VARIEDADES COMPACTAS PLANAS E ISOSPECTRALIDAD

Roberto J. Miatello *

INTRODUCCION

Sea M una variedad Riemanniana compacta y Δ el Laplaciano en M; Δ es un operador elíptico, esencialmente autoadjunto, densamente definido. Se llama usualmente geometría espectral al estudio de las relaciones entre la geometría de una variedad Riemanniana M y el espectro de Δ (y de otros operadores diferenciales elípticos geométricamente definidos en M). El ímpetu inicial del tema fue dado principalmente por un artículo de M.Kac (ver [K]) donde plantea la pregunta siguiente.

"Un dominio D acotado en el plano con frontera suave, *¿ está determinado a menos de isometrías por el espectro de* D?" (esto es $\Delta f = \lambda f$ y $f|\partial D| = 0$). Kac prueba que diversas propiedades geométricas de D, por ejemplo, que el área de D, $l(\partial D)$ y $X(D)$, la característica de Euler de D, son **audibles**, esto es, están determinadas por spec(D). Muy recientemente fue dada una respuesta negativa; C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert (Bulletin A.M.S V27, July 1992) construyeron los primeros ejemplos de dominios planos isospectrales y no isométricos, explotando una idea de T. Sunada.

El mismo problema en el caso de variedades sin borde ha sido intensamente investigado por más de 20 años.

---

* Apoyo financiero parcial de Conicet, Conicor e ICTP, Trieste.

Para variedades sin borde los primeros ejemplos de variedades isospectrales no isométricas fueron dos toros planos de dimensión 16, debidos a J. Milnor (1964). Posteriormente otros fueron hallados . Por ejemplo, en curvatura constante negativa por M.F. Vigneras ([V]) y en curvatura constante positiva por Ikeda ([I]).

Es de destacar que en todos los pares conocidos hasta el momento de variedades isospectrales, éstas son localmente isométricas.

En la presente nota describiremos nuevos ejemplos de **variedades planas isospectrales no isométricas** (ver [DM]),y mostraremos que tales ejemplos son en verdad muy abundantes aun en dimensiones bajas.

1.1 ISOSPECTRALIDAD DE TOROS

Sea M un toro plano $M = T_\Gamma = R^n / \Gamma$ donde Γ es un retículo en R^n, $\Gamma = \sum_1^n Zv_i$ con $v_1, \ldots, v_n \in R^n$ linealmente independientes. Sea

$$\Gamma^* = \{v \in R^n \mid v.\gamma \in Z, \forall \gamma \in \Gamma\}$$

y sea, si $\gamma \in \Gamma^*$, $f_\gamma(x) = e^{2\pi i \gamma . x}, x \in R^n$. Entonces f_γ induce una autofunción $\bar{f}_\gamma \in C^\infty(T_\Gamma)$ y $\Delta \bar{f}_\gamma = 4\pi^2 \|\gamma\|^2 f_\gamma$. El teorema de Stone-Weierstrass, implica que $\{f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma^*\}$ es un sistema completo de $L^2(T_\Gamma)$, luego se tiene que

$$\text{Spec } (T_\Gamma) = \{4\pi^2 \|\gamma\|^2 \mid \gamma \in \Gamma^*\}$$

y la multiplicidad de $\lambda \in$ spec (T_Γ) es m_λ = número de soluciones de $\lambda = 4\pi^2 \|\gamma\|^2, \gamma \in \Gamma^*$. Esto es, si $\{\gamma_j \mid 1 \le j \le n\}$ es una base de Γ^*,

m_λ = número de soluciones $(m_1,\ldots,m_n) \in Z^n$ de la ecuación

$$Q(x) := 4\pi^2 \sum_{i \le j} < \gamma_i, \gamma_j > x_i x_j = \lambda$$

Notemos que aún en el caso más simple, esto es , si $Q(x) = \sum_1^n x_i^2$, este es un problema difícil. En suma, si bien se tiene un sistema completo de autofunciones, la determinación de Spec (T_Γ) es altamente no trivial.

Dados Γ_1, Γ_2 retículos en R^n es fácil ver que T_{Γ_1} es isométrico a T_{Γ_2} si y sólo si existe una transformación ortogonal O tal que $O\Gamma_1 = \Gamma_2$.

En 1964 J. Milnor construyó los primeros ejemplos conocidos de toros isospectrales no isométricos, para n = 16. Milnor prueba la isospectralidad sin calcular el espectro, usando que ciertos espacios de formas modulares son de dimensión 1.

Con técnicas similares Kneser, Kitaoka y Schiemann ([Ki], [Kn],[Sc]) construyeron ejemplos para $n \ge 12$, $n \ge 8$ y $n \ge 4$, respectivamente.

A seguir describimos los toros de Milnor. Sea $e_1,\ldots,e_n$ la base canónica en R^n. Sea en R^n:

$$\Gamma_n = \left\{ \sum_1^n m_i e_i \mid m_i \in Z, \sum m_i \in 2Z \right\} + Zv$$

donde $v = \frac{1}{2}\left(\sum_1^n e_i\right)$. Entonces

Teorema . (Milnor) Γ_{16} y $\Gamma_8 \oplus \Gamma_8$ definen toros isopectrales y no isométricos.

La no isometría es simple de verificar pues $\Gamma_8 \oplus \Gamma_8$ es generado por elementos de longitud $\sqrt{2}$, no así Γ_{16}. La isopectralidad se basa en el hecho clásico de que ciertos espacios de formas modulares tienen dimensión 1. No se conocen hasta el momento otras pruebas.

1.3 VARIEDADES COMPACTAS PLANAS ISOSPECTRALES

Nos interesa ahora pasar de toros planos a variedades compactas planas (v.c.p) en general. Una tal variedad es de la forma $M = \Gamma \setminus R^n$ donde Γ es un subgrupo discreto cocompacto sin torsión de $I(R^n)$, el grupo de isometrías de R^n. Las variedades compactas planas están gobernadas por los teoremas clásicos de Bieberbach (para las pruebas ver [W]):

(i) Existe Λ un subgrupo abeliano normal de Γ de índice finito, esto es, existe un toro plano T y una aplicación de revestimiento $p: T \to M$. El grupo finito $G = \Gamma / \Lambda$ es la holonomía de M.

(ii) Si Γ_1 y Γ_2 son subgrupos discretos cocompactos de $I(R^n)$ y $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ entonces Γ_1 es conjugado a Γ_2 en $A(R^n) = GL(n,R) \ltimes R^n$. Como consecuencia, si M_1 y M_2 son variedades compactas flat $\pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2)$ implica que M_1 es difeomorfa a M_2.

(iii) Existe un número finito de variedades compactas planas de dimensión n, salvo equivalencia afín.

Nota. El ejemplo más simple es el de *la botella de Klein*: $\mathcal{K} = \Gamma \setminus R^2$ donde $\Gamma = \langle T, L_v \mid v \in Z^2 \rangle$, $T(x,y) = (-x, y + \frac{1}{2})\ \forall (x,y) \in R^2$, y L_v es la translación asociada a v, $v \in R^2$. En dimensión 2, $\mathcal{K}$ es la única v.c.p no difeomorfa a T^2.

En dimensión 3 existen 10 tales variedades, 6 orientables y 4 no orientables. Las holonomías posibles son Z_2, Z_3, Z_4, Z_6 y $Z_2 \times Z_2$. Existe una de éstas con holonomía $Z_2 \times Z_2$, de particular importancia pues posee $\beta_1 = \beta_2 = 0$, la llamada variedad de Hantzsche-Wendt . En dimensión 4 hay 74 variedades. Fueron clasificadas por Calabi (ver [C], [L]) . En dimensión 5 no existe una clasificación. Un resultado importante, debido a Auslander-Kuranishi ([AK]), afirma que todo grupo finito G es grupo de holonomía de una variedad compacta plana de dimensión n, para n suficientemente grande. La determinación del mínimo n para G dado, es un problema abierto.

Relativo a isospectralidad de las v.c.p. tenemos el siguiente resultado:

Teorema. (ver [DM]) Si $n \geq 5$ existen M_1 , M_2 v.c.p isospectrales no homeomorfas de dimensión n y holonomía Z_2^k, $\forall k$ con $2 \leq k \leq n-3$ y $\beta_1 = h, \forall h$ con $1 \leq h \leq n-3$.

Si $n \geq 6$ existen tales variedades con $\beta_1 = 0$ y holonomía Z_2^k ,$\forall k$ con $3 \leq k \leq n-3$.

Nota.

(i) Observemos que $\beta_1 = 0$ es opuesto al caso de $M = T^n$, en que $\beta_1 = n$.

(ii) El teorema incluye en particular una construcción de nuevas v.c.p con holonomía Z_2^k ,$\forall k$, $2 \leq k \leq n-1$.

(iii) El método usado no da solución para n = 4.

(iv) El teorema muestra que entre las v.c.p generales, la isospectralidad es un fenómeno bastante más común que en los toros. La técnica del teorema permite además construir familias de v.c.p isospectrales no homeomorfas de cardinalidad arbitrariamente grande.

A seguir indicaremos los pasos de la demostración del teorema anterior.

(1) En primer lugar se prueba un lema técnico de construcción general de v.c.p con holonomía Z_2^k.

(2) La isospectralidad se obtiene via la técnica de T. Sunada ([S]). Si G_1, G_2 son subgrupos finitos de un grupo G se dice que G_1 y G_2 son casi conjugados (c.c.) en G si, para todo $x \in G$

$$\text{card } ([x] \cap G_1) = \text{card } ([x] \cap G_2)$$

donde [x] = clase de conjugación de x. Esto equivale a la existencia de una biyección ϕ: $G_1 \to G_2$ tal que

$$\phi(x) = g_x x g_x^{-1}$$

para algún $g_x \in G$; en general g_x depende de x.

Si puede tomarse $g_x \equiv g \ \forall x$, G_1 y G_2 son conjugados por g y en particular, isomorfos. Diremos que (G_1, G_2, G) es una terna de Sunada si G_1 y G_2 son c.c. en G. Se tiene entonces

Teorema. (Sunada [S]) Si M es una variedad riemanniana compacta, G actúa libremente en M y (G_1, G_2, G) es una terna de Sunada entonces $G_1 \backslash M$ y $G_2 \backslash M$ son isospectrales.

(3) El ejemplo más simple de terna de Sunada es

$$G = Z_8^* \ltimes Z_8,$$

$$G_1 = \{(1,0),(3,0),(5,0),(7,0)\}, \ G_2 = \{(1,0),(7,0),(3,4),(5,4)\}.$$

En una primera instancia, el teorema de Sunada se aplica a la terna anterior, esto es $G \cong Z_8^* \ltimes Z_8$, $G_1 \cong G_2 \cong Z_2^2$.

Se tiene

$$\begin{tikzcd}
 & T^n = \Lambda \backslash R^n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\Gamma_1 \backslash R^n \arrow[dr] & & \Gamma_2 \backslash R^n \arrow[dl] \\
 & \Gamma \backslash R^n &
\end{tikzcd}$$

Se prueba que $G_i = \Lambda \backslash \Gamma_i$, $i = 1,2$, actúan libremente en T^n, no así $G = \Lambda \backslash \Gamma$, pero esto no es necesario para la validez del teorema de Sunada. Para obtener variedades con $\beta_1 = 0$ precisamos al menos holonomía Z_2^3.

Para la implementación del esquema anterior se construye una representación entera conveniente de G en Z^4. En el caso general (holonomía Z_2^k) se trabaja con la terna

$$(Z_8^* \ltimes Z_8 \times Z_2^{k-2}, G_1, G_2)$$

donde $G_i \cong Z_2^k$, $i = 1,2$.

(4) Finalmente se prueba que $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$, comparando las representaciones enteras de Z_2^k en Z^n.

Referencias

[AK] Auslander L., Kuranishi, "*On the holonomy group of locally euclidean spaces*" , Ann. Math., 65, 1957, 411-415.

[C] Calabi E., "*Closed locally euclidean four dimensional manifolds* ", Bull. A.M.S 63 (1957),135.

[DM] Dotti I., Miatello R.J., "*Isospectral compact flat manifolds* ", a publicarse en Duke Math. Journal.

[I] Ikeda A., "*Isospectral Problem for Spherical Space Forms* ", Sp. Riem. manifolds, Edited Berger-Murakami-Ochiai, Kaigai, 1983, 57-63.

[K] Kac M., "*Can one hear the shape of a drum?* " Am. Math. Monthly 73, 1966, 1-23.

[Ki] Kitaoka Y., " *Positive definite quadratic forms with the same representation numbers* ", Arch. Math 28 (1977), 495-497.

[Kn] Kneser M., "*Lineare relationen zwischen quadratischer Formen* ", Math. Annalen 168 (1967), 31-37.

[L] Levine R., "*The compact euclidean space forms of dimension four* ", Tesis, U.C. Berkeley.

[M] Milnor J., " *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds* ", Proc. N.A.S. 51, (1964), 542.

[Sc] Schiemann A. , "*Ein Beispiel positio definiter quadratischer Formen der Dimension 4 mit gleichen Darstellungszahlen*", Arch. Math. V 54, 372-375 (1990).

[S] Sunada T.,"*Riemannian coverings and isospectral manifolds* ", Annals of Math. 121 (1985), 169-186.

[V] Vigneras M.F., "*Varietés Riemanniennes isospectrales non isometriques* ", Annals of Math. 112, 1980, 21-32.

[W] Wolf J., "*Spaces of constant curvature* ", New York, Mc Graw Hill, 1967.

Facultad de Matemática, Astronomia y Física (FaMAF)
Universidad Nacional de Córdoba
Valparaiso y R. Martínez - Ciudad Universitaria
5000 - Córdoba - ARGENTINA