IDEALES IDEMPOTENTES DE UN ALGEBRA DE ARTIN.

María Inés Platzeck
Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur.

Sea Λ un anillo unitario. En todo lo que sigue la palabra módulo significará módulo a izquierda, salvo mención explícita de lo contrario. La teoría de representaciones estudia las representaciones de Λ, o Λ-módulos, tratando de obtener información sobre el anillo a partir del conocimiento de sus módulos. Como ejemplos ilustrativos en esta dirección citamos los siguientes resultados clásicos.

- Un anillo Λ tiene la propiedad que todos sus módulos son libres si y solamente si Λ es un anillo con división (o sea, un cuerpo no necesariamente conmutativo).
- Un anillo Λ tiene la propiedad que todo módulo finitamente generado es suma directa de copias de un mismo módulo simple si y sólo si Λ es isomorfo a un anillo de matrices sobre un anillo con división.

Restringiremos nuestro estudio al caso en que el anillo Λ es un álgebra de artin, que es un álgebra finitamente generada como módulo sobre un anillo conmutativo artiniano R. Esta noción generaliza la noción de álgebra finitamente generada sobre un cuerpo (conmutativo) K, donde por K-álgebra finitamente generada entendemos una K-álgebra que es finitamente generada con respecto a su estructura de K-espacio vectorial. De aquí en adelante Λ designará un álgebra de artin. Es claro que Λ es siempre un anillo artiniano.

Como ejemplos de K-álgebras finitamente generadas citamos:

- El anillo $M_n(K)$ de matrices nxn con coeficientes en K.
- $T_n(K)$: la K-subálgebra de $M_n(K)$ formada por las matrices triangulares inferiores.
- El anillo cociente del anillo de polinomios K[X] por el ideal generado por un polinomio no constante p(X).
- Subálgebras y álgebras cocientes de álgebras finitamente generadas son finitamente generadas.

- Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $T: V \to V$ una transformación lineal. La K-subálgebra $K[T]$ generada por T en la K-álgebra de las transformaciones lineales de V en V es finitamente generada sobre K. Este ejemplo es importante, pues el estudio de los $K[T]$-módulos se aplica para hallar la forma normal de T. En realidad, el problema de estudiar módulos sobre álgebras finitamente generadas equivale a estudiar un problema de álgebra lineal, que bosquejamos así: dado un espacio vectorial de dimensión finita y un número finito de transformaciones lineales $T_1, \ldots, T_k : V \to V$, encontrar una base $\mathcal{B}$ de V en la cual todas las transformaciones lineales T_i tengan forma lo más "simple" posible.
- Sea G un grupo finito y $K[G]$ el álgebra de grupo de G. $K[G]$ es una K-álgebra finitamente generada y estudiar $K[G]$-módulos equivale a estudiar las representaciones del grupo G.
- Si Λ es una R-álgebra finitamente generada, con R anillo conmutativo artiniano, entonces a partir de un Λ-módulo M construimos otra álgebra de la siguiente manera. El anillo $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ de Λ-endomorfismos de M es una R-álgebra finitamente generada definiendo $(f.r)(m) = f(rm)$, para $f \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$, $m \in M$ y $r \in R$. Resulta entonces que el anillo $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ es artiniano. Observamos que esto último no ocurre en general: se puede encontrar un anillo Λ y un módulo finitamente generado M tal que $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ no es un anillo artiniano. Este es uno de los problemas que aparecen cuando se quiere extender los resultados obtenidos para álgebras de artin a anillos artinianos.
Este ejemplo es particularmente importante. En un cierto sentido, abarca a todas las álgebras de artin, dado que todo anillo Λ es isomorfo al anillo de endomorfismos del Λ-módulo a derecha Λ.

Conocemos muy bien el caso en que Λ es el cuerpo K y M es un K-espacio vectorial de dimensión finita n, donde $\mathrm{End}_K(M) = M_n(K)$, que es un anillo simple, con un único módulo simple, a menos de isomorfismos.

Cuando Λ es básico y M es proyectivo y no contiene ningún sumando directo isomorfo a Λ entonces $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ tiene menos módulos simples no isomorfos que Λ. Como ejemplo ilustrativo mencionamos que si $\Lambda = T_3(K)$ y $M = \Lambda e_{11} \oplus \Lambda e_{22}$, donde e_{ij} designa la matriz que tiene 1 en el lugar ij, 0 en los demás, entonces $\mathrm{End}_\Lambda(M) \cong T_2(K)$.

Si M está en $\mathrm{mod}(\Lambda)$ hay una relación entre los módulos a izquierda finitamente generados sobre Λ y los módulos a derecha finitamente generados sobre el anillo $End_\Lambda(M)$. Para unificar la notación identificaremos los módulos a izquierda sobre el anillo Λ con los módulos a derecha sobre el anillo Λ^{op}, donde Λ^{op} coincide con Λ como grupo abeliano, y el producto de dos elementos a y b en Λ^{op} es el elemento ba de Λ. Esto nos permitirá hablar siempre de Λ-módulos a izquierda, y en lo que sigue $mod(\Lambda)$ designará a la categoría de Λ-módulos a izquierda finitamente generados. Si X está en $mod(\Lambda)$ entonces $Hom_\Lambda(M,X)$ está en $mod(End_\Lambda(M)^{op})$ definiendo el producto de $f \in Hom_\Lambda(M,X)$ por $g \in End_\Lambda(M)$ como la composición $f \circ g$. Luego, si escribimos $\underline{(M, \ )}(X) = Hom_\Lambda(M, X)$, tenemos que $(M, \ )$ define un funtor $(M, \ ) : mod(\Lambda) \to mod(End_\Lambda(M)^{op})$.

Cuando $M = P$ es un Λ-módulo proyectivo llamaremos $\Gamma_P = End_\Lambda(P)^{op}$. En este caso $(P, \ ) : mod\Lambda \to mod(\Gamma_P)$ es un funtor denso y lleno, es decir, todo objeto de $mod(\Gamma_P)$ es isomorfo a (P,X), para algún X en $mod(\Lambda)$, y el morfismo natural de grupos abelianos $Hom_\Lambda(X,Y) \to Hom_{\Gamma_P}((P,X),(P,Y))$ es un epimorfismo.

Como Λ es artiniano y vale entonces el teorema de Krull-Schmidt los Λ-módulos proyectivos indescomponibles finitamente generados son isomorfos a Λe, para algún idempotente primitivo e de Λ, y todo Λ-módulo proyectivo finitamente generado es suma directa de módulos de este tipo.

Si $e \neq 0, 1$ es un idempotente central de Λ entonces $1-e$ es también idempotente central y Λe, $\Lambda(1-e)$ son subálgebras de Λ con unidades e, $1-e$ respectivamente. Además $\Lambda = \Lambda e \times \Lambda(1-e)$ es el producto de estas subálgebras, de donde $mod(\Lambda)$ es el producto de categorías $mod(\Lambda e) \times mod(\Lambda(1-e))$. De modo que para estudiar Λ-módulos basta estudiar módulos sobre las álgebras Λe y $\Lambda(1-e)$.

Si el idempotente e no es central entonces $P = \Lambda e$ es un Λ-módulo proyectivo, pero no es en general una subálgebra de Λ. Consideraremos el ideal bilátero $\mathfrak{a} = \Lambda e \Lambda$ generado por e. Entonces $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, o sea, $\mathfrak{a}$ es un ideal idempotente de Λ. Se puede ver que todo ideal bilátero idempotente de Λ es de esta forma, y que $\mathfrak{a}$ coincide con la traza $\tau_P(\Lambda)$ de P en Λ, es decir, $\mathfrak{a}$ es el submódulo de Λ generado por las imágenes de los morfismos $f: P \to \Lambda$ en $mod(\Lambda)$.

Sea ahora $\mathfrak{a}$ un ideal bilátero de un anillo Ω. Si M es un módulo sobre el anillo cociente $\Omega/\mathfrak{a}$, entonces M es un Ω-módulo definiendo $\omega.m = \bar{\omega}.m$, donde $\omega \in \Omega$, $m \in M$ y $\bar{\omega}$ designa la clase de ω en $\Omega/\mathfrak{a}$. Consideramos así a $\mathrm{mod}(\Omega/\mathfrak{a})$ como subcategoría de $\mathrm{mod}(\Omega)$, y los Ω-módulos que están en esta subcategoría son precisamente los M en $\mathrm{mod}(\Omega)$ tales que $\mathfrak{a}M = 0$.

Si $\mathfrak{a}$ es un ideal idempotente de Ω se puede considerar la categoría cociente de $\mathrm{mod}(\Omega)$ por $\mathrm{mod}(\Omega/\mathfrak{a})$. En efecto, sabemos que si $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ es una subcategoría abeliana de $\mathrm{mod}(\Omega)$ entonces podemos hacer el cociente de $\mathrm{mod}(\Omega)$ por $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ cuando $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ es una subcategoría de Serre de $\mathrm{mod}(\Omega)$, es decir si vale la siguiente propiedad:

- Para toda sucesión exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$ en $\mathrm{mod}(\Omega)$, con A y C en $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$ se tiene que B está en $\underline{\underline{\mathcal{A}}}$.

No es difícil probar que $\underline{\underline{\mathcal{A}}} = \mathrm{mod}(\Omega/\mathfrak{a})$ tiene esta propiedad si y sólo si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$.

En lo que sigue supondremos que $\mathfrak{a}$ es un ideal bilátero idempotente de Λ, y queremos describir esta categoría cociente. Sabemos que existe un Λ-módulo proyectivo P tal que $\mathfrak{a} = \tau_P(\Lambda)$. Si M es un $\Lambda/\mathfrak{a}$-módulo, como $\mathfrak{a}M=0$, $\mathfrak{a}=\tau_P(\Lambda)$ y P es proyectivo resulta que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,M) = 0$, y se tiene una sucesión exacta de categorías

$$\mathrm{mod}(\Lambda/\mathfrak{a}) \hookrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{mod}(\Gamma_P).$$

Esta sucesión es el objeto de nuestro estudio, y nos concentraremos en el aspecto homológico del mismo. Como el álgebra Λ es un anillo artiniano entonces Λ tiene sólo un número finito de Λ-módulos simples no isomorfos. Si el ideal $\mathfrak{a}$ es no trivial las álgebras $\Lambda/\mathfrak{a}$ y Γ_P tienen menos módulos simples que Λ. De modo que un buen conocimento de esta sucesión puede conducir a una manera de estudiar a Λ a partir de álgebras con menos módulos simples que Λ.

Consideraremos en lo que sigue resoluciones proyectivas de M en $\mathrm{mod}(\Lambda)$, esto es, sucesiones exactas $\ldots \to P_n \to \ldots \to P_o \to P_1 \to M \to 0$, tales que cada P_i es un Λ-módulo proyectivo finitamente generado. Vamos a comparar resoluciones proyectivas en las tres categorías: $\mathrm{mod}(\Lambda)$, $\mathrm{mod}(\Lambda/\mathfrak{a})$ y $\mathrm{mod}(\Gamma_P)$.

Sabemos que hay varias subcategorías (llenas) $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$ de $\mathrm{mod}(\Lambda)$ equivalentes a $\mathrm{mod}(\Gamma)$. Más aún, tales que la restrición de (P,) a $\underline{\underline{\mathcal{C}}} : \underline{\underline{\mathcal{C}}} \to \mathrm{mod}(\Gamma_P)$ es una equivalencia de categorías. Vamos a describir una de tales subcategorías, que llamaremos $\underline{\underline{P}}_1$, dando las presentaciones proyectivas de sus módulos.

Las sumas directas finitas de sumandos directos de P son módulos proyectivos, y forman una subcategoría aditiva de mod(Λ), que designaremos addP. Si el Λ-módulo Q está en addP, entonces el Γ_P-módulo (P,Q) está en add(P,P), o sea, en add(Γ_P), y es por lo tanto un Γ_P-módulo proyectivo. Más aún, la restricción del funtor (P,) a addP induce una equivalencia de addP en la categoría de Γ_P-módulos proyectivos finitamente generados.

Definimos entonces $\underline{\underline{P}}_1$ como la subcategoría llena de mod Λ cuyos objetos son los Λ-módulos M que tienen una presentación proyectiva $P_1 \to P_0 \to M \to 0$, con P_1, P_0 en addP. Entonces (P,) induce una equivalencia de $\underline{\underline{P}}_1$ en mod(Γ_P) que, por lo que observamos recién, preserva presentaciones minimales proyectivas. Sin embargo, (P,) no preserva, en general, resoluciones minimales proyectivas. Si un módulo M tiene una resolución proyectiva minimal $\ldots \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$, diremos que M está en $\underline{\underline{P}}_k$ si $P_0, \ldots, P_k \in$ addP, y diremos que M está en $\underline{\underline{P}}_\infty$ si M está en $\underline{\underline{P}}_k$ para todo k.

Estudiamos diversas condiciones necesarias y suficientes para que $\underline{\underline{P}}_1 = \underline{\underline{P}}_\infty$, esto es, para que el funtor (P,) transforme resoluciones minimales proyectivas en mod(Λ) de módulos en $\underline{\underline{P}}_1$ en resoluciones proyectivas en mod(Γ_P). Puede probarse el siguiente resultado:

<u>Proposición:</u> Las siguientes condiciones son equivalentes para el ideal bilátero idempotente $\mathfrak{a}$ de Λ:

1) $\underline{\underline{P}}_1 = \underline{\underline{P}}_\infty$
2) $\underline{\underline{P}}_1 = \underline{\underline{P}}_2$
3) P es un Γ_P^{op}-módulo proyectivo, si se define la acción natural de Γ_P^{op} en P: $f.x = f(x)$, para f en Γ, x en P.
4) $\mathfrak{a} \otimes_\Lambda \mathfrak{a}$ es un Λ^{op}-módulo proyectivo.
5) La composición $\text{mod}(\Lambda) \xrightarrow{(P,\ )} \text{mod}\,\Gamma_P \xrightarrow{P\otimes} \text{mod}(\Lambda)$ es un funtor exacto.

Nos concentramos ahora en la inclusión mod($\Lambda/\mathfrak{a}$) $\hookrightarrow$ mod(Λ), cuando $\mathfrak{a}$ es un ideal bilátero de Λ. Sea M un $\Lambda/\mathfrak{a}$-módulo y sea $\ldots \to P_n \to \ldots \to P_1 \to$

$P_0 \to M \to 0$ un resolución proyectiva minimal de M en mod Λ. Entonces $P_i/\mathfrak{a}P_i = \Lambda/\mathfrak{a} \otimes P_i$ es un módulo proyectivo sobre $\Lambda/\mathfrak{a}$ y obtenemos una sucesión $\ldots \to P_n/\mathfrak{a}P_n \to \ldots \to P_0/\mathfrak{a}P_0 \to M \to 0$ que es un complejo, o sea, satisface que la composición de dos morfismos consecutivos es 0. Nos preguntamos cuándo esta sucesión es una resolución proyectiva minimal de M en mod$(\Lambda/\mathfrak{a})$, para todo M en mod$(\Lambda/\mathfrak{a})$.

Puede verse que la sucesión $P_1/\mathfrak{a}P_1 \to P_0/\mathfrak{a}P_0 \to M \to 0$ es una presentación proyectiva minimal de M, para todo M en mod $(\Lambda/\mathfrak{a})$, si y sólo si el ideal bilátero $\mathfrak{a}$ es idempotente. Damos entonces la siguiente definición.

<u>Definición:</u> Sea $k \geq 1$. Diremos que el ideal bilátero $\mathfrak{a}$ de Λ es <u>k-idempotente</u> si dado M en mod$(\Lambda/\mathfrak{a})$ y una resolución proyectiva minimal $\ldots \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$ de M en mod(Λ), la sucesión $P_k/\mathfrak{a}P_k \to \ldots \to P_0/\mathfrak{a}P_0 \to M \to 0$ es el comienzo de una resolución proyectiva minimal de M en mod$(\Lambda/\mathfrak{a})$. Si $\mathfrak{a}$ es k-idempotente para todo k diremos que $\mathfrak{a}$ es un ideal <u>idempotente fuerte</u>.

El siguiente resultado permite decidir si un ideal es idempotente fuerte estudiando la resolución proyectiva de un sólo módulo:

<u>Proposición:</u> El ideal bilátero idempotente $\mathfrak{a} = \tau_P(\Lambda)$ es (k+1)-idempotente si y solamente si en una resolución proyectiva minimal de $\mathfrak{a}$: $\ldots \to P_n \to \ldots \to P_0 \to \mathfrak{a} \to 0$, los módulos P_i están en addP, para todo $k \geq 1$ y para todo $i = 1, \ldots, k$.

Los ideales k-idempotentes pueden caracterizarse también comparando los grupos de homología de $\Lambda/\mathfrak{a}$-módulos en mod$(\Lambda/\mathfrak{a})$ y en mod(Λ). Se demuestra que el ideal bilátero $\mathfrak{a}$ es k-idempotente si y sólo si el homomorfismo natural de grupos $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda/\mathfrak{a}}(X,Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(X,Y)$ inducido por el isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\Lambda/\mathfrak{a}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda}(X,Y)$ es un isomorfismo para cada par módulos X, Y en mod$(\Lambda/\mathfrak{a})$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Dijimos que los ideales 1-idempotentes son precisamente los ideales idempotentes. Esto es, los ideales tales que el morfismo $m: \mathfrak{a} \otimes_\Lambda \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ dado por la multiplicación es un epimorfismo. Se puede demostrar que $\mathfrak{a}$ es 2-idempotente si y sólo si m es un isomorfismo. No hay un criterio similar para k-idempotentes si $k \geq 3$.

Para todo $k \geq 1$ existen ideales que son k-idempotentes y que no son (k+1)-idempotentes. Por ejemplo, si $\Lambda = T_{k+2}(K)/\underline{r}^2$, donde $\underline{r}$ es el radical de

$T_{k+2}(K)$, y $P = \Lambda e_{22} \oplus \ldots \oplus \Lambda e_{k+1,k+1}$, entonces $\mathfrak{a} = \tau_P(\Lambda)$ es un ideal k-idempotente, que no es $(k+1)$-idempotente.

Damos ahora algunos ejemplos de ideales idempotentes fuertes:

Si $\mathfrak{a}$ es un ideal proyectivo de Λ, entonces $\mathfrak{a}$ es idempotente fuerte.

En la definición de anillos casi hereditarios se consideran ciertas cadenas de ideales. Todos los ideales de dichas cadenas son idempotentes fuertes y tienen dimensión proyectiva finita, aunque en general no son proyectivos. Los anillos casi hereditarios fueron definidos por E.Cline, B.Parshall y L.Scott, tratando de hacer una demostración algebraica de la conjetura de Lusztig sobre representaciones modulares de grupos algebraicos reductivos. Fue tratando de comprender la noción de anillo casi hereditario que surgió este trabajo.

En los ejemplos mencionados los ideales idempotentes fuertes tienen dimensión proyectiva finita. Existen también ideales idempotentes fuertes de dimensión proyectiva infinita.

Los resultados anteriores pueden combinarse dando una caracterización de cuándo el ideal idempotente $\mathfrak{a}$ es un Λ-módulo a derecha proyectivo: Vimos que si $\mathfrak{a}$ es proyectivo entonces es idempotente fuerte. En consecuencia es un 2-idempotente y entonces la multiplicación m: $\mathfrak{a} \otimes_\Lambda \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ es un isomorfismo, de donde también resulta que $\mathfrak{a} \otimes_\Lambda \mathfrak{a}$ es un Λ-módulo a derecha proyectivo. Por lo afirmado anteriormente tenemos entonces que $\mathfrak{a}$ es proyectivo a derecha si y sólo si $\underline{\underline{P}}_1 = \underline{\underline{P}}_\infty$ y $\mathfrak{a}$ es idempotente fuerte.

Los resultados obtenidos permiten obtener fórmulas que relacionan las dimensiones globales de los tres anillos: $\Lambda/\mathfrak{a}$, Λ y Γ_P. También se aplican en el estudio de álgebras casi hereditarias.

Pensando en el problema de estudiar propiedades del álgebra a partir del conocimiento de sus módulos, uno puede preguntarse, por ejemplo, cuáles álgebras tienen la propiedad de que todos sus ideales idempotentes son fuertes. En esta dirección sabemos que las álgebras de dimension global finita con la propiedad de que todos sus ideales idempotentes son fuertes son precisamente las álgebras hereditarias.

Por otro lado, podemos dar una caracterización de las álgebras tales que todos sus ideales idempotentes son proyectivos, y demostrar que tales álgebras tienen dimensión proyectiva finitista a lo sumo uno. O sea, que si M es un Λ-módulo de dimensión proyectiva finita entonces dicha dimension es 0 ó 1.

La mayor parte de los resultados nuevos mencionados aquí han sido obtenidos en colaboración con M.Auslander y G.Todorov, y aparecerán publicados en TAMS [1].

Referencias.

[1] M.Auslander, M.I.Platzeck, G.Todorov. Homological theory of idempotent ideals. To appear in TAMS.

[2] H.Cartan and S.Eilenberg, Homological algebra. Princeton University Press, 1956.

[2] E.Cline, B.Parshall, L.Scott. Finite dimensional algebras and highest weigh categories. Jour.reine angew. Math. 363 (1985), 146–173.