Sobre el concepto de dominio uniforme

por A. Benedek y R. Panzone.

Summary. We consider in this expository paper several equivalent definitions of uniform domain. The work of O. Martio [M] has been our main reference since it contains most of these definitions. However some proofs have been shortened (cf. lemma 1 and Th. 1).
There is a discrepancy in the literature about our property U (c-uniformity according to Martio). It appears more restrictive than our property R which is the definition of uniformity used by P. Jones [JP]. We demonstrate that both are also equivalent. Our proof requires to know in advance the uniformity of some simple regions that we prove with ad hoc methods.

1. **Introducción**. El propósito del presente trabajo es analizar diferentes definiciones de uniformidad para dominios de $\mathbb{R}^n$ y mostrar su equivalencia.

1.1. **Definición 1**. Diremos que el dominio propio D de $\mathbb{R}^n$ satisface la propiedad E si existe un número ε, $0 < \varepsilon \le 1$, tal que para todo par x_1, $x_2 \in D$ puede hallarse una curva rectificable $\Gamma \subset D$ que une x_1 con x_2 tal que cualquiera sea $x \in \Gamma$ vale:

$$(1) \quad \begin{cases} d(x) := \mathrm{dist}(x,\partial D) \ge \varepsilon|x_1-x||x-x_2|/|x_1-x_2|, \\ l(\Gamma) := \mathrm{long}(\Gamma) \le |x_1-x_2|/\varepsilon. \end{cases}$$

A estas regiones se las denomina dominios (ε,∞) y a la propiedad que las define la denotaremos con $E(\varepsilon)$ cuando queramos destacar el rol del parámetro ε.

Diremos que $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \mathbb{R}^n$, es c-uniforme si es un dominio que satisface la siguiente definición con el parámetro c.

Definición 2. D posee la propiedad U (precisamente U(c)) si existe $c \in (0,1]$ tal que para todo par x_1, $x_2 \in D$ existe una curva (continua) $J \subset D$, $J = J(t)$, $0 \le t \le 1$, $J(0) = x_1$, $J(1) = x_2$, de manera que para todo punto $x \in J$ y todo $y \in D^c := \mathbb{R}^n \setminus D$, vale para $i = 1,2$, $j = 1,2$, $j \neq i$:

$$(2) \quad \frac{|x-y|\,|x_1-x_2|}{|x-x_i|\,|y-x_j|} \ge c \quad ; \quad \frac{|x_1-x_2|}{|x-x_i|} \ge c.$$

Obsérvese que la segunda condición en (2) se obtiene de la primera reemplazando y por ∞.

Proposición I. $D \in E$ implica $D \in U$.

En efecto, tomando $J = \Gamma$ se obtiene de la segunda condición en (1) que $|x_1-x_2|/|x-x_i| \ge \varepsilon$. De esta desigualdad, si $|x-y| \ge |x_j-y|/2$, obtenemos la primera condición en (2) con $c = \varepsilon/2$. Supongamos que $|x-y| < |x_j-y|/2$. Entonces $|x-x_j| \ge |x_j-y|-|x-y| \ge |x_j-y|/2$, y de (1) sigue que

$$|x-y| \ge d(x) \ge \varepsilon|x_i-x|\,|x-x_j|/|x_1-x_2| \ge (\varepsilon/2)|x-x_i|\,|y-x_j|/|x_1-x_2|.$$

La tesis sigue inmediatamente con $c = \varepsilon/2$.

1.2. Definimos a continuación lo que algunos autores llaman dominios de tipo (Bb,B).

Definición 3. D posee la propiedad P, o mejor dicho P(b,B), si existen dos números positivos b y B tales que para todo par de puntos x_1, $x_2 \in D$, existe un arco rectificable $p(t)$, $0 \le t \le l(p)$, $p(t) \in D$, $p(0) = x_1$, $p(l) = x_2$, y para todo t = parámetro longitud de arco, vale

$$(3) \quad \begin{cases} d(p(t)) \ge b(l/2-|t-l/2|) = b\cdot\inf(t,l-t), \\ l = l(p) \le B|x_1-x_2|. \end{cases}$$

Obsérvese que necesariamente $b \le 1$.

Proposición II. $D \in P$ implica $D \in E$.

En efecto, multiplicando y dividiendo el miembro derecho de la primera desigualdad en (3) por $|t-l/2|+l/2$ resulta

$$d(p(t)) \geq b\frac{t(1-t)}{1} \geq \frac{b|x_1-p(t)||p(t)-x_2|}{B|x_1-x_2|}.$$

Convendremos en usar el parámetro longitud de arco en curvas rectificables a menos que haya una indicación en contrario.

1.3. Definición 4. $D \in A$ (o bien $\in A(h)$) si existe un número h, $0 < h \leq 1$, tal que para todo par x_1, $x_2 \in D$ existe una curva $a(t):[0,2] \to D$ que verifica $a(0) = x_1$, $a(2) = x_2$ y

$$(4)\ \begin{cases} d(a(t)) \geq h|a(t)-a(s)| \text{ si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \text{ o } 1 \leq t \leq s \leq 2, \\ |a| := \operatorname{diam} a \leq |x_1-x_2|/h. \end{cases}$$

Para demostrar que las clases de los dominios propios de $\mathbb{R}^n$ definidas por A, P, E o U coinciden bastará ver que vale el

Teorema 1. i) $D \in A$ implica $D \in P$,

ii) $D \in U$ implica $D \in A$.

De este menester también se ocupan, entre otras cosas, Martio y Sarvas en [MS], fuente que nosotros utilizamos en la presente exposición.

1.4. Definición 5. Diremos que D tiene la propiedad R(C) si satisface sólo la primera condición en (2). O sea, existe un número $C \in (0,1]$ tal que para todo par de puntos $x_1, x_2 \in D$ existe una curva $J \subset D$ que une x_1 con x_2 tal que para todo $x \in J$ y todo $y \in D^c$ vale

$$(5)\ \begin{cases} R(x_1,x_2;x,y) := \dfrac{|x_1-x_2||x-y|}{|x_1-x||x_2-y|} \geq C, \\ R'(x_1,x_2;x,y) := R(x_2,x_1;x,y) \geq C. \end{cases}$$

P. Jones usa esta definición de uniformidad (cf. [JP], p. 85) mientras que Martio y Sarvas [MS] agregan la condición para $y = \infty$ (cf. (2)). Para demostrar que R es también equivalente a A, P, E y U bastará demostrar el

Teorema 2. $D \in R$ implica $D \in U$.

1.5. Para la demostración del T.1 recurriremos al siguiente importante lema debido a Martio y Sarvas (cf. [MS] Lemma 2.7 y [M] par. 2.3).

Lema 1. Sean x_1, x_2 dos puntos del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ y $g = g(t) \subset D$ una curva que une x_1 con x_2 de manera que

(6) $g(0) = x_1$, $g(1) = x_2$,

(7) $d(g(t)) \geq h|g(t)-g(v)|$,

donde $0 \leq v \leq t \leq 1$ y h es una constante positiva ≤ 1. Entonces existe una curva rectificable $p(s)$, $0 \leq s \leq l(p)$, que une x_1 con x_2, contenida en D, tal que

(8) $|x_1-x_2| \geq f\cdot l(p)$,

(9) $d(p(s)) \geq f\cdot s$,

con $f = f(h,n) > 0$.

La primera parte del T.1 sigue fácilmente. En efecto, sea $a(t)$ una curva como en la definición 4 y sea $x_0 = a(1)$. Por el lema 1 sabemos que existe una curva $p_i(s)$, $0 \leq s \leq l(p_i) \leq |x_i-x_0|/f$ que une x_i con x_0.

Definimos:

$$p(s) = \begin{cases} p_1(s), & 0 \leq s \leq l(p_1), \\ p_2(l-s), & l(p_1) \leq s \leq l(p_1)+l(p_2) = l(p) =: l. \end{cases}$$

Entonces, $d(p(s)) \geq fs$ en el primer caso y $d(p(s)) \geq f(l-s)$ en el segundo. Luego, $d(p(s)) \geq f\cdot \inf(s,l-s)$.

Por otra parte, las desigualdades $|x_1-x_2| \geq h|a| \geq h|x_i-x_0| \geq$ $\geq h\, f\, l(p_i)$, $i = 1,2$, implican la segunda condición en (3). Luego, $A \subset P$.

1.6. Si T denota a un movimiento rígido y $D \in R$ entonces $T(D) \in R$.

Sean $0 \bar{\in} D$ y $Tz = z/|z|^2$. Entonces $|Tz-Ty| = |z-y|/|z||y|$ y en consecuencia, las imágenes de D por transformaciones de Moebius tienen también la propiedad R. Un teorema de Liouville afirma que las transformaciones de Moebius son las únicas aplicaciones conformes si $n > 2$ (una demostración simple para transformaciones C^4 puede verse en [N]; para transformaciones C^1 consúltese [H]). El siguiente resultado que precisaremos y demostraremos en la sección 6 es una generalización natural de lo dicho.

Teorema 3. Sea D un dominio propio de $\mathbb{R}^n$ y f un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ casiconforme. Si $D \in A$ entonces $f(D) \in A$.

2. Ejemplos. Notamos con $B_r(a)$ o $B(a;r)$ a la bola abierta de $\mathbb{R}^n$ de radio r y centro a. Sea $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_n > 0\}$.

Proposición 1. $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_1(0) \in U(1/6)$.

Proposición 2. $\mathbb{R}^n_+ \in U(1)$.

Si $D = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_1(0)$ es c-uniforme ($\in U(c)$) entonces también lo es $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_r(0)$ pues (2) es invariante por homotecias. Luego, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es c-uniforme. La imagen por $T(x) = x/|x|^2$, la inversión respecto de $B_1(0)$, de la primera región es $B_1(0)\setminus\{0\}$. Entonces $T(D) = B_1(0)\setminus\{0\} \in R$. La inversión respecto de $B_1((0,\dots,0,1))$ lleva $\mathbb{R}^n_-$ en $B_{1/2}((0,\dots,0,1/2))$. De la proposición 2 sigue ahora que $B_r(a) \in R(1)$. Esa inversión lleva $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{1/2}((0,\dots,0,1/2))$ en $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$. Luego, $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{(0,\dots,0,h)\} \in R$ cualquiera sea $h > 0$. Por tanto, $B_1(0) \setminus \{(0,\dots,0,k)\} \in R$ si $0 \le k < 1$.

Proposición 3. Sea D un dominio acotado, fuertemente Lipschitz. Entonces $D \in P$.

2.1. Demostración de la proposición 1. Queremos probar que existe una constante positiva c tal que si x_1, $x_2 \in D := \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_1(0)$, es posible hallar una curva $j(t)$ que une x_1 con x_2 en D, que verifica $|j(t)-x_i| \le |x_1-x_2|/c$ y las desigualdades:

(10) $R(x_1,x_2;j(t),y) \ge c$, $R'(x_1,x_2;j(t),y) \ge c$.

Dados dos puntos a y b en $\mathbb{R}^n$ consideremos el conjunto

(11) $B_\lambda = \{x: |x-a| = \lambda|x-b|\}$, $0 < \lambda < \infty$.

De $|x-a|^2 = \lambda^2|x-b|^2$ resulta que

(12) $|x|^2(1-\lambda^2) - 2\langle x, a-\lambda^2 b\rangle + |a|^2-\lambda^2|b|^2 = 0$,

y recíprocamente.

Entonces x satisface (12) si y sólo si $\left| x - \dfrac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2} \right|^2 = \left[\dfrac{\lambda|a-b|}{1-\lambda^2} \right]^2$

(que se obtiene desarrollando el miembro izquierdo y usando (12)).

Es decir, B_λ es una esfera de centro $O_\lambda = (\lambda^2 b-a)/(\lambda^2-1)$ y radio $K_\lambda = \lambda|a-b|/|\lambda^2-1|$ salvo cuando $\lambda = 1$. En este caso coincide con el hiperplano perpendicular a b-a que pasa por (a+b)/2.

Obsérvese que $O_\lambda = a+(\lambda^2/(\lambda^2-1))(b-a)$. Por tanto, si $\lambda > 1$, O_λ está sobre la recta que una a con b en el segmento comprendido entre b e ∞ y si $\lambda < 1$ en el segmento que une ∞ con a.

Fijado $j \in D$, $x_1 \ne j \ne x_2$, $R = |x_1-x_2||j-y|/|j-x_1||x_2-y|$ no puede, por lo dicho, tomar un máximo ni un mínimo en $\{y:|y|<1\}$.

Si z denota la proyección ortogonal de y sobre el plano 0, j, x_2 y $s = |y-z|$, tenemos

$$(13)\quad \frac{|y-j|^2}{|y-x_2|^2} = \frac{|z-j|^2+s^2}{|z-x_2|^2+s^2} \ge \inf(1,|z-j|^2/|z-x_2|^2).$$

Luego, si tuviéramos una curva $j(t)$ en la intersección de D con el plano P determinado por 0, x_1, x_2, que une x_1 con x_2 y satisface $|j(t)-x_1| \le k|x_1-x_2|$, seguiría $R \ge \inf(R(x_1,x_2;j(t),z),1/k)$. Por tanto bastará estimar por abajo a R (y R') para puntos $y \in P$ con $|y| = 1$. Para definir $j(t)$ supongamos que $|x_2| \geq |x_1|$ y sea $j(t)$ como en la figura 1 con $\Phi \leq \pi$ y $|z_2-x_2| = |x_1-x_2|$. Entonces, $|z_1-x_1| = |x_2-z_2|+|x_2|-|x_1| \leq$ $\leq 2|x_1-x_2|$; $|z_1-z_2| \leq |z_1-x_1|+|x_1-x_2|+|x_2-z_2| \leq 4|x_1-x_2|$.

En consecuencia,

$|j(t)-x_i| \leq |z_j-x_i| \leq |x_1-x_2| + |x_j-z_j| \leq 3|x_1-x_2|$.

Sea $|z_2| = a+1$ el radio del arco A de centro O y consideremos primero $j = j(t) \in A$. Tenemos (véase fig. 1):

$$(14) \quad \frac{|j-Y|}{|x_i-Y|} \geq \frac{|j-Y|}{|z_i-Y|} \geq \frac{a+1}{a+2} \geq \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, $|j-y| \geq |z_1-y| \geq \sup(|x_1-y|,|x_1-x_2|)$, y resuta que $2|j-y| \geq |x_1-y|+|x_1-x_2| \geq |x_2-y|$. Entonces

$$(15) \quad \frac{|j-y|}{|x_i-y|} \geq 1/2.$$

Finalmente (ver figura),

$$(16) \quad \frac{|j-y'|}{|x_i-y'|} \geq \frac{a}{|x_i-x_j'|} \geq \frac{a}{|x_i-x_j|+|x_j-x_j'|} \geq 1.$$

Teniendo en cuenta que $|j-x_i| \leq 3|x_1-x_2|$ se obtiene $|x_1-x_2|/|j-x_i| \geq 1/3$. Sigue de (14), (15) y (16) que R, R' $\geq 1/6$ para $j = j(t) \in A$. A continuación encontramos una cota inferior para R y R' en el caso que j esté en algunos de los segmentos z_i, x_i. Podemos ignorar en lo que sigue que $|x_2| \geq |x_1|$. Supongamos por ejemplo a j en el segmento x_2, z_2. Entonces, si $|w| = 1$, $|j-w| \geq |x_2-w|$ y $R \geq |x_1-x_2|/(|x_1-x_2|+|x_2-z_2|) \geq 1/3$. Por otra parte,

$$\frac{|j-w|}{|j-x_2|} \geq \frac{|z_2-w|}{|z_2-x_2|}$$

pues el cociente decrece monótonamente sobre el segmento (x_2,z_2). En efecto, éste nunca es tangente a la circunferencia

$\{x: |x-w|/|x-x_2| = 1+\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ pues x_2 es interior a ella. En consecuencia $R'(x_1,x_2;j,w) \geq R'(x_1,x_2;z_2,w) \geq 1/6$, qed.

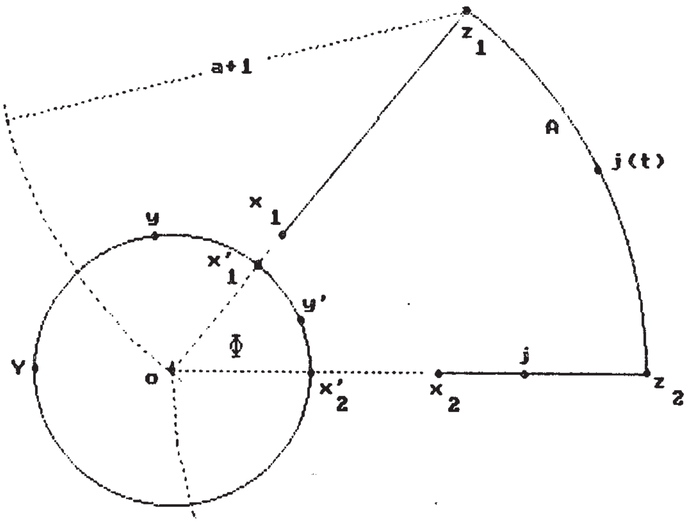

Fig. 1

2.2. Demostración de la proposición 2. Sean x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^n_+$. Elegimos como curva $j(t)$, $0 \leq t \leq l(j)$, al arco de circunferencia que une x_1 con x_2, con centro Q en $\{x_n = 0\}$, que se encuentra en el plano P que pasa por esos puntos y es perpendicular al contorno de $\mathbb{R}^n_+$. Definimos $f(t) := |j(t)-y|/|j(t)-x_1|$ para $y \in P \setminus \mathbb{R}^n_+$. Sea $T \in$ $\in (0,1)$. Veamos que $f(T)$ no es un extremo relativo de f. Si lo fuera el arco j sería tangente a $\partial B_L(O_L)$ en $j(T)$ donde (cf. 2.1) $L = |j(T)-y|/|j(T)-x_1|$. En ese caso O_L y Q, que son distintos, se encuentran sobre la perpendicular a j en $j(T)$. Si B_L contiene a x_r entonces necesariamente $j \subset \bar{B}_L$ y $O_L \in \mathbb{R}^n_-$, contradicción, pues $L > 1$. Si $y \in B_L$ entonces $L < 1$ y $O_L \in \mathbb{R}^n_-$. Luego, $\bar{B}_L \supset j$, y por tanto $x_1 \in B_L$, contradicción. Resulta entonces que

$$q = \frac{|j(t)-y|}{|j(t)-x_1|}\,\frac{|x_1-x_2|}{|y-x_2|} \geq 1.$$

Sea $Y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+$, y = proyección ortogonal de Y sobre P.

En consecuencia (cf. (13)):

$$\frac{|j(t)-Y|}{|x_2-Y|}\;\frac{|x_1-x_2|}{|j(t)-x_1|} \geq 1.$$

Se concluye ahora que vale la primera condición en (2). La segunda se obtiene haciendo $Y \to \infty$, qed.

2.3. Demostración de la proposición 3. Un dominio D fuertemente Lipschitz tiene cada punto x_0 de su contorno cubierto por un entorno U que en un sistema ortogonal de coordenadas adecuado verifica

$U = \{x: |x_i| < d_i\}$,

$U \cap D = \{x: |x_i| < d_i,\ i=1,2,\dots,n-1,\ -d_n < F(x') < x_n < d_n\}$,

$U \cap \partial D = \{x: |x_i| < d_i,\ i=1,2,\dots,n-1,\ x_n = F(x')\}$,

donde $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ y F satisface una condición de Lipschitz: $|F(x)-F(y)| \leq K|x-y|$. Por ser D acotado, una familia finita de entornos U cubre el contorno de la región, que consta, por otra parte, de un número finito de componentes conexas $\partial_1,\dots,\partial_N$. Luego, podemos suponer K independiente de U.

Existe entonces un número $\varepsilon > 0$ tal que $D_{2\varepsilon} = D \setminus \{x \in D: \operatorname{dist}(x,\partial D) \leq 2\varepsilon\}$ es un dominio de $\mathbb{R}^n$ y los conjuntos $\{x \in D: \operatorname{dist}(x,\partial_i) \leq 2\varepsilon\}$ son disjuntos. En esta situación puede determinarse un número $M < \infty$ tal que dos puntos de $D_{2\varepsilon}$ pueden unirse con un arco rectificable de longitud menor que M contenido en D_ε. Luego, si $x_1, x_2 \in D$, $|x_1-x_2| < \varepsilon/C$, C una constante adecuada ≥ 1, existe una curva que satisface (3) si $\operatorname{dist}(x_i,\partial D) < 2\varepsilon$, (cf. figura 2). Si para algún i, $\operatorname{dist}(x_i,\partial D) \geq 2\varepsilon$, bastará unir los puntos con un segmento. Si $|x_1-x_2| \geq \varepsilon/C$, se unen ambos puntos a un punto fijo $X \in D_{2\varepsilon}$ por arcos de longitud menor que $M+2\varepsilon$, qed.

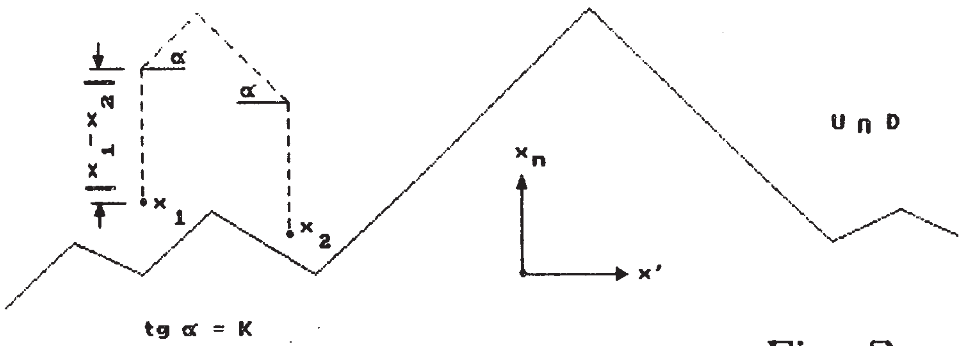

Fig. 2

3. Demostración del lema 1. Definimos por inducción una sucesión $\{z_i\}$ de puntos sobre g de la siguiente manera:

$$(17)\quad \begin{cases} t_0 = 1,\ z_i = g(t_i),\ t_{i+1} = \inf\{t\colon |g(t)-z_i| \le r_i/2\}, \\ r_i = d(z_i) = \mathrm{dist}(z_i,\partial D) \text{ si } t_i > 0. \end{cases}$$

Si $t_{i+1} = 0$ entonces $z_{i+1} = g(0) = x_1$. Convenimos en interrumpir la sucesión en $i+1$ si esto ocurre, definiendo $r_{i+1} = 0$.

Si $r_0 \ge 2|x_1-x_2|$ entonces el segmento p que une x_1 con x_2 dista del borde por lo menos $|x_1-x_2|$ y por tanto $d(p(s)) \ge |x_1-x_2| \ge s$. En este caso podemos tomar $f = 1$ en (8) y (9). Supongamos ahora que $r_0 < 2|x_1-x_2|$. Luego, si $t_{i+k} > 0$ y $k > 0$ entonces $|z_{i+k}-z_i| \ge$ $\ge r_i/2$. En consecuencia, $r_{i+k} \le |z_{i+k}-z_i|+r_i \le 3|z_{i+k}-z_i|$.

En esta situación tenemos

$$(18)\quad |z_{i+k}-z_i| \ge \sup(r_i,r_{i+k})/3.$$

Luego, las bolas $B_i := B(z_i;r_i/6)$ son disjuntas.

De (7) y (18) obtenemos las siguientes inclusiones:

$$(19)\quad B_{i+k} \subset B(z_i;\ |z_i-z_{i+k}|+r_{i+k}/6) \subset B(z_i;\ 3|z_i-z_{i+k}|/2) \subset$$
$$\subset B(z_i;\ 3r_i/2h).$$

Como las B_i son disjuntas, una estimación de volúmenes da

(20) $\sum_{i\le j} (r_j/6)^n \le (3/2h)^n r_i^n$.

(De aquí se deduce que $t_j = 0$ para algún j pues en caso contrario $r_j \to 0$, que contradice al hecho que la curva g está a distancia positiva del borde). En consecuencia, $\sum_{i\le j} r_j^n \le M r_i^n$ con $M = (9/h)^n$. Definimos $\Phi(u)$, $0 \le u < \infty$, de la siguiente forma:

$$(21) \quad \begin{cases} \Phi(u) = r_i^n & \text{si } i \le u < i+1,\ t_i > 0, \\ \Phi(u) = 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sea $F(x) := \int_x^\infty \Phi(u)du$, $0 \le x$. Si $F'(x)$ denota la derivada a derecha de F, en $i \le x < i+1$, para $t_i > 0$, se tiene:

$$F(x) \le F(i) = \sum_{i\le j} r_j^n \le M r_i^n = -M F'(x).$$

Por tanto, $F'(x) \le -F(x)/M$. Sea G la solución de $G'(x) = -G(x)/M$ tal que $G(i) = F(i)$. Entonces (cf. [Ha], [B]),

(22) $F(x) \le G(x) = F(i)\, e^{-(x-i)/M} \le M r_i^n e^{-(x-i)/M}$, $x \ge i$,

(23) $r_{i+k}^n \le \sum_{i+k\le j} r_j^n \le M r_i^n e^{-k/M}$.

De (23), extrayendo la raíz n-ésima y sumando, se obtiene

(24) $\sum_{i\le j} r_j/2 \le K r_i/2$, $K = M^{1/n}/(1-e^{-1/nM})$.

Sea p(s) la poligonal obtenida uniendo los puntos z_i con segmentos. Entonces $l(p) \le \sum r_i/2$ pues

(25) $|z_{i+1}-z_i| = r_i/2$ si $z_{i+1} \ne x_1$, $\le r_i/2$ si $z_{i+1} = x_1$.

Usando (24) sigue ahora que $l(p) \le Kr_0/2 < K|x_1-x_2|$, y se verifica (8). Si p(s) está en el segmento z_i, z_{i+1} entonces $s \le \sum_{i\le j} r_j/2 \le$ $\le Kr_i/2$. Por otra parte $d(p(s)) \ge d(z_i)-r_i/2 = r_i/2 \ge s/K$ Por tanto, se verifican en todo caso (8) y (9) con $f = 1/K$, qed.

4. Demostración de ii) del teorema 1. Probaremos que $U(c) \subset \subset A(1/(2/c)^2(1+2/c)^2)$, (cf. [M], p. 200, 201). Sea J la curva que une los puntos x_1 y x_2 de D y satisface (2). De estas desigualdades siguen fácilmente las siguientes:

$$(26)\quad \begin{cases} d(x) \geq (c/2)\inf(|x-x_1|,|x-x_2|), \\ d(x) \geq (c/2)\inf(d(x_1),d(x_2)). \end{cases}$$

Sea $x_0 \in J$ tal que $|x_0-x_1| = |x_0-x_2| =: m$. De la desigualdad triangular y (2) se obtiene

$$(27)\quad |x_1-x_2|/2 \leq m \leq |x_1-x_2|/c.$$

Definimos a continuación una sucesión de puntos $\{z_h\} \subset J$ de manera que

$$(28)\quad z_0 = x_0,\ |z_h-x_1| = m(c/2)^h,\ h=1,2,\dots .$$

Entonces, para $h=1,2,\dots$ usando (27) obtenemos: $|z_h-x_1| \leq mc/2 \leq \leq |x_1-x_2|/2$, y por tanto las desigualdades

$$(29)\quad |z_h-x_1| \leq |z_h-x_2| ,\ h = 0,1,2,\dots .$$

Usando (26), (28) y (29) resulta

$$(30)\quad d(z_h) \geq (c/2)|z_h-x_1| = m(c/2)^{h+1} =: r_h,\ h \geq 0.$$

Construímos a continuación una curva $a(t)$ que satisface las condiciones de la definición 4. Bastará construir la mitad de ella que une x_1 con x_0. Esa parte de a la obtenemos uniendo consecutivamente una familia de curvas $\{\Gamma_j\}$. Γ_j será la curva que une z_{j-1} con z_j cuya existencia asegura la c-uniformidad de D. Parametrizamos ese trozo de a con $t \in [0,1]$ y de manera que $a(0) = x_1$, $a(1) = x_0$. Si $j \geq i$, $v \in \Gamma_j$, $x \in \Gamma_i$, entonces

$$(31)\quad |x-v|\leq|v-z_j|+|x-z_i|+|z_i-z_j|\leq|z_{j-1}-z_j|/c+|z_{i-1}-z_i|/c+|z_i-z_j|.$$

De (28) sigue que $|z_i-z_{i-1}| \leq m(c/2)^{i-1}(1+c/2)$, desigualdad que aplicada a (31) da lugar a

$$(32)\quad |x-v| \le (2/c)m(c/2)^{i-1}(1+c/2)+m(c/2)^{i}(1+c/2) <$$
$$< m(c/2)^{i}(1+2/c)^{2} = (2/c)^{2}(1+2/c)^{2}\cdot r_{i+1}.$$

Aplicando (26) a Γ_i y recurriendo a (30) obtenemos

$$d(x) \ge (c/2)\inf\{d(z_i)\ ,\ d(z_{i-1})\} \ge (c/2)r_i = r_{i+1}.$$

Utilizando esta minoración de $d(x)$ y (32) resultan

$$\left[\begin{array}{l} |x-v| \le (2/c)^{2}(1+2/c)^{2}d(x), \\ |a| \le 2m(1+2/c)^{2} \le (2/c)(1+2/c)^{2}|x_1-x_2|, \text{ qed.} \end{array}\right.$$

5. Demostración del teorema 2. Si D^c tiene diámetro infinito existe una sucesión $\{y_n\} \subset D^c$ con $|y_n| \to \infty$. (5) implica entonces que $|x_1-x_2|/|x_i-J(t)| \ge C$, que es la segunda condición en (2).

Supongamos ahora D^c acotado. Si consta de sólo un punto entonces es un dominio (1/6)-uniforme. Podemos entonces asumir que D^c es acotado y con más de un punto. Como (2) no cambia por traslaciones y homotecias, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $D^c \subset \bar{B}(0;1)$, $y_0 = 0 \in D^c$, $y_1 \in D^c$, $|y_1| = 1$.

Caso 1: x_1, $x_2 \in D$, $|x_i| > 1$. De la proposición 1 sigue que vale (2) con $c = 1/6$.

Caso 2: $|x_i| < 2$. Sea J la curva que une x_1 con x_2 y $K(t)$ la obtenida de ella de la siguiente manera: $K(t) = J(t)$ si $|J(t)| < 3$, $K(t) = 3\, J(t)/|J(t)|$ en caso contrario.

Si $|K(t)| = 3$ existe T tal que $|J(T)| = 3$. Entonces, para $y \in D^c$ tenemos $|K(t)-y| \ge |J(T)-y|/2$; $|x_i-K(t)| \le 5|x_i-J(T)|$.

En consecuencia,

$$(33)\quad |K(t)-y|\,|x_1-x_2| \,/\, |K(t)-x_i|\,|x_j-y| \ge C/10.$$

Por otra parte, de $|x_j-y_0|+|x_j-y_1| \ge |y_1-y_0| = 1$ sigue que, dado x_j, para algún $y \in D^c$ vale $|x_j-y| \ge 1/2$. De (33), y con este y, obtenemos $4|x_1-x_2| \geq |K(t)-y||x_1-x_2| \geq (C/20)|x_i-K(t)|$, y vale (2) con $c = C/80$.

Caso 3: $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \geq 2$. Sea $t_0 = \inf\{t:|J(t)|=2\}$.

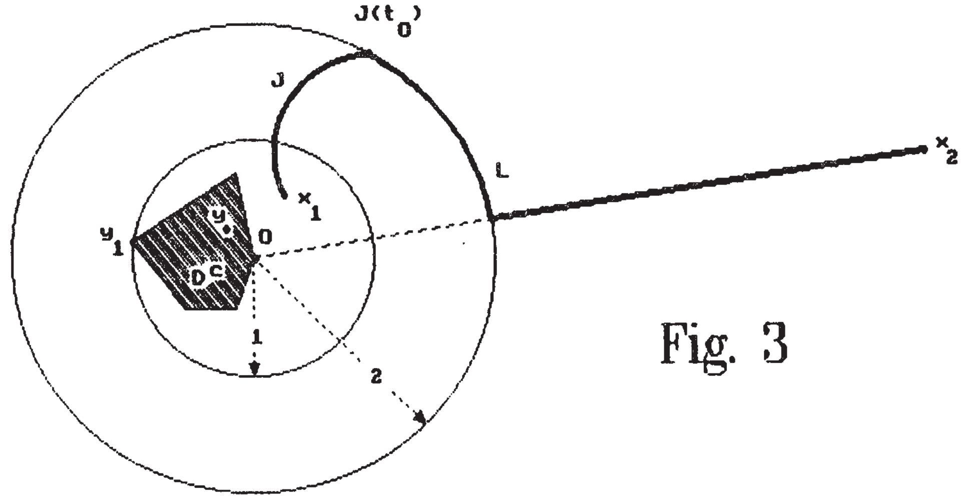

Fig. 3

Definimos $L(t)$ como la curva que une $J(t_0)$ con x_2 según la figura 3 y parametrizada con $t \in [t_0,1]$. Sea $K(t)$ la curva obtenida yuxtaponiendo $J(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, con $L(t)$. Si $x \in L$ tenemos,

$$\textbf{(34)}\quad R \geq \frac{|x_1-x_2|}{3|y-x_2|} \geq 1/9;\ R' \geq \frac{|x_1-x_2|}{2|x-x_2|} \geq \frac{|x_2|-1}{2(|x_2|+2)} \geq 1/8.$$

Además, $|K| \leq 2|x_2| \leq 2(|x_2-x_1|+1) \leq 4|x_2-x_1|$. Reuniendo los tres casos podemos afirmar que $D \in U$, qed.

6. Demostración del teorema 3. Sea f un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ y definamos $l(x,r) = \inf\{|f(y)-f(x)|: |y-x| = r\}$; $L(x,r) = \sup\{|f(y)-f(x)|: |y-x| = r\}$. Supongamos que existan dos constantes positivas c y k de manera que para todo $r,s,0 < r \leq s < \infty$ valga

(35) $L(x,s)/l(x,r) \leq c(s/r)^k$.

Sea D un dominio propio de $\mathbb{R}^n$ y $D' = f(D)$. Si $x,z \in D$ verifican $|x-z| \le d(x)/h$ con $0 < h \le 1$ entonces $x' = f(x)$, $z' = f(z)$, verifican $|x'-z'| \le d'(x')/h'$ con $h' = h'(h,c,k)$. En efecto, sea $y \in D^c$ tal que $|y'-x'| = d'(x')$. Luego, si $z \in D$ es tal que $|x-z| \le d(x)/h$ entonces $|x-z| \le |x-y|/h$ y $L(x,|x-z|) \le$ $\le L(x,|x-y|/h) \le l(x,|x-y|)ch^{-k}$. En consecuencia $|x'-z'| \le$ $\le L(x,|x-z|) \le ch^{-k}|y'-x'| = ch^{-k}d'(x')$.

Supongamos ahora que $D \in A$. Entonces, dados x_1', $x_2' \in D'$ existirá una curva $a':[0,2] \to D'$ tal que $a'(0) = x_1'$, $a'(2) = x_2'$, $|a'(s)-a'(t)| \le d'(a'(t))/h'$ para $0 \le s \le t \le 1$ o $1 \le t \le s \le 2$. Recurriendo al lema 1 y razonando como en el párrafo 1.5 logramos reemplazar a' por otra curva a'' con estas mismas propiedades pero con la propiedad adicional: $|a''| \le |x_1'-x_2'|/h''$. Luego, $D' \in A$, qed.

Las transformaciones K-casiconformes de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ satisfacen (35) con $c = c(n,K)$ y $k = K^{1/(n-1)}$ (cf. [MS] p. 387 y [V]). Como $B_1(0) \in A$ del T. 3 sigue entonces el

Corolario. Todo casidisco Q en $\mathbb{R}^2$ es un dominio uniforme.

En efecto, por definición Q es imagen de $B_1(0)$ por una transformación casiconforme (cf. [LV], [L]).

7. Comentarios finales.

a) Si D es un dominio acotado fuertemente Lipschitz entonces es un dominio de extensión para espacios de Sobolev $W^{k,p}(D)$, $1 \le p \le \infty$. Este teorema sigue de un resultado debido a A.P. Calderón [C] si $1 < p < \infty$ y de otro de E.M. Stein [S] para $p = 1,\infty$. Peter W. Jones demuestra en [JP] el siguiente resultado que generaliza los teoremas de Calderón y Stein.

Teorema 4. Si $D \in R$ entonces es un dominio de extensión para $W^{k,p}(D)$, k entero positivo, $1 \leq p \leq \infty$. Más aún, si $n = 2$ y D es acotado, finitamente conexo, entonces es un dominio de extensión para los espacios mencionados si y sólo si $D \in R$.

En ese trabajo también recuerda que la isla de von Koch V es un dominio uniforme. En efecto, es un casidisco. Este dominio es el interior de la curva copo de nieve que es un fractal. Es sorprendente que a pesar de la irregularidad de su contorno, que no posee tangente en ningún punto, $W^{k,p}(V)$ pueda extenderse a $W^{k,p}(\mathbb{R}^2)$. En [Z] probamos que $V \in P(b,B)$ con $b = 2/(40+21\pi)$, $B = (18+11\pi)/4$.

b) Atendiendo a las constantes que aparecen en las distintas definiciones de uniformidad en las demostraciones de las proposiciones I y II y los teoremas 1 y 2, puede constatarse que se han probado las siguientes relaciones:

$E(\varepsilon) \subset U(\varepsilon/2)$; $P(b,B) \subset E(b/B)$; $A(h) \subset P(f, 2/hf)$, $f = f(h,n)$ del lema 1; $U(\varepsilon) \subset A((\varepsilon/2)^2(1+2/\varepsilon)^{-2})$; $R(C) \subset U(C/80)$.

REFERENCIAS.

[B] Birkhoff, G. and Rota, G-C., Ordinary Differential Equations, J. Wiley, (1978).

[C] Calderón, A. P., Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions, Proc. Symp. Pure Math., AMS, Vol. IV (1961), 33-49.

[H] Hartman, P., On isometries and on a theorem of Liouville, Math. Z., 69 (1958), 202-210.

[Ha] Hartman, P., Ordinary Differential Equations, J. Wiley, (1973).

[JP] Jones, P. W., Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces, Acta Math., 147 (1981), 71-88.

[L] Lehto, O., Univalent functions and Teichmüller spaces, Springer (1986).

[LV] Lehto, O. and Virtanen, K. I., Quasiconformal Mappings in the plane, Springer (1973).

[M] Martio, O., Definitions for uniform domains, Ann. Acad. Sc. Fenn., 5 (1980), 197-205.

[MS] Martio, O. and Sarvas, J., Injectivity theorems in plane and space, Ann. Acad. Sc. Fenn., 4 (1979), 383-401.

[N] Nevanlinna, R., On differentiable mappings, Analytic Functions edited by L. Ahlfors et al, Princeton Univ. Press, (1960), 3-9.

[S] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, (1970).

[V] Väisälä, J., Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Lecture Notes 229, Springer (1971).

[Z] Benedek, A. and Panzone, R., Dominios uniformes: la isla de von Koch, Anales de la Acad. Nac. de Cs. Exactas y Naturales, Buenos Aires, (1990).

Este trabajo concluye con el siguiente listado por orden cronológico de artículos sobre el tema. Esta compilación nos fué suministrada por el Prof. Edgardo Fernández Stacco, a quien agradecemos su generosa colaboración.

BIBLIOGRAFIA.

1961-1979

John F., Rotation and strain, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961) 391-413 (MR 25,#1672).

Väisälä J., On the null-sets for extremal distances, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 322 (1962) 1-12

Gehring F., Väisälä J., The coefficients of quasiconformality of domains in space, Acta Math. 114 (1965) 1-70.

John F., On quasi-isometric mappings, II, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969) 265-278 (MR 39#6055).

Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M., Integral representations of functions and embedding theorems, "Nauka", Moscow (1975). English transl. Wiley (1979).

Gehring F., Univalent functions and the Schwarzian derivative, Comm. Math. Helv. 52 (1977) 561-572.

Martio O., Sarvas J., Injectivity theorems in plane and space, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math. Vol 4 (1978/1979) 383-401 (MR 81i:30039)

Gehring F.G., Osgood B.G., Uniform domains and the quasihyperbolic metric, Journal Analyse Math. 36 (1979) 50-74 (MR 81k:30023).

1980-1985

Jones P.W., Extension theorems for BMO, Indiana Univ. Math. J. 29 (1980) 41-66

Martio O., Definitions for uniform domains, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 5 (1980) 197-205.

Martio O., New mathods in injectivity theorems connected with Schwarzian derivative. 18th. Scandinavian Congress of Mathematics (Aarhus, 1980) 411-415, Progress in Math. 11, Birkhäuser, Boston, Mass. (1981).

Jones P.W., Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces, Acta Math. 147 (1981) 71-88 (MR 83i:30014).

Trotsenko D.A., Properties of regions with a nonsmooth boundary (Russian), Sibirsk. Math. Z. 22 (1981) 4, 221-224, 232 (MR 82h:30015)

Gehring F.W., Characteristic properties of quasidisks. Les Presses de L'Université de Montréal (1982).

Gehring F.W., Injectivity of local quasi-isometries, Comm. Math. Helv. 57 (1982) 2, 202-220 (MR 84b:30018).

Gol'dshtein V.M., Embedding and extension theorems and capacity, Novosibirsk Gos. Univ. (1982) 84 pp. (MR 85m:46031b).

Puichuk S.I., Homogeneous domains with piecewise smooth boundaries (Russian), Math. Zametki 32 (1982) 5, 729-735, 750 (MR 82b:32047).

Reshetnyak Yu.G., Stability theorems in geometry and analysis, "Nauka" Sibirsk. Otdel. Novosibirsk (1982), 230 pp. (MR 85g:30028).

Reshetnyak Yu.G., Spatial Mappings whith bounded distortion, "Nauka" Sibirsk. Otdel. Novosibirsk (1982) (MR 85d:30033).

Näkki R., Palka B., Lipschitz conditions, b-arcwise connectedness and conformal mappings, J. Analyse Math. 42 (1982/1983) 38-50 (MR 85b:30014).

Besov O.V., Integral representations of functions in a domain with the flexible horn condition and embedding theorems, Dokl. Akad. Nauk SSSR 273 (1983) 6, 1294-1297. Soviet Math. Doklady 28 (1983) 3, 769-772 (MR 85i:46037).

Gevirtz J., On f"/f' and injectivity, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 8 (1983) 1, 87-92 (MR 85b:30027).

Gol'dshtein V.M., Reshetnyak Yu.G., Introduction to the theory of functions with generalized derivatives and quasiconformal mappings, "Nauka", Moscu (1983) 285 pp. (MR 85m:46031a).

Trotsenko D.A., Continuation from a domain and the approximation of space quasiconformal mappings with small distortion coefficient, Ser. Math. Doklady 27 (1983) 777-780.

Besov O.V., Estimates of Lp-moduli of continuity and embedding theorems for a domain with the flexible horn condition, Soviet Math. Doklady 29 (1984).

Fain B.L., Continuation of functions from anisotropic Sobolev spaces, Studies in the theory of diff. functions of several variables and its applications, X, Trudy Mat. Inst. Steklov 170 (1984) 248-272, 277 (MR 87e:46045).

Besov O.V., Integral representations of functions and embedding theorems for a domain with a flexible horn conditions (Russian), Studies in the theory of differentiable functions of several variables and its aplications, X, Trudy Mat. Inst. Steklov 170 (1984) 12-30, 274 (MR 87a:46047).

Herron D.A., Conformally invariant metrics and the geometric of uniform domains. University of Michigan, Thesis (1984).

Vodop'yanov S.K., Geometric properties of domains satisfying the extension condition for spaces of differentiable functions (Russian), Some appl. of funct. analysis to problems of math. physics, 65-95, 144-145. Proceed. Sobolev Sem., 84-2, Akad. Nauk SSSR Sibirsk Otdel., Inst. Mat. Novoribirsk (1984) (MR 87i:46079).

Besov O.V., Estimates of integral moduli of continuity and embedding theorems for domains with the flexible horn condition. Studies in the theory of functions of several real variables and the approximation of functions. Trudy Mat. Inst. Steklov 172 (1985) 1-15, 351 (MR 87e:46044).

Gehring F.W., Martio O., Lipschitz classes and quasiconformal mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 10 (1985) 203-219 (MR 87b:30029).

Gehring F.W., Martio O., Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings, J. Analyse Math. 45 (1985) 181-206 (MR 87j:30043).

Il'in V.P., Some questions associated with the formulation of embedding theorems in domains, Studies in the theory of functions, Trudy Mat. Inst. Steklov 172 (1985) 155-172, 353 (MR 87e:46048).

Lappalainen V., Lip-extension domains. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes 56 (1985), 52 pp. (MR 87h:26021).

Makarov N.G., On the distortion of boundary sets under conformal mappings, Proc. London Math. Soc. (3) 51 (1985) 2, 369-384. (MR 87d:30012).

Martin G.J., Quasiconformal and bi-Lipschitz homeomorphismus, uniform domains and the quasihyperbolic metric, Trans. Amer. Math. Soc., 292 (1985) 1, 169-191 (MR 87a:30037).

Semmes S.W., The Cauchy integral, chord-arc curves and quasiconformal mappins. The Bieberbach conjecture (West Lafayette, Ind., 1985), 167-183, Math. Surveys Monographs, 21, A.M.S., Providence, R.I. (1986) (MR 88a:30088).

Väisälä J., Quasimöbius maps, J. Analyse Math. 44 (1985), 218-234.

1986-1989

Besov O.V., Embedding of Sobolev spaces in domains with a decaying flexible cone condition, Studies in the theory of differentiable functions of several variables and its aplications, XI, Trudy Mat. Inst. Steklov 173 (1986), 14-31, 270 (MR 87m:40066).

Trotsenko D.A., Approximation by similarities of spatial mappings with bounded distortion. Siberian Math. J. 27 (1986) 6, 946-954 (MR 88f:30037).

Väisälä J., Bi-Lipschitz and quasisymmetric extension properties. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 11 (1986) 2, 239-274 (MR 88b:54012).

Dzhabrailov A.D., Abdullaev Ya.Yu., A limit theorem on the embedding of weighted spaces of functions with mixed derivatives. Akad. Nauk Azerbaidzhan. SSR Dokl 47 (1987) 11, 8-11 (MR 89j:46032).

Evans W.D., Harris D.J., Sobolev embeddings for generalized ridged domain. Proc. London Math. Soc. (3) 54 (1987) 1, 141-175 (MR 88b:46056).

Gehring F.W., Uniform domains and the ubiquitous quasidisk, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 89 (1987) 88-103 (MR 88j:30042).

Gehring F.W., Hag K., Remarks on uniform and quasiconformal extension domains, Complex Variables Theory Appl. 9 (1987) 2-3, 175-188 (MR 89b:30019).

Harmelin R., Injectivity quasiconformal reflections and the logaritmic derivate, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 12 (1987) 1, 61-68 (MR 88b:30034).

Herron D.A., The geometry of uniform, quasicircle, and circle domains, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 12 (1987) 217-227.

Iwaniec T., Stability property of Möbius mappings. Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987) 1, 61-69.

Martio O., Vuorinen M., Whitney cubes, P-capacity and Minkowski content, Exposition. Math. 5 (1987) 1, 17-40 (MR 88e:28004).

Semenov V.I., Stability estimates for spatial quasiconformal mappings of a star domain, Sibirsk. Math. Zh. 28 (1987) 6, 102-118, 219 (MR 89c:30052).

Trotsenko D.A., Continuation of spatial quasiconformal mappings that are close to conformal, Sibirsk. Math. Zh. 28 (1987) 6, 126-133, 219 (MR 89e:30040).

Besov O.V., Embeddings of an anisotropic Sobolev space for a domain with the flexible horn condition, Trudy Math Inst. Steklov 180 (1987) 50-52. English transl. Proc. Steklov Inst. Math. (1989) 3 (180) pp 56-58.

Väisälä J., Porous sets and quasisymmetric maps, TAMS 299 (1987) 525-533.
Astala, K., Heinonen, J., On quasiconformal rigidity in space and plane, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 13 (1988), 81-92.

Besov O.V., Embeddings of an anisotropic Sobolev space for a domain with a flexible horn condition, Studies in the theory of differentiable functions of several variables and its aplications, XII, Trudy Math. Inst. Steklov 181 (1988), 3-14, 269 (MR 89k:46046).

Martio O., John domains, bi-lipschitz balls and Poincare inequality, Rev. Roumaine Math. Pures et Appliques 33 (1988), 107-112.

Martio O., Väisälä J., Global Lp-integrability of the derivative of a quasiconformal mapping, Complex Variables Theory Appl. 9 (1988) 4, 309-319 (MR 89e:30039).

Väisälä J., Uniform domains, Tohoku Math. J. 40 (1988), 101-118 1 (MR 89d:30027).

Lappalainen, V., Lehtonen A., Embedding of Orlicz-Sobolev spaces in Hölder spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 14 (1989), 41-46.

Departamento e Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca, Argentina.