UNA CARACTERIZACION DE LOS GRAFOS k-ADJUNTOS CARENTES DE ENTRADAS Y DE SALIDAS.

Raúl A. Chiappa

Inst. de Matemática

Univ. Nac. del Sur

Bahía Blanca

En la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina realizada en 1968, en Bahía Blanca, hemos dado en términos de su relación de precedencia una caracterización de los "grafos adjuntos" de multigrafos dirigidos (4).
Posteriormente hemos considerado, entre otras nociones ligadas con la precedente, la de "grafo k-adjunto" (5).
En este trabajo nuestro objetivo es formular, para el caso de multigrafos carentes de entradas y de salidas, una caracterización de los k-adjuntos y de los k-adjuntos máximos, expresada en forma similar a la dada en los trabajos citados, para k=1.

1) En lo que sigue supondremos conocida la terminología básica de la Teoría de Grafos y consideraremos, bajo el nombre de multigrafos, configuraciones dirigidas que pueden tener bucles o arcos paralelos. Cuando no quepa la existencia de arcos paralelos serán designados grafos.

Un camino de longitud L (o más brevemente un L camino) es una sucesión de arcos C: $u_1, u_2, \ldots, u_L$ tal que el vértice final de u_i coincida con el inicial de u_{i+1}, $1 <= i <= L-1$. Admitiremos, además, que cada vértice define un camino nulo.

Dado un L-camino C: $u_1, u_2, \ldots, u_L$, el vértice inicial de u_1 o el h-camino $u_1, u_2, \ldots, u_h$ se dirá h-subcamino inicial de C, $0 <= h <= L$.
Análogamente, el vértice final de u_L o el h-camino $u_{L-h+1}, \ldots, u_L$ es el h-subcamino final de C, $0 <= h <= L$.
En particular, el vértice inicial (final) de cada arco es su O-subcamino inicial (final).

Dado un camino C: $u_1, u_2, \ldots, u_L$, si p es el vértice inicial de u_1 y q el vértice final de u_L diremos que C lleva desde p hasta q lo notaremos C: p -> q.
Si $p \neq q$, C es abierto, caso contrario es cerrado (en p).
Estas nociones no se aplican a caminos nulos.
Dos L-caminos distintos, L >= 1, cuyos respectivos vértices iniciales y finales coinciden se dirán caminos paralelos de longitud L (o L-paralelos).

Si además sus respectivos primeros arcos o sus respectivos últimos arcos son distintos se dirán estrictos.

Es claro que no cabe la consideración de caminos 0-paralelos, que si G carece de entradas (o de salidas) y admite caminos h-paralelos, también admite caminos h´-paralelos, para todo h´ > h, que dos arcos paralelos son caminos 1-paralelos estrictos y que un par de caminos L-paralelos no estrictos contiene al menos otro de caminos L´-paralelos estrictos, para algún L´ < L

2) Dado un multigrafo G, el k-adjunto de G, k >= 1, es el grafo ^kG cuyos vértices son los k-caminos de G y cuya relación de precedencia Γ está definida por $y \in \Gamma(x)$ si y solamente si el (k-1)-subcamino final de x coincide con el (k-1)-subcamino inicial de y. Para k = 1 lo denominaremos adjunto y lo notaremos también A(G).
Un grafo es k-adjunto si y solamente si es isomorfo al k-adjunto de algún multigrafo G.

De las respectivas definiciones se tiene:

I) En ^kG están representados todos los L-caminos de G con L >= k y sólo ellos. Por lo tanto, si G carece de tales caminos $^kG = \emptyset$.
Si G carece de entradas (o salidas) $^kG = \emptyset$, cualquiera sea k >= 1.

Por otra parte, ^kG tiene entradas (salidas) si y sólo si en G existen entradas (salidas) que son vértices inicial (final) de L-caminos con L >= k.

II) Si $(V, \Gamma) = {}^kG$, $y \in \Gamma^i(x)$, $1 <= i <= k$, si y sólo si, en G, el (k-i)-subcamino inicial de y coincide con el (k-i)-subcamino final de x.
En particular, $y \in \Gamma^k(x)$ si y sólo si, en G, el vértice final de x es el vértice inicial de y.

III) Si en un multigrafo G se eliminan todos los caminos de longitud menor que k, no contenidos en otros de longitud mayor o igual que k, se obtiene un multigrafo G_1 tal que $^kG={}^kG_1$.
Además, si G_1 contiene varias entradas (salidas) la identificación de todas ellas en una única lleva a la construcción de un multigrafo G_2 que satisface $^kG_1={}^kG_2$, para todo k >= 1.

IV) Cada camino C de G, de longitud L >= k, define en ^kG un camino C´ de longitud L-k y recíprocamente. C´ es cerrado si y sólo si el k-subcamino final de C coincide con su k-subcamino inicial. En particular, un vértice de ^kG es soporte de un bucle si y sólo si el vértice representa a un camino compuesto por k reiteraciones de un bucle de G.

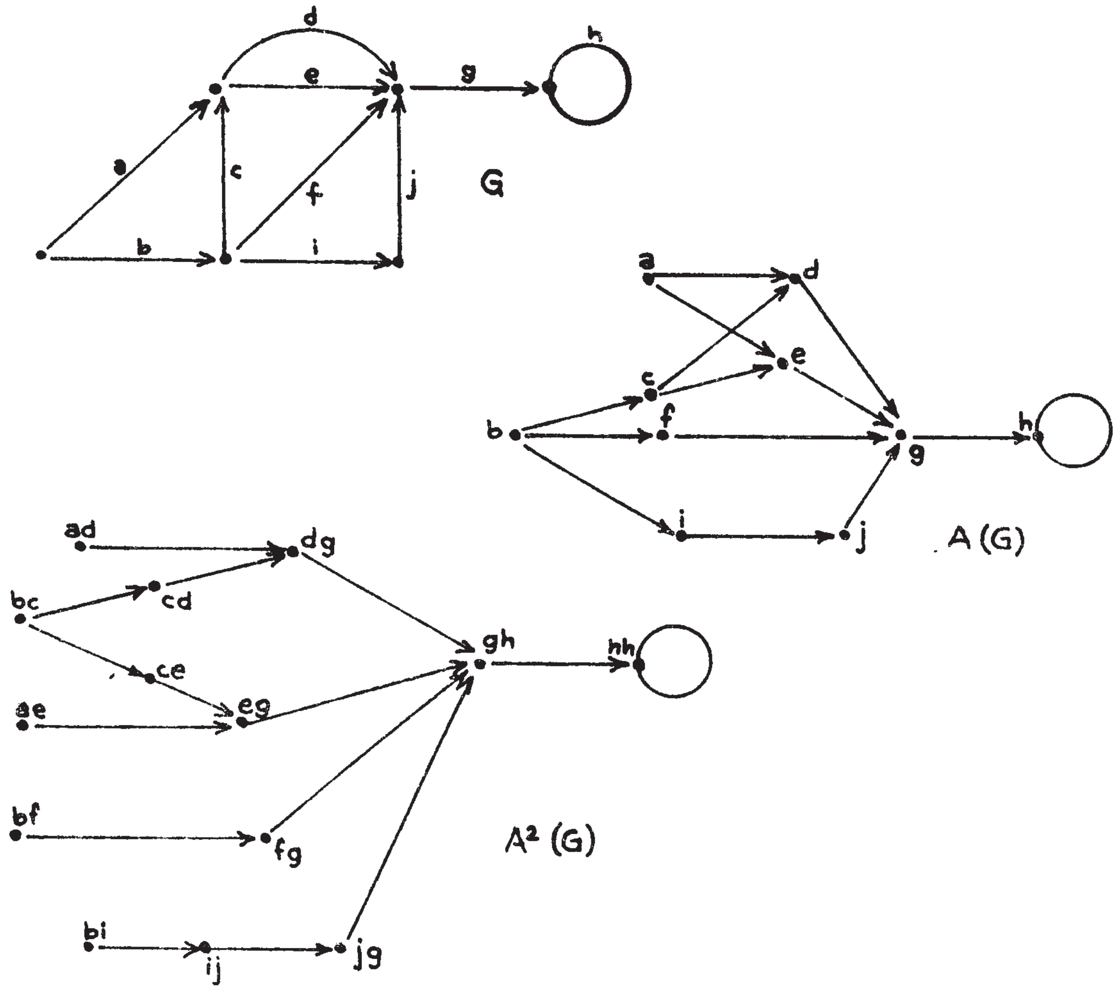
En (5 cap. VI) hemos visto que el grafo k-adjunto de G coincide con el que se construye a partir de G, aplicando k veces el operador de adjunción. Más precisamente y supuesto que $G={}^0G=A^0(G)$ la noción de k-adjunto también puede darse por recurrencia poniendo:

$^kG = A^k(G) = A(A^{k-1}(G)) = A^{k-1}(A(G))$, para k >= 1.

Así entonces :

V) Si H es k-adjunto, también es h-adjunto para todo 1 <= h <= k y el k-adjunto de un h-adjunto es al menos (h+k)-adjunto.

Ejemplo:



Otra propiedad que utilizaremos reiteradamente es la siguiente:

VI) Si G carece de entradas y salidas a caminos h-paralelos (h-paralelos estrictos)de G pueden asociarse, canónicamente, caminos (k+h)-paralelos ((k+h)-paralelos estrictos) en su k-adjunto y recíprocamente.

Nótese que para lo afirmado en VI), la existencia de entradas (salidas) sólo es significativa si G carece de k-caminos con vértice final (inicial) en el vértice inicial (final) de cada par de caminos h-paralelos.

Lo puntualizado en III) nos lleva a la siguiente noción:
Un multigrafo se dirá *k-resumido*, k >= 1, si carece de caminos de longitud L < k, no contenidos en otros de longitud L´ >= k y contiene a lo sumo un vértice de entrada y a lo sumo un vértice de salida.
En particular, G es *1-resumido* (o más brevemente, *resumido*) si carece de vértices aislados y contiene a lo sumo una entrada y una salida.

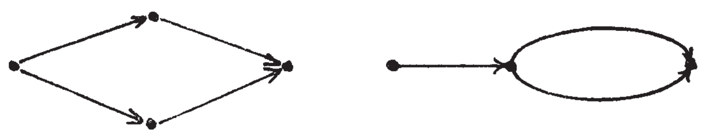
Si H es el k-resumido obtenido a partir de G, eliminando arcos e identificando vértices de acuerdo a lo visto en III), se dirá *k-resumen de G*.

Un multigrafo G es *k-raíz de H*, k >= 1, si y sólo si H es isomorfo al k-adjunto de G. En lugar de *1-raíz* diremos *raíz*.

Para demostrar que todo k-adjunto admite infinitos k-raíces no isomorfos basta elegir uno de ellos e incorporarle vértices aislados.
Antes de estudiar bajo que condiciones se da la unicidad, recordemos el siguiente resultado válido para k = 1 (Aigner (1), Chiappa (5)).

VII) El adjunto H admite un único multigrafo raíz (a menos de isomorfismo) si y sólo si estos se toman exclusivamente en el conjunto de los multigrafos resumidos.

Así entonces, dos multigrafos resumidos no isomorfos tienen adjuntos no isomorfos.
Una afirmación análoga no es válida para k >= 2. En efecto, los siguientes 2-resumidos :



tienen por 2-adjunto un par de vértices aislados.

No obstante, de las consideraciones que siguen se tiene que una afirmación similar a VII) puede darse también para k >= 2 si nos limitamos a considerar k-adjuntos que tienen a lo sumo un vértice de entrada y otro de salida (ver IX).

De VII) y de la correspondencia biyectiva entre arcos de entrada (de salida) de G y vértices entrada (salida) de su adjunto se tiene:
VIII) Un grafo adjunto H tiene (a menos de isomorfismos) un único multigrafo raíz sin vértices aislados si y sólo si H tiene a lo sumo una entrada y a lo sumo una salida.
Con más generalidad y aplicando reiteradamente VIII) se tiene:
IX) Un grafo $H = {}^{k}G$, k >= 1, se tiene (a menos de isomorfismos) un único multigrafo k-raíz, k-resumido si y sólo si H tiene a lo sumo un vértice de entrada y a lo sumo un vértice de salida.
Convengamos que un grafo se dirá *k-adjunto máximo* si es k-adjunto pero no es (k+1)-adjunto.

X) Sea $H = {}^{k}G$ un grafo que tiene a lo sumo una entrada y a lo sumo una salida. H es k-adjunto máximo si y sólo si G no es adjunto.

En efecto, si G es de la forma $A(G')$, $H = {}^{k+1}G'$, y por lo tanto no es máximo. Para demostrar la recíproca notemos previamente que por las hipótesis sobre H y IX) resulta que G -excluídas sus eventuales componentes no significativas- está unívocamente determinado. Si H no fuese k-adjunto máximo existirá algún G_1 tal que $H = {}^{k+1}G_1$ pero entonces, por la unicidad de G se tendría que $G = A(G_1)$.

La propiedad X) no puede extenderse al caso de adjuntos con dos o más entradas (salidas). En efecto, el adjunto del

multigrafo propiamente dicho  es también

k-adjunto de  para todo $k >= 1$.

Del ejemplo anterior y también del dado en pág. 67 de (5) resulta que de $H = {}^{k}G_1$ y $H = {}^{k+1}G_2$ no puede deducirse que G_1 es adjunto de G_2.

3) En lo que sigue nuestro interés será el de buscar, para el caso de grafos carentes de entradas y salidas, una caracterización de los k-adjuntos en términos de su relación de precedencia, similar a la hallada para $k = 1$ en (4), (5). Recordemos previamente que en (5 cap. IV) hemos demostrado los dos resultados que siguen.

Proposición A

Dada una relación $\Gamma \subseteq V \times V$ las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \circ \Gamma$

b) $\Gamma = \bigcup_{x \in V-S} \Gamma \circ \Gamma^{-1} \Gamma(x) \times \Gamma(x)$, donde $S = \{x / \Gamma(x) = \emptyset\}$, con clases $\Gamma(x)$ (resp. $\Gamma \circ \Gamma^{-1} \Gamma(x)$) coincidentes o disjuntas dos a dos.

c) Si contiene tres elementos del conjunto $\{x,y\} \times \{z,w\}$ (no necesariamente $\{x,y\} \cap \{z,w\} = \emptyset$) también contiene al cuarto.

d) Si $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset$ entonces $\Gamma(x) = \Gamma(y)$.

Proposición B

Un grafo $H = (U, \Gamma)$ es adjunto de un multigrafo $G = (X,U)$ si y sólo si

$$\Gamma = \Gamma \circ \Gamma^{-1} \Gamma .$$

Obviamente, las distintas equivalencias indicadas en Prop. A permiten enunciar otros criterios de caracterización, válidos también para grafos **infinitos**.

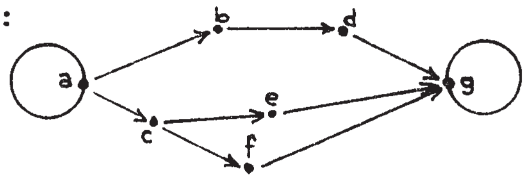
Los relativos a b), c), d) fueron formulados, respectivamente, en los trabajos de Harary-Norman (6), Heuchenne (7) y Berge (3). Detalles más precisos al respecto y referencias a otras caracterizaciones pueden hallarse en (5 cap. IV).

Las relaciones R tales que $R = R \circ R^{-1} \circ R$ se dirán <u>relaciones de adjunción</u>.
Ellas fueron denominadas por Heuchenne (7) "relaciones cuádricas" y por Berge "relaciones semifuncionales" en (3) y "aplicaciones multívocas semiunívocas" en (2).

Llamaremos <u>h-ésima condición de Heuchenne</u> a la siguiente generalización de c) de la Prop. A: Si hay caminos de longitud h de la forma p->r ; p->s; q->r también hay caminos q->s de longitud h.

Veamos ahora que si $H = {}^{i}G$, en H se satisface la i-ésima condición de Heuchenne. En efecto, si en H hay un i-camino desde P hasta R, en G el vértice final del i-camino P coincide con el inicial del i-camino R (ver II). Así entonces, la existencia en H de los i-caminos P->R; P->S; Q->R implica que en G el vértice final del camino Q coincide con el inicial del S y que por lo tanto en H existe un i-camino Q->S.

De lo precedente, de V) y del hecho de que en (V, Γ) se satisface la i-ésima condición de Heuchenne si y sólo si Γ^{i} es de adjunción, se tiene la :
<u>**Proposición C**</u>
Si $H = (V, \Gamma)$ es k-adjunto entonces en H se satisfacen las primeras k condiciones de Heuchenne o lo que es equivalente, Γ^{h} es de adjunción para todo $1 <= h <= k$.
La recíproca de la afirmación anterior es válida para k = 1 (ver Prop.B), pero no para el caso general.
En efecto, si $H = (V, \Gamma)$ es el adjunto del multigrafo constituído por dos o más bucles de igual soporte se tiene que Γ^{i} es de adjunción para todo $i >= 1$, aún cuando X) permite inferir que H no es 2-adjunto.
Otro adjunto que no es 2-adjunto aún cuando Γ^{2} es de adjunción, es el siguiente:



Que H no es 2-adjunto resulta de observar que H es adjunto de un multigrafo propiamente dicho y como ningún multigrafo propiamente dicho es adjunto, por X) se deduce que H es adjunto máximo.
De otra forma: si H fuera 2-adjunto de algún G, entonces, en G sus tres caminos de longitud 2; d,e,f tendrían un mismo segundo arco, además e y f tendrían un mismo primer arco y en consecuencia valdría e = f.

Si se modifica el ejemplo anterior anulando el arco (f,g) se obtiene un H_1 que es adjunto de un grafo no adjunto. También ahora Γ^{2} es de adjunción aún cuando, por X), H_1 no es 2-adjunto.

Destaquemos que la noción designada "n-ésima condición de Heuchenne" en (8) y en (9) no coincide con la nuestra, pues en dichos trabajos se presupone que los caminos involucrados en la definición carecen de vértices interiores comunes.
Refiriéndose a ella, en (8) se afirma: "en un grafo se satisfacen las primeras k condiciones de Heuchenne si y sólo si el grafo es k-adjunto"
El ejemplo dado en pág. 71 de (5) demuestra que esta afirmación es errónea. Para ver que también es falsa admitiendo caminos con vértices interiores comunes, basta recordar que la recíproca de la Prop. C no vale.

<u>Lema 1</u>
Sea $G = (V, \Delta)$ un grafo sin entradas ni salidas y $H = (W, \Gamma)$ su k-adjunto, $k >= 1$. G es adjunto si y sólo si Γ^{k+1} es de adjunción.

<u>Demostración.</u>
Como G carece de entradas y salidas existen, en G, k-caminos con vértice final a,b (inicial c,d), cualesquiera sean a,b,c,d. Notemos con $\underline{a}$, $\underline{b}$ ($\underline{c}$, $\underline{d}$) uno cualesquiera de tales k-caminos.
Si G es adjunto $\Delta(a) \cap \Delta(b) \neq \emptyset$ implica $\Delta(a) = \Delta(b)$ y entonces, si $\{ \underline{c} , \underline{d} \} \subseteq \Gamma^{k+1}(\underline{a})$ y $\underline{d} \in \Gamma^{k+1}(\underline{b})$ también $\underline{c} \in \Gamma^{k+1}(b)$, luego Γ^{k+1} es de adjunción.
Por otra parte, por Prop. A y Prop. B, G es adjunto si y sólo si carece de subgrafos inducidos de la forma
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & c \\ b \arrow[r] & d \end{tikzcd}.$$

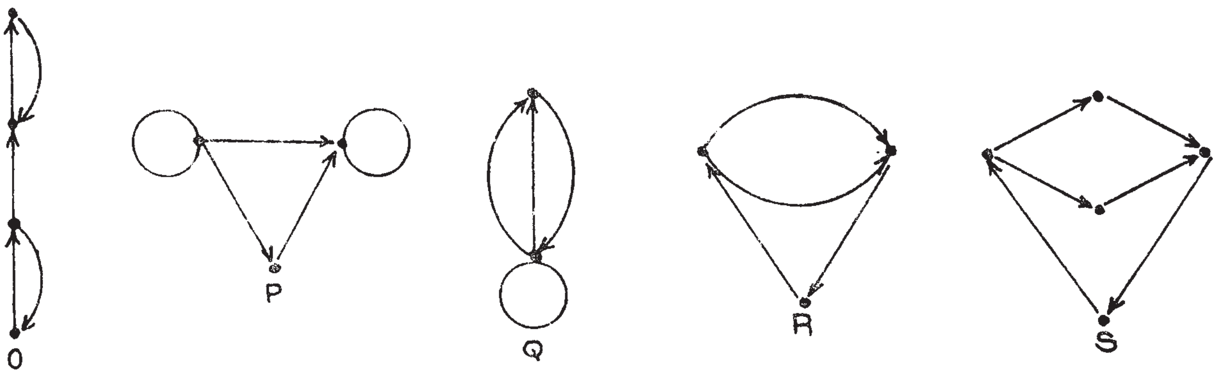
Si G admite dicho esquema $\underline{d} \in \Gamma^{k+1}(\underline{a}) \cap \Gamma^{k+1}(\underline{b})$; $\underline{c} \in \Gamma^{k+1}(\underline{a})$; $\underline{c} \notin \Gamma^{k+1}(\underline{b})$ y Γ^{k+1} no es de adjunción.

Llamaremos <u>singular</u> a toda relación R tal que : $| R(x) \cap R^{-1}(y) | <= 1$, cualesquiera sean x,y (no necesariamente distintos, relacionados o no).
Así $R = \Gamma^{1}$ es <u>no singular</u> si y sólo si en (V, Γ) existen vértices u,v,p,q; $u \neq v$; tales que $\{u,v\} \subseteq \Gamma^{1}(p) \cap \Gamma^{-1}(q)$.
Notemos que : a) cualquiera sea $R:R^{o} = I$ es relación de adjunción singular;
b) si Γ^{j} es no singular, (V, Γ) admite caminos 2j-paralelos
De II) resulta el siguiente

<u>Lema 2</u>
Si $H = {}^{k}G = (V, \Gamma)$ y Γ^{k} es no singular, G tiene caminos k-paralelos.
Si en G existen pares de caminos k-paralelos cuyos vértices iniciales y finales son, respectivamente, vértices final e inicial de algún k-camino, entonces vale la recíproca.

<u>Corolario</u> : Si $H = (V, \Gamma) = A(G)$ carece de entradas y salidas, G es multigrafo propiamente dicho si y sólo si Γ es no singular.

Así entonces, un grafo adjunto carente de entradas y salidas podrá ser k-adjunto con k >= 2 sólo si su relación de precedencia es singular.
En lo que sigue, salvo indicación expresa, nos limitaremos a considerar configuraciones carentes de entradas y salidas.
De los ejemplos dados a continuación se infiere que para decidir si (V, Γ) es k-adjunto máximo no bastará, ni aún restringiéndose al conjunto de los multigrafos sin entradas ni salidas, conocer si las distintas Γ^i, $i \in \{1,2,\dots,k+1\}$ son o no de adjunción y singulares o no singulares. La tabla resume las características de Γ, Γ^2, Γ^3, supuesto que Γ es la relación de precedencia del grafo 2-adjunto de cada uno de los siguientes O,P,Q,R,S.



$H=(V,\Gamma)$	Γ	Γ^2	Γ^3
$H={}^2O$	adjunc. singular	adjunc. singular	no adj. no sing.
$H={}^2P$	" "	" no singular	" " " "
$H={}^2Q$	" "	" "	" " " "
$H={}^2R$	" "	" "	adjunción "
$H={}^2S$	" "	" "	" "

<u>**Lema 3**</u>
Sea $H = (V, \Gamma)$ carente de entradas y salidas. Si Γ^h es singular, entonces Γ^i es singular para todo $i <= h$.
La demostración resulta de reiterar h-1 veces el siguiente argumento:
si Γ^{h-1} fuese no singular existirían vértices x,y,u,v; $u \neq v$; tales que $\{u,v\} \subseteq \Gamma^{h-1}(x) \cap \Gamma^{-(h-1)}(y)$, pero entonces eligiendo $x_1 \in \Gamma^{-1}(x)$; $y_1 \in \Gamma(y)$ se tendría $\{u,v\} \subseteq \Gamma^h(x_1) \cap \Gamma^{-h}(y_1)$ en contradicción con la hipótesis.

Que la existencia de entradas o salidas invalida la afirmación anterior resulta del siguiente ejemplo, en el cual Γ^2 es singular, pero Γ no lo es.

x	a	b	c	d
$\Gamma(x)$	b,c	d	d	d

Lema 4

Si $H = (V, \Gamma)$ sin entradas ni salidas es adjunto de un grafo $G = (X, \Delta)$ entonces:

a) Γ es relación de adjunción singular;

b) Γ^j es de adjunción si y sólo si Δ^{j-1} es de adjunción, $j >= 1$;

c) si Γ^j es no singular, Δ^j es no singular;

d) si Δ^j es no singular, en H existen vértices x, y, u_1, u_2, v_1, v_2;
$u_1 \neq v_1$; $u_2 \neq v_2$; $u_2 \in \Gamma(u_1)$; $v_2 \in \Gamma(v_1)$;
$u_2 \notin \Gamma(v_1)$;
$v_2 \notin \Gamma(u_1)$; $\{u_1, v_1\} \subseteq \Gamma^j(x) \cap \Gamma^{-(j+1)}(y)$;
$\{u_2, v_2\} \subseteq \Gamma^{j+1}(x) \cap \Gamma^{-j}(y)$;

e) si Δ^j es no singular, Γ^{j+1} es no singular, $j >= 1$.

Demostración.

Lo afirmado en a) resulta del Lema 2.
Si convenimos en indicar cada arco de G por $u = (u_1, u_f)$ se tiene que $b \in \Gamma^j(a)$ equivale a $b_1 \in \Delta^{j-1}(a_f)$. Luego, si Γ^j es de adjunción también lo es Δ^{j-1} .
La carencia de entradas y salidas permite deducir la recípro_ca, y con esto demostrar b).
Con las notaciones convenidas y puesto que G es grafo, si $u \neq v$ entonces $u_1 \neq v_1$ o $u_f \neq v_f$.
Supuesto que $u_1 \neq v_1$ de $\{u,v\} \subseteq \Gamma^j(p) \cap \Gamma^{-j}(q)$ resulta:
$\{u_1, v_1\} \subseteq \Delta^j(p_1) \cap \Delta^{-j}(q_1)$ y en consecuencia también Δ^j es no singular. Si $u_1 = v_1$ se razona en forma similar para u_f, v_f, p_f, q_f y esto demuestra c).
Por la hipótesis de no singularidad hecha en d) puede afirmarse que en G existen vértices u, v, p, q; $u \neq v$ tales que $\{u, v\} \subseteq \Delta^j(p) \cap \Delta^{-j}(q)$ y de esto resulta la existencia de j-caminos de la forma p->u; p->v; u->q; v->q. Si u_1 ; v_1 son, respectivamente, los arcos finales de los dos primeros caminos y u_2 ; v_2 los arcos iniciales de los dos restantes tendremos que $u_1 \neq v_1$; $u_2 \neq v_2$; $u_2 \in \Gamma(u_1)$; $v_2 \in \Gamma(v_1)$; $u_2 \notin \Gamma(v_1)$; $v_2 \notin \Gamma(u_1)$. Además, la carencia de entradas y salidas permite suponer que p(q) es vértice final (inicial) de un arco x(y); eventualmente x=y. Por lo tanto, $\{u_1, v_1\} \subseteq \Gamma^j(x) \cap \Gamma^{-(j+1)}(y)$; $\{u_2, v_2\} \subseteq \Gamma^{j+1}(x) \cap \Gamma^{-j}(y)$. Para verificar e) basta recordar d) y elegir cualquier $z \in (y)$.

Notemos que en Lema 4 nada se afirma respecto de la singula_ridad de Δ^j cuando Γ^j es singular y Γ^{j+1} es no singular.
La consideración de los 2-adjuntos de los precedentes O y P permiten ver que pueden presentarse ambas situaciones.

En efecto, si Δ (Γ) es la relación de precedencia del adjunto (2-adjunto) de O se tiene que Γ^2 es singular y ambas Γ^3 , Δ^2 son no singulares. Por otra parte, al considerar el adjunto y el 2-adjunto de P resultan : Δ y Γ singulares, mientras que Γ^2 es no singular.

Proposición D

Sea $H = (V, \Gamma)$ el k-adjunto, $k >= 1$, de un multigrafo G carente de entradas y salidas.

a) Γ^i es singular para todo $i <= [k/2]$ o lo que es equivalente, si $2i<=k$;

b) si G carece de caminos N-paralelos, $N >= 1$, Γ^i es singular para todo $i <= [(k+N)/2]$.

c) si G admite caminos M-paralelos, $M >= 1$, Γ^i es no singular para todo $i >= [(k+M+1)/2]$.

Demostración.

a) El caso $k = 1$ es verificado pues $\Gamma^0 = I$ es singular. Supongamos $k >= 2$; puesto que $y \in \Gamma^i(x)$, $1 <= i <= k$, significa que, en G, el (k-i)-subcamino final de x coincide con el (k-i)-subcamino inicial de y, se tiene que Γ^i es no singular sólo si $2(k-i) < k$. En consecuencia, $2i <= k$, Γ^i es singular.

b) De VI) y la hipótesis resulta que H carece de caminos (N+k)-paralelos. Si Γ^j fuese no singular para algún $j <= [(k+N)/2]$, entonces H tendría caminos 2j-paralelos con $2j <= k+N$. Luego, si $i <= [(k+N)/2]$, Γ^i es singular.

c) Visto que todo par de caminos L-paralelos contiene caminos L'-paralelos estrictos con $1 <= L' <= L$ para demostrar c) podemos suponer que los caminos M-paralelos en considera_ción son estrictos. Sean ellos d_1 y d_2, ambos de la forma p->q, con sus respectivos primeros arcos distintos. En forma similar se razonaría si d_1 y d_2 tuvieran sus respectivos últimos arcos diferentes.
De H k-adjunto de G, sin entradas ni salidas, resulta que G contiene al menos un k-camino x(y) de vértice final p (inicial q); no necesariamente $x \neq y$, $x \neq d_i$, $y \neq d_i$, $i \in \{1,2\}$. En H, ver VI), a los caminos d_1 y d_2 corresponden caminos (k+M)-paralelos de extremos x,y.
Si $k<=M$, d_1 y d_2 tienen sus respectivos k-subcaminos iniciales distintos, los designaremos z_1, z_2. Por II) se tiene que :
$\{z_1,z_2\} \subseteq \Gamma^k(x)$; $y \in \Gamma^M(z_1) \cap \Gamma^M(z_2)$. Sea t el menor de los s tales que $\Gamma^s(z_1) \cap \Gamma^s(z_2) \neq \emptyset$; es claro que $t <= M$ y que cualquiera sea la paridad de k+t resulta Γ^j no singular si:
$j >= [(k+t+1)/2]$. Por lo tanto, por Lema 3, si $i >= [(k+M+1)/2]$, Γ^i es no singular.
Supongamos ahora $k > M$.
Si k-M es par (también lo es k+M) el ((k-M)/2)-subcamino final de x, y el ((k-M)/2)-subcamino inicial de y permiten extender d_1 y d_2 a un par de k-caminos distintos w_1, w_2 tales que :
$\{w_1,w_2\} \subseteq \Gamma^i(x) \cap \Gamma^{-i}(y)$ con $i = k-(k-M)/2 = [(k+M+1)/2]$.
Por lo tanto, Γ^i es no singular para todo $i >= [(k+M+1)/2]$.

El caso $k=M$ puede incluirse también en este análisis.
Si $k-M$ es impar, el $((k-M+1)/2)$-subcamino final de x, y el $((k-M-1)/2)$-subcamino inicial de y permiten extender d_1 y d_2 a un par de k-caminos w_1 y w_2 tales que :
$\{w_1, w_2\} \subseteq \Gamma^{j}(x) \cap \Gamma^{-m}(y)$, para $j = k-(k-M+1)/2 = [(k+M-1)/2]$; $m = k-(k-M-1)/2 = j+1$. También ahora se tiene que Γ^{i} es no singular cualquiera sea $i >= [(k+M+1)/2]$.

Corolario 1 : Si (V, Γ) no tiene entradas ni salidas y es k-adjunto de un multigrafo que admite caminos k-paralelos, pero no paralelos de longitud menor, entonces Γ^{i} es singular para $i <= k-1$ y no singular para $i >= k$.

Consecuencia directa de las cotas dadas en b) y c).

Corolario 2 : Sea G un multigrafo que carece de entradas y salidas y (V, Γ) su k-adjunto. G admite caminos M-paralelos estrictos, para algún $M \in \{1,2,\ldots,k\}$ si y sólo si hay alguna Γ^{i}, $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ no singular.

En efecto, si existe alguna Γ^{i}, $1 <= i <= k$ no singular; Γ^{k} es no singular entonces G admite caminos k-paralelos (ver Lema 2) y por lo tanto M-paralelos estrictos para algún $M <= k$.
Recíprocamente, si existen caminos M-paralelos con $M <= k$, como en tal caso $[(k+M+1)/2] <= k$ por la cota dada en c) resulta que al menos Γ^{k} es no singular.

Los k-adjuntos de , $k >= 1$, son isomorfos a

 y esto demuestra que si se admiten entradas o salidas la cota indicada en Prop. D : c) no es válida.
Tampoco lo son las de Prop. D : b), c) para el adjunto de:

Observemos que si no se toma en cuenta la carencia de caminos L-paralelos la cota indicada en Prop. D : a) no es mejorable; pues en tal caso nada general podría afirmarse respecto de la singularidad de Γ^{i} cuando $i >= 1+[k/2]$.
Para verificar esto consideremos los k-adjuntos de los siguientes grafos :

G_1 admite caminos 2-paralelos estrictos, su k-adjunto tiene $k+2$ vértices y para $i = 1+[k/2]$, es singular, si k es impar y no singular, si k es par.
En cambio, G_2 carece de caminos 2-paralelos y admite 3-paralelos estrictos y en su k-adjunto Γ^{i} es singular para $i = 1+[k/2]$ y no singular si $i = 2+[k/2]$, cualquiera sea la paridad de k.

Los resultados anteriores también pueden deducirse a partir de 3) en la proposición que sigue.
Para aplicarla convengamos que $r = [(k+M-1)/2]$; $s = 1+[k/2]$.
Si $M = 2$, $r < s$ si k es par y $r = s$ en caso contrario. Luego, para G_1 Γ^i con $i = s$ será singular si k es impar y no singular si k es par.
Si $M = 3$, $r = s$ cualquiera sea la paridad de k y en consecuencia, para G_2, Γ^i es singular si $i <= 1+[k/2]$ y no singular en caso contrario, sin importar la paridad de k.

Proposición E
Si $H = (V, \Gamma)$ es el k-adjunto de un multigrafo G carente de entradas y salidas, entonces :
1) Γ^i es relación de adjunción para $i <= k$ y además:
    a) si G es grafo, Γ^{k+1} es de adjunción si y sólo si G es adjunto;
    b) si G es multigrafo propiamente dicho, Γ^{k+1} puede o no ser de adjunción;
2) si G es grafo, Γ^i es singular para $i <= [(k+1)/2]$;
3) si G es grafo que admite caminos M-paralelos, $M >= 2$, pero carece de M´-paralelos con $M´ < M$, Γ^i es no singular para $i > [(k+M-1)/]$ y singular para $i <= [(k+M-1)/2]$;
4) si G es multigrafo propiamente dicho, Γ^i es singular para $i <= [k/2]$ y no singular para $i > [k/2]$.

Demostración.
La validez de 1) resulta de la Prop. C, del Lema 1 y de considerar los 2-adjuntos de los multigrafos Q y R.
Las afirmaciones 2) y 3) son consecuencia directa de b) y c) en la Prop. D. Las cotas indicadas en 4) se obtienen de a) y c) de Prop. D.

Lema 5
Si $H = (V, \Gamma)$ carece de entradas y salidas y Γ^i es una relación de adjunción singular para todo $i <= k$, entonces queda unívocamente determinada (a menos de isomorfismos) una sucesión de grafos resumidos $H = G_0, G_1, G_2, \ldots, G_k$ ($G_i = (X_i, \Delta_i)$) tales que :
para $j \in \{0,1,\ldots,k-1\}$, G_j es adjunto de G_{j+1}.

Demostración.
De las hipótesis, aplicadas para $k = 1$, Prop. B : IX) y Lema 2 Corolario resulta que H es adjunto de un grafo resumido unívocamente determinado $G_1 = (X_1, \Delta_1)$.
Si además $k >= 2$, de las hipótesis sobre Γ^i, $i <= k$, y Lema 4 b), e) se deduce que :

Δ_1^j es de adjunción singular para todo $j <= k-1$. En este caso, el mismo razonamiento anterior, aplicado a Δ_1, permite inferir la existencia de un único grafo resumido G_2 del cual G_1 es adjunto.
La reiteración del argumento anterior lleva a determinar la sucesión indicada. Así entonces $H = {}^kG_k$.

Proposición F
Sea $H = (V, \Gamma)$ un grafo carente de entradas y salidas tal que Γ^i es relación de adjunción singular para todo $i <= k$.

1) Si Γ^{k+1} no es de adjunción, H es k-adjunto de un grafo G_k resumido no adjunto, único a menos de isomorfismo.
2) Si Γ^{k+1} es de adjunción, H es k-adjunto de un grafo G_k adjunto, resumido o lo que es equivalente, (k+1)-adjunto de un multigrafo resumido, único a menos de isomorfismo.
3) Si Γ^{k+1} es de adjunción no singular, el adjunto G_k admite caminos paralelos de longitud L >= k+2, carece de caminos L-paralelos con 1 <= L <= k y puede o no admitir caminos (k+1)-paralelos.

<u>Demostración.</u>
Para 1) y 2) basta aplicar los Lemas 1 y 5.
Veamos ahora 3) :
por 2) sabemos que $H = {}^{k}G_k$. Si G_k careciera de caminos (k+2)-paralelos, por la cota dada en b) de Prop. D se tendría que Γ^{i} es singular para todo i <= k+1, en contradicción con lo supuesto. Si G_k admitiera caminos L-paralelos con L <= k, tomando L = k y por Prop. D : c) Γ^{i}
sería no singular para todo i >= k, esto es Γ^{k} sería no singular, en contradicción con lo supuesto.

Que nada puede afirmarse respecto de la existencia de caminos (k+1)-paralelos resulta, para k = 1, de elegir como H los 2-adjuntos de los multigrafos R y S dados. Más precisamente, si $H = {}^{2}R$, $G_1 = A(R)$ que tiene caminos 2-paralelos; en cambio, si $H = {}^{2}S$, $G_1 = A(S)$ que carece de tales caminos.
Remarquemos que en la Prop. 6.3.5. de (5) debe sustituirse "entonces H es k-adjunto de un grafo" por "entonces H es k-adjunto de un multigrafo" y que previa tal corrección y el cambio de k por k+1 dicha aserción coincide con 2) de Prop. F. Análoga corrección debe efectuarse en 6.3.6. del trabajo citado.

<u>Proposición G</u>
Sea H = (V, Γ) un grafo sin entradas ni salidas tal que Γ^{i} es relación de adjunción para i <= L, que además es singular para i <= h <= L y no singular para i > h. En tal caso :
a) si L >= 2h+1, H es k-adjunto, con k $\in$ {2h, 2h+1}, de un multigrafo propiamente dicho;
b) si L = 2h, H es L-adjunto de un multigrafo propiamente dicho o bien de un grafo que es adjunto si y sólo si Γ^{L+1} es de adjunción;
c) si 1 <= h <= L < 2h, H es L-adjunto de un grafo que es adjunto si y sólo si Γ^{L+1} es de adjunción.

<u>Demostración.</u>
Recurriremos reiteradamente a VI), al Lema 4 y a la sucesión de grafos $H = G_0, G_1, G_2, \ldots,$ con $G_i = A(G_{i+1})$ construída en el Lema 5.
Consideremos el caso a) : L >= 2h+1.
Tomando i = h+1 y por 3) de Prop. F se tiene que H es h-adjunto del grafo adjunto G_h que admite caminos L-paralelos con L >= h+2, carece de L-paralelos con 1 <=L <=h y puede o no contener caminos (h+1)-paralelos.

Si $h = 1$ y G_1 admite caminos 2-paralelos, G_1 es adjunto de un multigrafo propiamente dicho, del cual H es 2-adjunto. Caso contrario, $G_1 = (X_1, \Delta_1)$ es tal que Δ_1 es singular y G_1 es adjunto de un grafo G_2 que es adjunto pues por hipótesis Γ^3 es de adjunción. Luego $H = {}^2G_2$.
Como Γ^2 es no singular, el Lema 2 permite deducir que Δ_2 es no singular y entonces H es 3-adjunto de un multigrafo propiamente dicho.
Queda así demostrado el caso a), para $h = 1$.
Si $h = 2$, G_2 carece de caminos 2-paralelos y por lo tanto es adjunto de un grafo G_3 cuya condición de adjunto es consecuencia de suponer que Γ^4 es de adjunción ($4 < L = 5$).
Si G_2 contiene caminos 3-paralelos, G_3 admite caminos 2-paralelos y H es 4-adjunto de un multigrafo propiamente dicho.
Caso contrario, Δ_3 es singular y G_3 es adjunto de un grafo G_4, que es adjunto pues Γ^5 es de adjunción. Como Γ^3 es no singular, en H existen $\{a,b\} \subseteq \Gamma^3(x) \cap \Gamma^{-3}(y)$ de donde resulta que en G_4 los 4-caminos a, b tienen sus primeros (últimos) arcos coincidentes con el último (primero) de x (y) y entonces Δ_4 es no singular.
Así entonces, H es 5-adjunto de un multigrafo propiamente dicho.
En general, para $h >= 3$ y supuesto $L >= 2h+1$, reiterando los razonamientos anteriores se construye la sucesión de grafos adjuntos $H = G_0, G_1, \ldots, G_{h+h-1}$. Si G_h tiene caminos (h+1)-paralelos, G_{2h-1} es adjunto de un multigrafo propiamente dicho. Caso contrario, G_{2h-1} es adjunto de un grafo adjunto G_{2h} y como Γ^{h+1} es no singular, en H existen $\{a,b\} \subseteq \Gamma^{h+1}(x) \cap \Gamma^{-(h+1)}(y)$ y esto implica (por II) que en G_{2h} los dos arcos centrales de los caminos a, b determinan un par de caminos 2-paralelos. Así entonces, G_{2h} es adjunto de un multigrafo propiamente dicho y esto termina la demostración de a).
Consideremos ahora el caso b) : $L = 2h$.
El mismo razonamiento anterior permite construír la sucesión $H = G_0, G_1, \ldots, G_{2h-1}$ de grafos adjuntos unívocamente determinados.
Si G_h contiene caminos (h+1)-paralelos, G_{2h-1} que es su (h-1)-raíz contiene caminos 2-paralelos y H es 2h-adjunto de un multigrafo propiamente dicho. Caso contrario, H es 2h-adjunto del grafo G_{2h} que es adjunto si y sólo si Γ^{L+1} es de adjunción, por Lema 1.
Sólo resta ahora el caso c) : $1 <= h <= L < 2h$.
Para $h = L$, aplicando el Lema 5 se tiene que H es L-adjunto del grafo G_L y por Lema 1 resulta lo que se quiere demostrar.
En general, para $h < L < 2h$ el mismo razonamiento que antes permite construír la sucesión de grafos adjuntos :
$H = G_0, G_1, \ldots, G_{L-1}$.
Si G_{L-1} tuviera caminos 2-paralelos, en G_h que es (L-1-h)-adjunto de G_{L-1} existirían caminos paralelos de longitud $L-h+1 < h+1$; absurdo por Prop. F : 3). Por lo tanto, Δ_{L-1} es singular y H es L-adjunto del grafo G_L que es adjunto si y sólo si Γ^{L+1} es de adjunción (Lema 1).

Por otra parte, visto que H es k-adjunto si y sólo si es k´-adjunto máximo para algún k´ >= k, los resultados anteriores pueden resumirse en los siguientes criterios de caracterización.

Proposición H

Sea H = (V, Γ) un grafo sin entradas ni salidas.

A) H es k-adjunto, k >= 1, si y sólo si Γ^i es relación de adjunción para i <= k y singular para i <= [k/2].

B) H es k-adjunto máximo de un multigrafo propiamente dicho si y sólo si se satisface A) y además H contiene caminos (k+1)-paralelos.

C) H es k-adjunto, k >= 1, de un grafo si y sólo si carece de caminos (k+1)-paralelos, Γ^i es de adjunción si i <= k, singular para i <= h y no singular si i > h, para algún entero h >= [(k+1)/2].

D) H es k-adjunto máximo de un grafo si y sólo si se satisface C) y además Γ^{k+1} no es de adjunción.

Demostración.

A) De Prop. E : 1), 2), 4) resulta que si H es k-adjunto, entonces Γ^i es de adjunción para i <= k y además singular si i <= [k/2].
La validez de la afirmación recíproca se deduce de Prop. G : a), b) aplicada a k = L.

B) Es consecuencia inmediata de A) y VI).

C) Por VI) sabemos que si H es k-adjunto de un grafo carece de caminos (k+1)-paralelos. Además, en tal caso, por Prop. E : 1), 3) resulta que Γ^i es de adjunción singular para i <= h y de adjunción no singular si i > h, para algún entero h >= [(k+1)/2].
Para verificar la recíproca notemos que de VI), las hipótesis sobre las distintas potencias de Γ y h >= [(k+1)/2], la Prop. G : b), c) aplicada a k = L permite afirmar que H es k-adjunto de un grafo.

D) Inmediato de C) y Lema 1.

Corolario.

Un grafo (V, Γ) sin entradas ni salidas es al menos 2-adjunto si y sólo si Γ es relación de adjunción singular y Γ^2 es relación de adjunción.
Este resultado coincide con el del Corolario de 4.4.3. en (5).

Notemos que si G se supone k-resumido, por IX) resulta que el G a que se refiere la Prop. H está unívocamente determinado.
Volviendo a los multigrafos O,P,Q,R, puede verificarse que Q y R son los únicos cuyos 2-adjuntos admiten caminos 3-paralelos; que la información dada por la tabla incluye las distintas posibilidades indicadas en Prop. H, para h = 1; k = 2 y que en particular la consideración de O y P demuestran que, al menos para h = 1, la cota respecto de la singularidad indicada en c) no puede mejorarse.
Por otra parte, como S es adjunto de un multigrafo propiamente dicho, ²S es 3-adjunto máximo y puede constatarse que su relación de precedencia satisface los requerimientos indicados en Prop. H para h = 1,k = 3.

Los "intervalos de singularidad" de las distintas Γ^i indicados en Prop. H , en términos de h y k están esquematizados en la tabla que sigue :

h	k	Γ^0	Γ^1	Γ^2	Γ^3
0	1	si	no		
1	2	si	si	no	
	3	si	si	no	
2	4	si	si	si	no
	5	si	si	si	no

Del análisis de los i-adjuntos de  se infiere que pueden presentarse todas las situaciones.

Bibliografía.

(1) **AIGNER, M.** : On the line-graph of a directed graph. Math. Zeitschr. 102, (1967), 56-61, M.R. 36 # 76; Zb. 158 - 209.

(2) **BERGE, C.** : Espaces topologiques. Functions multivoques. Ed. Dunod (1959). M.R. 21 # 4401.

(3) **BERGE, C.** : Graphes et hypergraphes. Edit. Dunod (1970) M.R. 50 # 9639; Zb. 213 - 257.

(4) **CHIAPPA, R. A.** : Sur les graphes adjoints. Rev. Un. Mat. Argentina, 25, (1971), 299 - 302. M.R. 51 # 239; Zb. 293 # 05124.

(5) **CHIAPPA, R. A.** : Palabras circulares equilibradas. Grafos adjuntos. Notas de Matemática Discreta 1 Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Inst. de Matemática, (1982). M.R. 84d # 05109; Zb. 502 # 05053.

(6) **HARARY, F. and NORMAN, R.Z.** : Some properties of line-digraphs. Rend. Circ. Mat. Palermo, Tomo IX Serie II, (1960), 161 - 168. M.R. 24 A # 693; Zb. 99 -182.

(7) **HEUCHENNE, C.** : Sur une certaine correspondence entre graphes. Bull. Soc. Roy. Sci. Liege, 33, (1964), 743 -753. M.R. 30 # 5297; Zb. 134 - 433.

(8) **HEMMINGER, R.L.** : Line digraphs. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 303, Springer, (1972), 149 - 163. M.R. 51 # 243; Zb. 247 # 05129.

(9) **HEMMINGER, R.L. and BEINEKE, L.W.** : Line graphs and line digraphs, Selected Topics in Graph Theory, Ch. 10, Edit. L.W.Beineke -R.J. Wilson. Academic Press, (1978), 271 - 305; Zb. 434 # 05056. M.R. 81e # 05059.