 1. Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ definida en un entorno de $z = (x,y)$, u y v reales. f tiene derivada en z si y sólo si u y v son diferenciables en (x,y) y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann (12). Es decir,

$$(13) \quad \Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = M \Delta x + N \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),$$

$$(14) \quad \Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = M' \Delta x + N' \Delta y + o(|\Delta z|),$$

$$(15) \quad M = N', \quad N = -M'.$$

En esta situación $f'(z) = f'_x(x,y) = -if'_y(x,y) = M + iM' = \frac{N + iN'}{i}$, y

$$(16) \quad \Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(\Delta z).$$

* 11. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. (16) expresa la diferenciabilidad de f en z que es equivalente a la derivabilidad de f ; (13) y (14) la diferenciabilidad de u y v . En el caso de varias variables la diferenciabilidad implica (pero no es equivalente a) la continuidad de la función y la existencia de las derivadas parciales en el punto.

a) Diferenciabilidad de $f \Rightarrow$ diferenciabilidad de u y v :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta u + i\Delta v = f'(z)\Delta z + o(\Delta z) = (M - iN)\Delta z + o(\Delta z) = \\ &= M\Delta x + N\Delta y + i(-N\Delta x + M\Delta y) + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}). \end{aligned}$$

De aquí sigue (15) que son las condiciones de Cauchy-Riemann.

b) Diferenciabilidad de u y v + condiciones de C-R \Rightarrow derivabilidad de f :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta u + i\Delta v = ((13),(14),(15)) = \\ &= M\Delta x - M'\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) + i(M'\Delta x + M\Delta y) + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) = \\ &= (M + iM')(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|), \quad \text{qed..} \end{aligned}$$

12. SERIES DE POTENCIAS. Sea $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$:

TEOREMA 2. a) $\sum a_n$ es absolutamente convergente si $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} < 1$ y absolutamente divergente si $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} > 1$.

b) Sea $a_n \neq 0$ para todo n . Si $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ entonces $\sum |a_n| < \infty$ y si

$$\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1, \quad \sum |a_n| = \infty.$$

DEMOSTRACION. a) es el criterio de Cauchy para la convergencia absoluta de series numéricas y b) es el criterio de D'Alembert. Este último es más débil que el anterior pero en general es más fácil de aplicar. Veamos a). Si

$\overline{\lim} |a_n|^{1/n} < 1$, existe $q \in (0,1)$ tal que $|a_n| < q^n$ para $n \geq n_0$ y por tanto

$\sum_{n_0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n_0}^{\infty} q^n < \infty$. Si $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} > 1$ entonces $|a_n| > 1$ para infinitos valores de n . Puede demostrarse b) recurriendo a las siguientes desigualdades

$$(17) \quad \overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq \overline{\lim} |a_n|^{1/n} \geq \underline{\lim} |a_n|^{1/n} \geq \underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

En lugar de demostrar (17) probaremos directamente el criterio de d'Alembert.

Si existe q tal que $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1$ entonces $|a_{n+1}| < q \cdot |a_n|$ desde un n_0 en

adelante y por tanto $\sum_{n_0}^{\infty} |a_j| \leq |a_{n_0}| \sum_0^{\infty} q^n < \infty$. Si $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ entonces desde

un n_0 en adelante vale $|a_{n+1}| > |a_n|$ y la serie diverge absolutamente, qed.

Una serie de potencias es una serie de la forma

$$(18) \quad \sum_0^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}.$$

z es una variable y nos preguntamos para qué valores de z converge la serie.

Aplicando el criterio de Cauchy vemos que converge absolutamente si

$\overline{\lim} |a_n z^n|^{1/n} = \overline{\lim} |a_n|^{1/n} \cdot |z| < 1$, y diverge si $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} \cdot |z| > 1$. O sea,

converge si

$$|z| < \frac{1}{\overline{\lim} |a_n|^{1/n}} = \underline{\lim} \frac{1}{|a_n|^{1/n}} = \underline{\lim} |a_n|^{-1/n} =: R,$$

y diverge si

$$|z| > \frac{1}{\underline{\lim} |a_n|^{1/n}} = F.$$

Tenemos entonces el

TEOREMA 3 (Cauchy-Hadamard). Sea $R = \underline{\lim} |a_n|^{-1/n}$. La serie (18) converge absolutamente si $|z| < R$ y diverge si $|z| > R$.

R es el llamado **radio de convergencia de la serie de potencias**. En rigor ésta debería llamarse serie de potencias alrededor del origen. Una serie de potencias alrededor del punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ y el mayor círculo alrededor de z_0 donde ésta converge tiene radio R . Si en un punto z , $\sum |a_n| |z - z_0|^n = \infty$ entonces $|z - z_0| \geq R$ y si $|z - z_0| > R$ seguramente esta última serie diverge.

Para determinar el radio de convergencia es cómodo aplicar, cuando es posible, la siguiente regla práctica.

TEOREMA 4. Sea $a_n \neq 0$, $n \geq n_0$. Si $|a_n/a_{n+1}| \rightarrow R$ entonces R es el radio de convergencia de $\sum a_n z^n$.

DEMOSTRACION. Sea $r = \lim |a_{n+1}/a_n|$ y $z \neq 0$. Entonces existe el límite de $|a_{n+1} z^{n+1}|/|a_n z^n|$ y es $r|z|$. Luego habrá convergencia absoluta si (y sólo si $r|z| \neq 1$) $r|z| < 1$, (T.2,b)). Luego $1/r = R$, qed.
Obsérvese que el argumento es correcto aún para $r = \infty$.

La serie de potencias $\sum n^n z^n$ tiene radio de convergencia $R = 0$; $\sum 2^{-n^2} z^n$ tiene radio $R = \infty$; $\sum z^n$ tiene radio igual a uno. Si $S_n := 1 + z + \dots + z^n$ vale $zS_n = z + \dots + z^{n+1}$ y resulta $(1 - z)S_n = 1 - z^{n+1}$. Por tanto

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_0^{\infty} z^j = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

* 13. LA DISTANCIA CORDAL. En ocasiones es conveniente introducir en el plano complejo una métrica d equivalente a la euclídea, es decir, tal que $|z_n - z_0| \rightarrow 0$ si y sólo si $d(z_n, z_0) \rightarrow 0$, respecto de la cual pueda hablarse de la distancia de un punto al infinito. Una métrica que responde a estas exigencias es

$$(19) \quad d(z_1, z_2) = \arctan \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + \bar{z}_1 z_2} \right|,$$

para la cual valen

$$(20) \quad 0 \leq d(z_1, z_2) \leq \pi/2,$$

$$(21) \quad d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1); \quad d(z_1, z_2) = 0 \text{ si } z_1 = z_2,$$

$$(22) \quad d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3),$$

con $z_i \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Si $z_2 = \infty \neq z_1$, $d(z_1, z_2) = \arctan 1/|z_1|$. A continuación explicamos el significado de $\phi = d(z_1, z_2)$, sin entrar en todos los detalles.

Consideremos una esfera σ en \mathbb{R}^3 con centro $C = (0,0,1/2)$ de radio $1/2$. Esta será tangente al plano $C = \{(x,y)\}$. Si proyectamos σ sobre C desde $N = (0,0,1)$ obtenemos una correspondencia, que también podemos llamar estereográfica, que tiene las mismas propiedades que la descrita en el párrafo 4. Las relaciones (7) deberán alterarse de acuerdo a la nueva situación aunque todavía el ecuador de σ se corresponderá con la circunferencia unitaria en C , el hemisferio norte de σ con el exterior de esta circunferencia, N con ∞ , etc..

La distancia cordal entre z_1 y z_2 puede

elegirse igual a $|A - B|$ (ver fig.3).

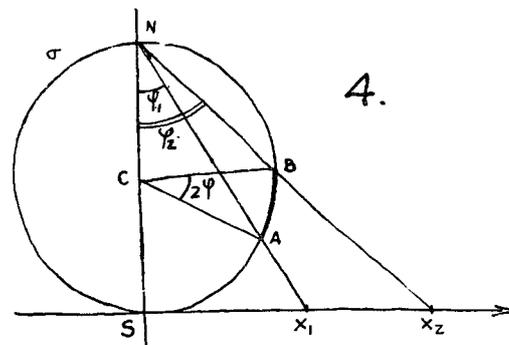
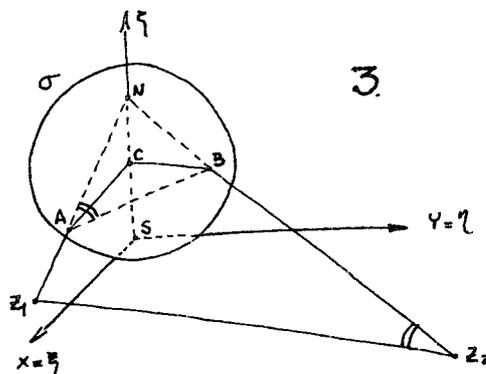
Una métrica equivalente a esta viene dada por el ángulo \hat{ACB} medido en radianes. La fórmula (19) define otra métrica equivalente:

$$(23) \quad d(z_1, z_2) = \phi = \frac{\hat{ACB}}{2} =$$

= lg del arco de círculo máximo \widehat{AB} .

En efecto, si $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, se tiene (veáse fig. (4):

$$(24) \quad \begin{aligned} \phi &= \phi_2 - \phi_1 = \\ &= \arctan \left| \frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2} \right| = \end{aligned}$$



$$= \text{arc tg} \left| \frac{z_2 - z_1}{1 + \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

Se puede demostrar que las rotaciones en σ alrededor de C se traducen en transformaciones de la forma

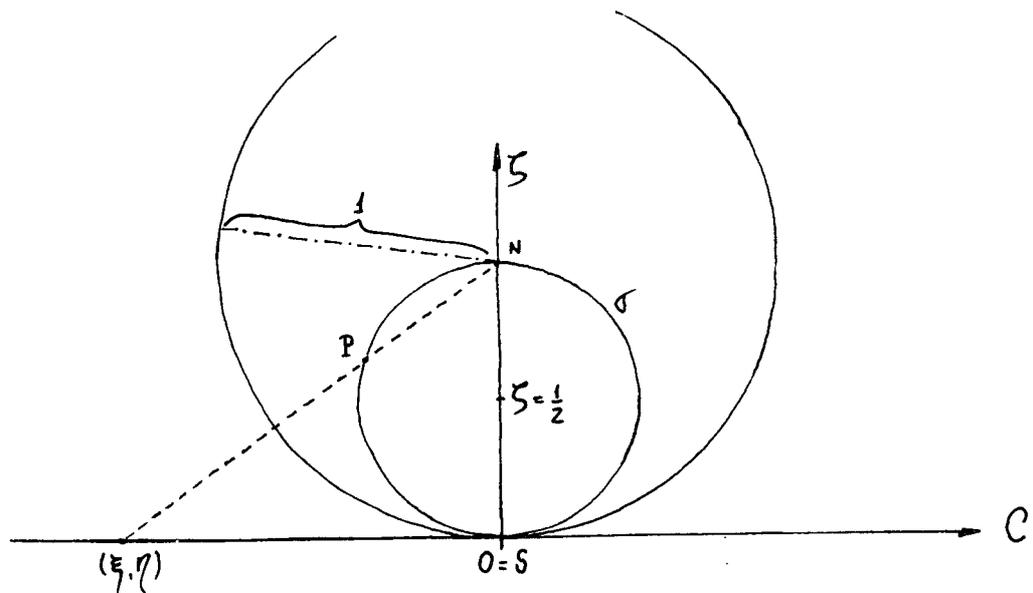
$$(25) \quad w = \frac{Az + B}{-\bar{B}z + \bar{A}}, \quad A\bar{A} + B\bar{B} = 1.$$

Para éstas es fácil verificar directamente que forman un grupo y que vale

$$\left| \frac{w_1 - w_2}{1 + \bar{w}_1 w_2} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

(19) es entonces consecuencia de (24). La desigualdad triangular (22) se prueba fácilmente utilizando en lugar de ϕ el ángulo $2\phi = z_1 \hat{C} z_2$.

NB. En la inversión de R^3 respecto de $B_1(N)$ la superficie σ se transforma en el plano $C = \{(\xi, \eta)\}$ y puntos homólogos en esta correspondencia son también homólogos respecto de la proyección estereográfica recién descrita.



CAPITULO 2

Integral curvilínea. Teoremas de Cauchy y Morera. Fórmula de Cauchy. Las funciones elementales. La función z^α . Convergencia uniforme de funciones holomorfas en una región. Desarrollo en serie de potencias: el teorema de Taylor. Los ceros de una función holomorfa. Determinación de una función holomorfa por uno de sus elementos analíticos. Funciones armónicas. El núcleo de Poisson y su conjugado en el círculo unitario. La transformación conforme. Lema de Schwarz.

1. LA INTEGRAL DE CAUCHY. Sea S un **segmento** de extremo inicial z_0 y final z : $[z_0, z]$, y f una función compleja continua sobre S . Sea $\tau = \{z_0, z_1, \dots, z_n = z\}$ una partición (ordenada) de S donde z_r sigue a z_{r-1} al recorrer S de z_0 a z . Sea ξ_r un punto cualquiera del segmento $[z_{r-1}, z_r]$. Existe un número I tal que dado $\epsilon > 0$

$$\left| \sum_1^n f(\xi_r)(z_r - z_{r-1}) - I \right| < \epsilon$$

si $\max |z_r - z_{r-1}| < \eta(\epsilon)$. En efecto, esto es una consecuencia inmediata de la continuidad uniforme de f . Definimos

$$\int_S f(z) dz := \lim_{\max |\Delta z| \rightarrow 0} \sum_1^n f(\xi_r)(z_r - z_{r-1}) = I.$$

Sean $w \in S$ y $S_1 = [z_0, w]$, $S_2 = [w, z]$. Valen las siguientes propiedades para f y g continuas sobre S , $a, b \in \mathbb{C}$, $-S = [z, z_0]$:

$$(1) \quad \int_S (af + bg) dz = a \int_S f dz + b \int_S g dz,$$

$$(2) \quad \int_{-S} f dz = - \int_S f dz,$$

$$(3) \quad \int_S f dz = \int_{S_1} f dz + \int_{S_2} f dz.$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas sobre S que converja uniformemente a f (recordemos que esto significa que dado $\epsilon > 0$ existe $m = m(\epsilon)$ tal que $|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$ si $n \geq m$ cualquiera sea $z \in S$). Entonces

$$(4) \quad \int_S f_n(z) dz \rightarrow \int_S f(z) dz.$$

Sea P una **poligonal**: $P = \sum_1^N S_i$, donde los S_i son los segmentos consecutivos que la forman. Definimos para $f(z)$ continua en P :

$$\int_P f(z) dz := \sum_1^N \int_{S_i} f dz.$$

Obviamente las propiedades (1) - (4) valen para \int_P . Designemos con $|S|$ la longitud de S y con $|P| := \sum |S_i|$. Es fácil ver que

$$(5) \quad \left| \int_P f(z) dz \right| \leq M \cdot |P|, \quad M = \sup_{z \in P} |f(z)|.$$

Si $z_j \rightarrow z$ en P entonces $|f(z_j)| \rightarrow |f(z)|$ pues $||f(z_j)| - |f(z)|| \leq |f(z_j) - f(z)|$, y $|f(z)|$ es continua en P . Como P es un conjunto compacto, la demostración conocida en el caso real se aplica para demostrar que existe un punto $p \in P$ tal que $|f(p)| = \sup\{|f(z)| : z \in P\}$, y (5) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\left| \int_P f dz \right| \leq \left(\max_{z \in P} |f(z)| \right) \times \text{longitud de } P.$$

EJEMPLOS. Sean z_0 y Z los extremos inicial y final de P . Entonces:

$$\int_P 1 dz = \int_P dz = Z - z_0,$$

$$\int_P z dz = \lim \sum_1^N \frac{z_r + z_{r-1}}{2} (z_r - z_{r-1}) = \frac{1}{2} \sum_1^N (z_r^2 - z_{r-1}^2) = \frac{1}{2}(Z^2 - z_0^2).$$

2. LA INTEGRAL CURVILINEA. Llamaremos **arco suave** a un arco L de Jordan, definido por funciones $x(t)$, $y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, con x, y continuas allí, continuamente diferenciables en $(0,1)$, y tal que $\int_0^1 (|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|) dt < \infty$. La siguiente relación entre números no negativos

$$(6) \quad \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b \leq 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

permite demostrar que la finitud de la última integral equivale a la de

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \text{ En este caso } \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \text{ es la longitud del arco } L.$$

Llamaremos **curva suave** a la suma de un número finito de arcos suaves consecutivos. Sea $f(z)$ continua sobre el arco suave L . La integral curvilínea de f sobre L es

$$\begin{aligned} \oint_L f(z) dz &:= \int_0^1 f(x(t) + iy(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt = \\ &= \int_0^1 [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)] dt = \\ &= \oint_L u dx - v dy + i \oint_L v dx + u dy, \quad u = \Re f, v = \Im f. \end{aligned}$$

Supongamos que entre $0 \leq t \leq 1$ y $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$ se establece una correspondencia biunívoca y bicontinua $\tau = \tau(t)$, continuamente diferenciable en el interior de esos intervalos en ambos sentidos y tal que $\tau(0) = \tau_0$, $\tau(1) = \tau_1$. Entonces

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(x(\tau) + iy(\tau))(\dot{x}(\tau) + i\dot{y}(\tau)) d\tau = \int_0^1 f(x(t) + iy(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt$$

donde $x(\tau) + iy(\tau) = x(\tau(t)) + iy(\tau(t)) = X(t) + iY(t)$ describen al arco L . Esto se expresa diciendo que **la integral curvilínea es independiente de la parametrización del arco**. Valen

$$(7) \quad \oint_L (af + bg) dz = a \oint_L f dz + b \oint_L g dz, \quad a, b \in \mathbb{C}; f, g \text{ continuas, } L \text{ arco suave,}$$

$$(8) \quad \oint_L f dz = -\oint_{-L} f dz, \quad -L = \text{arco } L \text{ recorrido en sentido opuesto,}$$

$$(9) \quad \oint_{L_1+L_2} f dz = \oint_{L_1} f dz + \oint_{L_2} f dz, \text{ si } L_1 + L_2 \text{ es un arco suave,}$$

(10) si $f_n(z)$ converge uniformemente a f , todas continuas, entonces

$$\oint_L f_n dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \oint_L f dz.$$

Si C es una curva suave, $C = L_1 + \dots + L_N$, definimos $\oint_C f(z) dz := \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} f(z) dz$,

y para la integral curvilínea sobre C valen las propiedades (7) - (10).

Sea P una poligonal parametrizada con el parámetro longitud de arco. Se tiene (demostrarlo):

$$\int_P f(z) dz = \oint_P f(z) dz.$$

Es decir, el concepto de integral curvilínea es una extensión del concepto de integral de Cauchy. Por esta razón, de ahora en adelante, en lugar de \oint_C escribiremos simplemente \int_C . La desigualdad (5) se demuestra ahora así:

$$(11) \quad \left| \int_L f(z) dz \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z(t))| \cdot \int_0^1 |\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)| dt = \\ = \max |f| \cdot \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \max |f| \cdot \text{long}(L),$$

desigualdad que se extiende en forma obvia a curvas suaves.

Sea $0 \leq t \leq 1$, $L = \{(x(t), y(t))\}$ y

$$(12) \quad d := \int_0^t (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}(t) dt.$$

d es el **parámetro longitud de arco**. Para parametrizar con él a L es suficiente

exigir que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ en $(0,1)$; así, cuando t va de 0 a 1, d recorre el segmento $[0, \text{longitud de } L]$ en forma **estrictamente** monótona con derivada positiva en $0 < t < 1$.

DEFINICION 1. Llamaremos **arco regular** a un arco de Jordan L definido por funciones continuas $x(t), y(t), 0 \leq t \leq 1$, con derivadas continuas $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$, en $0 < t < 1$, tales que $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(t)$ sea (finita y) **positiva** y

$$l(L) := \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt < \infty.$$

$l(L)$ es la longitud del arco L . Una **curva regular** será una suma finita de arcos regulares consecutivos.

DEFINICION 2. Una curva de Jordan $J = \{z(t): 0 \leq t \leq 1\}$ se dice recorrida en **sentido positivo** si al pasar t de 0 a 1 el radio vector que une un punto interior a J con $(x(t), y(t))$ barre un ángulo de $+2\pi$ radianes. Al sentido opuesto se lo llamará **negativo**.

Por $\int_J f(z) dz$ entenderemos la integral de f sobre el arco J recorrido en sentido positivo.

*3. APROXIMACION POR POLIGONALES. Sea L un arco regular y $f(z)$ una función uniformemente continua en un entorno A de L , vg. $A = \bigcup \{B_r(z): z \in L\}$, r fijo.

Sea $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_N = 1\}$ una partición π de $[0,1]$ tal que la poligonal P formada por los puntos $\{z(t_i)\}$ esté contenida en A . Esto ocurre siempre que el módulo $M(\pi)$ de la partición, $M = \sup (t_i - t_{i-1})$, sea bastante pequeño. Sea τ_r un punto en el arco de L definido por los extremos $z_r = z(t_r), z_{r+1} = z(t_{r+1})$ y ζ_r un punto del segmento que une esos puntos. Si M es bastante pequeño entonces la longitud de cada arco (z_r, z_{r+1}) sobre L es menor que η dado y

$$|z_r - z_{r+1}| < \eta \text{ pues } \int_{t_r}^{t_{r+1}} (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt = z_{r+1} - z_r. \text{ Además, todo punto } z \text{ del}$$

$$\text{arco: } z = \int_{t_r}^t (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt + z_r, t_r \leq t < t_{r+1}, \text{ dista menos que } \eta \text{ de}$$

z_r . Si M es bastante pequeño y también lo es η , entonces f oscila en $B_\eta(z_r)$

menos que ϵ . Además $l(P) = \sum |z_{r+1} - z_r| \leq \int_0^1 |\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)| dt = l(L)$, (y se puede demostrar que $l(P) \rightarrow l(L)$). Tenemos entonces (con ζ_r en el segmento $[z_r, z_{r+1}]$),

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_0^1 f(x(t) + iy(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) dt = \\ &= \sum f(z(\tau_r))(z_{r+1} - z_r) + O(l(L)\epsilon) = \sum f(\zeta_r) \cdot \Delta z_r + O(l(L)\epsilon) = \\ &= \int_P f(z) dz + O(l(L)\epsilon) = \int_P f(z) dz + O(\epsilon). \end{aligned}$$

En consecuencia, $\int_P f(z) dz \rightarrow \int_L f(z) dz$ si $M(\pi) \rightarrow 0$.

4. CALCULO DE ALGUNAS INTEGRALES. Sea L un arco regular que une z_0 con Z , n entero no negativo:

$$\begin{aligned} (13) \quad \int_L z^n dz &= \int_0^1 (x + iy)^n (\dot{x} + i\dot{y}) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{(x + iy)^{n+1}}{n+1} dt = \frac{(x + iy)^{n+1}(t)}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{Z^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Si $0 \notin L$ y n es entero ≤ -2 , (13) vale y su demostración es todavía correcta. Sea $C = \{a + R \cos t + i R \sin t : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ una circunferencia de centro a , radio R , recorrida en sentido positivo. Entonces

$$(14) \quad \int_C \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin t + i R \cos t}{R \cos t + i R \sin t} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Sea L un segmento de longitud 2 por cuyo centro T pasa perpendicularmente una semirrecta con extremo en O . Sean $1/p$ la distancia de T a O , $0 < p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_{\alpha L} \frac{dz}{z} = \int_{-1}^1 \frac{ip dy}{1 + ipy} = ip \int_{-1}^1 \frac{1 - ipy}{1 + p^2 y^2} dy =$$

$$= ip \int_{-1}^1 \frac{dy}{1+p^2 y^2} = 2i \int_0^p \frac{ds}{1+s^2} = 2i \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \Big|_0^p =$$

$$= 2i \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \text{ pues } (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)' = (1-x^2)^{-1/2}.$$

Si $p = 1$, $\int_L \frac{dz}{z} = \pi i/2$. Luego, la integral de $1/z$ sobre un cuadrado de lado 2 con centro en 0, y por lo tanto sobre cualquier cuadrado con centro en 0, es igual a $2\pi i$. Entonces, si Q es un cuadrado con centro a :

$$(15) \quad \int_Q \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

EJERCICIO. Deducir de (13) la fórmula

$$(13') \quad \frac{1}{(w-b)^n} - \frac{1}{(w-a)^n} = \int_L \frac{n}{(w-t)^{n+1}} dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

donde L es un arco regular que une a con b y que no pasa por w .

5. REGULARIDAD DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA. Nuestro objetivo es ahora mostrar que la derivada de una función holomorfa es también una función holomorfa. Para ello recurriremos al siguiente **teorema elemental de Cauchy**:

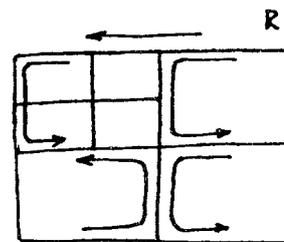
LEMA 1. *Sea R un rectángulo totalmente contenido en un dominio simplemente conexo A donde $f(z)$ es holomorfa. Entonces*

$$\int_R f(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACION (según Goursat). Dividiendo el rectángulo en 4 rectángulos congruentes $R^{(1)}, \dots, R^{(4)}$ e integrando sobre ellos obtenemos

$$\int_R f(z) dz =$$

$$\left(\int_{R^{(1)}} + \int_{R^{(2)}} + \int_{R^{(3)}} + \int_{R^{(4)}} \right) f(z) dz$$



1.

y por tanto, para cierto $R_1 = R^{(1)}$, $|\int_R| \leq 4 |\int_{R_1}|$. Repitiendo el proceso, esta

vez sobre R^1 , obtenemos $|\int_R| \leq 4^2 |\int_{R_2}|$, y en general

$$|\int_R f(z) dz| \leq 4^n |\int_{R_n} f(z) dz| .$$

Sea s el perímetro de R . Entonces, el perímetro de R_n es $s_n = s/2^n$. La familia $\{R_j\}$ es un encaje de rectángulos que determina un punto $a \in R$. Si R_n es de diámetro bastante pequeño se tiene (cf. (13)):

$$(16) \quad |\psi(z)| = |f(z) - f(a) - f'(a)(z - a)| < \epsilon |z - a|, \quad z \in R_n,$$

$$\begin{aligned} \int_{R_n} f(z) dz &= f(a) \int_{R_n} dz - af'(a) \int_{R_n} dz + f'(a) \int_{R_n} z dz + \int_{R_n} \psi(z) dz = \\ &= 0 + 0 + 0 + \int_{R_n} \psi(z) dz. \end{aligned}$$

Luego,

$$|\int_{R_n} f(z) dz| \leq \epsilon \cdot s_n^2 = \epsilon (s/2^n)^2 = s^2 \cdot \epsilon / 4^n,$$

$$|\int_R f dz| \leq 4^n \cdot |\int_{R_n} f| \leq s^2 \epsilon, \quad \text{QED.}$$

El teorema siguiente presenta la llamada fórmula de Cauchy en su forma elemental.

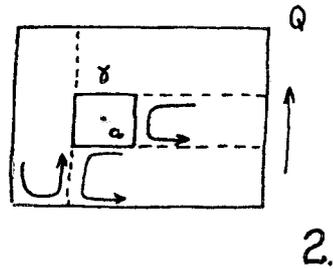
LEMA 2. Sea Q un cuadrado contenido en el dominio simplemente conexo A donde $f(z)$ es holomorfa. Entonces, si a es interior a Q ,

$$(17) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

DEMOSTRACION. Sea γ un cuadrado con centro a contenido en Q tal que si $z \in \gamma$

vale (16) para un $\epsilon > 0$ dado. Recurriendo al lema 1 se ve que (cf. figura)

$$\int_Q \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz .$$



Pues $f(z)/(z-a)$ es holomorfa fuera de $z = a$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz &= f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z-a} + f'(a) \int_\gamma dz + \int_\gamma \frac{\psi(z)}{z-a} dz = (\text{cf. (15)}) = \\ &= 2\pi i f(a) + 0 + \eta \text{ donde } |\eta| \leq \epsilon \cdot l(\gamma). \end{aligned}$$

Entonces, para $\gamma \rightarrow \{a\}$, $\eta \rightarrow 0$ y $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz \rightarrow 2\pi i f(a)$, qed..

TEOREMA 1. Sea $f(z)$ holomorfa en un punto a . Entonces existe $f^{(n)}(a) = ((\frac{d}{dz})^n f)(a)$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. O sea, una función holomorfa es indefinidamente diferenciable.

DEMOSTRACION. Sea $A = B_r(a)$ contenido en el abierto donde $f(z)$ es holomorfa, sea Q un cuadrado contenido en A y conteniendo en su interior al punto a . Derivando (17) bajo el signo integral se obtiene

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \\ &\vdots \\ (18) \quad f^{(n)}(a) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_Q \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \\ &\vdots \end{aligned}$$

El próximo lema nos muestra que es legítimo derivar bajo el signo integral para obtener (18), QED.

COROLARIO. Sea $f(z)$ holomorfa en un abierto B . Entonces su parte real u y su

parte imaginaria v son funciones armónicas: $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\Delta v = 0$.

DEMOSTRACION. Sabemos que $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Además existen $u_{xx} = v_{yx}$, $u_{yy} = -v_{xy}$ y son continuas (T.1). Del teorema de Bonnet (*), o Schwarz, se deduce que $v_{yx} = v_{xy}$, y por tanto $u_{xx} + u_{yy} = 0$, QED.

LEMA 3. Sea L un arco regular y A un dominio simplemente conexo y sea $G(u) = \int_L F(z, u) dz$, donde $F(z, u)$ es continua en (z, u) , $z \in L$, $u \in A$. Si F'_u existe y es continua en $(z, u) \in L \times A$ entonces

$$\frac{d}{du} G(u) = \frac{d}{du} \int_L F(z, u) dz = \int_L \frac{\partial F}{\partial u}(z, u) dz.$$

DEMOSTRACION. Esta demostración puede entenderse en toda su generalidad al finalizar el siguiente párrafo 6. Para la verificación de (18) basta con poner en ella $F(z, u) = \frac{f(z)}{(z - u)^n}$, $n \geq 1$, y recordar la fórmula (13').

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G}{\Delta u} &= \int_L \frac{F(z, u + \Delta u) - F(z, u)}{\Delta u} dz = \int_L \left(\frac{1}{\Delta u} \int_u^{u + \Delta u} F'_u(z, t) dt \right) dz = \\ &= \int_L \left\{ \frac{1}{\Delta u} \int_u^{u + \Delta u} (F'_u(z, u) + \phi(z, t)) dt \right\} dz = \int_L F'_u(z, u) dz + O(\epsilon \cdot l(L)), \end{aligned}$$

pues si $t \in [u, u + \Delta u]$ y Δu es bastante pequeño entonces

$|\phi(z, u)| = |F'_u(z, u) - F'_u(z, t)| \leq \epsilon$ para todo $z \in L$ (demostrarlo). Luego,

$$\frac{\Delta G}{\Delta u} \xrightarrow{\Delta u \rightarrow 0} \int_L F'_u(z, u) dz, \quad \text{QED.}$$

6. TEOREMA DE CAUCHY Y FORMULA DE CAUCHY.

(*) Existen v_{xy} , v_{yx} en $U \ni (x_0, y_0)$, continuas en $(x_0, y_0) \Rightarrow v_{xy}(x_0, y_0) = v_{yx}(x_0, y_0)$. El corolario también sigue de la fórmula $f'(z) = f_x(x, y) = -i f_y(x, y)$ pues este implica que $f''(z) = f_{xx}(x, y) = -f_{yy}(x, y)$.

TEOREMA 2. Sea f holomorfa en el dominio A y J una curva de Jordan regular contenida en A junto con su interior. Entonces

$$\int_J f(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACION. Sea D el interior de J . Tenemos

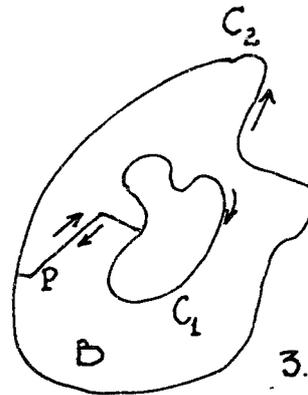
$$\begin{aligned} \int_J f(z) dz &= \int_J u dx - v dy + i \int_J v dx + u dy = \\ &= \iint_D (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

El teorema de Gauss-Green es aplicable pues J es un arco regular y por el teorema 1, u_x, u_y, v_x, v_y son continuas en A . Como f verifica las condiciones de Cauchy-Riemann los dos últimos integrandos son idénticamente iguales a cero, QED.

APLICACIONES. 1) Deformación del contorno. Si C_1 y C_2 son dos curvas de Jordan regulares, con C_1 contenida en el interior de C_2 , y $f(z)$ es una función holomorfa sobre C_1, C_2 , y en el dominio B contenido entre ambas curvas, entonces

$$(19) \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

Existe una poligonal P que une C_2 con C_1 y contenida en B salvo por sus extremos. Del teorema 2 se deduce que $\int_{C_2+P-C_1-P} f(z) dz = 0$,



(suministrar los detalles), y por tanto (19).

2) TEOREMA 3. Sea $f(z)$ holomorfa sobre la curva de Jordan J y en su interior I . Entonces, si $a \in I$,

$$(20) \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_J \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

DEMOSTRACION. Se obtienen de (18) por deformación del contorno, QED.

COROLARIO (Teorema de Liouville). Sea $f(z)$ entera (i.e. holomorfa en \mathbb{C}). Entonces $f(z)$ es igual a una constante si es acotada.

DEMOSTRACION. De (20) obtenemos

$$|f'(a)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \right| \leq \frac{\sup \{|f(z)| : |z-a|=r\}}{r}$$

que tiende a 0 para $r \rightarrow \infty$. Luego, $f' \equiv 0$, y por tanto, $f \equiv$ constante, QED.

3) Primitiva de una función holomorfa. Sea A un dominio simplemente conexo y f una función holomorfa en A . Sean L_1 y L_2 dos arcos regulares en A que unen z_0 con Z . Entonces

$$(21) \quad \int_{L_1} f(z) dz = \int_{L_2} f(z) dz.$$

Veámoslo para poligonales. Si L_1 y L_2 son poligonales entonces $\int_{P_1-P_2} f(z) dz = 0$

pues $P_1 - P_2$ es una poligonal cerrada que encierra un número finito de regiones a las que puede aplicarse el T.2. El caso general se demuestra aplicando el teorema de aproximación por poligonales del párrafo 3. Puede entonces escribirse

$$(22) \quad F(Z) = \int_{z_0}^Z f(z) dz.$$

En este caso, $\frac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} = \frac{1}{\Delta Z} \int_Z^{Z+\Delta Z} f(z) dz$ donde podemos suponer que la

última integral se calcula sobre el segmento que une Z con $Z + \Delta Z$. Luego

$$\frac{\Delta F}{\Delta Z} = \frac{1}{\Delta Z} \int_Z^{Z+\Delta Z} (f(Z) + o(1)) dz \xrightarrow{\Delta Z \rightarrow 0} f(Z). \text{ O sea, } F'(Z) = f(Z) \text{ y } F \text{ es una}$$

primitiva de f . Si $G(z)$ es holomorfa en A y $G'(z) = f(z)$ entonces $(F - G)' = 0$ en A , y por tanto, $F - G$ es una constante. Luego,

$$(23) \quad \int_{z_0}^Z f'(z) dz = f(Z) - f(z_0),$$

es decir, tenemos en (23) al **teorema de Barrow-Newton**.

4) Sea también g holomorfa en A . Vale entonces la fórmula de **integración por partes**

$$\int_{z_0}^z f(w) g'(w) dw = f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0) - \int_{z_0}^z f'(w) g(w) dw.$$

7. RECÍPROCA DEL TEOREMA DE CAUCHY. CONVERGENCIA CASI UNIFORME. Las ideas recién presentadas pueden utilizarse para demostrar el siguiente resultado debido a **Morera**.

TEOREMA 4. *Sea f continua en A dominio simplemente conexo. Si para toda curva de Jordan regular contenida en A , J , se tiene $\int_J f dz = 0$ entonces f es holomorfa.*

DEMOSTRACION. Una función $F(z)$ queda definida en A por $F(z) = \int_{z_0}^z f(\tau) d\tau$,

$z_0, z \in A$. Sólo resta observar que la demostración con la que se probó la diferenciabilidad de (22) sólo usó la continuidad del integrando. Entonces, $F'(z) = f(z)$. El resultado sigue ahora del T.1, QED.

Si $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto B diremos que $f_n(z)$ converge **casi uniformemente** a $f(z)$ si $f_n(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente sobre todo compacto K contenido en B . Denotaremos la convergencia uniforme con un punto: $f_n \xrightarrow{K} f$ y la casi uniforme así: $f_n \xrightarrow{B} f$. Recordemos que $f_n \xrightarrow{B} f$ sobre

K si para todo $\epsilon > 0$ existe $m = m(\epsilon)$ tal que $n \geq m$ implica que para todo $z \in K$, $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$. El criterio de convergencia uniforme es ahora: para todo $\epsilon > 0$ existe $m = m(\epsilon)$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$ y $z \in K$, $|f_{m+p}(z) - f_m(z)| < \epsilon$. El límite uniforme de funciones continuas es continua. En efecto, si $n \geq m(\epsilon)$,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| + |f_n(w) - f(w)| \leq \\ &\leq 2\epsilon + |f_n(z) - f_n(w)|. \end{aligned}$$

Fijando n resulta para $|z - w| < \eta = \eta(\epsilon, n)$: $|f(z) - f(w)| \leq 3\epsilon$, QED.

TEOREMA 5. Sea $\{f_n(z)\}$ una sucesión de funciones holomorfas en A dominio simplemente conexo. Entonces

$$f_n \xrightarrow{z} f \Rightarrow f \text{ holomorfa.}$$

DEMOSTRACION. Sea J una curva de Jordan regular contenida en A. Tenemos

$$0 = \int_J f_n(z) dz \rightarrow \int_J f(z) dz. \text{ Y el teorema sigue del T.4, QED.}$$

COROLARIO. Bajo las hipótesis del T.5 vale también que

$$(24) \quad f_n^{(j)} \xrightarrow{z} f^{(j)}.$$

En efecto, si $w \in B_r(a) \subset B_{3r}(a) \subset A$, entonces de

$$f_n^{(j)}(w) - f^{(j)}(w) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{|z-a|=2r} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-w)^{j+1}} dz,$$

$$\text{resulta } |f_n^{(j)}(w) - f^{(j)}(w)| \leq \frac{j! 4\pi r}{2\pi \cdot r^{j+1}} \sup \{|f_n(z) - f(z)| : |z-a| = 2r\} \rightarrow 0$$

para $n \rightarrow \infty$. O sea, $f_n^{(j)} \xrightarrow{z} f^{(j)}$ en $B_r(a)$. Una aplicación del teorema de Heine-Borel da cuenta de la convergencia uniforme sobre un compacto arbitrario.

TEOREMA 6. Si $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge absolutamente en $\{|z| < R\}$ entonces converge uniformemente en todo disco de radio $r < R$ y define una función holomorfa $f(z)$ en $B_R(0)$. La serie derivada $\sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$ también converge casi uniformemente en $B_R(0)$ y a $f'(z)$. Más aún, la serie y la serie derivada tienen el mismo radio de convergencia. Además $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, $n = 0, 1, \dots$.

DEMOSTRACION..Por hipótesis tenemos

$$\frac{1}{\overline{\lim} |a_n|^{1/n}} \geq R.$$

Luego, si $n \geq N(\epsilon)$, $(1 + \epsilon)^n > |a_n R^n|$. Por tanto, si $|z| \leq R(1 - \epsilon)/(1 + \epsilon) = r$:

$$\sum_N^{\infty} |a_n z^n| = \sum_N^{\infty} |a_n R^n| \left| \frac{z}{R} \right|^n \leq \sum_N^{\infty} (1 - \epsilon)^n < \infty,$$

y $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente en $\overline{B}_r(0)$.

La recíproca del radio de convergencia de la serie derivada es

$$\overline{\lim}^n \sqrt{(n+1)|a_{n+1}|} = \overline{\lim} |a_{n+1}|^{1/n} = \overline{\lim} (|a_{n+1}|^{1/n+1})^{\frac{n+1}{n}} = \overline{\lim} |a_{n+1}|^{1/n+1}$$

o sea, $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_0^{\infty} (n+1)a_{n+1} z^n$ tienen el mismo radio de convergencia. Si

$f_N(z) = \sum_0^N a_n z^n$ entonces $f_N'(z) \rightarrow f'(z)$ por (24). Derivando n veces a

$f(z) = \sum_0^{\infty} a_j z^j$ y calculando su valor en $z = 0$ obtenemos $f^{(n)}(0) = n! a_n$, QED.

COROLARIO. Si $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ tienen radios de convergencia R_a y R_b respectivamente y $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ en $B_r(0)$, $r \leq \inf(R_a, R_b)$, entonces representan la misma función holomorfa $f(z)$ y $R_a = R_b$, $a_n = b_n$ para todo n .

***8. EL TEOREMA FUERTE DE CAUCHY.** Se dice que un arco de Jordan L es rectificable si el supremo l de las longitudes de todas las poligonales inscritas es finito. Sea $L = \{(x(t), y(t)) : 0 \leq t \leq 1\}$. Si $d(\tau)$ coincide con ese supremo pero para el arco definido por $0 \leq t \leq \tau$, entonces $\sigma = d(\tau)$ es una función continua que crece de 0 a l con τ entre 0 y 1. Sea f continua sobre un arco de Jordan rectificable. Puede demostrarse que existe

$$I = \lim_{\max |\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{r=1}^n f(\zeta_r)(z_r - z_{r-1}), \quad \zeta_r \in \text{arco } z_{r-1}, z_r \text{ en } L.$$

Definimos $\int_L f(z) dz = I$. Sean $L \subset D$ dominio simplemente conexo y $f(z)$ holomorfa en D . Sea $P = \{z_0, \dots, z_n\}$ una poligonal en D formada por puntos de L con z_0 el punto inicial del arco y z_n el final y ordenados según el parámetro creciente. Entonces $\int_P f(z) dz = \int_L f(z) dz$. Vale el

TEOREMA 7. Si $f(z)$ es holomorfa en el dominio interior D de una curva de Jordan rectificable J y si f es continua en $\bar{D} = D \cup J$ entonces $\int_J f(z) dz = 0$.

9. LAS FUNCIONES ELEMENTALES. i) LA FUNCION EXPONENCIAL:

$$(25) \quad \exp z := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n!$$

es una función entera, pues el radio de convergencia de la serie es infinito, y verifica para x real: $\exp x = e^x$. Por eso definimos e^z como $\exp z$. Vale

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \text{ En efecto, observemos que } \frac{de^z}{dz} = e^z. \text{ Luego } 0 = \frac{d}{dz} (e^z \cdot e^{a-z})$$

implica $e^z \cdot e^{a-z} = A = \text{constante}$. Como $e^0 = 1$, $A = e^a$. Es decir, $e^z \cdot e^{a-z} = e^a$.

Haciendo $z_1 = a - z$, resulta $e^z \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1}$, qed.

En particular, $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$, y en consecuencia $e^z \neq 0$ para todo z .

ii) FUNCIONES TRIGONOMETRICAS: seno y coseno. Definimos

$$(26) \quad \text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{cos } z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

que coinciden con $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ para x real. Ambas series tienen radio de convergencia infinito y como pueden derivarse término a término obtenemos

$$(\text{sen } z)' = \text{cos } z, \quad (\text{cos } z)' = -\text{sen } z.$$

Es fácil verificar que

$$(27) \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Sumando tenemos: $e^{iz} = \operatorname{cos} z + i \operatorname{sen} z$. Luego, $e^{-iz} = \operatorname{cos}(-z) + i \operatorname{sen}(-z) = \operatorname{cos} z - i \operatorname{sen} z$ y multiplicando por e^{iz} : $1 = \operatorname{cos}^2 z + \operatorname{sen}^2 z$. Si $z = x + iy$:

$$(28) \quad e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\operatorname{cos} y + i \operatorname{sen} y).$$

De (27) se deducen las siguientes fórmulas ya conocidas en el caso de variables reales:

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{cos} z_2 + \operatorname{cos} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2,$$

$$\operatorname{cos}(z_1 + z_2) = \operatorname{cos} z_1 \cdot \operatorname{cos} z_2 - \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2.$$

iii) FUNCIONES HIPERBOLICAS: seno y coseno hiperbólico

$$(29) \quad \operatorname{sh} z = (e^z - e^{-z})/2, \quad \operatorname{ch} z = (e^z + e^{-z})/2.$$

Se verifican fácilmente las siguientes relaciones: $\operatorname{sh} iz = i \operatorname{sen} z$,

$$-i \operatorname{sen} iz = \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{cos} iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

iv) CEROS DE $\operatorname{SEN} z$ Y $\operatorname{COS} z$. Supongamos que $z = x + iy$, $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} iy + \operatorname{sen} iy \operatorname{cos} x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y + i \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sh} y = 0$. Como $\operatorname{ch} y \geq 1$, $\operatorname{sen} x = 0$ y en consecuencia $x = n\pi$. Entonces $\operatorname{sh} y = 0$, o sea, $y = 0$.

Conclusión: los ceros de $\operatorname{sen} z$ son reales e iguales a $n\pi$, $n = 0, \pm 1, \dots$.

Sea $\operatorname{cos} z = 0$. Entonces

$$0 = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} iy - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} iy = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

y de aquí resulta que los ceros de $\operatorname{cos} z$ son reales e iguales a $(n + \frac{1}{2})\pi$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

v) PERIODICIDAD DE e^z . Diremos que $p \in \mathbb{C}$ es un período para la función entera $F(z)$ si para todo z vale $F(z+p) = F(z)$. Obviamente si p es un período, np , $n \in \mathbb{Z}$, también lo es. Si $e^{z+p} = e^z = e^z \cdot e^p$ entonces $e^p = 1$. Sea $p = \alpha + i\beta$.

Luego, $e^{\alpha}(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = 1$. Necesariamente $|e^{\alpha}| = 1 = e^{\alpha}$, o sea, $\alpha = 0$. Entonces $\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta = 1$ que se satisface si y sólo si $\beta = 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \dots$. Conclusión: los períodos de e^z son los múltiplos enteros de $2\pi i$.

vi) LA FUNCION LOGARITMO. Se define $\log z$ para $z \neq 0$ como el número w tal que $e^w = z$: Sea $w = u + iv$. Entonces $e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) = |z|(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$. Para fijar ϕ supondremos al plano complejo "cortado" en $(-\infty, 0]$, luego $-\pi < \phi \leq \pi$. Se tiene entonces: $\phi = \operatorname{Arg} z$ y

$$e^u = |z|, \quad v = \operatorname{Arg} z + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

O sea, hay infinitas soluciones de $e^w = z$, y son

$$(30) \quad w = \log z = \log |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2n\pi).$$

Uno de estos valores será designado con $\operatorname{Log} z$, y se denominará **valor principal del logaritmo de z** :

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Cuando z recorre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Log} z$ recorre la franja $\{w: -\pi < y \leq \pi\}$. En $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ quedan definidas infinitas ramas continuas de $\log z$ cada una asociada a exactamente un valor entero n (cf. (30)). Cada una de ellas puede derivarse en z :

$$\frac{d(\log z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1/\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w}.$$

Conclusión:

$$(31) \quad \frac{d(\log z)}{dz} = \frac{1}{z}.$$

La elección del semieje negativo para cortar el plano \mathbb{C} es arbitraria. Por eso, al considerar puntos z en ese semieje podemos suponer el corte efectuado según otro semieje, vg. $[0, \infty)$. Como las ramas son localmente continuas no se introducen complicaciones mayores, y por ejemplo, el cálculo de $(\log z)'$ precedente sigue siendo correcto para $z \in (-\infty, 0)$.

EJERCICIO. Demostrar que los únicos períodos de $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ son los múltiplos

enteros de 2π .

Ocasionalmente escribiremos $\ln z$ o $\lg z$ en lugar de $\log z$.

10. DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS DE UNA FUNCION HOLOMORFA.

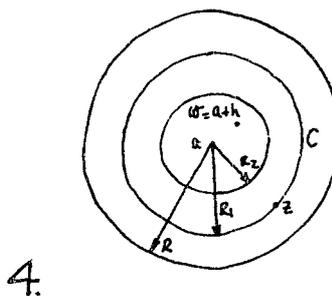
TEOREMA 8 (Taylor). Sea $f(w)$ holomorfa en $|w - a| < R$. Entonces $f(w)$ es desarrollable en serie de potencias $\sum_0^{\infty} b_n (w - a)^n$ con $b_n = f^{(n)}(a)/n!$ y radio de convergencia $\geq R$.

DEMOSTRACION. Recurriendo a la conocida fórmula

$$(32) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

obtenemos (ver figura 4):

$$\begin{aligned} f(w) &= f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a-h} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)(1-\frac{h}{z-a})} dz = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \left\{ \frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \frac{h^2}{(z-a)^3} + \dots + \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)} \right\} dz \\ &= f(a) + \sum_{r=1}^n f^{(r)}(a) \frac{h^r}{r!} + A_n. \end{aligned}$$

Si $\epsilon = R_1 - R_2 > 0$,

$$|A_n| \leq \frac{|h|^{n+1}}{2\pi} \frac{\sup_C |f(z)|}{R_1^{n+1} \cdot \epsilon} 2\pi R_1 = \frac{MR_1}{\epsilon} \left(\frac{|h|}{R_1}\right)^{n+1} \leq K \cdot \left|\frac{R_2}{R_1}\right|^{n+1} \rightarrow 0$$

para $n \rightarrow \infty$. Luego, $\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}}{j!} (w-a)^j \rightarrow f(w)$ en $\{|w-a| < R\}$. La serie también converge absolutamente en ese disco (cf. el siguiente teorema 10) y por tanto

su radio de convergencia es por lo menos R, QED.

Usando (31) y el teorema 8 se obtiene el desarrollo de $f(z) = \text{Log}(1+z)$ alrededor de $z = 0$:

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \quad R = 1.$$

De aquí se deduce fácilmente que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

DEFINICION 3. Sea f holomorfa en a . a es un **cero de orden p** de f si

$$f(z) = \sum_{m=p}^{\infty} a_m (z-a)^m, \quad a_p \neq 0, \quad p \geq 1.$$

Esta definición es inequívoca pues existe el desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = a$ (teorema de Taylor) y este desarrollo es único (corolario al teorema 6).

TEOREMA 9. Sea $f(z)$ holomorfa en $z = a$ con $f(a) = 0$. Entonces, o bien f es idénticamente nula en un entorno de a , o bien existe un entorno de a donde $f(z)$ no se anula si $z \neq a$.

DEMOSTRACION. Si $f \neq 0$ en un entorno circular de a entonces allí es de la forma

$$f(z) = (z-a)^p \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-a)^m = (z-a)^p \phi(z) \quad \text{con } a_0 \neq 0. \text{ Pero}$$

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j (z-a)^j \right| \leq |a_0|/2 \quad \text{si } |z-a| < \varepsilon \text{ y } \varepsilon \text{ es bastante pequeño, pues si en}$$

una serie de potencias se omite un número finito de términos su radio de con-

vergencia no cambia, y por tanto $\sum_1^{\infty} a_j (z-a)^j$ define una función holomorfa

nula en a . Luego, $\phi(z) \neq 0$ en un entorno de a , qed..

La **fórmula de Leibnitz** de la derivada de un producto de funciones holomorfas en un punto z tiene la misma forma que en el caso real

$$(34) \quad \frac{d^n(fg)}{dz^n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{d^r f}{dz^r} \frac{d^{n-r} g}{dz^{n-r}}$$

y se demuestra por inducción recordando que $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$. Para calcular la serie de Taylor alrededor de $z = 0$ de $f \cdot g$ debemos estimar $(fg)^{(n)}/n!$ que por (34) es igual a

$$\sum_{r=0}^n \frac{f^{(r)}}{r!} \cdot \frac{g^{(n-r)}}{(n-r)!}.$$

O sea, si $f = \sum \alpha_n z^n$ y $g = \sum \beta_n z^n$ con radios de convergencia R_α y R_β respectivamente

$$(35) \quad (f \cdot g)(z) = \sum_0^\infty \left(\sum_0^n \alpha_i \beta_{n-i} \right) z^n,$$

en el entorno circular de $z = 0$ de radio $\inf(R_\alpha, R_\beta)$.

(35) puede demostrarse también usando el siguiente **teorema de Cauchy** sobre el producto de series:

Sean $\sum_1^\infty a_n$ y $\sum_1^\infty b_n$ series numéricas absolutamente convergentes. Entonces

$\sum_1^\infty (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n)$ es absolutamente convergente y vale

$$(36) \quad \sum_1^\infty (a_n b_1 + \dots + a_1 b_n) = \sum_1^\infty a_n \cdot \sum_1^\infty b_n.$$

Más aún, $\sum_{i,j} a_i b_j$ es absolutamente convergente y a (36).

($\sum a_{mn}$ se dice convergente a S si para todo $\epsilon > 0$ existe $M(\epsilon)$ tal que si $p, q \geq M$

entonces $|\sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^q a_{mn} - S| < \epsilon$. Lo que el teorema afirma es que $\sum a_i b_j$ se pue-

de ordenar de cualquier forma y la serie así obtenida, que es absolutamente convergente, converge a (36)).

En el teorema que sigue reunimos algunos resultados sobre series de potencias que ayudan a comprender mejor su comportamiento.

TEOREMA 10. *i) Si $\sum a_n z^n$ converge en $z = z_0 \neq 0$ entonces converge absolutamente en $B_{|z_0|}(0)$. Además $\sum a_n z^n \xrightarrow{z \rightarrow 0} a_0$.*

ii) Si $f(z)$ es holomorfa en un abierto A entonces f es desarrollable en serie potencias alrededor de $z_1 \in A$ en el círculo de mayor diámetro con centro z_1 y contenido en A .

iii) Sean $\sum \alpha_n z^n$ y $\sum \beta_n z^n$ series de potencias tales que $|\beta_n| \geq |\alpha_n|$ desde un momento en adelante. Entonces $R_\alpha \geq R_\beta$.

DEMOSTRACION. i) Sea $|z| < |z_0|$. Entonces, si $|z/z_0| = q$,

$$\sum |a_n z^n| = \sum |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq \sum |a_n z_0^n| \cdot q^n.$$

Como $a_n z_0^n \rightarrow 0$, existe M tal que $|a_n z_0^n| \leq M$ para todo n , y en consecuencia la serie $\sum a_n z^n$ está dominada por $M \sum q^n$.

La serie define en $B_{|z_0|}(0)$ una función holomorfa $f(z)$. $f(0) = a_0$ y como

$$f(z) \rightarrow f(0), \quad \sum a_n z^n \xrightarrow{z \rightarrow 0} a_0.$$

ii) Sigue del T.8.

iii) Basta recordar que $R_\beta^{-1} = \overline{\lim} |\beta_n|^{1/n}$, QED.

11. LA FUNCION z^α . Sea $z \neq 0$. Si p es un entero positivo:

$$z^p = z \cdot \underbrace{\dots}_p z = e^{p \operatorname{Log} z} = e^{p \log z},$$

relación válida aún para $p = 0$, o p entero negativo. Si p y q son enteros positivos:

$$(37) \quad w := e^{(p/q) \log z} = e^{\frac{p}{q} (\operatorname{Log} |z| + i \operatorname{Arg} z + 2n\pi i)},$$

es solución de $w^q = z^p$. Esta solución es q -valuada si p y q son primos entre sí:

$$w = (z^{p/q}) \cdot e^{2\pi i k/q}; \quad k = 0, 1, \dots, q-1, \quad (z^{p/q}) = e^{(p/q) \operatorname{Log} z},$$

En efecto, al variar k en \mathbb{Z} , $e^{2\pi i k/q}$ toma sólo q valores distintos dos a dos. Estos deben ser todos los valores de $e^{2\pi i n p/q}$ en (37), pues si $n - m = \hat{q}$, $e^{2\pi i n p/q} = e^{2\pi i m p/q}$, y si para $r \in \mathbb{Z}$, $p \cdot n/q = p \cdot m/q + r$, y $n - m \neq \hat{q}$, entonces $(n - m)p = qr$ y p divide a r : $r = ps$. Luego, $n - m = q \cdot s$, contradicción. Si p y q no son primos entre sí, (37) toma q' valores -dos a dos distintos- al recorrer n los enteros, donde $p'/q' = p/q$, p', q' primos entre sí. Si p/q no es positivo, escribimos $p/q = -|p|/|q|$. w recorre ahora los recíprocos de $e^{(|p|/|q|)\log z}$.

DEFINICION 4. Sea α real: $z^\alpha := e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\text{Log } z + 2\pi i n)}$.

Si $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$, $e^{\alpha \text{Log } z}$ define una función holomorfa en el plano cortado en $(-\infty, 0]$. Esto ocurre para cada valor de n y si α no es racional hay infinitas ramas -dos a dos distintas- de z^α , cada una correspondiendo a una rama del logaritmo. Vale, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y con una misma rama del logaritmo: $z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\log z}$. Por otra parte

$$(38) \quad \frac{dz^\alpha}{dz} = \frac{de^{\alpha w}}{dw}(\log z) \cdot \frac{d \log z}{dz} = \frac{\alpha e^{\alpha \log z}}{z} = \alpha z^{\alpha-1},$$

y con la misma rama del log.

Si α es un complejo no real se utiliza la misma definición 4 para definir z^α y se obtiene también (38). Los casos que más nos interesarán serán aquellos donde α es real. Cuando α es complejo, las determinaciones de z^α cambian módulo. Por ejemplo, $z^i = e^{i \text{Log } z - 2\pi n}$ toma infinitos valores de módulos distintos dos a dos, mientras que en las potencias reales todas las determinaciones poseen el mismo módulo.

En el caso de α real, $(1+z)^\alpha$ tiene un valor principal ($n=0$) desarrollable en serie de potencias en $|z| < 1$. Verificar que vale

$$(39) \quad (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} z^n, \quad |z| < 1.$$

*12. LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN EN COORDENADAS POLARES. Sea

$F(Z) = U(X,Y) + iV(X,Y)$ holomorfa en $Z \neq 0$ y $z = e^{i\theta} Z$. Si $f(z) = F(Z)$ entonces $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $z \neq 0$ y $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Por otra

parte, $U_x = V_y$, $U_y = -V_x$. Es decir, estas relaciones entre derivadas de las partes real e imaginaria se verifican en cada sistema de ejes ortogonales equi-orientados. Sea $w = Z - a$. De $F(Z) = F(w+a) =: G(w)$ se deduce que lo dicho para $z = 0$ se aplica a cualquier otro punto. Es fácil ver ahora que en coordenadas polares las condiciones de Cauchy-Riemann se expresan de la siguiente manera ($r > 0$):

$$(40) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

*13. LA FUNCION $\operatorname{arctg} z$. Sea $|\operatorname{Re} w| < \pi/2$:

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{sen} w}{\operatorname{cos} w} = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = \frac{1}{i} \frac{1 - e^{-2iw}}{1 + e^{-2iw}}.$$

Entonces

$$(41) \quad iz = \frac{1 - e^{-2iw}}{1 + e^{-2iw}}, \quad e^{2iw} = \zeta = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

La relación entre ζ y z establece una correspondencia biunívoca entre $C(\zeta) \setminus \{-1\}$ y $C(z) \setminus \{-i\}$. Como la exponencial tiene período $2\pi i$ y el único valor que no toma es el cero resulta que la región $|\operatorname{Re} w| < \pi/2$ está en correspondencia con el plano ζ cortado por el eje real en $(-\infty, 0]$. Esta región se corresponde con la región del plano z obtenida eliminando de C a $\{z: z = he^{i\pi/2}, |h| \geq 1, h \text{ real}\}$. Se tiene entonces para $|\operatorname{Re} w| < \pi/2$:

$$(42) \quad w = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad z \neq \text{imaginario puro de módulo } \geq 1.$$

Si $z = x$ real entonces $w = y$ es real y recorre $(-\pi/2, \pi/2)$ cuando x varía entre $-\infty$ y $+\infty$. Además $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = y = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1 + ix}{1 - ix}$.

14. DETERMINACION DE UNA FUNCION HOLOMORFA POR UNO DE SUS ELEMENTOS ANALÍTICOS. Dar un **elemento analítico** de $f(z)$, (f, a) , es dar un entorno circular de a donde la función f es holomorfa. Los elementos analíticos (f, a) y (g, b) se dirán iguales si $a = b$ y $f(z) = g(z)$ en un entorno circular de a . Queremos probar que dar un elemento de una función que es holomorfa en un

abierto conexo equivale, teóricamente, a conocer toda la función en ese abierto. Sea $f(z)$ holomorfa en el dominio G lo mismo que $g(z)$. Vale entonces (cf. T.9) el

TEOREMA 11. Si $f = g$ en un conjunto infinito de puntos con un punto de acumulación a en G entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in G$.

La función $F(z) = f(z) - g(z)$, por el T.9, debe ser idénticamente cero en un entorno de a . Es decir, $(f,a) = (g,a)$. Para mostrar que f coincide con g en A basta entonces ver que vale el

TEOREMA 12. Sea f holomorfa en el dominio G . Si $f \equiv 0$ en un entorno de $a \in G$ entonces $f \equiv 0$. O sea, $(f,a) = (0,a) \Rightarrow f = 0$.

DEMOSTRACION. La que presentamos aquí recurre a un procedimiento propio de la **prolongación, o continuación analítica**, que discutiremos más adelante. Sea $b \in G$ y P un arco poligonal contenido en G que parte de a y llega a ese punto. Supongamos a P parametrizado con el parámetro d longitud de arco: $0 \leq d \leq L = l(P)$. La distancia de un punto c a un cerrado X (no vacío),

$$\text{dist}(c, X) := \inf \{|c - x| : x \in X\},$$

es una función continua de c . En efecto, por ser cerrado, dado c_1 existe $x_1 \in X$ tal que $|c_1 - x_1| = d(c_1, x_1) = d(c_1, X)$. Entonces $d(c_2, X) \leq d(c_2, x_1) \leq d(c_2, c_1) + d(c_1, x_1) \leq |c_2 - c_1| + d(c_1, X)$, y por tanto $|d(c_2, X) - d(c_1, X)| \leq |c_2 - c_1|$. Luego, si z varía sobre un compacto K disjunto a X queda definida sobre K una función continua y positiva: $d(z, X)$. Esta toma su mínimo en K : $d(z_0, X) > 0$. Aplicado a $K = P$ y a $X = C \setminus G$, este resultado prueba que existe un número $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset G$ cualquiera sea $p \in P$. Sea $p_0 = a$ y p'_0 el primer punto de P sobre el contorno de $B_r(p_0)$, si es que hay alguno. Sea p_1 un punto del arco $\widehat{p_0, p'_0}$ en $P \cap B_r(p_0)$ tal que su parámetro $d(p_1) \geq d(p'_0) - r/2$. (Por ser P un arco poligonal regular tenemos que si $p, q \in P$, $p \neq q$ si y sólo si $d(p) \neq d(q)$). Sea p'_1 el primer punto de P con $d(p'_1) \geq d(p_1)$ sobre el contorno de $B_r(p_1)$. Sea p_2 un punto del subarco $\widehat{p_1, p'_1}$ con $d(p_2) \geq d(p'_1) - r/2$, etc.. Queda definida así una sucesión de puntos $a = p_0, p_1, \dots, p_n = b$ tal que $p_{i+1} \in B_r(p_i)$. Por hipótesis el elemento (f, a) es nulo. Luego $f(z)$ se anula en $B_r(p_0)$ pues $f(a) = f'(a) = \dots = 0$. El desarrollo de f alrededor de p_1 tiene radio de convergencia $\geq r$ y de lo dicho se desprende que $f(z) \equiv 0$ en

$B_I(p_1)$. Así siguiendo llegamos a que $f(z)$ es nula en un entorno de b . Como todo punto de G es alcanzado con un arco poligonal que parte de a , tenemos $f \equiv 0$ en G , QED.

APLICACION. La función e^z es la única función holomorfa en \mathbb{C} que coincide con e^x para $z = x \in \mathbb{R}$. Lo mismo para $\sin z$ y $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ y $\operatorname{ch} z$. En efecto, esto sigue inmediatamente del teorema 11.

15. FUNCIONES ARMONICAS. i) Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfa en D dominio simplemente conexo. Sabemos que en D : $\Delta u = \Delta v = 0$. Es decir, u y v son funciones armónicas (*). Supongamos que $f' \neq 0$. Las curvas de nivel de u , $\{u = \text{cte.}\}$, son ortogonales a las curvas de nivel de v . En efecto, como $f' \neq 0$, $|u_y| + |v_y| \neq 0$. Supongamos que en $z_0 = a + ib$, $u_y(a,b) \neq 0$. Entonces la curva $u(x,y) = u(a,b)$ se puede describir en un entorno de z_0 como $y = y(x)$ y

$\frac{dy}{dx} = -u_x/u_y$. Por otra parte $v_x \neq 0$ y la curva $v(x,y) = v(a,b)$ puede escribirse

como $x = x(y)$ con $\frac{dx}{dy} = -v_y/v_x = u_x/u_y$. Luego, las curvas de nivel son ortogonales en z_0 .

ii) Dada u armónica en D existe v armónica tal que $u + iv$ es holomorfa en D . Diremos que v es una **armónica conjugada** de u . Para probar su existencia observemos que $-u_y dx + u_x dy$ es una diferencial exacta (pues $\Delta u = 0$). Luego

$$(43) \quad v(x,y) := \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} -u_y dx + u_x dy$$

define una función tal que $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$. Entonces $u + iv$ es holomorfa pues v es diferenciable y se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. (43) determina la función potencial v salvo por un sumando constante. Las funciones de la forma $v + c$, $c \in \mathbb{R}$, son todas las soluciones posibles de nuestro problema, pues si la parte real (imaginaria) de una función holomorfa es constante también lo es la parte imaginaria (real) (demostrarlo). En particular, una función holomorfa no puede ser real o imaginaria pura, salvo que sea una cons-

(*) Una función se dirá armónica en D si es dos veces continuamente diferenciable y en ella se anula idénticamente el operador de Laplace Δ . En general supondremos que estas funciones son a valores reales.

tante.

iii) TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES ARMONICAS:

$$(44) \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\phi}) d\phi.$$

Sea v una armónica conjugada a u . Entonces, si $f = u + iv$ y $C = \{|z - z_0| = R\} \subset D$:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{u(z_0 + Re^{i\phi}) + iv(z_0 + Re^{i\phi})}{Re^{i\phi}} Re^{i\phi} i d\phi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(z_0 + Re^{i\phi}) + iv(z_0 + Re^{i\phi})] d\phi, \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

iv) PRINCIPIO DE MAXIMO: si u es armónica y alcanza su máximo en D entonces u es constante.

Análogamente, si u es armónica no constante no puede alcanzar en D su mínimo. Este último es el principio de mínimo y se deduce del de máximo considerando la función $-u$. Estos se pueden deducir del **principio del módulo máximo para funciones holomorfas**:

TEOREMA 13. Sea $f(z)$ holomorfa en el dominio D . Entonces la función $|f(z)|$ no alcanza su máximo en D salvo en el caso que f sea constante.

DEMOSTRACION. Sea $C = \{|z - a| = \delta\} \subset D$. Como $(f(z))^n$ es holomorfa para $n = 1, 2, \dots$:

$$(45) \quad (f(b))^n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(f(z))^n}{z - b} dz, \quad b \in B_\delta(a).$$

Derivando respecto de b resulta:

$$(46) \quad n(f(b))^{n-1} \cdot f'(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f^n(z)}{(z - b)^2} dz.$$

Sea M el máximo de $|f(z)|$ en C . Entonces $|f(a)| \leq M$. Si $M = 0$ entonces f es

igual a cero en un entorno de a . Si $M > 0$ y $|f(z)|$ alcanza su máximo en $z = a$ entonces $|f(a)| = M$. De (46) sigue que $n|f'(a)| \cdot |f(a)|^{n-1} \leq M^n/\delta$. Luego $|f'(a)| \leq M/n\delta$ para todo n , y $f'(a) = 0$. Derivando (46) obtenemos en forma análoga $f^{(j)}(a) = 0$ si $j > 1$. En todos los casos resulta f constante en un entorno de a . La tesis sigue ahora del T.11, QED.

COROLARIO. Si una sucesión de funciones holomorfas en D , dominio acotado, continuas hasta el borde converge uniformemente en el contorno de D entonces converge uniformemente en D a una función holomorfa.

DEMOSTRACION. $f_n(z) - f_m(z)$ es continua en la clausura de D y en su contorno verifica $|f_n(z) - f_m(z)| \leq \epsilon$ si $n, m \geq n_0(\epsilon)$. Luego, la misma desigualdad vale para todo $z \in D$, qed.

DEMOSTRACION DEL PRINCIPIO DE MAXIMO. Sea $f(z)$ holomorfa en D tal que $\operatorname{Re} f = u$. Entonces $e^{f(z)}$ es holomorfa en D y $e^{u(x,y)} = |e^{f(z)}|$. Si u alcanza su máximo en D entonces también lo hace el módulo de la función $e^{f(z)}$. Luego, esta función, y por tanto $f(z)$, deben ser constantes. En consecuencia, u es constante, QED.

v) LAS FUNCIONES ARMONICAS SON INDEFINIDAMENTE DIFERENCIABLES. Fácilmente se obtiene este resultado derivando la expresión dada por la fórmula (47).

vi) FORMULA DE POISSON. Sea u armónica en un abierto que contiene el disco de radio R con centro $z = 0$. Si $z_1 \in B_R(0)$ vale:

$$(47) \quad u(z_1) = \frac{R^2 - |z_1|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\operatorname{Re}^{i\theta})}{|z_1 - \operatorname{Re}^{i\theta}|^2} d\theta.$$

La validez de esta fórmula será probada más adelante. Si $z_1 = \rho e^{i\phi} = x + iy$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, (47) toma la forma

$$(48) \quad u(x,y) = u(\rho e^{i\phi}) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(\operatorname{Re}^{i\theta})}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \phi)} d\theta, \quad \rho < R.$$

Obsérvese que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es indefinidamente diferenciable si $|x| + |y| > 0$, y por tanto lo mismo ocurre con $u(x,y)$. Como la traslación de una función ar-

mónica es armónica, aplicando lo dicho a $U(x,y) = u(x+h,y+k)$ resulta que u es indefinidamente diferenciable en todo punto de su dominio de definición.

16. EL NÚCLEO DE POISSON Y SU CONJUGADO EN EL CIRCULO UNITARIO. Por un **polinomio trigonométrico** de orden n entendemos una función de la forma

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx), \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}. \quad \text{Si } |a_n| + |b_n| \neq 0 \text{ entonces}$$

T es estrictamente de orden n . Este polinomio trigonométrico puede interpretarse como la parte real de un polinomio ordinario evaluado en $z = e^{ix}$:

$$(49) \quad T(x) = R(P(z)), \quad P(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j - ib_j)z^j, \quad z = e^{ix}.$$

Por una **serie trigonométrica** entendemos una expresión a coeficientes reales de la forma:

$$(50) \quad S: \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx), \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (\text{o } -\pi \leq x \leq \pi),$$

de la que no se exige ningún tipo de convergencia. S es, formalmente, la parte real de

$$(51) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j - ib_j)z^j, \quad z = e^{ix}.$$

A la parte imaginaria de (51) se la llama **serie conjugada** a S :

$$(52) \quad \tilde{S}: \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \operatorname{sen} jx - b_j \cos jx).$$

De $(1 - z)^{-1} = \sum_0^{\infty} z^n$, $|z| < 1$, se deduce que

$$(53) \quad \frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2} + z + z^2 + \dots, \quad z = re^{ix}, \quad r < 1.$$

A las partes real e imaginaria de (53) se las llama **núcleo de Poisson** y **núcleo**

conjugado de Poisson, respectivamente,

$$(54) \quad P(r, x) = R\left(\frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2} R\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2}\right) = \\ = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos jx,$$

$$(55) \quad Q(r, x) = I\left(\frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{r \operatorname{sen} x}{1-2r \cos x + r^2} = \sum_{j=1}^{\infty} r^j \operatorname{sen} jx.$$

En este caso ambas series son convergentes, y la última es la conjugada de la precedente.

17. LA TRANSFORMACION CONFORME. Una aplicación conforme de un dominio $D \subset \mathbb{C}$ es una transformación inyectiva (uno a uno) definida por una función f holomorfa en D . De las consideraciones que siguen se deduce que $f'(z) \neq 0$ para todo z y que $f(D)$ es un dominio en \mathbb{C} . Y de estas propiedades que $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ es también una transformación conforme.

TEOREMA 14. Sea $w(z) \neq 0$ holomorfa en un entorno circular de $z = 0$ con $w(0) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que todo w perteneciente al entorno reducido de $w = 0$: $w \in B_{\eta}(0) \setminus \{0\} =: B'_{\eta}(0)$, es asumido por $w(z)$ en exactamente m puntos distintos de $B_{\varepsilon}(0)$, donde $m \geq 1$ es el orden del cero de $w(z)$ en el origen.

Demostraremos este teorema más adelante. La función $w(z)$ es desarrollable en serie de potencias de la forma:

$$(56) \quad w(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots, \quad c_m \neq 0, \quad m \geq 1.$$

(Luego, la inyectividad de $f(z)$ implica $m = 1$, $c_1 = f'(0) \neq 0$.)

Además $w(B_{\varepsilon}(0)) \supset B'_{\eta}(0)$. (De aquí sigue que la transformación f es abierta, es decir, lleva abiertos en abiertos).

COROLARIO. Si $w(z)$ es holomorfa en $B'_{\varepsilon}(z_0)$ y no es constante entonces existe

$B_{\eta}(w(z_0))$, $\eta = \eta(\varepsilon)$, tal que $w(B_{\varepsilon}) \supset B_{\eta}(w(z_0))$. Y si $w'(z_0) \neq 0$ entonces hay un abierto $G \subset B_{\varepsilon}$, $z_0 \in G$, tal que G es homeomorfo a $B_{\eta'}(w(z_0))$, para cierto $\eta' \leq \eta$.

DEMOSTRACION. La primera parte fue demostrada. Si ε es bastante pequeño y $w'(z_0) \neq 0$, w asume en B_{ε} cada valor de B_{η} una sola vez. Podemos suponer que $w' \neq 0$ en $B_{\varepsilon'}$, $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Si necesariamente $\varepsilon' < \varepsilon$ entonces es posible que en lugar de B_{η} debamos conformarnos con cierto $B_{\eta'}$, $\eta' < \eta$. En esta situación w^{-1} es una función holomorfa en $B_{\eta'}(w(z_0))$ con derivada no nula y $w^{-1}(B_{\eta'})$ es un abierto G contenido en $B_{\varepsilon'}(z_0)$. Como w y w^{-1} son continuas, w define un homeomorfismo entre G y $B_{\eta'}$, QED.

Las aplicaciones holomorfas con derivada no nula llevan curvas regulares en curvas regulares (demostrarlo). En consecuencia la imagen de un dominio por una transformación tal es siempre un dominio. De hecho lo mismo ocurre para toda aplicación definida por una función holomorfa F no constante pues los ceros de F' son aislados.

*18. LEMA DE SHWARZ. a) Sea $f: B_1(0) = D \rightarrow D$ holomorfa, $f(0) = 0$. Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$. b) Además, si $|f'(0)| = 1$ o si $|f(z)| = |z|$ para algún punto $z \in D \setminus \{0\}$, entonces $f(z) = e^{i\theta}z$, θ real.

DEMOSTRACION. a) Sea $F(z) = f(z)/z$, $F(0) = f'(0)$. Entonces F es holomorfa en D (demostrarlo). Como en el contorno de $B_r(0)$, $0 < r < 1$, se tiene $|F| \leq 1/r$, por el principio del módulo máximo (§15) lo mismo vale en $B_r(0)$. Luego,

$|F(z)| \leq 1$ en D . b) Si F no es constante entonces $|F(z)| < 1$. Luego, $|f'(0)| < 1$ y $|f(z)| < |z|$. O sea, en el caso b), $F(z)$ es constante. Sigue inmediatamente que $|F(z)| \equiv 1$ y por tanto que $F(z) = e^{i\theta}$, θ real, QED.

CAPITULO 3.

Propiedades de la representación conforme. La transformación lineal. La transformación bilineal. El teorema de Riemann. La fórmula de Poisson. Campos armónicos planos.

1. PROPIEDADES DE LA REPRESENTACIÓN CONFORME. Una transformación conforme de un dominio es una transformación invertible definida por una función holomorfa con derivada no nula. Ya vimos en el T. 14 del Cap. 2 que es superfluo pedir la no anulación de la derivada. Ese resultado básico será demostrado en el §6 del Cap. 4 y su lectura es independiente del material contenido en el presente capítulo.

El teorema fundamental de la representación conforme es debido a B. Riemann y una versión débil del mismo la da el siguiente

TEOREMA 1. Sean $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$, dos dominios acotados simplemente conexos y a_i un punto de G_i , $i = 1, 2$. Existe una transformación conforme f que lleva G_1 sobre G_2 y a_1 en a_2 .

(En realidad hay infinitas transformaciones con esas propiedades). Sabemos que la imagen conforme de un dominio es un dominio. Veamos que el dominio G_2 del teorema necesariamente es simplemente conexo si G_1 lo es. Si G_2 no fuera s.c. existiría una curva de Jordan regular J_2 con interior D_2 y un punto $a \in D_2$ tal que $a \notin G_2 \supset J_2$. Ella es imagen de una curva $J_1 \subset G_1$ con interior D_1 que por ser G_1 s.c. verifica $D_1 \subset G_1$.

La idea del argumento sigue así: se deforma continuamente J_1 manteniéndola dentro de G_1 y de manera que converja a un punto $z_1 \in G_1$. Su imagen $f(J_1)$ se deformará de tal manera que convergerá a $f(z_1)$. Pero en un momento la deformación pasará por el punto a , el que deberá ser entonces imagen de un punto de G_1 , y por tanto, $a \in G_2$, contradicción.

El adjetivo "conforme" se refiere a una propiedad de la transformación que se enuncia brevemente diciendo que respeta ángulos. Sea $\alpha = \alpha(t)$ un arco regular para $0 \leq t \leq 1$, y sea $t_0 \in (0,1)$, $\alpha(t_0) = z_1$. $f(\alpha(t)) = X(t) + iY(t)$ define un arco regular en G_2 si $\alpha \subset G_1$. En este caso tenemos $z_2 := f(z_1)$ y

$$(1) \quad \left. \frac{df(a(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = f'(z_1) \cdot a'(t_0) = f'(z_1) \cdot [\dot{x}(t_0) + i\dot{y}(t_0)].$$

O sea, $\dot{x}(t_0) + i\dot{y}(t_0) = re^{i\theta}[\dot{x}(t_0) + i\dot{y}(t_0)]$, $f'(z_1) = r \cdot e^{i\theta} \neq 0$. En consecuencia, el vector tangente en la imagen cambia en módulo en un factor fijo que depende del punto y rota un ángulo θ . Luego, si dos curvas forman un ángulo β en z_1 su imágenes forman el mismo ángulo en z_2 . Además, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = |\dot{x} + i\dot{y}|$, si s es el parámetro longitud de arco para α . Si σ es el correspondiente parámetro longitud para $f(\alpha)$ tenemos

$$(2) \quad \frac{d\sigma}{dt} = |\dot{x} + i\dot{y}| = r|\dot{x} + i\dot{y}| = |f'(z_1)| \cdot \frac{ds}{dt}.$$

O sea, un arco infinitesimal de longitud ds tiene por imagen un arco de longitud $d\sigma = |f'(z_1)| ds$. Y un cuadrado de lados dx, dy , tiene entonces por imagen una región de área $|f'(z_1)|^2 dx dy$ (salvo por un infinitésimo de orden superior).

Es decir, el área varía localmente por un factor $|f'(z_1)|^2$, el **coeficiente areolar**. De otra forma:

$$(3) \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(z_1) = \begin{vmatrix} u_x(x_1, y_1) & u_y(x_1, y_1) \\ v_x(x_1, y_1) & v_y(x_1, y_1) \end{vmatrix} =$$

$$= u_x^2(x_1, y_1) + v_x^2(x_1, y_1) = |f'(z_1)|^2 > 0;$$

por tanto,

$$\iint_{f(D)} h(u,v) du dv = \iint_D h(u(x,y), v(x,y)) \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| dx dy$$

si h es no negativa y, por ejemplo, continua en $f(D)$.

2. LA TRANSFORMACIÓN LINEAL $\zeta = az + b$, $a \neq 0$. De

$$\arg(\zeta_2 - \zeta_1) = \text{Arg } a + \text{Arg}(z_2 - z_1)$$

se deduce que transforma rectas en rectas, y de

$$\left| \frac{\zeta - b}{a} - c \right| = |z - c| = r$$

que lleva circunferencias en circunferencias. Una transformación lineal $z \rightarrow \zeta$ se obtiene componiendo una homotecia $z \rightarrow w = |a|z$, una rotación $w \rightarrow \eta = e^{i \text{Arg } a} w$ y una traslación $\eta \rightarrow \zeta = \eta + b$. Estas tres son las transformaciones lineales básicas.

3. LA INVERSION $\zeta = 1/z$. Sea p complejo y α, β reales con $\alpha\beta < |p|^2$. Si $\alpha \neq 0$, $|z - p/\alpha|^2 = |p|^2/\alpha^2 - \beta/\alpha$, o sea,

$$(4) \quad \alpha|z|^2 - \bar{p}z - p\bar{z} + \beta = 0,$$

representa una circunferencia. Sea $\alpha = 0$, entonces $\bar{p}z = \beta/2$ y para esos z , $\zeta = \bar{p}z$ recorre una recta perpendicular al eje real. Luego, $z = \zeta/\bar{p}$ recorre una recta en el plano z . Es decir,

$$(5) \quad -\bar{p}z - p\bar{z} + \beta = 0$$

es la ecuación de una recta. Por otra parte, toda circunferencia y toda recta pueden representarse por (4) con $\alpha \neq 0$, o $\alpha = 0$, respectivamente. Bajo la transformación $\zeta = 1/z$, (4) se transforma en

$$(6) \quad \beta|\zeta|^2 - p\zeta - \bar{p}\bar{\zeta} + \alpha = 0,$$

o sea, la inversión transforma circunferencias en circunferencias si admitimos entre las circunferencias a las de radio infinito (rectas). Sea C la circunferencia dada por (4). Sea $\alpha \neq 0$. Su centro es p/α y su radio $\sqrt{|p|^2/\alpha^2 - \beta/\alpha}$. Dos puntos son **inversos** respecto de C si cumplen la siguiente relación

$$(7) \quad (z_1 - p/\alpha)\overline{(z_2 - p/\alpha)} = |p|^2/\alpha^2 - \beta/\alpha.$$

O sea, si y sólo si

$$(8) \quad \begin{cases} |z_1 - p/\alpha| \cdot |z_2 - p/\alpha| = |p|^2/\alpha^2 - \beta/\alpha, \\ \arg(z_1 - p/\alpha) = \arg(z_2 - p/\alpha), \end{cases}$$

y si y sólo si

$$(9) \quad \alpha z_1 \bar{z}_2 - \bar{p} z_1 - p \bar{z}_2 + \beta = 0.$$

Sea $\beta \neq 0$; aplicando la inversión $\zeta = 1/z$ obtenemos

$$(10) \quad \beta \zeta_1 \bar{\zeta}_2 - p \zeta_1 - \bar{p} \bar{\zeta}_2 + \alpha = 0.$$

En otras palabras, ζ_1 es inverso de ζ_2 respecto de la circunferencia C' , imagen de C por $\zeta = z^{-1}$. Si $\beta = 0$ entonces ζ_1 y ζ_2 son inversos respecto de una recta. En efecto, sea $\alpha = 0$ en (9): $-\bar{p} z_1 - p \bar{z}_2 + \beta = 0$. Luego, si $-\bar{p} z - p \bar{z} + \beta = 0$,

$$(11) \quad z - z_1 = \frac{-p}{\bar{p}} \overline{(z - z_2)}.$$

Entonces $|z - z_1| = |z - z_2|$ para todo $z \in C$, recta. Esto puede ocurrir solamente si z_1 y z_2 están ubicados sobre una perpendicular a C y equidistantes de C (que es la definición de inversión respecto de una recta). Veamos la recíproca. Sean z_1 y z_2 ubicados sobre una perpendicular C^\perp a C y equidistantes de C . Luego de una traslación y una rotación reducimos el problema a $C = \text{eje real}$, $C^\perp = \text{eje imaginario}$. La ecuación de C^\perp es $\zeta + \bar{\zeta} = 0$ y la de C : $-\bar{i}\zeta - i\bar{\zeta} = 0$. Si $\zeta_k + \bar{\zeta}_k = 0$, $k = 1, 2$, y $\zeta_1 = \bar{\zeta}_2$ entonces $-\bar{i}\zeta_1 - i\bar{\zeta}_2 = 0$. Rotando y trasladando para volver a la situación original vemos que $-\bar{p} z_1 - p \bar{z}_2 + \beta = 0$ si $-\bar{p} z - p \bar{z} + \beta = 0$ es la ecuación de C .

TEOREMA 1. a) *La inversión transforma circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas y puntos inversos en puntos inversos.*

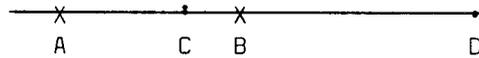
b) *Las transformaciones lineales tienen la misma propiedad.*

En efecto, cada transformación lineal básica lleva puntos inversos respecto de una circunferencia generalizada en puntos inversos respecto de la circunfe-

rencia imagen, y por tanto, lo mismo ocurre para su composición. Esto es, para toda transformación lineal.

NOTA: Dados sobre el eje real los puntos (números) A, B, C, D se dice que el par C, D separa armónicamente al par A, B si

$$\frac{A - C}{A - D} : \frac{B - C}{B - D} = -1,$$



Si $A = -B < 0$ entonces $C \cdot D = B^2$. O sea, C es inverso de D respecto de la circunferencia de radio B. Si $A \rightarrow -\infty$ entonces en el límite C y D equidistan de B si separan armónicamente al par $-\infty, B$.

4. LA TRANSFORMACION BILINEAL O TRANSFORMACION DE MOEBIUS. Es de la forma

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0. \text{ Si no es una transformación lineal entonces } c \neq 0.$$

En este caso la transformación puede reducirse a la composición de dos transformaciones lineales y una inversión:

$$z \rightarrow \zeta_1 = cz + d \rightarrow \zeta_2 = 1/\zeta_1 \rightarrow \zeta_3 = (b - \frac{ad}{c})\zeta_2 + \frac{a}{c}.$$

En consecuencia, las transformaciones bilineales transforman circunferencias (generalizadas) en circunferencias y puntos inversos respecto de una circunferencia en puntos inversos respecto de su imagen. Si $ad - bc = 0$, la transformación degenera en una aplicación constante, por eso hemos excluido ese caso. Las transformaciones bilineales (no degeneradas) forman un grupo. Sean

$$\zeta_1 = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \zeta_2 = \frac{a'\zeta_1 + b'}{c'\zeta_1 + d'}. \text{ Entonces } \zeta_2 = (Az + B)/(Cz + D) \text{ y los coeficientes}$$

están relacionados entre sí como elementos de dos matrices con su producto:

$$(12) \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

En particular tenemos $AD - BC \neq 0$. Para hallar la transformación inversa a

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d} \text{ podemos suponer } ad - bc = 1. \text{ Esto se obtiene dividiendo por } (ad - bc)^{1/2}$$

los coeficientes de la transformación original. Sea entonces

$$(13) \quad z = \frac{d\zeta - b}{-c\zeta + a}.$$

La matriz $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$. Luego, de (12) sigue que la matriz producto es la matriz identidad; y que $\zeta_2 = z$.

NB. A las transformaciones bilineales también se las llama transformaciones **homográficas**.

LAS TRANSFORMACIONES HOMOGRAFICAS Y LA REPRESENTACION CONFORME. Del teorema de Liouville sobre funciones enteras se deduce inmediatamente que el plano \mathbb{C} no puede transformarse conformemente sobre $B_1(0)$ (véase pg. 28). Lo mismo vale para el plano menos un punto $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ pues este conjunto no es simplemente conexo. Esto también puede deducirse del siguiente teorema que no demostraremos.

TEOREMA 2. *Toda transformación conforme de \mathbb{C} en \mathbb{C} es una transformación lineal.*

Una caracterización semejante existe para las transformaciones homográficas pero para obtenerla es necesario tomar en consideración no al plano complejo \mathbb{C} sino a toda la esfera de Riemann $\mathbb{C} + \{\infty\}$.

5. ALGUNAS TRANSFORMACIONES HOMOGRAFICAS. La función $\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$ depende de 3 parámetros. Podemos entonces esperar describir una transformación homográfica por sus valores en 3 puntos distintos:

$$(14) \quad \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_3)}{(\zeta - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)}.$$

Se puede demostrar que esta es la única transformación homográfica que lleva z_i en ζ_i , $i = 1, 2, 3$. Como una circunferencia queda determinada por 3 puntos hay una transformación homográfica que la lleva en otra preasignada.

Tres resultados útiles:

a) La transformación bilineal

$$(15) \quad w = \frac{az + b}{\bar{a} + \bar{b}z}, \quad |a| \neq |b|,$$

lleva $\{|z| = 1\}$ en $\{|w| = 1\}$. Si $|a| > |b|$ entonces $\{|z| \leq 1\} \rightarrow \{|w| \leq 1\}$, y recíprocamente. (Si $|a| < |b|$ entonces, y sólo entonces, $\{|z| \leq 1\} \rightarrow \{|w| \geq 1\}$).

(15) es la forma general de la transformación homográfica que preserva la circunferencia unitaria.

b) La transformación homográfica más general que transforma $\{|z| = 1\}$ en $\{|w| = 1\}$ y lleva el punto c , $|c| \neq 1$, en el 0 es

$$(16) \quad w(z) = e^{i\delta} \cdot \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}, \quad \delta \in [0, 2\pi).$$

c) La forma general de la transformación homográfica que lleva el semiplano $\{ |z| > 0 \}$ en $\{ |w| < 1 \}$ y $z = c$, $\text{Im } c > 0$, en $w = 0$ es

$$(17) \quad w = e^{i\delta} \cdot \frac{z - c}{z - \bar{c}}, \quad \delta \in [0, 2\pi).$$

El lector puede completar por sí mismo los detalles de las demostraciones de a) - c) salvo, quizá, por una información contenida en el enunciado del siguiente teorema 3. Veamos por ejemplo el caso b), y sin recurrir al caso a). Obviamente $|w(1)| = |w(-1)| = 1$. Además $|w(i)/(-i)| = 1$ por lo que también $|w(i)| = 1$, y la transformación (16) lleva la circunferencia unitaria del plano z en su homóloga del plano w . Por otra parte $w(c) = 0$ (y $|w(\infty)| = \frac{1}{|c|}$). Como $z \rightarrow w$ lleva dominios en dominios y en forma biunívoca: $w(B_1(0)) = B_1(0)$ o bien $w(B_1(0)) = \{w: |w| > 1\}$. Si $|c| < 1$ se presenta el primer caso, y si $|c| > 1$, el segundo. Si $z(t) = c + t$, $t > 0$, su imagen $\gamma(t) = w(z(t))$ tiene una tangente en $t = 0$ igual a $e^{i\delta}/(1 - |c|^2)$ que al variar δ en $[0, 2\pi)$ recorre todas las direcciones posibles, qed.

d) La transformación

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reales, lleva el semiplano superior de \mathbb{C} en sí mismo y cada transformación bilineal (normalizada) que lleva ese semiplano en sí mismo es de esta forma.

6. EL TEOREMA DE RIEMANN.

TEOREMA 3. Sea G un dominio simplemente conexo, $G \subset \mathbb{C}$, tal que $\mathbb{C} \neq G$. Entonces existe una transformación conforme definida por una función holomorfa f con dominio G tal que $f(G) = B_1(0)$. Más aún, existe una única f que satisface las siguientes condiciones adicionales: dados $a \in G$, $\alpha \in B_1(0)$ y $\delta_i \in [0, 2\pi)$,

$i = 1, 2$, entonces $f(a) = \alpha$ y la semirrecta de dirección $e^{i\delta_1}$ con vértice en a es llevada en un arco de curva cuya tangente en su origen α tiene dirección $e^{i\delta_2}$.

Usando el teorema puede re enunciarse el mismo reemplazando $B_1(0)$ por un dominio simplemente conexo $H \subset \mathbb{C}$ tal que $H \neq \mathbb{C}$. No demostraremos aquí el teorema fundamental de Riemann sino la siguiente proposición de utilidad práctica. Su lectura debería ser precedida por la del párrafo 6 del Cap. 4. (Los §1 - 6 del Cap. 4 son independientes de los resultados del presente capítulo).

* TEOREMA 4. Sea $f(z)$ holomorfa en G dominio simplemente conexo y sea C una curva de Jordan regular contenida en G . Si $f(G)$ es acotado y f es biunívoca de C sobre C' con $C = f^{-1}(C')$ entonces $f(z)$ transforma el interior de C , D , conformemente sobre el interior de C' , D' .

DEMOSTRACION. Podemos suponer G y $G' = f(G)$ acotados. $f(D)$ no puede contener puntos dentro y fuera de C' pues los puntos de D pueden unirse por arcos contenidos en D . Como f' no se anula en C (se deduce del T.14 del Cap. 2) hay un punto $a \in C$ donde la curva tiene tangente (no nula) y tal que C' tiene tangente (no nula) en $f(a)$. D queda a la izquierda de C (que por supuesto se recorre en sentido positivo). La conformidad en el entorno de a implica que C' será recorrida en un sentido tal que $f(D)$ quedará a la izquierda de su tangente en un entorno de $f(a)$. Luego, C' se recorre en sentido positivo y $f(D) \subset D'$. (En efecto, si $f(D) \not\subset f(G) \setminus \overline{D'}$ entonces existirá una sucesión $w_n = f(z_n)$ convergente a un punto w_0 sin contraimagen en \overline{D}).

$f(z)$ es 1 - 1 en D . Si no fuera así existirían $z_1 \neq z_2$, $z_i \in D$, $i = 1, 2$, tales que $w = f(z_1) = f(z_2)$. Separando D en dos regiones, D_1, D_2 , por un arco L interior a D salvo por sus extremos en C de manera que $z_1 \in D_1$, $z_2 \in D_2$, w pertenecerá a una de las regiones en que separa a D' la imagen de L . Y enseguida obtenemos una contradicción, pues entonces necesariamente $f(D_1)$ y $f(D_2)$ estarán contenidos en una misma componente conexa de $D' \setminus f(L)$ (distinta de D'). En consecuencia $f'(z) \neq 0$ en D y $f(D)$ es un conjunto simplemente conexo contenido en D' . (Si $f(D) \neq D'$ existirá un punto $b \in D'$ en la frontera de $f(D)$ y una sucesión de puntos $w_n \subset D'$, $w_n \rightarrow b$, cuya contraimagen $z_n = f^{-1}(w_n)$ es también convergente, y necesariamente a un punto en C . Luego $b \in C'$, contradicción.) QED

7. LA FORMULA DE POISSON. Sean D un dominio simplemente conexo y $u(x,y)$ una función armónica allí. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\overline{B_R(0)} \subset D$, $z_1 \in B_R(0)$. La transformación homográfica

$$(18) \quad \zeta = \frac{z - z_1}{z\bar{z}_1 - R^2} \frac{R(\bar{z}_1 - R)}{R - z_1}$$

lleva $\{|z| = R\}$ en $\{|\zeta| = 1\}$ y z_1 en 0. $U(\zeta) = u(z(\zeta))$ es entonces una función armónica en $B_1(0)$ y vale (cf. cap. 2):

$$u(z_1) = U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{d\theta}{d\phi} d\phi.$$

Pero $\frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\phi} = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{R(R^2 - |z_1|^2)}{|z\bar{z}_1 - R^2|^2}$. Luego, si $z_1 = \rho e^{i\tau}$,

$$(19) \quad u(z_1) = \frac{R^2(R^2 - |z_1|^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\phi})}{|Re^{i\phi}\bar{z}_1 - R^2|^2} d\phi =$$

$$= \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\phi})}{|z_1 - Re^{i\phi}|^2} d\phi = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\phi})}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\tau - \phi)} d\phi,$$

y queda demostrada la fórmula (47) del Cap. 2.

*8. CAMPOS ARMONICOS PLANOS. Sea $f(x,y)$ una función armónica definida en un dominio simplemente conexo D tal que $|f_x| + |f_y| > 0$. Sea g una armónica conjugada y $w = F(z) = (f + ig)(x,y)$. Luego $|f_x| + |g_x| > 0$, o sea, $|F'(z)| > 0$.

Luego, si $w_0 = F(z_0)$ entonces $z = F^{-1}(w)$ y $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{F'(z)} \neq 0$ al menos en un entorno de w_0 . O sea, F^{-1} es localmente conforme. Por tanto, $\Re w = \text{cte.}$, $\Im w = \text{cte.}$,

describen en el plano w dos rectas ortogonales. Sus imágenes en el plano z quedan definidas por las funciones $f(x,y) = \text{cte.}$, $g(x,y) = \text{cte.}$, que son ortogonales.

Por un **campo armónico plano** entenderemos una función vectorial $\underline{v} = \underline{v}(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))$ tal que $v_1 = \partial f / \partial x$, $v_2 = \partial f / \partial y$, f armónica. Definimos

$\omega(z) = v_1 - iv_2$. ω representa a \underline{v} y

$$(20) \quad \omega = \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dF}{dz}.$$

F es el **potencial complejo** de \underline{v} . Las líneas de flujo del campo se definen por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{-v_2}$$

Entonces, $v_2 dx - v_1 dy = -\frac{\partial g}{\partial x} dx - \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$, y por tanto, $dg = 0$ y g es constante sobre las líneas de flujo. El **flujo** que atraviesa un arco σ de extremos A, B es

$$\int_{\sigma} \underline{v} \times \underline{N} d\sigma = \int_{\sigma} (v_1, v_2) \times (dy, -dx) = \int_{\sigma} v_1 dy - v_2 dx = \int_{\sigma} dg = g(B) - g(A);$$

donde \underline{N} es el versor normal al arco.

El **trabajo** realizado por \underline{v} a lo largo del mismo arco σ es

$$\int_{\sigma} \underline{v} \times \underline{t} d\sigma = \int_{\sigma} (v_1, v_2) \times (dx, dy) = \int_{\sigma} v_1 dx + v_2 dy = \int_{\sigma} df = f(B) - f(A).$$

9. EJERCICIO. Si f define una transformación conforme de $B_r(a)$ sobre $B_R(A)$

entonces $f(z)$ es una función bilineal.

(Podemos suponer $r = R = 1$, $a = A = 0$. Si $f(0) = C \neq 0$ entonces existe una transformación homográfica h tal que $g = h \circ f$ lleva conformemente $B_1(0)$ sobre

$B_1(0)$ con $g(0) = 0$. Del lema de Schwarz aplicado a g y g^{-1} se concluye que

$|g(z)| \leq |z| \leq |g(z)|$. Luego, g es una rotación y $f = h^{-1} \circ g$ es homográfica).

CAPITULO 4.

La continuación analítica. Singularidades aisladas. Ceros y polos. El punto en el infinito. Teorema de los residuos. Principio del argumento. Teorema de Rouché. Teorema fundamental del álgebra. El comportamiento de una función holomorfa alrededor de un cero. El teorema de monodromía. La función analítica completa. El teorema de Abel.

1. LA CONTINUACIÓN ANALITICA. Sean D_1 y D_2 dos dominios con $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, y f_i una función holomorfa en D_i , $i = 1, 2$. Si $f_1 = f_2$ en $D_1 \cap D_2$ podemos definir una función $f = f_1$ en D_1 , $= f_2$ en $D_2 \setminus D_1$, holomorfa en $D_1 \cup D_2$. Diremos que esta función es la prolongación de f_1 en D_1 a $D_1 \cup D_2$. Si pasamos de D_2 a D_3, \dots , de D_{n-1} a D_n y en este último paso resulta $D_n \cap D_1 \neq \emptyset$ no debemos esperar que allí $f_1 = f_n$. Por ejemplo, si $D_1 = B_1(1)$, $D_2 = B_1(i)$, $D_3 = B_1(-1)$, $D_4 = B_1(-i)$, $D_5 = B_1(1)$ y $f_1(z) = \sqrt{z} = |z|^{1/2} \cdot e^{i\phi/2}$ entonces $f_5(z) = -|z|^{1/2} e^{i\phi/2}$, ($\phi = \text{Arg } z$,

$-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$). Supongamos ahora $f(z)$ definida por la serie $\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ con radio $R < \infty$. Entonces en $|z - z_0| = R$ hay un punto singular z_1 . Singular en el sentido que no se puede definir una función holomorfa en un entorno $B_r(z_1)$ del mismo que coincida con f en $B_R(z_0) \cap B_r(z_1)$. En efecto, si en todo punto z_1 tal que $|z_1 - z_0| = R$ puede prolongarse f a un entorno $B_r(z_1)$ entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que f es prolongable a $B_{R+\epsilon}(z_0)$ (demostrarlo). En consecuencia la nueva función tendrá radio de convergencia $\geq R + \epsilon$ y por tanto f debe tener alrededor de z_0 un desarrollo con radio de convergencia $> R$, contradicción.

Es fácil ver entonces que un criterio para determinar si z_1 es o no singular

es el siguiente: si $\sum_0^{\infty} f^n(b) \frac{(z-b)^n}{n!}$, con b en el segmento abierto de extre-

mos z_0 y z_1 , tiene radio de convergencia $r = |b - z_1|$ entonces z_1 es singular y

si $r > |b - z_1|$ entonces z_1 es **regular** (no singular). Al conjunto $\{z: |z - z_0| = R\}$ se lo denomina **frontera natural** si todos sus puntos son singulares.

EJEMPLOS. a) $1 + z + z^2 + \dots = (1 - z)^{-1}$ posee una singularidad en $z = 1$ pero

es continuable en todo otro punto del contorno $\{|z| = 1\}$.

b) $f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2^m} + \dots$ tiene a $\{|z| = 1\}$ por frontera natural.

En efecto, $R = 1$, y si $z_1 = e^{2\pi ip/2^q}$, p, q enteros positivos, entonces la serie

$$\sum_{n=q}^{\infty} r^{2^n} e^{2^n \cdot 2\pi ip/2^q} = \sum_{n=q}^{\infty} r^{2^n} \rightarrow \infty \text{ para } r \uparrow 1. \text{ O sea, } f(rz_1) \rightarrow \infty \text{ para } r \uparrow 1. \text{ El}$$

conjunto de los puntos z_1 así definido es denso en la circunferencia unitaria, y como el límite de puntos singulares es singular, resulta que toda esa circunferencia está formada por puntos singulares.

c) $F(z) = \sum \frac{z^{n!}}{n^2}$ tiene por frontera natural a $\{|z| = 1\}$. $R = 1$ pues la serie

converge en $z = 1$ y diverge en $z = x > 1$. Cada punto de la forma $e^{2\pi ip/q}$, p y q primos entre sí, es un punto singular. Esto es consecuencia del siguiente teorema sobre series a coeficientes positivos.

TEOREMA 1. Sea $f(z) = \sum a_n z^n$, $a_n \geq 0$, $R = 1$. Entonces en $z = 1$ hay un punto singular.

DEMOSTRACION. Sea $0 < r < 1$. $f(r) = \sum a_n (\epsilon + r - \epsilon)^n = \sum b_n (r - \epsilon)^n$, $\epsilon > 0$.

Este último es entonces el desarrollo en el punto $r = \epsilon$. Si $z = 1$ fuera un punto regular para $f(t)$, $\sum b_n (1 - \epsilon + \eta)^n$ convergería para cierto $\eta > 0$. Por tanto $\sum a_n (1 + \eta)^n < \infty$, y $R \geq 1 + \eta$, contradicción, QED.

EJERCICIO 1. Si $f(z)$ es holomorfa en D_1 y prolongable a $D_1 \cup D_2$ mostrar que $f'(z)$ es prolongable a $D_1 \cup D_2$ y que esta prolongación es la derivada de la prolongación de f .

2. SINGULARIDADES AISLADAS. Una función $f(z)$ tiene una **singularidad aislada** en $z = a$ si en un entorno reducido de a , $B_r(a) \setminus \{a\}$, $f(z)$ es holomorfa. No siempre una singularidad aislada es una verdadera singularidad. Si f es prolongable a $B_r(a)$ entonces la singularidad se dice **evitable**. Lo que interesa en esta situación es que $f(z)$ es regular alrededor de a y la cuestión es decidir que ocurre en a .

TEOREMA 2 (Laurent). Sea $f(z)$ holomorfa en $A = \{R < |z| < R'\}$, $R \geq 0$. Entonces

$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ en esa región y la serie es casi uniformemente convergente. Para

cualquier curva de Jordan regular J contenida en A con $z = 0$ en su dominio interior vale:

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ es la única serie de esa forma casi uniformemente convergente a $f(z)$ en A .

DEMOSTRACION. Sea K un compacto contenido en el anillo A . Existen dos circunferencias con centro $z = 0$, C y C' , de radios r y r' , tales que $R < r < r' < R'$ y $K \subset \{z: r < |z| < r'\} = A_1$. Sea $h \in A_1$. Entonces

$$f(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(z)}{z-h} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-h} dz = \sum_0^{\infty} a_n h^n - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-h} dz$$

donde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, y la serie converge absoluta y uniformemente si

$|h| \leq r' - \varepsilon < R'$, (ver demostración T.8, Cap. 2). No obstante no tiene por qué tener sentido $f^{(n)}(0)$ y por lo tanto no es necesariamente $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-h} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{h-z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \left\{ \frac{1}{h} + \frac{z}{h^2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{h^n} - \frac{z^n}{h^n(z-h)} \right\} dz = \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{b_m}{h^m} - B_n, \quad b_m = a_{-m} = \int_C f(z) z^{m-1} dz / 2\pi i, \end{aligned}$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) z^n}{h^n(z-h)} dz, \quad |B_n| \leq \frac{M\varepsilon}{\varepsilon} \left(\frac{r}{h}\right)^n,$$

donde la última desigualdad vale en el supuesto que $\text{dist}(h, \{|z| = r\}) \geq \varepsilon$.

Para esos h , $B_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-h} dz = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} h^{-m}.$$

De las fórmulas (13) y (14) del capítulo 2 obtenemos

$$(2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=s} z^n dz \begin{cases} = 0 & \text{si } n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, \\ = 1 & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

cualquiera que sea $s > 0$.

Supongamos que $\sum_{-\infty}^{+\infty} d_n z^n \rightarrow f(z)$ en A . Luego $\sum_{-\infty}^{+\infty} d_n z^{n-p-1} \rightarrow f(z)z^{-p-1}$. Por tanto

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{2\pi i} \int_J f(z)z^{-p-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n \int_J z^{n-p-1} dz = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_n}{2\pi i} \int_{|z|=r} z^{n-p-1} dz = d_p, \end{aligned} \quad \text{QED.}$$

Esto no se aplica a la función \sqrt{z} ¿Por qué?

Si $f(z)$ tiene un desarrollo de Laurent en $B_R(a) \setminus \{a\}$:

$$(3) \quad f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_1^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$$

llamaremos **parte principal** de la singularidad en $z = a$ a la serie $\sum_1^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$.

Si $b_n = 0$ para todo n diremos que la singularidad es **evitable**; si $b_n = 0$ para $n > m$ con $b_m \neq 0$ ($m > 0$), diremos que f tiene un **polo de orden m** en a

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

En este caso la función $\phi(z) = (z-a)^m f(z)$ tiene una singularidad evitable en $z = a$. Como para $|z-a|$ bastante pequeño $0 < M = |b_m/2| \leq |z-a|^m \cdot |f(z)|$ resulta $|f(z)| \geq M/|z-a|^m$. En particular, $|f(z)| \rightarrow \infty$ para $z \rightarrow a$. Por otra parte, $|z-a|^m \cdot |f(z)| \leq |b_m| + |b_m| = 4M$ cerca de $z = a$, o sea,

$4M / |z - a|^{m+1} \geq |f(z)|$. Podemos decir entonces que $|f(z)|$ crece como

$|z - a|^{-m}$ para $z \rightarrow a$.

A b_1 se lo denomina el **residuo** del polo. Si el polo es de orden uno entonces

$b_1 = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$. En todo caso (cf. (2)):

$$(4) \quad b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\epsilon} f(z) dz.$$

Si $z = a$ es una singularidad aislada para $f(z)$ que no es evitable ni es un polo entonces diremos que f tiene allí una **singularidad esencial**.

TEOREMA 3 (Gran teorema de Picard). *Si $z = a$ es una singularidad esencial para $f(z)$ entonces la función toma en todo entorno de a cualquier valor finito infinito veces con una excepción a lo más.*

No demostraremos este teorema sino el siguiente

TEOREMA 4 (Cassorati - Weierstrass). *En todo entorno de una singularidad aislada esencial existe un punto en el cual la función difiere tan poco como se quiera de cualquier número preasignado.*

DEMOSTRACION. Sean $f(z)$ con una singularidad esencial en $z = a$ y $c \in \mathbb{C}$. Queremos ver que dados $\epsilon > 0$ y $r > 0$, existe $z_1 \in B_r^1(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$ tal que

$|f(z_1) - c| < \epsilon$. Supongamos que en B_r^1 no hay ningún cero de $f(z) - c$. Luego,

$g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$ es holomorfa en B_r^1 . Bastará ahora ver que existe $z_1 \in B_r^1$ tal

que $|g(z_1)| > 1/\epsilon$. Si no fuera así tendríamos $|g(z)| \leq 1/\epsilon$. Sea b_n el n -ésimo

coeficiente de la parte principal de $g(z)$ en a . Entonces, de

$$|b_n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|z-a|=\rho} g(z)(z-a)^{n-1} dz \right| \leq \frac{\rho^n}{\epsilon}$$

sigue que $b_n = 0$ para todo n . O sea, $g(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^m \cdot \phi(z)$, con

$\phi(z) \neq 0$ en $B_r(a)$ y $f(z) - c = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m}$ en $B_r^1(a)$ con ψ holomorfa y no nula en

$B_r(a)$. En consecuencia, $f(z) = \frac{\psi(z) + c(z-a)^m}{(z-a)^m} = \frac{\sum_0^{\infty} A_n (z-a)^n}{(z-a)^m}$. Luego, $f(z)$

tiene un polo de orden m si $m > 0$, o una singularidad evitable si $m = 0$, contradicción, QED.

EJERCICIO 2. Si a es un punto donde $f(z)$ tiene una singularidad aislada y a es límite de ceros de $f(z)$ entonces la singularidad es esencial si $f(z) \neq 0$.

Pero si se verifica $f(z) = O(|z - a|^{-n})$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces la singularidad es evitable o bien es un polo de orden n a lo más (véase el párrafo siguiente).

EJERCICIO 3. Dar una demostración directa de (2) reemplazando z por $re^{i\theta}$ y usando como parámetro a $\theta \in [0, 2\pi]$.

EJERCICIO 4. Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en $z = a$ y es acotada en un entorno de a entonces la singularidad es evitable. En cambio, si $|f(z)| \rightarrow \infty$ para $z \rightarrow a$, la singularidad es un polo.

3. CEROS Y POLOS. EL PUNTO EN EL INFINITO. Si en $z = a$ la función $g(z)$ (holomorfa) tiene un cero de orden p y la función $f(z)$ tiene uno de orden q entonces $f \cdot g$ tiene un cero de orden $p + q$. Pero si $f(z)$ tiene allí un polo de orden q entonces $f(z)g(z) = (z - a)^{p-q}h(z)$, $h(a) \neq 0$, y fg tendrá un cero o un polo según sea $p > q$ o $p < q$. Si $p = q$, $fg \neq 0$ en un entorno de a . Ceros y polos presentan un comportamiento semejante que se hace más claro al tratar el punto ∞ . Sea $f(z)$ holomorfa en un **entorno circular del ∞** que por definición es un conjunto de la forma:

$$B_R(\infty) = \{z: |z| > R\}.$$

El ∞ es entonces una "singularidad aislada" que será evitable, un polo o una singularidad esencial según lo sea en $w = 0$ la función $g(w)$ obtenida de f por la transformación $w = 1/z$: $g(w) = f(1/w)$, $w \in B_{1/R}(0)$. Si $g(w) = w^p \cdot h(w)$, $h(0) \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$, diremos que $f(z)$ tiene un cero de orden p en el infinito.

TEOREMA 5. *Una función entera $f(z)$ con un polo de orden n en el infinito es un polinomio de grado n .*

DEMOSTRACION. $g(w) = \frac{b_n}{w^n} + \frac{b_{n-1}}{w^{n-1}} + \dots + \frac{b_1}{w} + F(w)$, $b_n \neq 0$, F holomorfa en C .

Luego, F es acotada en un entorno de $w = 0$. Entonces, $f(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + G(z)$; $G(z) = F(1/z)$ es acotada en un entorno del infinito, y por la hipótesis sobre f

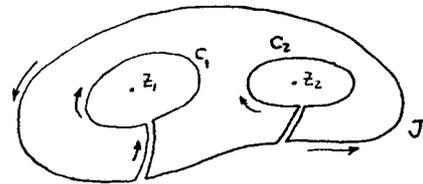
lo es en cualquier entorno del origen. Luego, G es constante (T. de Liouville), QED.

Recurriendo al Ej. 2 podemos reenumerar el teorema diciendo que una función entera que no crece más que una potencia en el infinito es un polinomio.

4. TEOREMA DE LOS RESIDUOS DE CAUCHY. PRINCIPIO DEL ARGUMENTO.

TEOREMA 6. Sea $f(z)$ holomorfa en el dominio simplemente conexo A salvo en un número finito de puntos, z_1, \dots, z_N , donde la función tiene polos. Sea $a_{-1,r}$ el residuo de $f(z)$ en z_r . Si J es una curva regular de Jordan que contiene en su interior D a los puntos z_r entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_J f(z) dz = \sum_{r=1}^N a_{-1,r}.$$



DEMOSTRACION. Sea $C_i = \{|z - z_i| = \epsilon\}$

con $\epsilon > 0$ tan pequeño de manera que $C_i \subset D$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces

1.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_J f dz = \sum_1^N \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} f(z) dz = \sum_1^N a_{-1,i}, \quad \text{QED.}$$

Sea $f(z)$ holomorfa sobre un arco regular C , abierto o cerrado. Entonces, si $f \neq 0$ sobre C :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} [\log f]_C = \frac{1}{2\pi i} [\log |f| + i \arg f]_C.$$

Si C es un arco cerrado

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'}{f} dz = [\arg f]_C / 2\pi.$$

Esto se expresa diciendo que $\frac{1}{i} \int_C \frac{f'}{f} dz$ es igual a la variación del argumento

de f sobre C . Si agregamos ahora las hipótesis que el arco sea una curva de Jordan y que f sea holomorfa en el interior D de J , salvo por un número finito de puntos donde la función presenta polos, vale el

TEOREMA 7. $\frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P = \text{número de ceros (de } f \text{ en } D) - \text{número de polos. O bien, variación del argumento de } f \text{ a lo largo de } J = 2\pi(Z - P).$

DEMOSTRACION. Si a es un cero de orden r , $f(z) = (z - a)^r h(z)$, y en un entorno de a tenemos $h(z) \neq 0$, y por tanto,

$$(5) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{r}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

En cambio, si a es un polo de f de orden s

$$(6) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-s}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Luego, $\frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f'}{f} dz = \sum_{i=1}^M r_i - \sum_{j=1}^N s_j = Z - P$, (M es el número de puntos distintos a a dos donde hay ceros y N el de puntos donde hay polos), QED.

En el teorema Z es la suma de los órdenes de todos los ceros. El contar r veces un cero de orden r aparece así como un hecho necesario y puede entenderse si

observamos, por ejemplo, que la función $(z - a)^r$ es límite de $\prod_{i=1}^r (z - a_i)$

para $a_i \rightarrow a$.

COROLARIO. *Bajo las mismas hipótesis del 7.7, si $F(z)$ es holomorfa dentro de y sobre J :*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_J F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum F(z_j) - \sum F(p_k).$$

Esto sigue inmediatamente de (5) y (6). Otra vez en la suma $\sum F(z_j)$ cada sumando $F(z_j)$ se suma tantas veces como el orden del cero z_j . Idem $F(p_j)$.

Lo visto nos impulsa a acuñar un nombre para un nuevo tipo de función.

DEFINICION 1. *Una función se dice meromorfa en un dominio si es holomorfa en cada punto con excepción de un número (numerable) de singularidades aisladas donde presenta polos. Se dirá meromorfa en z_0 si en un entorno circular reducido del punto es holomorfa y en z_0 tiene una singularidad evitable o un polo.*

TEOREMA 8. Una función meromorfa en la esfera de Riemann es una función racional.

DEMOSTRACION. La hipótesis dice que la función tiene un número finito de polos en \mathbb{C} y quizá uno en el ∞ . Fuera de estos es holomorfa en toda la esfera. Sean z_1, \dots, z_n los puntos de \mathbb{C} donde presenta polos de órdenes r_1, \dots, r_n y $f(z)$

la función. Luego, $f(z) \cdot (z - z_1)^{r_1} \dots (z - z_n)^{r_n}$ es una función holomorfa en \mathbb{C} con a lo más un polo en el infinito. Por el teorema 5 debe ser un polinomio

$P_1(z)$. Llamando $P_2(z) = \prod_1^n (z - z_i)^{r_i}$ tenemos ahora $f(z) = P_1(z)/P_2(z)$, QED.

5. TEOREMA DE ROUCHÉ. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA.

TEOREMA 9 (Rouché). Sea J una curva de Jordan regular en un dominio D simplemente conexo. Supongamos que f y g sean holomorfas en D y que sobre J verifiquen

$$|g(z)| < |f(z)|.$$

Entonces, f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros dentro de J .

DEMOSTRACION. Supongamos que el número de ceros de f , contados de acuerdo a sus órdenes, sea m , y el de $f + g$ sea n . Sea $F(z) = 1 + (g/f) = (f + g)/f$. Por el principio del argumento: $2\pi(n - m) =$ incremento de $\arg F$ cuando z recorre J . Pero $RF = 1 + R(g/f) \geq 1 - |g/f| > 0$ en J . Por tanto, el argumento vuelve a su valor original y $2\pi(n - m) = 0$, QED.

TEOREMA 10 (Gauss). $P(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$, $a_0 \neq 0$, tiene exactamente m ceros en \mathbb{C} , y $P(z) = a_0 \prod_{i=1}^m (z - z_i)$.

DEMOSTRACION. Sean $f(z) = a_0 z^m$, $g(z) = a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$, y $J = \{|z| = R\}$, con R tan grande como para que fuera y sobre J , $|g/f| < 1$. Como $f(z)$ tiene un cero de orden m en $z = 0$, por el T. de Rouché $(f + g)(z)$ tendrá m ceros en $B_R(0)$. Sean z_1, \dots, z_m esos ceros (pueden repetirse) y sea

$g(z) = \frac{a_0 z^m + \dots + a_m}{(z - z_1) \dots (z - z_m)}$. Esta función sólo tiene en \mathbb{C} singularidades evitables y es acotada. Por tanto, es constante, y necesariamente igual a a_0 , QED.

TEOREMA 11. Las raíces de $P(z) \equiv a_0 z^m + \dots + a_m = 0$ son continuas en los coeficientes a_j .

DEMOSTRACION. Sean $Q(z) \equiv (a_0 + \epsilon_0)z^m + (a_1 + \epsilon_1)z^{m-1} + \dots + (a_m + \epsilon_m)$, $f = P$, $g = Q - P = \epsilon_0 z^m + \dots + \epsilon_m$. Sea z_j un cero de P de orden r_j y c_j una circunferencia con centro z_j y radio tan pequeño como para que los otros ceros de P estén fuera de ella. Sobre c_j , $|f| > 0$, y si $\epsilon_0, \dots, \epsilon_m$ son bastante pequeños, $|f| > |g|$ allí. Luego, $Q = f + g$ tiene exactamente r_j ceros dentro de c_j , QED.

6. EL COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCION HOLOMORFA ALREDEDOR DE UN CERO. (Demostración del T.14 del Cap. 2). Supongamos que $w(z)$ admita un desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$ de la forma

$$w(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots, \quad m > 0, c_m \neq 0.$$

Existe un $\epsilon > 0$ tal que en $B_\epsilon(0)$ vale el desarrollo y tal que en $B'_\epsilon(0) \cup \{|z| = \epsilon\}$: $w(z) \neq 0 \neq w'(z)$. Sean $S_\epsilon = \{z: |z| = \epsilon\}$ y

$$\eta = \inf \{|w(z)|: z \in S_\epsilon\}.$$

Entonces $\eta > 0$. Sea $w_0 \in B'_\eta(0)$ y definamos $F(z) := w(z) - w_0$. En S_ϵ se tiene

$$|F(z) - w(z)| = |w_0| < \eta \leq |w(z)|.$$

Luego $F(z)$ tiene en $B_\epsilon(0)$ tantos ceros z_j como $w(z)$, es decir, m . Como $z_j \neq 0$, $F'(z_j) = w'(z_j) \neq 0$. En consecuencia estos son ceros simples, y por tanto dos a dos distintos. Conclusión: w toma el valor $w_0 \in B'_\eta(0) = B_\eta(0) \setminus \{0\}$ en exactamente m puntos de $B'_\epsilon(0)$.

7. CALCULO DE UNA INTEGRAL POR RESIDUOS. Evaluar $\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$, $0 < a < 1$. Con

el cambio de variables $t = e^x$:

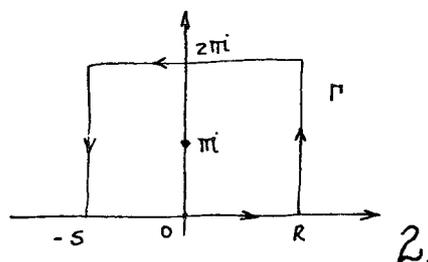
$$(7) \quad \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx,$$

y queremos mostrar que (7) = $\pi/\text{sen } a\pi$.

La función $f(z) = e^{az}/(1 + e^z)$ tiene por residuo en $z = \pi i$ a $e^{a\pi i}/\frac{de^z}{dz}(\pi i) = -e^{a\pi i}$.

Sea (cf. figura 2)

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^{az}}{e^z + 1} dz.$$



Entonces,

$$I = -2\pi i e^{a\pi i} =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-S}^R \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx - e^{a2\pi i} \int_{-S}^R \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx + i \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR+iy}}{e^{R+iy} + 1} dy - i \int_0^{2\pi} \frac{e^{-aS+iy}}{e^{-S+iy} + 1} dy \xrightarrow{R, S \rightarrow \infty} \\ &\rightarrow (1 - e^{a2\pi i}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx, \end{aligned}$$

pues las dos últimas integrales tienden a 0.

8. EL TEOREMA DE MONODROMIA. Sea C una unión finita de arcos regulares consecutivos, o sea, una curva regular, que une a con b . Supongamos que en el orden de recorrido de C tenemos una sucesión $z_0 = a, z_1, \dots, z_N = b$ de puntos (en C) y una familia de círculos $B_{r_0}(z_0), B_{r_1}(z_1), \dots, B_{r_N}(z_N)$, cada uno con intersección no vacía con el precedente. Sean $(f_0, z_0), (f_1, z_1), \dots, (f_N, z_N)$ elementos de funciones holomorfas definidas en los entornos indicados. Si $\widehat{z_{i-1} z_i} \subset B_{r_{i-1}}(z_{i-1}), f_i = f_{i-1}$ en $B_{r_i}(z_i) \cap B_{r_{i-1}}(z_{i-1}), i = 1, \dots, N$, diremos que esa familia describe una **continuación analítica** de (f_0, a) a lo largo de C . Esta nos lleva de (f_0, a) a (f_N, b) . Como son elementos de funciones ni el radio final r_N , ni el inicial, interesan para la descripción del elemento alcanzado. Dado que f_i queda determinada por los valores de f_{i-1} sobre $B_{r_i} \cap B_{r_{i-1}} \cap C$ se ve que si hubiéramos utilizado otra continuación sobre la misma curva, habríamos llegado a un (f_M, b) pero tal que $(f_M, b) = (f_N, b)$. O sea, la continuación es independiente del encadenamiento utilizado, aunque no de la curva C . Si C' une a con b la prolongación a lo largo de C' no necesariamente concluye

con (f_N, b) aun comenzando con (f_0, a) . Sin embargo, una curva muy próxima a C dará lugar al mismo resultado final. Por ejemplo, una poligonal inscrita a C y muy próxima lleva (f_0, a) en (f_N, b) , (demostrarlo). Sean D un dominio, $a \in D$ y (f, a) un elemento analítico de una función holomorfa en a . Diremos que (f, a) es **arbitrariamente continuable** en esta región si (f, a) admite una continuación a lo largo de toda curva regular que emana de a y está contenida en D .

TEOREMA 12. Sea (f, a) un elemento analítico en $a \in D$ dominio simplemente conexo. Si (f, a) es arbitrariamente continuable en D entonces queda definida una única función F holomorfa en D tal que $(F, a) = (f, a)$.

DEMOSTRACION. Supongamos $D = B_1(0)$. La transformación $w = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ transforma D en $\{w: |w| < 1\} = B_1(0)$ y lleva $z = a$ en $w = 0$. El elemento (f, a) se transforma en el elemento analítico $(f(z(w)), 0)$ que es arbitrariamente continuable en $B_1(0)$. Es decir, podemos suponer $a = 0$ en nuestro planteo original. En este caso, si no existiera una función F tal que $(f, 0) = (F, 0)$ entonces el radio de convergencia R del desarrollo de f alrededor de $z = 0$ sería menor que uno. En consecuencia, en $|z| = R$, f tendría un punto singular z_1 y no sería continuable a lo largo del segmento de longitud uno que sale de 0 y pasa por z_1 , contradicción. En el caso general, en lugar de la transformación homográfica $w = w(z)$ se recurre a una de las funciones cuya existencia afirma el T. de Riemann de la transformación conforme, QED.

EJERCICIO 1. Sea D un dominio simplemente conexo con $1 \in D$, $0 \notin D$. Entonces existe en D una rama del logaritmo tal que $\log 1 = 0$. Es decir, hay una función holomorfa F en D tal que $F(z) = \log z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i$ para todo $z \in D$ y con $k = k(z)$, $k(1) = 0$.

*9. LA FUNCION ANALITICA COMPLETA. Esta se define a partir de un elemento de función (f, a) y es el conjunto de todos los valores funcionales $w = w(z)$ que se hacen corresponder a z por medio de todas las prolongaciones posibles. En general es una "función multiforme, o multivaluada". Como la palabra función se usa para aplicaciones que llevan un punto en otro, y sólo uno, conviene describir la función analítica por medio de los elementos analíticos que la forman y que se caracterizan por las siguientes condiciones:

- 1) dados dos elementos uno es continuación del otro,
- 2) todo elemento continuación de uno pertenece a la familia.

Este proceso no excluye ningún punto de la esfera de Riemann. El punto en el infinito se trata por inversión en el origen (ya que esta transformación hace corresponder al abierto no acotado $\{|z| > 1\}$ con el abierto acotado $\{|z| < 1\}$). Dado un dominio simplemente conexo D tal que un punto $b \in D$ sea alcanzable por la prolongación y en el elemento (f,b) , si éste es arbitrariamente continuable en D queda definida allí una función holomorfa F . Pero quizá pueda llegarse, por otro camino, a (G,b) desde (f,a) , con (G,b) también arbitrariamente continuable en D , y definiendo una función holomorfa $G \neq F$. G y F serán ramas distintas de (f,a) en D en un adecuado entorno de b .

La llamada **superficie de Riemann** es una construcción que trata de resolver el problema de la multiformidad de una función. Es una superficie sobre la cual los valores de la función definen una aplicación univaluada, y construída "adhiriendo los elementos analíticos" obtenidos por prolongación de uno dado cuando ellos "coinciden en un disco". Sobre la superficie de Riemann queda definida una función univaluada, o uniforme, a valores en la esfera de Riemann, que se llama la **figura analítica** (monógena) determinada por el elemento analítico de partida.

*10. EL TEOREMA DE ABEL. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ tiene por frontera natural a $\{|z| = 1\}$.

Sin embargo converge en cada punto de la circunferencia unitaria y define una función continua sobre $\overline{B_1(0)}$. En efecto, esto se deduce del siguiente teorema debido a Abel.

TEOREMA 13. a) Sea $f(z) = \sum a_n z^n$ con $R = 1$ y con $\sum a_n$ convergente. Entonces

$$\lim_{1 > r \rightarrow 1} f(r) = \sum a_n.$$

b) Más aún, si $\sum a_n e^{in\theta}$ converge uniformemente en $(-\theta_0, \theta_0)$ entonces

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}) = \sum a_n e^{in\theta}.$$

La convergencia de $f(r)$ a A no implica que $A = \sum a_n$. Por ejemplo, $\sum (-1)^n z^n = 1/(1+z)$. Sin embargo, una recíproca parcial la suministra el siguiente teorema de Tauber.

TEOREMA 13. Sea $f(z) = \sum a_n z^n$ con $R = 1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. Si $f(r) \xrightarrow[r \uparrow 1]{} A$

entonces $\sum a_n$ converge a A .

Una forma de demostrar el teorema 13 es recurriendo a la importante **fórmula de sumación por partes** (transformación de Abel).

LEMA 1. Sean $u_k, v_k \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, n, s_k = u_1 + \dots + u_k$. Entonces

$$\sum_1^n u_k v_k = s_n v_n + \sum_1^{n-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$

DEMOSTRACION. $s_0 := 0; \sum_1^n u_k v_k = \sum_1^n (s_k - s_{k-1}) v_k = \sum_1^n s_k v_k - \sum_1^n s_{k-1} v_k =$
 $= \sum_1^n s_k v_k - \sum_1^{n-1} s_k v_{k+1} = s_n v_n + \sum_1^{n-1} s_k (v_k - v_{k+1}),$ QED.

Sean ahora $\{u_n(x)\}, \{v_n(y)\}$, sucesiones de funciones complejas definidas en los subconjuntos del plano complejo X, Y , respectivamente.

LEMA 2. La serie $\sum u_j(x)v_j(y)$ es uniformemente convergente en $X \times Y$ si alguno de los siguientes casos se presenta:

a) $\sum u_n(x)$ converge uniformemente en X , y $\{v_n(y)\}$ es uniformemente acotada en Y y decrece monótonamente en todo $y \in Y$ (o crece),

b) $\sum_1^n u_j(x)$ es uniformemente acotada en X , $\{v_n(y)\}$ crece uniformemente a cero (o decrece).

c) $\sum u_n(x)$ converge uniformemente en X y $|v_1(y)| + \sum_1^\infty |v_n(y) - v_{n+1}(y)|$ es acotada en Y .

DEMOSTRACION. Está claro que en a) y b) se dice implícitamente que $v_n(y)$ es real para todo n y todo y . Sean ($q > m$):

$$\varepsilon_m := \sup_{\substack{q > m \\ x \in X}} \left| \sum_{m+1}^q u_k(x) \right|; \delta_{mn} := |v_n(y)| + \sum_{m+1}^{n-1} |v_k(y) - v_{k+1}(y)|.$$

Del lema 1 se deduce ahora que

$$\left| \sum_{k=m+1}^n u_k(x)v_k(y) \right| \leq \varepsilon_m \cdot \delta_{mn}.$$

Si $\{v_n\}$ es monótona, $\delta_{mn} = |v_n(y)| + |v_n(y) - v_{m+1}(y)|$ y siguen a) y b). Por otra parte

$$|v_n(y)| \leq |v_1(y)| + |v_n(y) - v_1(y)| \leq |v_1(y)| + \sum_1^{n-1} |v_{k+1}(y) - v_k(y)| \leq M$$

y c) resulta inmediatamente pues $\epsilon_m \rightarrow 0$, QED.

EJERCICIO. Probar T. 13, b) usando lema 2, a).

11. PUNTOS CRÍTICOS. Diremos que un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto **crítico** aislado de una función analítica f si en un entorno reducido de z_0 , $B_r'(z_0)$, hay un elemento de función (f, z_1) , $z_1 \in B_r'(z_0)$, arbitrariamente continuable en ese entorno. Si hay un número n tal que para todo $z \in B_r'(z_0)$ el conjunto de valores tomados por la prolongación de f es finito y menor o igual a n , y si para $z \rightarrow z_0$, esos valores convergen a un número o bien a infinito, diremos que el punto es **algebraico**. En caso contrario diremos que z_0 es un punto crítico

trascendente. Por ejemplo, 0 es un punto crítico algebraico para $\sqrt[n]{z}$ y es trascendente para $\log z$. Un punto crítico algebraico se caracteriza por ser de la forma $\Phi(\sqrt[n]{z - z_0})$ donde Φ es meromorfa en $B_r(z_0)$, holomorfa en $B_r'(z_0)$, para cierto r . Estos puntos críticos serán llamados puntos de ramificación de la función analítica. También así denotaremos los puntos críticos de una función analítica donde ésta se comporta en forma semejante al logaritmo en $z_0 = 0$. En realidad, el concepto de punto crítico abarca más casos. (Los citados corresponden a singularidades en una rama de la función analítica completa). Nosotros no queremos discutirlos aquí sino sólo introducir una nomenclatura para aislar dos ideas: la de punto de **ramificación algebraica** y la de punto de **ramificación logarítmica**.

NB. Es oportuno observar que la idea de rama utilizada es generalizable. Nos hemos restringido en el texto a un concepto que propiamente podría describirse como **rama univaluada** holomorfa de una función analítica F en un dominio simplemente conexo D y que es una función holomorfa en D , f , que toma valores asumidos por F (la cual está definida en $D' \supset D$). O sea, existe un elemento de F , $(F, a) = (f, a)$, $a \in D$, arbitrariamente continuable en D .

CAPITULO 5.

La función gamma. La fórmula de recurrencia. La función beta. La fórmula de duplicación de Legendre. La fórmula de Stirling. Productos infinitos. El teorema de Mittag-Leffler y las funciones racionales.

1. LA FUNCION GAMMA. Se define, para $\Re z > 0$, por medio de una integral:

$$(1) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad t^{z-1} = e^{(\text{Log } t)(z-1)}.$$

Sean

$$(2) \quad \phi(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \psi(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Entonces, $\Gamma(z) = \phi(z) + \psi(z)$. La segunda integral define en realidad una función entera. Y la primera también puede prolongarse de $\Re z > 0$ a

$\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. En efecto, reemplazando e^{-t} por su serie de Taylor obtenemos

$$(3) \quad \phi(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

La última serie es absoluta y uniformemente convergente en cualquier conjunto compacto del plano que no contenga al cero o a un entero negativo. Luego, para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$, podemos definir

$$(4) \quad \Gamma(z) = \psi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)},$$

función meromorfa con polos simples en los enteros no positivos que extiende a la función (1) holomorfa en $\Re z > 0$.

2. LA FORMULA DE RECURRENCIA. Sea $x > 0$, entonces $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^{\infty} (t^x/x) e^{-t} dt,$

y por tanto $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. Usando el Teorema 11 del Cap. 2 obtenemos

$$(5) \quad z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

Como $\int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ sigue que

$$(6) \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!\Gamma(1) = n!.$$

La función meromorfa $\Gamma(z)$ aparece así como un intento de extender a números no naturales el concepto de factorial. Por otra parte tenemos

$$(7) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

$$(8) \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \dots \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{(2n-1)}{2} = \\ = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}.$$

3. LA FUNCION BETA. Si $x, y > 0$, por definición

$$(9) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Entonces $B(x, y) = B(y, x)$. La expresión que define a $B(x, y)$ puede simetrizarse con un cambio de variables obteniéndose

$$(10) \quad B(x, y) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2} + \tau\right)^{x-1} \left(\frac{1}{2} - \tau\right)^{y-1} d\tau.$$

Si $s > 0$ y $\tau = t/2s$, resulta

$$(11) \quad (2s)^{x+y-1} B(x, y) = \int_{-s}^s (s+t)^{x-1} (s-t)^{y-1} dt,$$

integrando en s , luego de multiplicar por e^{-2s} , obtenemos

$$(12) \quad B(x,y) \cdot \int_0^{\infty} e^{-2s} (2s)^{x+y-1} ds = \int_0^{\infty} ds \int_{-s}^s e^{-2s} (s+t)^{x-1} (s-t)^{y-1} dt.$$

Con la transformación $\sigma = s + t$, $\tau = s - t$, de jacobiano $\frac{\partial(s,t)}{\partial(\sigma,\tau)} = \frac{1}{2}$, se obtiene

$$\frac{1}{2} B(x,y) \Gamma(x+y) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma-\tau} \sigma^{x-1} \tau^{y-1} d\tau = \frac{1}{2} \Gamma(x) \Gamma(y).$$

Por tanto

$$(13) \quad B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Así como la función gamma está vinculada al $n!$ la función beta lo está con el combinatorio $\binom{n+m}{n}$. En efecto, $\frac{1}{(x+y+1)B(x+1,y+1)}$ toma el valor $\frac{(n+m)!}{n! m!}$ si $x = m$, $y = n$. Si en (9) ponemos $t = \sin^2 s$ resulta

$$(14) \quad B(x,y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} s \cos^{2y-1} s ds.$$

Luego,

$$(15) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha} s ds = \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha} s ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}, \quad \alpha > -1.$$

Sea ahora $1 > x > 0$. Entonces

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = B(x,1-x) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{-x} dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{dt}{1-t}.$$

Haciendo $y = t/(1-t)$, obtenemos (cf. §7, Cap. 4):

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \int_0^{\infty} \frac{y^{x-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}.$$

Prolongando analíticamente se arriba a la siguiente importante fórmula:

$$(16) \quad \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}, \quad z \notin \mathbb{Z}$$

Y de la misma manera, si $\Re z, \Re w > -1$, a

$$(17) \quad B(z+1, w+1) = \int_0^1 t^z (1-t)^w dt = \frac{\Gamma(z+1) \Gamma(w+1)}{\Gamma(z+w+2)}.$$

De (16) se concluye que $\Gamma(z) \neq 0$ para todo z .

*4. FORMULA DE DUPLICACION DE LEGENDRE. Vale (cf. (8)):

$$(18) \quad 2\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2).$$

DEMOSTRACION. Sea $p > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} &= 2 \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx = \left(x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right) = 2^{1-2p} \int_0^1 (1-y)^{p-1} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \\ &= 2^{1-2p} \int_0^1 (1-y)^{p-1} y^{\frac{1}{2}-1} dy = \frac{2^{1-2p} \Gamma(p) \Gamma(1/2)}{\Gamma(p+1/2)}. \end{aligned}$$

5. LA FORMULA DE STIRLING. Esta fórmula permite expresar en forma sencilla el comportamiento asintótico del factorial de n , es decir, el comportamiento para grandes valores del argumento:

$$(19) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

\sim significa en esta situación que

$$(20) \quad \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Equivalentemente, si $p = n$ vale que $\Gamma(p) = p!/p$ y por tanto

$$(21) \quad \Gamma(p) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \left(\frac{p}{e}\right)^p.$$

Esta fórmula es correcta aún para p real positivo y es un caso particular del siguiente importante resultado.

TEOREMA 2. Sea z tal que $|\operatorname{Arg} z| < \pi - \epsilon$, $\epsilon > 0$. Entonces $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} e^{-z} z^{z-1/2}$,

uniformemente para $|z| \rightarrow \infty$. (Aquí $z^{z-1/2}$ es real para z real).

6. PRODUCTOS INFINITOS. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$. Diremos que

$(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n)\dots = \prod_1^\infty (1 + a_j)$ es un producto infinito convergente

si existe $p \neq 0$, $p \neq \infty$, tal que $\prod_1^n (1 + a_j) \rightarrow p$. En este caso $p =: \prod_1^\infty (1 + a_j)$.

TEOREMA 1. Si $\sum_1^\infty |a_n| < \infty$ entonces $\prod_1^\infty (1 + a_n)$ converge a partir de un N .

DEMOSTRACION. Si $0 < |z| < 1/2$,

$$\left| 1 - \frac{\text{Log}(1+z)}{z} \right| = \left| \frac{z}{2} - \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} - \dots \right| < \frac{1}{2}.$$

Luego, $\frac{|z|}{2} \leq |\text{Log}(1+z)| < \frac{3}{2}|z|$, $|z| \leq 1/2$, y se tiene

$\sum_N^\infty |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_N^\infty |\text{Log}(1+a_n)| < \infty$ para $n \geq N$ tal que $|a_n| \leq 1/2$. En conse-

cuencia, $\log \prod_N^M (1 + a_n) = \sum_N^M \text{Log}(1 + a_n) \rightarrow q$. Entonces, $\exp(\log \prod_N^M (1 + a_n)) \rightarrow$

$\rightarrow \exp q = p \neq 0$, y $\prod_N^M (1 + a_n) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{} p$, QED.

COROLARIO. Sea $\sum M_n$ una mayorante de $\sum |u_n(z)|$ para $z \in D$ dominio. Si cada

función u_n es holomorfa en D entonces $\prod_N^\infty (1 + u_n(z))$ converge uniformemente a

una función holomorfa no nula en D , si N es suficientemente grande.

DEMOSTRACION. $\sum_{p+1}^Q |\text{Log}(1 + u_n(z))| \leq \frac{3}{2} \sum_{p+1}^Q |u_n(z)| \leq \frac{3}{2} \sum_{p+1}^Q M_n < \epsilon$ para todo

$P, Q, P < Q, P \geq P_0(\epsilon)$. Luego,

$$e^{\log \prod_N^P (1 + u_n(z))} \cdot e^{\log \prod_{P+1}^Q (1 + u_n(z))} = \left[\prod_N^P (1 + u_n(z)) \right] \cdot e^{O(\epsilon)} =$$

$$= \left[\prod_N^P (1 + u_n(z)) \right] \cdot (1 + O(\epsilon)),$$

cualquiera sea $Q > P$. Entonces $\left| \prod_N^Q - \prod_N^{Q'} \right| = \left| \prod_N^P \right| \cdot O(\epsilon) =$

$$= \prod_N^P (1 + M_n) \cdot O(\epsilon) = \prod_N^\infty (1 + M_n) \cdot O(\epsilon) = O(\epsilon), \quad \text{QED.}$$

La función $\pi/\sin \pi z$ tiene polos simples en $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, con residuos $(-1)^n$. Luego, de la fórmula (16) sigue que $\Gamma(z)$ tiene polos simples en $z = -n$, con residuos $(-1)^n/n!$. La función $\Gamma(z)^{-1}$ es entonces una función entera con ceros simples en los enteros no positivos. Se puede demostrar que

$$(22) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right],$$

donde γ es la constante de Euler, $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n \right)$, y la convergencia es uniforme sobre compactos.

Obsérvese que no es aplicable el corolario precedente al producto de los paréntesis. El factor $e^{-z/n}$ es necesario para lograr la convergencia del producto infinito (22).

7. EL TEOREMA DE MITTAG - LEFFLER. La relación entre $\Gamma(z)^{-1}$ y $\Gamma(z)$ puede extenderse a toda función entera $f(z)$ no idénticamente nula. Su recíproca $g(z)$ es una función meromorfa en todo el plano, y por tanto, en todo recinto acotado sólo presenta un número finito de singularidades que son polos. Recíprocamente, dada g meromorfa en \mathbb{C} , $1/g$ es una función entera con ceros en los polos de g , y del mismo orden. La diferencia entre dos funciones meromorfas en \mathbb{C} , g y G , que poseen los mismos polos y partes principales, es una función entera.

PROBLEMA: dada una sucesión de puntos, finita o infinita, sin puntos de acumulación en \mathbb{C} , $\{z_n\}$, y una sucesión de partes principales, $\{P_n(z)\}$ ¿existe una función meromorfa en \mathbb{C} que tenga exactamente como singularidades esos polos con esas partes principales?

TEOREMA 2 (Mittag-Leffler). Siempre existe una función que resuelve afirmativamente el problema precedente.

Apoyados en este resultado podríamos probar que vale

$$(23) \quad \pi \cotg \pi z = \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right] = \\ = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

donde la última serie es casi uniformemente convergente en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

TEOREMA 3 (Caracterización de las funciones racionales).

- (A) Toda función racional admite una descomposición en fracciones simples que pone de manifiesto sus polos y partes principales.
- (B) Se pueden construir funciones racionales cuyos polos y partes principales han sido prefijadas.
- (C) La función racional más general con polos y partes principales dadas se obtiene sumando a una de ellas un polinomio.
- (D) Condición necesaria y suficiente para que una función definida en la esfera de Riemann sea una función racional es que presente en ella sólo un número finito de singularidades y que éstas sean polos.

De este teorema sólo resta probar que una función racional admite un desarrollo en fracciones simples, y esto se precisa en el siguiente teorema.

TEOREMA 4. Sea $Q(z) = a_0(z - z_1)^{s_1} \dots (z - z_n)^{s_n}$, $a_0 \neq 0$, $n > 0$, y P un polinomio con grado $P < \text{grado } Q$. Entonces, si $f(z) := P(z)/Q(z)$,

$$(24) \quad f(z) = \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{k_j} \frac{b_{s,j}}{(z - z_j)^s}, \quad z \neq z_j.$$

DEMOSTRACION. Sea $j = 1$. Entonces, si $P(z) = b_0(z - w_1)^{r_1} \dots (z - w_m)^{r_m}$, y

$$w_1 = z_1, \quad f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_1)^{s_1 - r_1}}$$

con h holomorfa en un entorno $B_\epsilon(z_1)$ donde Q no

tiene otro cero distinto de z_1 . Luego,

$$f(z) = \frac{b_{1,1}}{z - z_1} + \frac{b_{2,1}}{(z - z_1)^2} + \dots + \frac{b_{k_1,1}}{(z - z_1)^{k_1}} + g(z),$$

si $k_1 = s_1 - r_1 > 0$, y con $g(z)$ holomorfa en $B_\epsilon(z_1)$. La parte principal

$P_1(z) = \sum_{s=1}^{k_1} \frac{b_{s,1}}{(z - z_1)^s}$ es idénticamente nula si $s_1 \leq r_1$. En consecuencia,

$f(z) - \sum_{j=1}^n P_j(z)$ es holomorfa en \mathbb{C} y tiende a cero para $z \rightarrow \infty$. O sea, es igual a cero, QED.

Obsérvese que $P_j(z)$ es el residuo de $f(t)/(z - t)$ en $t = z_j$. En efecto, si C_1 es una circunferencia con centro z_1 que no contiene a z_2, \dots, z_m ni a z se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(t)}{z - t} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{P_1(t)}{z - t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left(\sum_{j=1}^{k_1} \frac{b_{j,1}}{(t - z_1)^j} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t - z_1)^{k-1}}{(z - z_1)^k} \right) dt = P_1(z). \end{aligned}$$

8. El teorema de Mittag-Leffler es una suerte de dual del siguiente resultado que generaliza al famoso **teorema del producto de Weierstrass**.

TEOREMA 5. *Sea G un dominio en \mathbb{C} y $\{a_j\} \subset G$ una sucesión de puntos que no se acumula en G . Sea $\{n_j\}$ una sucesión de enteros positivos. Existe entonces una función holomorfa en G que se anula solamente en los puntos a_j y con orden n_j .*

*9. **EL LIMITE DE EULER PARA LA FUNCION GAMMA.** Sea D un dominio acotado tal que su clausura no contenga ninguna de las singularidades de $\Gamma(z)$. Entonces, para n entero positivo y $z \in D$, vale uniformemente en D que:

$$\frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(z).$$

CAPITULO 6.

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. Singularidades. Teorema de Fuchs. Wronskiano. Naturaleza de la solución en un entorno de una singularidad regular. La ecuación de Bessel. Funciones de Bessel, fórmulas de recurrencia, ceros. Fórmula de Lommel. Desarrollos asintóticos. Las funciones de Weber y Hankel.

1. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGENEAS. Sean D un dominio simplemente conexo y $p_i(z)$, $i = 1, \dots, n$, meromorfas en D . ¿Existe alguna solución de la ecuación

$$(1) \quad \frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z) \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(z) \frac{dw}{dz} + p_n(z)w = 0,$$

que sea meromorfa en D ? ¿Cómo afectan las singularidades de los coeficientes a la solución? Trataremos los casos más simples: $n = 1, 2$. La ecuación diferencial de primer orden

$$(2) \quad \frac{dw}{dz} + p(z)w = 0$$

con p holomorfa en D tiene por solución a

$$(3) \quad w(z) = ke^{-\int_{z_0}^z p(t) dt}, \quad z_0 \in D,$$

donde la integral se calcula sobre cualquier arco regular que vaya de z_0 a z y contenido en D . k es el valor de w en z_0 y es un dato para la determinación de la solución. (3) es la única solución de (2) tal que $w(z_0) = k$. En efecto,

$\int_{z_0}^z p(t) dt$ es una primitiva de p , holomorfa en D ; derivando (3) se obtiene (2).

Si $w(z_0) = 0$ y $w' + pw = 0$ en D entonces $w^{(j)}(z_0) = 0$ para todo j , y por tanto,

(3) es la única solución que vale k en z_0 . Obsérvese entonces que la solución de (2) que no es idénticamente nula es distinta de cero en todo punto.

2. LA ECUACION DIFERENCIAL HOMOGENEA DE SEGUNDO ORDEN. Consideremos el caso

regular: $p(z)$ y $q(z)$ holomorfas en D , y

$$(4) \quad \frac{d^2 w}{dz^2} + p(z) \frac{dw}{dz} + q(z)w = 0 .$$

TEOREMA 1 (Fuchs). Sean $B_R(z_0) \subset D$; $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. Existe exactamente una función $w(z)$ holomorfa en $B_R(z_0)$ tal que satisface (4) y $w(z_0) = a_0$, $w'(z_0) = a_1$.

Supongamos demostrado el teorema. Siguiendo un arco arbitrario podemos continuar la $w(z)$ encontrada y de manera que su prolongación satisfaga (4). Luego, existe una función holomorfa en D , que también llamaremos w , tal que resuelve (4) y $w(z_0) = a_0$, $w'(z_0) = a_1$. Obviamente, es la única con esas propiedades y tenemos el

COROLARIO 1. Existe una única función holomorfa en D , solución de $w'' + pw' + qw = 0$, determinada por los valores de ella y su derivada en un punto del dominio.

Sea $w_0(z)$ la solución tal que $w_0(z_0) = 1$, $w_0'(z_0) = 0$ y $w_1(z)$ la solución que verifica $w_1(z_0) = 0$, $w_1'(z_0) = 1$. Entonces, vale el

COROLARIO 2. Toda solución es combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes (*) w_0, w_1 :

$$(5) \quad w(z) = a_0 w_0(z) + a_1 w_1(z).$$

Al par w_0, w_1 se lo llama par fundamental, o sistema fundamental, de soluciones de la ecuación.

Sean $f(z)$ y $g(z)$ holomorfas en D . Se llama wronskiano de f y g , $W(f, g)$, a la función

$$(6) \quad W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} .$$

(*) Es decir, si $Aw_0 + Bw_1 = 0$ en D , A y B constantes, entonces $A = B = 0$.

Si $W(f,g)(z) \neq 0$ en D (dominio simplemente conexo) entonces f y g son linealmente independientes (demostrarlo). Las funciones $f = z$, $g = z^2$ en $D = \mathbb{C}$ son linealmente independientes pero $W(f,g)(0) = 0$. Sin embargo, para soluciones de una ecuación como (4) la anulación del wronskiano en un punto es equivalente a la anulación idéntica y a la dependencia lineal. En efecto, sean F y G soluciones de (4). Tenemos en D , si $W = W(F,G)$, que

$$(7) \quad \frac{d}{dz} W + pW = 0.$$

Luego, $W = ke^{-\int p dz}$. En consecuencia, $W(F,G)(z_1) = 0$ si y sólo si $W(F,G) \equiv 0$.

Del corolario 1 sigue ahora fácilmente que $W \equiv 0$ es condición necesaria y suficiente para la dependencia lineal de las soluciones F y G .

*3. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1. Podemos suponer que $z_0 = 0$. Veremos que existe una serie de potencias de radio de convergencia mayor que o igual a R , $\sum a_n z^n$, con a_n combinación lineal de los datos a_0 y a_1 , que satisface a la ecuación diferencial (4), y que los coeficientes a_n están unívocamente determinados por esos datos. Esto probará el teorema. Sean $p(z) = \sum_0^\infty p_n z^n$, $q(z) = \sum_0^\infty q_n z^n$. Ensayemos

$$(8) \quad w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

en $w'' + pw' + qw = 0$:

$$\sum_2^\infty n(n-1)a_n z^{n-2} + \left(\sum_0^\infty p_n z^n\right)\left(\sum_1^\infty n a_n z^{n-1}\right) + \left(\sum_0^\infty q_n z^n\right)\left(\sum_0^\infty a_n z^n\right) = 0.$$

Tenemos entonces

$$(9) \quad (2a_2 + p_0 a_1 + q_0 a_0) + \\ (3.2a_3 + p_1 a_1 + 2p_0 a_2 + q_0 a_1 + q_1 a_0)z + \\ \dots$$

$$(n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-1}p_0 + (n-2)a_{n-2}p_1 \dots + a_1p_{n-2} + a_{n-2}q_0 + a_{n-3}q_1 + \dots + a_0q_{n-2})z^{n-2} + \dots = 0.$$

Sean ahora $M = \sup \{|p(z)| : |z| \leq r\}$, $N = \sup \{|q(z)| : |z| \leq r\}$, $r < R$. En consecuencia, $|p_n| \leq \frac{M}{r^n}$, $|q_n| \leq \frac{N}{r^n}$.

Definamos: $K = \sup(M, Nr)$. Luego,

$$|p_n| \leq K/r^n, \quad |q_n| \leq K/r^{n+1}.$$

Definiremos inductivamente una sucesión de números no negativos, b_j , de manera que $|a_n| \leq b_n$. Sean $b_0 = |a_0|$, $b_1 = |a_1|$. Luego, anulando cada coeficiente en (9), obtenemos:

$$2|a_2| \leq b_1|p_0| + b_0|q_0| \leq b_1K + b_0K/r \leq 2b_1K + b_0K/r =: 2b_2,$$

Si $|a_i| \leq b_i$, $i = 1, \dots, n-1$, a partir de $n = 3$, tenemos

$$\begin{aligned} n(n-1)|a_n| &\leq \\ &\leq (n-1)b_{n-1}|p_0| + (n-2)b_{n-2}|p_1| + \dots + b_1|p_{n-2}| + b_{n-2}|q_0| + \dots + b_0|q_{n-2}| \leq \\ &\leq nb_{n-1}K + (n-1)b_{n-2}\frac{K}{r} + \dots + 3b_2\frac{K}{r^{n-3}} + 2b_1\frac{K}{r^{n-2}} + b_0\frac{K}{r^{n-1}} = \\ &=: n(n-1)b_n. \end{aligned}$$

Por tanto, si $n \geq 3$,

$$(10) \quad n(n-1)b_n = nb_{n-1}K + \frac{(n-1)(n-2)b_{n-1}}{r}.$$

Si $K = 0$, $b_3 = b_4 = \dots = 0$ y $w = a_0 + a_1z$ es la solución buscada. Si $K > 0$ y $b_0 = b_1 = 0$, $w = 0$ es la solución de la ecuación. Si $K > 0$ y $b_0 + b_1 > 0$ entonces $b_n > 0$ para $n \geq 3$ y

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{K}{n-1} + \frac{n-2}{nr} \rightarrow \frac{1}{r}.$$

Sigue que $\sum b_n z^n$ es convergente en $|z| < r$, y por lo tanto, $\sum a_n z^n$ tiene radio de convergencia por lo menos R . Este hecho justifica los pasos formales previos, QED.

NB. La analiticidad de los coeficientes de la ecuación permitió demostrar que la serie, solución formal, define una verdadera solución. Puede suceder que una ecuación diferencial tenga una solución formal en forma de serie que no converja a una función.

4. NATURALEZA DE LA SOLUCIÓN DE $w'' + pw' + qw = 0$ CERCA DE UNA SINGULARIDAD. Sea $z_0 \in D$ dominio simplemente conexo, donde están definidas las funciones meromorfas p y q . Diremos que z_0 es una **singularidad regular** de la ecuación si

$$(z - z_0)p(z) \quad \text{y} \quad (z - z_0)^2 q(z)$$

son holomorfas en z_0 . Cerca de una singularidad regular z_0 la ecuación posee dos soluciones linealmente independientes las cuales a lo más poseen un punto de ramificación allí. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $z_0 = 0$. Ensayemos una "solución" de la forma

$$(11) \quad w(z) = z^\alpha \cdot \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r.$$

La hipótesis sobre $z_0 = 0$ se traduce en los siguientes desarrollos para p y q que suponemos válidos en $0 < |z| < R$:

$$(12) \quad zp(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r z^r, \quad z^2 q(z) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r z^r,$$

con $|p_0| + |q_0| + |q_1| \neq 0$. Esta última desigualdad excluye el caso regular.

Llamaremos **ecuación indicial** a

$$(13) \quad F(\alpha) = 0, \quad F(\alpha) \equiv \alpha(\alpha - 1) + p_0 \alpha + q_0,$$

y sus soluciones serán los exponentes de la singularidad regular en cuestión.
 Reemplazando en $w'' + pw' + qw = 0$ a w por (11) obtenemos formalmente:

$$\begin{aligned} & \{ \alpha(\alpha - 1)z^{\alpha-2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r + z^\alpha \sum_{r=2}^{\infty} a_r r(r-1)z^{r-2} + 2\alpha z^{\alpha-1} \sum_{r=1}^{\infty} a_r r z^{r-1} \} + \\ & + \left(\sum_0^{\infty} p_r z^{r-1} \right) \cdot \left(\alpha z^{\alpha-1} \sum_0^{\infty} a_r z^r + z^\alpha \sum_1^{\infty} a_r r z^{r-1} \right) + \\ & + \left(\sum_0^{\infty} q_r z^{r-2} \right) \cdot \left(z^\alpha \sum_0^{\infty} a_r z^r \right) = 0. \end{aligned}$$

Agrupando los coeficientes según las potencias de z obtenemos,

$$\begin{aligned} & z^{\alpha-2} \{ \alpha(\alpha - 1)a_0 + \alpha p_0 a_0 + a_0 q_0 \} + \\ & + z^{\alpha-1} \{ \alpha(\alpha - 1)a_1 + 2\alpha a_1 + (1 + \alpha)p_0 a_1 + \alpha a_0 p_1 + q_1 a_0 + q_0 a_1 \} + \\ & + z^\alpha \{ \alpha(\alpha - 1)a_2 + 2\alpha \cdot 2a_2 + 2a_2 + \alpha a_0 p_2 + \alpha a_1 p_1 + \alpha a_2 p_0 + \\ & + 2a_2 p_0 + p_1 a_1 + q_2 a_0 + q_1 a_1 + q_0 a_2 \} + \dots = 0, \end{aligned}$$

que puede reescribirse de la siguiente manera usando la ecuación indicial,

$$\begin{aligned} & z^{\alpha-2} \{ a_0 F(\alpha) \} + z^{\alpha-1} \{ a_1 F(\alpha+1) + a_0 (\alpha p_1 + q_1) \} + \\ & + z^\alpha \{ a_2 F(\alpha+2) + a_0 (\alpha p_2 + q_2) + a_1 ((\alpha + 1)p_1 + q_1) \} + \dots + \\ & + z^{\alpha+n-2} \{ a_n F(\alpha+n) + \sum_{s=0}^{n-1} a_s [(\alpha + s)p_{n-s} + q_{n-s}] \} + \dots = 0. \end{aligned}$$

0 sea,

$$(14) \quad \begin{cases} a_0 F(\alpha) = 0, & F(\alpha) = \alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0, \\ a_n F(\alpha+n) = - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \{(\alpha + j)p_{n-j} + q_{n-j}\}, & n \geq 1, \end{cases}$$

TEOREMA 2. a) Si la ecuación indicial en la singularidad regular ubicada en el punto $z_0 = 0$ de la ecuación diferencial $w'' + pw' + qw = 0$ tiene raíces distintas que no difieren en un entero, el proceso descrito produce dos soluciones formales, una por cada raíz de la ecuación indicial: $0 = F(\alpha_1) = F(\alpha_2)$, $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$.

$$(15) \quad w_1(z) = z^{\alpha_1} \sum_0^{\infty} a_{n,1} z^n, \quad w_2(z) = z^{\alpha_2} \sum_0^{\infty} a_{n,2} z^n,$$

donde, por ejemplo, $a_{0,1} = a_{0,2} = 1$.

b) Las series precedentes tienen un radio de convergencia no menor que R .

c) En esta situación al menos una de las soluciones tiene un punto de ramificación en $z = 0$.

b) justifica al proceso formal que llevó a la determinación de los coeficientes. Sin embargo no lo demostraremos aquí. c) sigue inmediatamente observando el comportamiento de z^α si α no es entero.

Cuando $\alpha_1 - \alpha_2 = s$ entero positivo o cero falla lo dicho antes: si $s = 0$ las soluciones dadas por (15) coinciden y si $s > 0$, $a_{n,2}$ es infinito o indeterminado desde $n = s$ en adelante. Pero conocemos siempre una solución, la determinada por $\alpha = \alpha_1$. Sea $w_0(z) = z^\alpha \sum_0^{\infty} a_n z^n$ esta solución. Definimos $w = w_0 v$, e introducimos esta w en la ecuación: $w'' + pw' + qw = w_0(pv' + 2v'(w_0'/w_0) + v'')$. Luego, si elegimos v satisfaciendo a

$$(16) \quad \frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\frac{2w_0'}{w_0} + p \right) \frac{dv}{dz} = 0,$$

$w = w_0 v$ satisfará la ecuación original. La solución general de (16) es

$$(17) \quad v(z) = A + B \int_{z_0}^z \frac{1}{w_0^2(z)} e^{-\int_{z_0}^z p(z) dz} dz,$$

pues $v' = B_0 \exp - \int_{z_0}^z \left(\frac{2w_0'}{w_0} + p \right) dz = \frac{B}{w_0^2(z)} \cdot \exp - \int_{z_0}^z p dz$, si $w_0(z) \neq 0$; y esto

ocurre en un pequeño entorno reducido de $z = 0$. Elegiremos $A = 0$, $B = 1$, y veremos que $w_0(z)v(z)$ es otra solución de (4) alrededor de $z = 0$. Como α y $\alpha - s$ son soluciones de $F(\alpha) \equiv \alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0$ resulta $p_0 = 1 + s - 2\alpha$ y por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_0^2} e^{-\int_{z_0}^z p dz} &= \frac{1}{z^{2\alpha}(1 + a_1 z + \dots)^2} e^{\int_{z_0}^z \left\{ \frac{2\alpha-1-s}{z} - p_1 - p_2 z - \dots \right\} dz} = \\ &= \frac{z^{-2\alpha}}{(1 + a_1 z + \dots)^2} e^{\int_{z_0}^z (2\alpha-1-s) \frac{d}{dz} (\log z) dz} \cdot e^{-\int_{z_0}^z (p_1 + p_2 z + \dots) dz}. \end{aligned}$$

Si tomamos las ramas de $z^{-2\alpha}$ y de $\log z$ de manera que sean reales para $z = 1$ y, por ejemplo, z_0 real positivo, resulta

$$(18) \quad w_0^{-2} e^{-\int_{z_0}^z p dz} = k z^{-(1+s)} \frac{e^{-\int_{z_0}^z \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_j z^{j-1} \right) dz}}{(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)^2} =: z^{-1-s} g(z).$$

Observemos que $g(0) = g_0 \neq 0$. Luego, si $g(z) = g_0 + g_1 z + \dots$, definimos

$$(19) \quad \begin{aligned} w(z) &= w_0(z) \int_{z_0}^z z^{-1-s} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n dz = \\ &= w_0(z) \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{g_n z^{n-s}}{n-s} + g_s \log z + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{g_n z^{n-s}}{n-s} \right\}. \end{aligned}$$

Es decir, la nueva solución w puede presentar o no una singularidad logarítmica.

Si $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha'$, tenemos

TEOREMA 3. a) Sea $\alpha = \alpha'$. La solución (19) toma la forma

$$w(z) = g_0 w_0(z) \log z + z^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad g_0 \neq 0.$$

En este caso seguramente hay una contribución del logaritmo en la solución.

b) Sea $\alpha - \alpha' = s \in \mathbb{N}$. Entonces

$$w(z) = g_s w_0(z) \log z + z^{\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 \neq 0.$$

Si $g_s = 0$ no hay un término logarítmico en el desarrollo de la solución.

NB. La ecuación $z^3 w'' + z^2 w' + w = 0$ tiene una singularidad no regular en $z = 0$. El método de los coeficientes indeterminados usado hasta ahora no es aplicable en este caso.

5. LA ECUACION DE BESSEL: $(zw')' + (z - v^2/z)w = 0$. Supondremos v real, $v \neq -1, -2, -3, \dots$. La ecuación puede reescribirse en la siguiente forma

$$(20) \quad w'' + \frac{w'}{z} + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)w = 0.$$

Aquí $p(z) = 1/z$, $q(z) = -\frac{v^2}{z^2} + 1$, y por tanto en $z = 0$ se presenta una singularidad regular. La ecuación indicial es

$$(21) \quad F(\alpha) \equiv \alpha^2 - v^2 = 0.$$

Sea $\alpha_1 = v$. La solución $z^v \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ se determina calculando los coeficientes se-

gún (14) y con $p_0 = 1$, $p_i = 0$, $i > 0$; $q_0 = -v^2$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_{2+i} = 0$:

$$a_0 \neq 0,$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = a_0 / F(v+2) = \frac{a_0}{(v+2)^2 - v^2} = \frac{-a_0}{2 \cdot 2(v+1)}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= 0, \\
 a_4 &= \frac{-a_2}{4 \cdot 2(v+2)}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{2n+1} &= 0, \\
 a_{2n+2} &= \frac{-a_{2n}}{(2n+2) \cdot 2(v+n+1)}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 (22) \quad a_{2n+2} &= \frac{(-1)^{n+1} a_0}{2(n+1) \cdot 2n \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2(v+n+1) \cdot 2(v+n) \cdot \dots \cdot 2(v+1)} = \\
 &= \frac{(-1)^{n+1} a_0 \Gamma(v+1)}{2^{n+1} (n+1)! 2^{n+1} \Gamma(v+1)(v+1) \dots (v+n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} a_0 \Gamma(v+1)}{2^{2n+2} (n+1)! \Gamma(v+n+2)}.
 \end{aligned}$$

Elegimos $a_0 = 1/2^\nu \Gamma(\nu+1)$ y obtenemos la solución

$$(23) \quad J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{2r}}{r! \Gamma(\nu+r+1)}, \quad \nu \neq -1, -2, \dots,$$

que es la llamada **función de Bessel** de 1ª clase y orden ν . La serie considerada como serie de potencias en $(z/2)^2$ tiene radio de convergencia infinito pues $(r+1)! \Gamma(\nu+r+2) / r! \Gamma(\nu+r+1) \rightarrow \infty$, y por tanto, $J_\nu(z)$ está bien definida en todo el plano complejo (suponemos $(z/2)^\nu$ real sobre el eje real), (cf. t.2,b)). La solución $-\nu$ de la ecuación indicial determina mediante el proceso indicado otra solución: $J_{-\nu}$ realmente distinta de (23) si $-\nu \neq 0, -1, -2, \dots$. Si ν es un número entero elegimos $\alpha_1 = |\nu|$, digamos $\alpha_1 = n$. Reemplazando en (23) ν por $-n$ obtenemos formalmente: $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ pues $\Gamma^{-1}(n)$ se anula en los enteros no positivos. En efecto,

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}}{r! \Gamma(-n+r+1)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}}{r! \Gamma(-n+r+1)} =$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s}}{s! \Gamma(n+s+1)} = (-1)^n J_n(z).$$

Luego, a cada solución J_0, J_1, J_2, \dots , de la ecuación de Bessel con parámetro $\nu^2 = 0, \nu^2 = 1, \nu^2 = 4, \dots$, le está asociada una solución que presenta una singularidad (logarítmica) en $z = 0$, y que forma con su J_n asociada un sistema fundamental para la ecuación, (cf. T.3).

Reemplazando en (23) ν por $1/2$ y $-1/2$ obtenemos

$$(24) \quad J_{1/2}(z) = \left(\frac{z}{\pi z}\right)^{1/2} \cdot \operatorname{sen} z; \quad J_{-1/2}(z) = \left(\frac{z}{\pi z}\right)^{1/2} \cdot \operatorname{cos} z.$$

Más aún, puede demostrarse que (cf. §7) para $n = 1, 2, \dots$ vale

$$(25) \quad J_{n+1/2}(z) = \left(\frac{z}{\pi}\right)^{1/2} z^{n+1/2} \cdot \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n \frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

6. LAS FUNCIONES DE WEBER. También llamadas funciones de Bessel de 2ª clase, son soluciones de (20) que se definen por

$$(26) \quad Y_\nu(z) := \frac{\cos \nu\pi \cdot J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\operatorname{sen} \nu\pi}, \quad \nu \notin \mathbb{Z}.$$

$$(27) \quad Y_n(z) := \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Y_n es una solución linealmente independiente de J_n de la ecuación (20) con $\nu = n$. Si $n \neq 0$, vale

$$(28) \quad Y_n(z) = \frac{(z/2)^n}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^r}{r!(n+r)!} \{2 \log \frac{z}{2} - \psi(r+1) - \psi(n+r+1)\} - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r-n}$$

donde $\psi(1) = -\gamma =$ constante de Euler $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$ y

$$\psi(m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \gamma.$$

Si $n = 0$,

$$(25) \quad Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^r}{(r!)^2} \left\{ \log \frac{z}{2} - \psi(r+1) \right\},$$

que se obtiene de (28) haciendo $n = 0$ e ignorando la última sumatoria.

Si ν no es entero, $w = AJ_\nu + BJ_{-\nu}$ es la solución general de la ecuación de Bessel

fuera de $z = 0$ y se puede demostrar que el wronskiano

$$(30) \quad w(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2 \operatorname{sen} \nu\pi}{\pi z} \neq 0.$$

7. LAS FORMULAS DE RECURRENCIA. Sea ν real, $\nu \neq 0, -1, -2, \dots$.

$$(31) \quad J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z),$$

$$(32) \quad J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z),$$

$$(33) \quad \frac{\nu}{z} J_\nu(z) + J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z),$$

$$(34) \quad \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J'_\nu(z) = J_{\nu+1}(z).$$

De (31) y (32) siguen inmediatamente (33) y (34). Veamos (31):

$$\begin{aligned} (J_{\nu-1} + J_{\nu+1})(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^r}{r! \Gamma(\nu+r)} + \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^r}{r! \Gamma(\nu+r+2)} = \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^r}{r! \Gamma(\nu+r)} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^{r+1}}{r! \Gamma(\nu+r+2)} \right] = \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{-z^2}{4}\right)^r \left\{ \frac{1}{r! \Gamma(\nu+r)} - \frac{1}{(r-1)! \Gamma(\nu+r+1)} \right\} \right] = \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
(J_{\nu-1} - J_{\nu+1})(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{-z^2}{4}\right)^r \left\{ \frac{1}{r! \Gamma(\nu+r)} + \frac{1}{(r-1)! \Gamma(\nu+r+1)} \right\} \right] = \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu + 2r}{r! \Gamma(\nu+r+1)} \left(\frac{-z^2}{4}\right)^r = 2 \cdot J_{\nu}'(z).
\end{aligned}$$

Usando (33) y (34) (esta última vale aún para $\nu = 0$) obtenemos ($\nu \neq 0, -1, -2, \dots$):

$$(35) \quad \frac{d}{dz} (z^{\nu} J_{\nu}) = z^{\nu} J_{\nu-1},$$

$$(36) \quad \frac{d}{dz} (z^{-\nu} J_{\nu}) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}.$$

(36) coincide con (34) para $\nu = 0$ e implica que entre dos ceros positivos de J_0 hay uno de J_1 , y si $\nu > -1$, $\nu \neq 0$, vale el

LEMA 1. *Entre dos ceros positivos de J_{ν} hay un cero de $J_{\nu-1}$ y un cero de $J_{\nu+1}$.*

Obsérvese que todo cero de J_{ν} no nulo es **simple** (cf. T.1), es decir, en él la derivada J_{ν}' no se anula.

EJERCICIO. a) $J_{\nu+1}' = J_{\nu} - \frac{\nu(\nu+1)}{z^2} J_{\nu} + \frac{\nu+1}{z} J_{\nu}'$, ($\nu > -1$);

b) $J_{\nu+1} J_{\nu-1} = \left(\frac{\nu}{z} J_{\nu}\right)^2 - J_{\nu}'^2$, ($\nu > -1$, $\nu \neq 0$).

8. LAS FORMULAS DE LOMMEL.

TEOREMA 4. *Sean $\alpha \neq \beta$, no nulos, y $\nu > -1$. Vale*

$$a) \quad (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^x t J_{\nu}(\alpha t) J_{\nu}(\beta t) dt = x \{ J_{\nu}(\alpha x) \frac{d}{dx} (J_{\nu}(\beta x)) - J_{\nu}(\beta x) \frac{d}{dx} (J_{\nu}(\alpha x)) \}.$$

$$b) \quad 2\alpha^2 \int_0^x t J_{\nu}^2(\alpha t) dt = (\alpha^2 x^2 - \nu^2) \{ J_{\nu}(\alpha x) \}^2 + \left\{ x \frac{d}{dx} (J_{\nu}(\alpha x)) \right\}^2.$$

COROLARIO 1. *Sea $\nu > -1$.*

$$c) \quad \int_0^1 t J_{\nu}(\alpha t) J_{\nu}(\beta t) dt = 0, \text{ si } \alpha \text{ y } \beta \text{ son ceros no nulos de } J_{\nu} \text{ tales que } \alpha^2 \neq \beta^2;$$

$$d) \int_0^1 t J_\nu^2(\alpha t) dt = \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(\alpha) \neq 0, \alpha \text{ cero no nulo de } J_\nu.$$

En efecto, c) sigue de a), y d) de b) y (34) observando que $J_\nu'(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} (J_\nu(\alpha x))$.

COROLARIO 2. Si $\nu > -1$ los ceros no nulos de J_ν son reales y simples.

En efecto, la simplicidad de los ceros sigue del teorema de Fuchs. Si α es imaginario puro, $\alpha = i\beta \neq 0$, entonces $J_\nu(i\beta) \neq 0$ pues la serie en (23) es de términos positivos. Sea α complejo, ni real ni imaginario puro. Entonces $J_\nu(\bar{\alpha}) = J_\nu(\alpha) = 0$, y $\beta = \bar{\alpha}$ es tal que $\beta^2 \neq \alpha^2$. De c) obtenemos ahora

$$(37) \quad \int_0^1 t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\bar{\alpha} t) dt = \int_0^1 t |J_\nu(\alpha t)|^2 dt = 0,$$

lo que obliga a $J_\nu(\alpha t) \equiv 0$ en $(0,1)$, contradicción.

Obsérvese que si α es un cero de J_ν entonces $-\alpha$ también es un cero por lo que sólo es necesario considerar los ceros positivos de J_ν cuando se estudia su ubicación en el plano complejo.

DEMOSTRACION DEL T.4. Recordando que la ecuación de Bessel es

$$(zw')' + (z - \frac{\nu^2}{z})w = 0 \text{ tenemos}$$

$$\frac{1}{\alpha} (x(J_\nu(\alpha x))')' + (\alpha x - \frac{\nu^2}{\alpha x})J_\nu(\alpha x) = 0,$$

$$\frac{1}{\beta} (x(J_\nu(\beta x))')' + (\beta x - \frac{\nu^2}{\beta x})J_\nu(\beta x) = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por $\alpha J_\nu(\beta x)$ y restando del producto la segunda multiplicada por $\beta J_\nu(\alpha x)$ obtenemos

$$J_\nu(\beta x)(x(J_\nu(\alpha x))')' - J_\nu(\alpha x)(x(J_\nu(\beta x))')' + (\alpha^2 - \beta^2)xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
& (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^x t J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t) dt = \\
& = - \int_0^x \{ J_\nu(\beta t) (t J_\nu(\alpha t))' - J_\nu(\alpha t) (t J_\nu(\beta t))' \} dt = \\
& = - \int_0^x \{ (J_\nu(\beta t) t J_\nu(\alpha t))' - (J_\nu(\alpha t) t J_\nu(\beta t))' \} dt = \\
& = \int_0^x \frac{d}{dt} \{ t (J_\nu(\alpha t) J_\nu(\beta t))' - J_\nu(\beta t) (J_\nu(\alpha t))' \} dt = \\
& = x [J_\nu(\alpha x) \frac{d}{dx} (J_\nu(\beta x)) - J_\nu(\beta x) \frac{d}{dx} (J_\nu(\alpha x))] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon [\dots](\varepsilon) = \\
& = x [J_\nu(\alpha x) (J_\nu(\beta x))' - J_\nu(\beta x) (J_\nu(\alpha x))'],
\end{aligned}$$

pues utilizando el desarrollo en serie de $J_\nu(\alpha x)$ y de $(J_\nu(\alpha x))'$ se ve que $\varepsilon[\dots](\varepsilon) \rightarrow 0$ para $\varepsilon \rightarrow 0$. Queda así demostrada a). Veamos b). Consideremos la expresión

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{\alpha - \beta} \{ J_\nu(\alpha x) (J_\nu(\beta x))' - J_\nu(\beta x) (J_\nu(\alpha x))' \} = (\text{cf. (34)}) = \\
& = \frac{x}{\alpha - \beta} \{ J_\nu(\alpha x) (\frac{\nu}{x} J_\nu(\beta x) - \beta J_{\nu+1}(\beta x)) - J_\nu(\beta x) (\frac{\nu}{x} J_\nu(\alpha x) - \alpha J_{\nu+1}(\alpha x)) \} = \\
& = \frac{x}{\beta - \alpha} \{ \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x) - \alpha J_\nu(\beta x) J_{\nu+1}(\alpha x) \} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \beta} A = \\
& = -x [x \beta (J_\nu'(\beta x) J_{\nu+1}(\beta x) - J_\nu(\beta x) J_{\nu+1}'(\beta x)) - J_\nu(\beta x) J_{\nu+1}(\beta x)],
\end{aligned}$$

donde el límite puede calcularse con la regla de L'Hôpital para $\alpha \rightarrow \beta$. Reemplazando en A, $J_\nu'(\beta x)$ por su expresión equivalente obtenida de (33), resulta

$$\begin{aligned}
A & = -x [J_{\nu+1}(\beta x) (\beta x J_{\nu-1}(\beta x) - \nu J_\nu(\beta x)) - J_\nu(\beta x) (\beta x J_\nu(\beta x) - (\nu+1) J_{\nu+1}(\beta x)) - \\
& \quad - J_\nu(\beta x) J_{\nu+1}(\beta x)] = -x [\beta x J_{\nu+1}(\beta x) J_{\nu-1}(\beta x) - \beta x J_\nu^2(\beta x)] =
\end{aligned}$$

$$= x^2 \beta [J_\nu^2(\beta x) - J_{\nu+1}(\beta x) J_{\nu-1}(\beta x)].$$

Pero $J_{\nu+1}(z) J_{\nu-1}(z) = (\frac{\nu}{z} J_\nu - J'_\nu)(J'_\nu + \frac{\nu}{z} J_\nu) = -(J'_\nu)^2 - \frac{\nu^2}{z^2} J_\nu^2$, y reemplazando en la última expresión obtenemos (para $\nu \neq 0$ y por límite para todo $\nu > -1$):

$$A = \beta x^2 [J_\nu^2(\beta x) - \frac{\nu^2}{\beta^2 x^2} J_\nu^2(\beta x) + J'_\nu{}^2(\beta x)].$$

De a) sigue que

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta) \int_0^x t J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta t) dt = \\ & = \frac{x}{\alpha - \beta} (J_\nu(\alpha x) (J_\nu(\beta x))' - J_\nu(\beta x) (J_\nu(\alpha x))') \xrightarrow{\alpha + \beta} 2\beta \int_0^x t J_\nu^2(\beta t) dt = \\ & = A = \beta x^2 [J_\nu^2(\beta x) - \frac{\nu^2}{\beta^2 x^2} J_\nu^2(\beta x) + J'_\nu{}^2(\beta x)]. \end{aligned}$$

Luego,

$$2\beta^2 \int_0^x t J_\nu^2(\beta t) dt = J_\nu^2(\beta x) (\beta^2 x^2 - \nu^2) + (x (J'_\nu(\beta x)))^2, \quad \text{QED.}$$

*9. LOS DESARROLLOS ASINTÓTICOS. Sea $F(z)$ definida en un sector $S = \{z: a \leq \arg z \leq b, |z| > R\}$ donde $\infty > R > 0$. La expresión

$$(38) \quad F(z) \sim A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_n}{z^n} + \dots$$

tiene el siguiente significado: para $z \rightarrow \infty$, $z \in S$ y todo n fijo,

$$(39) \quad F(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} - \dots - \frac{A_n}{z^n} = \frac{o(1)}{z^n}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Presentaremos a continuación algunos desarrollos asintóticos. Omitimos, por el momento, su demostración.

I) $S = \{z: |z| > 1, |\arg z| \leq \pi - \delta\}, \delta > 0:$

$$(45) \quad \Gamma(z) \sim e^{-z} z^z \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \dots\right).$$

Esto significa que en S , $\frac{\Gamma(z) e^z}{z^z} \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \sim 1 + \frac{1}{12z} + \dots$; la dependencia de δ sólo se presenta en los 0 y 0 de las fórmulas (39) y (40). Vale también que

$$(46) \quad |\Gamma(x+iy)| \sim \sqrt{2\pi} \cdot |y|^{x-1/2} e^{-\pi|y|/2}, \quad x \in \mathbb{R}, |y| > 1.$$

De (45) se deduce que (demostrarlo)

$$(47) \quad n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \left(1 + \frac{O(1)}{n}\right), \quad n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}.$$

II) En la misma región S , si $\nu > -1$:

$$(48) \quad J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left[\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\nu, 2r)}{(2z)^{2r}} - \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\nu, 2r+1)}{(2z)^{2r+1}} \right]$$

$$\text{donde } (\nu, r) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots (4\nu^2 - (2r-1)^2)}{r! 2^{2r}}.$$

III) En la misma región S , $Y_\nu(z)$ tiene el desarrollo II) pero donde deben intercambiarse sen y cos.

EJERCICIOS. 3) Demostrar que en S , si $\nu > -1$:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{-|I_m z|}}{|z|^{3/2}}\right),$$

y deducir que $J_\nu(z)$ tiene infinitos ceros positivos que se aproximan a

$$\frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + (2k+1) \frac{\pi}{2} \text{ al tender } k \text{ a infinito.}$$

O sea, $|F(z) - \sum_0^n A_i z^{-i}| < \epsilon |z|^{-n}$ si $|z| > r = r(\epsilon, n)$, $z \in S$. Es obvio que (39)

para $n \geq 1$, equivale a

$$(40) \quad F(z) - \sum_0^{n-1} A_j z^{-j} = \frac{O(1)}{z^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

y a $F(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} A_0$ para $n = 0$. Más aún,

$$(41) \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n \left\{ F(z) - \sum_0^{n-1} \frac{A_j}{z^j} \right\} = A_n.$$

Al miembro derecho de (38) se lo llama el **desarrollo asintótico de $F(z)$** en $z = \infty$, o en S , y queda unívocamente determinado. Sin embargo, funciones distintas pueden tener el mismo desarrollo asintótico.

Puede suceder que $F(z)$ no tenga un desarrollo asintótico, o que sea difícil calcularlo, pero si $F(z)/G(z)$ tiene uno:

$$(42) \quad \frac{F}{G}(z) \sim A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots,$$

escribiremos

$$(43) \quad F(z) \sim G(z) \left\{ A_0 + \frac{A_1}{z} + \dots \right\}.$$

$A_0 G(z)$ será ahora el término dominante. Una expresión como $F(z) \sim A_0 G(z)$ significará entonces que $F(z)/G(z) \rightarrow A_0$ si $|z| \rightarrow \infty$, $z \in S$.

EJERCICIOS. 1) Si $f(z) \sim \sum_0^\infty A_m z^{-m}$, $g(z) \sim \sum_0^\infty B_m z^{-m}$ entonces $f \cdot g \sim \sum_0^\infty C_m z^{-m}$,

$$C_m = A_0 B_m + \dots + A_m B_0.$$

2) Si $f(x) \sim \sum_2^\infty A_m x^{-m}$ para $0 < R < x < \infty$ entonces

$$(44) \quad \int_x^\infty f(t) dt \sim \sum_1^\infty \frac{A_{m+1}}{m x^m}.$$

4) En $|z| < 1$, $|J_\nu(z)| \leq |z|^\nu \cdot 0(1)$.

IV) Sean $S' = \{z: |\arg z| \leq \pi/4 - \delta\}$, $\delta > 0$, y $\text{Erfc}(z)$ la función error:

$$(49) \quad \text{Erfc}(z) = \int_z^\infty e^{-t^2} dt.$$

En S' vale que

$$(50) \quad \text{Erfc}(z) \sim e^{-z^2} \left\{ \frac{1}{2z} - \frac{1}{2^2 z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 z^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 z^7} + \dots \right\}.$$

*10. LAS FUNCIONES DE HANKEL DE ORDEN ν . Estas funciones, también llamadas funciones de Bessel de **tercera clase**, verifican las relaciones

$$(51) \quad \begin{cases} 2J_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z), \\ 2J_{-\nu}(z) = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z) + e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z), \end{cases}$$

para $|\arg z| < \pi$. Este último resultado se reduce a $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ si n es un entero. Sin embargo, para todos los valores de ν , $\{H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)\}$ es un sistema fundamental de la ecuación (20) con wronskiano

$$(52) \quad w(H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)) = \frac{4}{\pi i z}.$$

Vale, para todo valor del parámetro ν , que

$$(53) \quad Y_\nu(z) = \frac{1}{2i} \{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\}.$$

Además,

$$(54) \quad H_\nu^{(1)}(z) \sim \left(\frac{z}{\pi i}\right)^{1/2} e^{i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (v, r)}{(2iz)^r}\right],$$

en la misma región utilizada para J_ν .

Para los valores del parámetro $\nu = \pm 1/2$ se tienen expresiones sencillas de las funciones de Hankel:

$$(55) \quad H_{1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{iz}}{i}, \quad H_{1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{-iz}}{-i},$$

$$(56) \quad H_{-1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz}, \quad H_{-1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz}.$$

11. SERIES DE FOURIER-BESSEL. Sea $\nu > -1$ y $f(x)$ una función absolutamente integrable en $[0,1]$: $\int_0^1 |f(x)| dx < \infty$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, las raíces positivas de la ecuación $J_\nu(x) = 0$ ordenadas por su magnitud creciente. De la serie

$$(57) \quad c_1 J_\nu(\lambda_1 x) + c_2 J_\nu(\lambda_2 x) + c_3 J_\nu(\lambda_3 x) + \dots$$

se dirá que es la serie de Fourier-Bessel asociada a f (en $[0,1]$), si los coeficientes c_i vienen definidos por (cf. Cor.1, T.4),

$$(58) \quad c_n = \frac{\int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx}{\int_0^1 x J_\nu^2(\lambda_n x) dx} = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\lambda_n)} \int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx.$$

Existen criterios que aseguran la convergencia de (57) a $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x)$ es continuamente diferenciable en $[0,1]$ y $\nu \geq -1/2$ entonces para $x \in (0,1)$:

$$f(x) = \sum_1^\infty c_n J_\nu(\lambda_n x).$$

12. EJERCICIO. Para ν semientero las dos raíces de (21) difieren en un entero. ¿Por qué, a pesar de ello, quedan bien definidas J_ν y $J_{-\nu}$? ¿Cómo se relaciona esto con el T. 3,b)? .

CAPITULO 7.

La ecuación diferencial de Legendre. Polinomios de Legendre, ceros. La fórmula de Rodrigues. Ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

1. LA ECUACION DE LEGENDRE. En el estudio de la ecuación $\Delta u = 0$ en R^3 se presenta el problema de hallar soluciones de la forma $r^n \cdot S_n(\theta, \phi)$ el que induce a considerar la **ecuación de Legendre**:

$$(1) \quad (1 - z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0, \quad \lambda \in R,$$

para los valores $n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, del parámetro λ .

$S_n(\theta, \phi)$ es el llamado **armónico sólido**. Aquí $x \in R^3$ se representa por sus coordenadas polares

$$(r, \theta, \phi); \quad 0 < r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

La ecuación (1) puede escribirse en su forma autoadjunta:

$$(2) \quad ((1 - z^2)w')' + \lambda w = 0$$

(Este problema es semejante al de buscar soluciones de $\Delta u = 0$ de la forma $u = A(Z)w(\rho)F(\phi)$ que conduce a la ecuación diferencial de Bessel:

$(zw')' + (z - v^2/z)w = 0$, donde ρ , θ y Z son las coordenadas cilíndricas de un punto $x \in R^3$).

Entonces, para $n = 0, 1, \dots$, $\lambda = n(n+1)$, la ecuación es

$$(3) \quad w'' - \frac{2z}{1 - z^2} w' + \frac{n(n+1)}{1 - z^2} w = 0.$$

$z = 1$ es un punto singular regular de la ecuación y $p(z) = \frac{(2z)/(z+1)}{z-1}$,

$$q(z) = -\frac{\lambda/(z+1)}{z-1}.$$

Entonces $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, $F(\alpha) \equiv \alpha(\alpha - 1) + \alpha = \alpha^2 = 0$ es la ecuación indicial.

Una solución es regular alrededor de $z = 1$, y toda otra linealmente independien-

te posee una singularidad logarítmica en el punto $z = 1$, (cf. T.3, Cap. 6). Conociendo el comportamiento cualitativo de las soluciones, en vez de calcular los coeficientes p_n y q_n que darían la solución regular según la fórmula (14) del capítulo 6, ensayamos directamente en (2) la "solución"

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-1)^k, \quad t \in \mathbb{R},$$

y obtenemos

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \{2(k+1)^2 c_{k+1} + [-\lambda + (k+1)k] c_k\} (t-1)^k = 0.$$

Luego, $c_{k+1}/c_k = -((k+1)k - \lambda)/2(k+1)^2$, y por tanto,

$$(6) \quad c_k = \frac{[k(k-1) - \lambda] \cdot [(k-1)(k-2) - \lambda] \dots [2 - \lambda] \cdot [-\lambda] \cdot (-1)^k}{(k!)^2 2^k} c_0$$

Usando el criterio de D'Alembert se ve que la serie (4) converge en $|t-1| < 2$. Si $k+1 > |\lambda| > 0$, y $\lambda \neq n(n+1)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| > \frac{1}{2} \cdot \frac{k-1}{k+1}, \quad \text{sgn } c_{k+1} = \text{sgn } -c_k.$$

De esto sigue que la serie no se comportará bien al tender t a -1 . Si pretendemos una solución que tenga también a -1 como punto regular debemos entonces elegir $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. En este caso $c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = 0$ (cf. (5)) y (4) se reduce a un polinomio a coeficientes reales:

$$(7) \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)! (z-1)^k}{(n-k)! (k!)^2 2^k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$\lambda = n(n+1)$, $z \in \mathbb{C}$. Estos son los llamados **polinomios de Legendre**.

2. LA FORMULA DE RODRIGUES. Vale que

$$(8) \quad P_n(z) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n.$$

Una manera de demostrar la fórmula de Rodrigues es calculando el desarrollo en serie de Taylor del miembro derecho de (8), que llamaremos Q, y observando que coincide con $P_n(z)$. En efecto, el coeficiente k-ésimo del desarrollo de Taylor de Q(z) alrededor de $z = 1$ es igual

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \frac{1}{2^n \cdot n!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n+k} [(z-1)^n (z+1)^n] \Big|_{z=1} = \\ & = \frac{1}{n! k! 2^n} \sum_{j=0}^{n+k} \binom{n+k}{j} \left(\frac{d}{dz} \right)^j (z-1)^n \left(\frac{d}{dz} \right)^{n+k-j} (z+1)^n \Big|_{z=1} = \\ & = \frac{1}{2^n \cdot k!} \binom{n+k}{n} \left(\frac{d}{dz} \right)^k (z+1)^n \Big|_{z=1} = \\ & = \frac{1}{2^n \cdot k!} \binom{n+k}{n} n(n-1)\dots(n-k+1) 2^{n-k} = \frac{1}{2^k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2}. \end{aligned}$$

Los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_2(z) = (3z^2 - 1)/2,$$

$$P_1(z) = z,$$

$$P_3(z) = z(5z^2 - 3)/2.$$

Vemos entonces que estos polinomios tienen, como funciones, la misma **paridad** que el índice (como número). Y esto vale en general. En efecto,

$$(9) \quad P_n(z) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} z^{2(n-r)} = \\ = \sum_{r=0}^{N(n)} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{2^n \cdot r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r},$$

donde $N(n) = n/2$ si n es par, $N(n) = (n-1)/2$ si n es impar. Sea C una circunferencia alrededor de $t = z$. Vale entonces la siguiente **fórmula integral de Schläfli**, consecuencia inmediata de la fórmula de Rodrigues y de la de Cauchy:

$$(10) \quad P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (t - z)^{n+1}} dt.$$

Sea $n > 0$. $(x^2 - 1)^n$ se anula en $x = \pm 1$ y tiene un máximo en $x = 0$. Por tanto, $\frac{d}{dx} (x^2 - 1)^n$ se anula en $x = 0$, y también en $x = \pm 1$ si $n > 1$. Repitiendo el argumento obtenemos el

TEOREMA 1. $P_n(z)$ tiene n ceros reales y distintos en $(-1, 1)$. Estos son todos sus ceros.

(En efecto, $P_n(z)$ es un polinomio de grado n).

Usando la fórmula de Rodrigues e integrando por partes obtenemos

$$(11) \quad \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0 \quad \text{si } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Luego

$$(12) \quad \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{si } m < n.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} (13) \quad \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt &= \frac{1}{2^{2n} \cdot n!^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^n \right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{2^{2n} \cdot n!^2} (2n)! \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!^2} \int_{-1}^1 (1-t)^n (1+t)^n dt = \\ &= ((11), \text{ Cap. 5}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!^2} \cdot 2^{2n+1} B(n+1, n+1) = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

$$(14) \quad \int_{-1}^1 t^n P_n(t) dt = \frac{2^{n+1} \cdot n!^2}{(2n+1)!}.$$

Esta fórmula sigue de (7), (11) y (13).

CAPITULO 8.

Funciones holomorfas en varias variables complejas. Lema de Hartogs. Teorema de preparación de Weierstrass. Teorema de las funciones implícitas.

1. FUNCIONES HOLOMORFAS EN VARIAS VARIABLES COMPLEJAS. Consideraremos funciones a valores complejos $F(z,w)$ con $(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$ (aunque sin mayor dificultad hubiéramos podido tratar asimismo funciones $F(z_1, \dots, z_n)$ con $z_i \in \mathbb{C}$). Sea G_i un abierto de \mathbb{C} , $i = 1, 2$. Diremos que $F(z,w)$ es **holomorfa** en $G_1 \times G_2$, $z \in G_1$, $w \in G_2$, si F es continua y para todo $z \in G_1$ es holomorfa en $w \in G_2$ y para todo $w \in G_2$ es holomorfa en $z \in G_1$.

Brevemente, F es holomorfa si es continua y separadamente holomorfa.

Diremos que $F(z,w)$ es **holomorfa en un punto** $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$ si en un entorno bicircular $B_{r_1, r_2}(z_0, w_0) = \{(z,w) : |z - z_0| < r_1, |w - w_0| < r_2\}$ del punto, F es holomorfa. O sea, F es holomorfa en $G_1 \times G_2$ si y sólo si es holomorfa en cada uno de sus puntos. En esta situación, si Q es un cuadrado con centro z contenido en G_1 , tenemos

$$(1) \quad F'_z(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{F(s,w)}{(s-z)^2} ds .$$

F'_z y F'_w son continuas en $G_1 \times G_2$. Sigue que F'_z es holomorfa y el

TEOREMA 1. Si $F(z,w)$ es holomorfa en $G_1 \times G_2$ entonces todas sus derivadas

$$\frac{\partial^{m+n} F(z,w)}{\partial z^m \partial w^n} \text{ son holomorfas en } G_1 \times G_2 .$$

La definición de holomorfía dada es sobreabundante pues vale el importante

TEOREMA 2 (Hartogs). Sea $f(z,w)$ a valores en \mathbb{C} con dominio $G_1 \times G_2$. Si f es separadamente holomorfa entonces es continua, y por tanto holomorfa en $G_1 \times G_2$.

Aceptamos este resultado. Veamos que vale el

TEOREMA 3. $F(z,w)$ es holomorfa en (z_0, w_0) si y sólo si es desarrollable en serie de potencias de la forma

$$(2) \quad F(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(w - w_0)^n$$

absoluta y uniformemente convergente en $B_{\varepsilon, \varepsilon}(z_0, w_0)$, para cierto $\varepsilon > 0$, con $a_n(z)$ holomorfa en $B_{\varepsilon}(z_0)$ para todo n .

DEMOSTRACION. Sea $F(z,w)$ holomorfa en $B_{r,r}(z_0, w_0)$ y $z \in B_{r/2}(z_0)$. Entonces, si

$$(3) \quad a_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r/2}(w_0)} \frac{F(z,t)}{(t - w_0)^{n+1}} dt, \quad C_{r/2}(w_0) = \{t: |t - w_0| = r/2\}.$$

obtenemos (2) con $|a_n(z)| \leq M(r/2)^{-n}$, $M = \sup_{C_{r/2} \times C_{r/2}} |F|$. Si $\varepsilon = r/4$, la serie

(2) es mayorada por la serie

$$M \sum 2^{-n}.$$

Recíprocamente, si $F(z,w)$ es desarrollable en una serie de potencias de la forma (2), uniformemente convergente, entonces sigue inmediatamente de la definición de holomorfía que ella define una función holomorfa en (z_0, w_0) , QED.

2. LEMA DE HARTOGS. Sea G un dominio acotado. Usando una generalización de un teorema de Weierstrass puede construirse una función $f(z)$ holomorfa en G con ceros distribuidos de tal manera que se acumulen en todo punto del contorno de G . Luego, f no puede extenderse holomórficamente fuera de G . Sin embargo en varias variables complejas vale el

LEMA 1. Sean $r > 0$, $D = B_{r,r}(0,0) \setminus \bar{B}_{r/2,r/2}(0,0)$ y $f(z)$ holomorfa en D . Entonces existe F holomorfa en $B = B_{r,r}(0,0)$ tal que $F|_D = f$.

DEMOSTRACION. Para $z_1 \in B_r(0)$ fijo tenemos

$$f(z_1, z_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(z_1) \cdot z_2^k, \quad a_k(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r'} \frac{f(z_1, t)}{t^{k+1}} dt,$$

donde $\frac{r}{2} < |z_2| < r' < r$. Por otra parte $a_k(z_1)$ es holomorfa en $z_1 \in B_r(0)$. Como $f(w_1, t)$ es holomorfa en $t \in B_r(0)$ si $\frac{r}{2} < |w_1| < r$, resulta que $a_k(w_1) = 0$ para $k < 0$. Luego, $a_k(z_1) \equiv 0$ si $k < 0$. Definiendo $F(z_1, z_2) = \sum_0^{\infty} a_k(z_1) \cdot z_2^k$ tenemos la tesis, QED.

COROLARIO 1. *Sea f holomorfa en el dominio $D \subset \mathbb{C}^2$. Entonces f no posee ceros aislados.*

DEMOSTRACION. Supongamos que $P \in D$ sea un cero aislado en D . Sea $B_{r,r}(P)$ un entorno bicircular de P contenido en D donde f no se anula excepto por el punto P . Entonces, $g(z, w) := 1/f(z, w)$ es holomorfa en $B_{r,r}(P) \setminus \overline{B}_{r/2, r/2}(P)$. Del lema de Hartogs sigue ahora que g es prolongable analíticamente a $B_{r,r}(P)$, y esto lleva a una contradicción, QED.

COROLARIO 2. *Si f es holomorfa en el dominio $D \subset \mathbb{C}^2$ entonces el conjunto de los ceros de f , si no es vacío, se acumula en el contorno de D .*

Dicho de otra forma, si $Z = \{P \in D: f(P) = 0\} \neq \emptyset$ entonces no es compacto. Esto puede verse usando el corolario 1. Preferimos aquí obtenerlo como consecuencia del teorema de Weierstrass que sigue, el cual, por otra parte, mejora al corolario 1.

3. EL TEOREMA DE PREPARACION DE WEIERSTRASS. Este teorema dice así

TEOREMA 4. *i) Si la función $F(z, w)$ holomorfa en $B_{r_1, r_2}(z_0, w_0)$ es tal que $F(z_0, w_0) = 0$, $F \not\equiv 0$, entonces en un entorno bicircular $B_{s,r}(z_0, w_0) \subset B_{r_1, r_2}$, la función es de la forma*

$$(4) \quad F(z, w) = (z - z_0)^p \cdot [(w - w_0)^k + A_1(z)(w - w_0)^{k-1} + \dots + A_k(z)] \cdot F_1(z, w)$$

donde p y k son enteros no negativos; $A_i(z)$ es holomorfa en $B_s(z_0)$, $A_i(z_0) = 0$,

Obviamente $A_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Sea $z \in B_S(0)$. Vale que (Cor. T.7, Cap. 4)

$$(8) \quad S_j(z) = w_1(z)^j + \dots + w_k(z)^j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} w^j \frac{F'_w(z, w)}{F(z, w)} dw .$$

$S_j(z)$ es entonces holomorfa en $z \in B_S(0)$. Como los coeficientes $A_m(z)$ son polinomios en las funciones simétricas elementales también son holomorfos en $B_S(0)$. Luego, $P(z, w)$ es holomorfa en $B_{S, r}(0, 0)$. Definamos $F_1(z, w) = F(z, w)/P(z, w)$. Luego, $F_1 \neq 0$ en $B_{S, r}(0, 0)$ y es holomorfa en w para cada $z \in B_S(0)$. Además, para esos z tenemos:

$$F_1(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{F_1(z, t)}{t - w} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{F(z, t)}{(t - w)P(z, t)} dt .$$

De aquí sigue que F_1 es holomorfa en z para cada $w \in B_r(0)$, QED.

4. EL TEOREMA DE LAS FUNCIONES IMPLICITAS. Sea $F(z, w)$ holomorfa en $B_{r, r}(z_0, w_0)$.

TEOREMA 6. Sea w_0 un cero simple de $F(z_0, w)$. Si ε es bastante pequeño existe $W(z)$ holomorfa en $B_\varepsilon(z_0)$ tal que para $(z, w) \in B_{\varepsilon, \varepsilon}(z_0, w_0)$ las relaciones

$$F(z, w) = 0 \quad y \quad w = W(z)$$

son equivalentes.

DEMOSTRACION. Aplicando el teorema 4 con $p = 0$, $k = 1$, resulta que $F(z, w) \equiv (w - w_0 + A_1(z)) \cdot F_1(z, w) = 0$ si $w = w_0 - A_1(z)$ en un entorno de z_0 , y sólo en ese caso, QED.

CAPITULO 9.

La transformada de Laplace. El teorema de Lerch. Algunas transformadas útiles. Aplicación a las ecuaciones diferenciales ordinarias. La convolución. El teorema del valor inicial. Fórmula de Mellin.

1. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE. Sea $f(t)$ una función (medible) definida en $(0, \infty)$ tal que $|f(t)| \cdot e^{Mt}$ es integrable, M una constante real. La transformada de Laplace de f , $\phi(s) = \mathcal{L}(f)$, se define, en $s > -M$, por

$$(1) \quad \phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Sin embargo puede ocurrir que el integrando en (1) sea integrable aún para valores $s \leq -M$. Al número real, o $-\infty$, dado por

$$(2) \quad a(f) = \inf \{s: e^{-st} \cdot |f(t)| \text{ es integrable en } (0, \infty)\}$$

lo llamaremos **abscisa de convergencia (absoluta)** de ϕ . Obviamente si (1) existe para $s > a$ entonces también existe para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re } s > a$.

No cualquier función, aun muy regular, es la transformada de Laplace de otra pues del teorema de Lebesgue de la convergencia dominada se deduce que

$$(3) \quad \phi(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0.$$

La transformada de una función caracteriza a ésta. En efecto, puede demostrarse el siguiente teorema debido a Lerch:

TEOREMA 1. *Si para cierto s_0 y $h > 0$, y todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $(\mathcal{L}f)(s_0 + nh) = (\mathcal{L}g)(s_0 + nh)$ entonces $f(t) = g(t)$ c.d. $t \in (0, \infty)$.*

La transformación de Laplace es lineal:

$$(4) \quad \mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(s) = c_1 \mathcal{L}(f_1)(s) + c_2 \mathcal{L}(f_2)(s), \quad s > \sup(a(f_1), a(f_2)),$$

donde $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$. A continuación presentamos una útil minitabla de transformadas.

$f(t)$ ($t \in (0, \infty)$)	$\mathcal{L}(f)$	$s \in \mathbb{R}$
$t^r, r = 0, 1, 2, \dots$	$\Gamma(r+1)/s^{r+1}$	$s > 0$
$t^r e^{at}, r = 0, 1, 2, \dots, a \in \mathbb{R}$	$\Gamma(r+1)/(s-a)^{r+1}$	$s > a$
$\cos bt$	$s/(s^2 + b^2)$	$s > 0$
$\lg t$	$(\Gamma'(1) - \lg s)/s$	$s > 0$
$J_0(t)$	$1/\sqrt{s^2 + 1}$	$s > 0$
$\text{sen } t / t$	$\text{arc tg } 1/s$	$s > 0$

TEOREMA 2. Si $u \in C^k(0, \infty)$ y $|u^{(k)}(t)| \leq Ke^{Mt}$ entonces

$$(5) \quad \mathcal{L}(u^{(k)}) = s^k \mathcal{L}(u) - (s^{k-1} u(0) + \dots + u^{(k-1)}(0)).$$

DEMOSTRACION. Veámoslo para $k = 1$. Si $|f'(t)| \leq Ke^{Mt}$ entonces $f(t) = \int_0^t f'(x) dx + C$.

Luego $f(t)$ admite una cota semejante. Entonces, si s es bastante grande, integrando por partes, obtenemos

$$(6) \quad \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = -f(0) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

O sea, $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$. El caso $k > 1$ sigue por iteración del proceso precedente, QED.

2. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES A COEFICIENTES CONSTANTES. La transformada de Laplace se utiliza con éxito para resolver prácticamente ciertas ecuaciones diferenciales. Algunas de éstas son las ordinarias a coeficientes constantes:

$$(7) \quad p(u) \equiv u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_n u = \gamma(x),$$

$a_i \in \mathbb{C}, -\infty < x < +\infty$. Vale el siguiente teorema de valores iniciales:

TEOREMA 3. Sea $p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ el polinomio característico de la ecuación $P(u) = 0$ a coeficientes reales. Si $\lambda_j, j = 1, \dots, m$, son los ceros distintos de $p(\lambda)$ entonces la ecuación homogénea $P(u) = \gamma = 0$ tiene n soluciones

de la forma

$$(8) \quad x e^{j\lambda_j x}; \quad j = 1, \dots, m; \quad r = 0, 1, 2, \dots, (\text{orden del cero } \lambda_j) - 1.$$

Estas soluciones son linealmente independientes y toda otra solución de $P(u) = 0$ es combinación lineal de éstas. Si $P(f) = 0$ y $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ entonces $f \equiv 0$. Es decir, existe una y sólo una solución de $P(u) = 0$ con los valores de $u, u', \dots, u^{(n-1)}$ prefijados en un punto dado.

Para resolver la ecuación no homogénea puede recurrirse al siguiente teorema de existencia del núcleo de Green del problema:

TEOREMA 4. Existe una función $G(y)$ nula en $(-\infty, 0)$ tal que si $\gamma(t)$ se anula en $\{t < a\}$ y es continua en $\{a \leq t\}$, la función en $t \in (-\infty, \infty)$

$$(9) \quad u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\gamma(\tau) d\tau = \int_a^t G(t-\tau)\gamma(\tau) d\tau =: \gamma * G$$

es la única solución de $P(u) = \gamma$ en $\{t > a\}$ tal que $u(a) = \dots = u^{(n-1)}(a) = 0$.

$G(s)$ es una combinación lineal de las funciones (8) en $\{s > 0\}$ y además

$K(t, \tau) = G(t-\tau) \in C^{n-2}$. (Si $\gamma(a) \neq 0$ entonces $u^{(n)}(a)$ no existe).

No demostraremos aquí los teoremas 3 y 4.

3. APLICACION DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE. El problema de valores iniciales:

$P(u) = \gamma, u(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0$, de la ecuación (7) puede resolverse en $\{t > 0\}$ utilizando el (cf. (5))

TEOREMA 5. Para s suficientemente grande vale $L(u) = L(\gamma)/p(s)$ si

$|\gamma(t)| \leq Ke^{Mt}$ y u es solución del problema.

DEMOSTRACION. Esto es consecuencia del teorema 4. Demostremos que u crece, a lo más, exponencialmente. Como $|G(t)| \leq ce^{dt}$ para $t \rightarrow \infty$ tenemos

$$|u(t)| \leq \int_0^t ce^{d(t-x)} \cdot Ke^{Mx} dx \leq Qe^{qt}, \quad \text{qed.}$$

Conocida $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(\gamma)/p(s)$ el problema de hallar u se reduce al de encontrar $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\gamma)/p(s))$. Si $p(s)$ tiene raíces simples entonces

$$\frac{1}{p(s)} = \frac{b_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{b_n}{s - \lambda_n}, \quad b_j = 1/p'(\lambda_j).$$

En esta situación bastará hallar $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\gamma)/(s - \lambda_j))$ para resolver la ecuación no homogénea.

4. CONVOLUCION. Supongamos que f y g sean funciones definidas en $(-\infty, \infty)$, localmente integrables y nulas en $(-\infty, 0)$. La convolución de f con g se define c.d. por

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt = (g * f)(x).$$

Si h es otra función con las propiedades de f y g , tenemos:

$$(10) \quad (f * g) * h = f * (g * h).$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son de la forma $O(e^{Kx})$ entonces $(f * g)(x) = O(e^{K'x})$ y para $s > K' > K$,

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(f * g) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\int_0^x f(t)g(x-t) dt \right) dx = \\ &= \int_0^{\infty} f(t) dt \int_t^{\infty} e^{-sx} g(x-t) dx = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ts} dt \int_0^{\infty} g(v) e^{-vs} dv = \\ &= \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g). \end{aligned}$$

Sea H la función de Heaviside: $= 1$ en $[0, \infty)$, $= 0$ en $(-\infty, 0)$. Entonces, $H * H = xH(x)$;

$H * \dots * H = x^{n-1}/(n-1)!$ y $H * f = \int_0^x f(t) dt =$ primitiva de f nula en $x = 0$, ($x \geq 0$).

Luego, si f es localmente integrable y nula en $(-\infty, 0)$:

$$(12) \quad H * \dots * H * f = \int_0^x \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 \dots dt_n =$$

$$f * H * \dots * H = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Esta es la llamada **fórmula de Liouville**. La función obtenida es una primitiva n -ésima de f , y justamente es la que se anula junto con sus $n-1$ primeras derivadas en $x \leq 0$. Utilizando la tabla obtenemos para f tal que $f(x) = O(e^{Kx})$:

$$(13) \quad \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt\right) = \frac{1}{s^n} (\mathcal{L}f)(s).$$

Otra aplicación: de los teoremas 4 y 5 resulta que la solución (9), $u = \gamma * G$, del problema de valores iniciales mencionado en el párrafo 3 verifica en $s > > 1$ $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(\gamma) \cdot \mathcal{L}(G)$ con $(\mathcal{L}G)(s) = 1/\rho(s)$.

5. EL TEOREMA DEL VALOR INICIAL. Supongamos que $f(x)$ tenga un crecimiento a lo sumo exponencial y que exista el límite $f(0+) = \lim_{x \downarrow 0} f(x)$. Vale entonces el

TEOREMA 6. Si $|\text{Arg } \rho| < \frac{\pi}{2} - \eta$, $\eta > 0$, entonces

$$\lim_{|\rho| \rightarrow \infty} \rho \cdot (\mathcal{L}f)(\rho) = f(0+).$$

DEMOSTRACION. Podemos suponer $f(0) = f(0+)$ y $|f(x)| \leq Ke^{Mx}$ en $x > 0$. Sea $h > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \rho \cdot (\mathcal{L}f)(\rho) &= \rho f(0) \cdot \int_0^h e^{-\rho x} dx + \rho \int_0^h (f(x) - f(0)) e^{-\rho x} dx + \rho \int_h^\infty f(x) e^{-\rho x} dx = \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Además, si h es bastante pequeño:

$$|I_2| \leq \epsilon \cdot |\rho| \cdot \int_0^h e^{-(R\rho)x} dx = \frac{\epsilon |\rho|}{R\rho} (1 - e^{-hR\rho}) \leq \frac{\epsilon}{\cos(\frac{\pi}{2} - \eta)},$$

pues $|\text{Arg } \rho| < \pi/2 - \eta$ implica que $|R\rho/\rho| \geq \cos(\frac{\pi}{2} - \eta)$;

$$|I_3| \leq |p|K \int_h^\infty e^{(M-Rp)x} dx \leq K|p| \frac{e^{(M-Rp)h}}{Rp - M}.$$

O sea, eligiendo primero h pequeño y luego p suficientemente grande resulta

$$|I_2 + I_3| \leq \frac{2\varepsilon}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)}.$$

Por otra parte,

$$I_1 = f(0)(1 - e^{-ph}) \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} f(0), \quad \text{QED.}$$

COROLARIO. *En las condiciones indicadas*

$$(\mathcal{L}f)(p) \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} 0.$$

6. FORMULA DE INVERSION DE MELLIN. La función $\phi(s)$ definida por (1) es holomorfa en el semiplano $\text{Re } s > a(f)$ (demostrarlo).

Si $b > a$ y f satisface condiciones adecuadas cerca del punto x_0 (por ejemplo, f es monótona en un entorno de x_0) entonces

$$(14) \quad \lim_{R=|R| \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} f(t) e^{tx_0} dt = \frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2}.$$

Obviamente, si f es también continua en x_0 el miembro derecho de (14) es igual a $f(x_0)$.

7. EJERCICIO. Dar una demostración con todos sus detalles del T.5 (Utilizar los teoremas 4,3 y 2).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] L.V. AHLFORS, *Complex Analysis. An introduction to the Theory of Analytic functions of one complex variable*, (1953).
- [2] H. BENKE y F. SOMMER, *Theorie der Analytische Funktionen einer Komplexen Veränderlichen*, (1965).
- [3] L. BIEBERBACH, *Einführung in die Funktionentheorie*, (1952).
- [4] C. CARATHEODORY, *Funktionentheorie*, (1950).
- [5] E.T. COPSON, *An Introduction to the Theory of a Complex Variable*, (1955).
- [6] R.V. CHURCHILL, *Introduction to complex Variable and Applications*, (1948).
- [7] K. KNOP, *Teoria de funciones*, (1926).
- [8] T.M. MAC ROBERT, *Functions of a complex Variable*, (1947).
- [9] A. MARKUSHEVICH, *Teoria de las funciones analíticas*, (1970).
- [10] G. MORETTI, *Functions of a complex Variable*, (1964).
- [11] W.F. OSGOOD, *Functions of a complex variable*, (1938).
- [12] J. REY PASTOR, A. SANTALO y M. BALANZAT, *Geometria Analitica*, (1955).
- [13] J. REY PASTOR, P. PI CALLEJA y C. TREJO, *Análisis Matemático, III*, (1959).
- [14] E. SAKS and A. ZYGMUND, *Analytic Functions*, (1952).
- [15] M.R. SPIEGEL, *Matemáticas Superiores para Ingenieros y Fisicos*, (1971).
- [16] G. SPRINGER, *Introduction to Riemann Surfaces*, (1957).
- [17] E.C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, (1939).
- [18] F. TRICOMI, *Funzioni Analitiche*, (1946).

[19] G. VALIRON, *Fonctions Analytiques*, (1954).

[20] L.I. VOLKOVSKI, G.L. LUNTS, I.G. ARAMANOVICH, *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja*, (1972).

OTRAS REFERENCIAS SOBRE EL TEMA Y TEMAS AFINES.

[21] L.V. AHLFORS, L. SARIO, *Riemann Surfaces*, (1960).

[22] A. BENEDEK, E. FERNANDEZ, R. PANZONE, *Lecciones complementarias de Análisis Superior*, (1987).

[23] J.B. CONWAY, *Functions of one complex variable*, (1978).

[24] D. GAIER, *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*, (1964).

[25] B. KAUP, L. KAUP, *Holomorphic functions of several variables*, (1983).

[26] S.G. KRANTZ, *Function theory of several complex variables*, (1982).

[27] J. LEHNER, *A Short Course in Automorphic Functions*, (1966).

[28] G. LEHTO, K.I. VIRTANEN, *Quasiconformal Mappings in the plane*, (1973).

[29] R. NEVANLINNA, *Uniformisierung*, (1953).

[30] G.N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, (1952).

[31] D.V. WIDDER, *An introduction to transform theory*, (1971).

[32] G.P. TOLSTOV, *Fourier Series*, (1962).

[33] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series, I*, (1959).