INTRODUCCION A LA GEOMETRIA DE LOS PLANOS DE R^4.

W. Reyes S.

Con el objeto de abordar la métrica de la variedad de los planos bidimensionales de R^4, la grassmanniana G_{42}, generalizamos en la presente exposición a R^4 algunos conceptos pertinentes a la geometría lineal del espacio R^3.

Supondremos R^3 y R^4 dotados del producto escalar canónico: $\langle u, v\rangle = u^t v$ y de la base ortonormal acostumbrada $\{e_i\}$. Referida a ésta última la ecuación de un plano de R^3 reviste la forma:

$$y: = x_3 = x_1 a + x_2 b = (x_1, x_2)^t(a, b) =: xA \qquad (1).$$

Nótese que el punto de la base $e_3 = (0, 0, 1)$ es ajeno al plano.

Sea $B = {}^t(a', b')$, los planos $y = xA$, $y = xB$ configuran entre sí un ángulo de intersección, $\theta = \theta(A, B)$, cuyas funciones coseno y seno están dadas por las fórmulas:

$$\cos^2\theta = (1 + aa' + bb')/\delta\delta',$$

M.S.C. 51N20, 53A25,53B20.

$$\sin^2\theta = ((a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2)/\delta\delta',$$

$$\delta = {}^tAA = 1 + a^2 + b^2, \ \delta' = {}^tBB.$$

Ahora bien, si se considera estos planos como "infinitamente próximos", en cuyo caso $a - a' = da$, $b - b' = db$, $\sin\theta = \theta = ds$, según la fórmula anterior:

$$ds^2 = (da^2 + db^2 + (adb - bda)^2)/\delta^2. \qquad (2)$$

Esta última fórmula constituye la "métrica riemanniana" propia de la variedad de los planos del espacio $R^3\backslash e_3$.

Es de interés hacer notar que (2) puede representarse también matricialmente:

$$(1 + (a, b)^t(a, b))^{-1}d(a, b)(I + {}^t(a,b)(a, b))^{-1}d^t(a, b).$$

I representará en adelante la identidad del álgebra de las matrices de 2x2.

A continuación procuraremos generalizar la fórmula recién anotada al caso de los planos de R^4.

Sean A y B respectivamente las matrices

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}.$$

La identidad:

$y: = (x_3, x_4) = (x_1, x_2)A: = xA,$ (4)

representa un plano de R^4 distinto del engendrado por e_3 y e_4, $[e_3, e_4]$. En particular, si $A = 0$, el plano $y = 0$ es el engendrado por e_1 y e_2.

Las soluciones en el álgebra de las matrices de a 2x2 del sistema lineal: $y = xA$, $y = xB$ están limitadas por el rango de la matriz constituida por los generadores de los respectivos planos:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -I & -I \end{pmatrix} \quad (5)$$

Si el rango de esta matriz es 2 (mínimo), coinciden los planos; si es 3, los planos se cortan según una recta y si el rango de (5) es 4 se intersectan solamente en el origen.Esta última alternativa queda satisfecha si se cumple la definición siguiente:

los planos $y = xA$, $y = xB$ se dicen <u>ortogonales</u> si para cualesquiera vectores (u, uA), (v, vB) vale:

$<(u, uA), (v, vB)> = (u, uA)^t(v, vB) = u(I + A^tB)^tv = 0.$

Por ejemplo, si $\det A \neq 0$ y $B = -{}^tA^{-1}$, (5) es ortogonal y por ende son también ortogonales los planos $y = xA$, $y = xB$.

Una propiedad característica de los planos de R^4 es la siguiente:

Dos planos, $y = xA$, $y = xB$, se intersectan según un par de ángulos no nulos y distintos en general.

En efecto, sin restricción de la generalidad podemos suponer $B = 0$ ya que, como se recordará, dos planos cualesquiera pueden llevarse a coincidir por medio de la acción del grupo ortogonal O_4 sobre el fibrado de las bases. Véase [B. C.].

El punto (u, uA) del plano $y = xA$ se proyecta ortogonalmente sobre el punto $(u, 0)$ del plano $y = 0$, de suerte que el ángulo, θ, entre ambos está dado por su coseno:

$$\cos\theta = \|u\| / \|(u, uA)\|.$$

Sea ϕ la forma cuadrática:

$$\phi(u) = \|(u, uA)\|^2 = u(I + A^tA)^tu,$$

o, en términos de las componentes a, b, c, d de A:

$$(1 + a^2 + c^2)u_1{}^2 + 2(ab + cd)u_1u_2 + (1 + b^2 + d^2)u_2{}^2.$$

Esta forma cuadrática presenta sobre el círculo unitario, $\{u: \|u\| = 1\}$, dos puntos críticos, $u^{(i)}$, de suerte que los recíprocos de los respectivos valores críticos determinan los cosenos de los ángulos comprendidos entre los planos.

Es fácil comprobar que la forma cuadrática $\phi(u)$ es independiente de u, o sea que ϕ es constante, sí y sólo sï rige una de las alternativas siguientes:

$$c = b \quad y \quad d = -a \quad o \quad c = -b \quad y \quad d = a.$$

En cuyo caso los ángulos que subtienden entre sí ambos planos son iguales. Entonces los planos se dicen isóclinos.

Es evidente que la relación de isoclinicidad es más amplia que la de ortogonalidad; dos planos isóclinos que subtienden un ángulo de $\pi/2$ son ortogonales. En seguida pasamos a examinar ciertas propiedades métricas de la variedad $G_{4,2}$ de los planos de $R^4\setminus[e_3, e_4]$.

La fórmula (2) adaptada a R^4 reviste la expresión siguiente:

$$ds^2 = Tr(I + {}^tAA)^{-1}d^tA(I + A^tA)^{-1}dA \qquad (6).$$

Es la "métrica de la traza", introducida en un contexto más general por Y. C, Wong. (Véase [W]).

Damos luego (6) en función de a, b, c, d, las componentes de A.

$$(I + {}^{t}AA)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + c^2 + d^2 & -(ac + bd) \\ -(ac + bd) & 1 + a^2 + b^2 \end{pmatrix} \Delta^{-1}$$

$$(I + A{}^{t}A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + b^2 + d^2 & -(ab + cd) \\ -(ab + cd) & 1 + a^2 + d^2 \end{pmatrix} \Delta^{-1}$$

$$\Delta = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (ad - bc)^2 = \det\phi.$$

Si se substituye en (6) estas expresiones se calcula efectivamente el tensor métrico (g_{ij}) en función de a, b, c, d. Dejamos de lado este cómputo para señalar que (6) puede escribirse con el recurso del producto directo, o de Kronecker, "$\otimes$", de la siguiente manera:

$$ds^2 = d{}^{t}A(I + {}^{t}AA)^{-1} \otimes (I + A{}^{t}A)^{-1} dA \qquad (7),$$

supuesto que $d{}^{t}A$ se identifique con (da, db, dc,dd) y dA con el respectivo vector-columna.

La prueba de (6) = (7) no es sino la verificación de la identidad cuando se efectúa el cálculo de la traza y del producto directo usando los desarrollos recién anotados. En R^3 el producto directo de (7) se reduce al caso ya conocido. (2) :

$$\begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} (1 + b^2)\delta^{-1} & -ab\delta^{-1} \\ -ab\delta^{-1} & (1 + a^2)\delta^{-1} \end{pmatrix}$$

Al conjugar tendremos finalmente:

$$(1 + b^2)da^2 - 2abdadb + (1 + a^2)db^2 = \delta^2 ds^2.$$

Para terminar, enunciamos una relación entre propiedades métricas y propiedades angulares de los planos en forma de un

<u>Teorema</u>. La subvariedad de $G_{4,2}$ de los planos de ecuación $y = xA$, con $A =$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

es isométrica a la esfera S^2.

<u>Demostración</u>. En efecto, según (7), $\delta^2 ds^2 = da^2 + db^2$.
Al efectuar sucesivamente los cambios de variable:

$$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta,\ \phi = 2\,\mathrm{arc\ tg}\,r,$$

se encuentra que:

$$(1 + r^2)^2 ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2;$$

por otro lado:

$$(dr/1 + r^2)^2 = (d\phi/2)^2, \ (r/1 + r^2)^2 = (\sin\phi d\theta/2)^2.$$

Las métricas de la variedad de los planos isóclinos y de la esfera S^2 son, salvo un factor, la misma, por lo tanto ambas variedades son isométricas.

Referencias.

[B. C.]. Bishop, R. L., Crittenden, R. J. Geometry of Manifolds, ch.3. A. P. 1964.

[W] Wong, Y. C. Differential Geometry of Grassmann Manifolds. Proceedings of the N. A. S., U. S. A., 1967.

[W. M.], Wong, Y. C., Mok, K. P., Isoclinic Planes in R^{2n} and the Hopf-Steenrod Sphere Bundles $S^{2n-1} \to S^n$.