ALGUNOS PROBLEMAS EN GEOMETRIA HOMOGENEA

Cristián U. Sanchez

1 INTRODUCCION

Es para mi un placer poder participar, gracias a la invitación de la Comisión Organizadora, en este primer congreso dedicado a rendir homenaje a Antonio Monteiro. A pesar de no haberlo conocido personalmente, puedo apreciar y valorar su esfuerzo de pionero en esta Universidad del Sur y su trabajo para el desarrollo de la Matemática Argentina. Humildemente le rindo mi pequeño homenaje.

Generalmente se habla de Geometría Homogenea para designar al estudio de las propiedades geométricas que poseen las métricas Riemannianas y conexiones afines varias, que se pueden definir en espacios homogeneos de grupos de Lie. Tambien se entiende en general, que los métodos de estudio de estos problemas incluirán una significativa componente en la llamada teoría de Lie y por tal motivo ellos tienen, casi siempre, una tonalidad propia y especial. Sin embargo muchos problemas geométricos muy naturales y que han sido objeto de mucho estudio resultan tener solo soluciones "homogeneas". Este tipo de resultados, como por ejemplo el celebrado teorema de Liebmann sobre las superficies cerradas convexas y con curvatura media constante en R^3, resultan siempre muy apreciados.

En esta ocasión deseo presentar un par de resultados de este tipo que son el punto de partida de mi trabajo reciente. El tema ofrece innumerables facetas y problemas de interés que son objeto de investigación actual. Me ha parecido mas interesante para la audiencia de este congreso presentar el punto de partida y algunos problemas derivados, que hacer referencia a resultados mas recientes. El tiempo disponible hace imposible un tratamiento mas exhaustivo.

Los resultados aludidos, uno debido a D. Ferus y otro a B.Y.Chen estan contenidos en [F] y [Ch] y son, como espero poder señalar, variaciones de una misma melodía básica. Ambos son del tipo indicado arriba, es decir, problemas geométricos claros para los cuales se muestra que la solución es un espacio homogeneo.

La sección 2 contiene el resultado de Ferus y la 3 el de Chen. Nos reservamos la seccion 4 para los comentarios finales.

SECCION 2

Sea M una variedad Riemanniana compacta y conexa; $i: M^n \longrightarrow R^N$ un imbedding isométrico (inmersión uno a uno) y substancial, es decir que $i(M)$ no está contenido en ningun subespacio afín propio de R^N. Queremos estudiar en esta sección ciertas curvas que son clásicamente asociadas a la geometría de $M \subset R^N$, es decir las geodésicas.

Tomemos una geodésica $\gamma(t)$ en M y la miramos como una curva $c(t) = i(\gamma(t))$ en R^N. Recordemos que una curva $c(t)$ en R^N se dice una *curva de Frenet de rango* r *en* R^N si para todo $t \in D(c) = I$ las derivadas $c'(t),\ldots,c^{(r)}(t)$ son linealmente independientes mientras que $c'(t),\ldots,c^{(r+1)}(t)$ son linealmente dependientes. Podemos aplicar en cada punto el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt obteniendo un marco ortonormal $V_1(t),\ldots,V_r(t)$ sobre c ($\forall\ t \in I$). Por la naturaleza de los $c^{(i)}$ y del proceso de G-S, estos son campos C^∞. Además $V_i(t)$ es combinación lineal de $c'(t),\ldots,c^{(i)}(t)$ de lo cual sigue que $V'_i(t)$ lo es de $c'(t),\ldots,c^{(i+1)}(t)$. Como, de nuevo por la naturaleza del proceso de G-S, es claro que

$$\mathrm{Span}\{c'(t),\ldots,c^{(i)}(t)\} = \mathrm{Span}\{V_1(t),\ldots,V_i(t)\}$$

vemos que $V'_i(t)$ es combinación lineal de $V_1(t),\ldots,V_{i+1}(t)$ y entonces podemos escribir

(2.1) $\quad V'_i(t) = \sum_{j=1}^{i+1} \langle V'_i(t),V_j(t)\rangle\, V_j(t).$

Estudiando los productos escalares se ve que:

Si $i > j + 1$ entonces $\langle V'_i(t),V_j(t)\rangle = 0$.

Si $i = j$ entonces $\langle V'_i(t),V_i(t)\rangle = 0$;

y por lo tanto podemos escribir

(2.2)

$$V'_i(t) = \langle V'_i(t),V_{i-1}(t)\rangle\, V_{i-1}(t) + \langle V'_i(t),V_{i+1}(t)\rangle\, V_{i+1}(t).$$

Si ahora denotamos

$$k_i(t) = \langle V'_i(t),V_{i+1}(t)\rangle$$

entonces tenemos claramente

$$<V'_i(t),V_{i-1}(t)> = - <V_i(t),V'_{i-1}(t)> = - k_{i-1}(t)$$

y por lo tanto

(2.3) $V'_i(t) = k_{i-1}(t)\ V_{i-1}(t) + k_i(t)\ V_{i+1}(t).\quad i = 2,\dots,r-1.$

La fórmula (2.3) puede extenderse a $i = r$ pues como $c^{(r+1)}(t)$ es combinación lineal de $c'(t),\dots,c^{(r)}(t)$ en el proceso de G-S resulta naturalmente $V_{r+1}(t) = 0$ de donde extendiendo la definición de k_i resulta que $k_r(t) = 0$ ($\forall$ $t \in I$).

Por otra parte en el extremo $i = 0$ tenemos

$$V'_1(t) = k_1(t)\ V_2(t)$$

y entonces definiendo $V_0(t) = 0$ y $k_0(t) = \| c'(t) \|$ ($\forall$ $t \in I$) podemos escribir nuevamente (2.3) como

(2.4) $V'_i(t) = k_{i-1}(t)\ V_{i-1}(t) + k_i(t)\ V_{i+1}(t).\quad i = 1,\dots,r.$

siendo además fácil de probar que $k_i(t) > 0$ $i = 0,\dots,r-1$ ($\forall$ $t \in I$).

Nos interesa considerar los imbeddings $i:M^n \longrightarrow R^N$ para los cuales las curvas c(t) definidas arriba sean lo que F. Klein y S. Lie denominaron "*w-curvas*" [F], es decir, curvas de Frenet cuyas curvaturas $k_i : I \longrightarrow R^+$ $i = 1,\dots,r-1$ son todas constantes.

Sobre las w-curvas acotadas en R^N tenemos el siguiente resultado importante de [F].

(2.5) Proposición: ([F]) Sea $c:J \subset R \longrightarrow R^N$ una w-curva de longituid infinita parametrizada por longitud de arco. Si c(J) es acotado entonces el rango de c es par $r = 2m$. Hay además constantes $a_i > 0$ $i = 1,\dots,m$, únicas salvo orden, correspondientes constantes positivas $b_i > 0$ $i = 1,\dots,m$ y vectores ortonormales $e_j \in R^N$ $j = 1,\dots,2m$ tales que

$$c(t) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i(e_{2i-1}\text{sen } a_it + e_{2i}\cos a_it)$$

donde $c_0 \in R^N$ es una constante.■

Resultará claro para el lector que este resultado es consecuencia de los teoremas de solución de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes. Correspondientemente para las curvas *no-acotadas,* el rango resulta impar y la fórmula de (2.5) contiene un término adicional lineal en t.

Una w-curva como la de (2.5) se dice *genérica* si está definida en todo R y los $a_1,\dots,a_m$ son linealmente independientes sobre los racionales. Es decir, salvo un movimiento rígido, $\overline{c(R)}$ es el toro $S^1(b_1)\times\dots\times S^1(b_m)$.

Ahora, si uno no tiene nada mejor que hacer, puede preguntarse ¿ Cómo tiene que ser el imbedding i que estamos estudiando, para que "la mayoría" de sus geodésicas sean w-curvas genéricas en R^N? La respuesta es el siguiente teorema de D. Ferus [F].

(2.6) Teorema: Sea M^n una variedad Riemanniana compacta y conexa y sea $i:M^n \longrightarrow R^N$ un imbedding isométrico. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

i) Para "casi todo" vector unitario X, tangente a M, la geodésica γ de velocidad inicial X en M es tal que $c = i \circ \gamma$ es una w-curva genérica en R^N. (Para "casi todo" vector quiere decir que el complemento del conjunto de los vectores con esta propiedad en el fibrado tangente unitario sobre M tiene medida nula.)

ii) La segunda forma fundamental de M en R^N es paralela.

iii) M es extrínsecamente simétrico en R^N.■

Recordemos que la definición de extrínsecamente simétrico es la siguiente. Dada $i: M \longrightarrow R^N$ como arriba, para cada punto $p \in M$ tenemos tenemos los espacios M_p y $M_p^{\perp}$ tangente y normal a M en p respectivamente. Como $R^N = M_p \oplus M_p^{\perp}$, dado $u \in R^N$ podemos escribirlo como $u = u_1 + u_2$ donde $u_1 \in M_p$ y $u_2 \in M_p^{\perp}$ y esto nos permite definir una isometría del ambiente por:

$$\sigma_p(u) = - u_1 + u_2.$$

Se dice que M *es extrínsecamente simétrico en* R^Nsi ocurre que para todo $p \in M$ $\sigma_p(i(M)) = i(M)$. M resulta claramente homogénea y de hecho es un espacio simétrico compacto.

La demostración de i) ⇒ ii) usa las fórmulas usuales de la teoría de subvariedades, la proposición (2.5) y la simetría de la derivada covariante de la segunda forma fundamental (ecuación de Codazzi). ii) es equivalente a iii) por los trabajos de Ferus y Strübing [F1] y [St]; mientras que iii) ⇒ i) está ligado a la naturaleza de los elementos singulares del álgebra de Lie del grupo de isometrías de M.

Es crucial en el enunciado de (i) que la geodésica sea una w-curva *genérica*, de otro modo el resultado es falso aun si uno elimina el subconjunto de medida nula y pide que todas las geodésicas sean w-curvas . Mas precisamente si cambiamos

(i) por la siguiente proposición:

i*) Para *todo* vector unitario X, tangente a M, la geodésica γ de velocidad inicial X en M es tal que $c = i \circ \gamma$ es una w-curva en R^N.

Tenemos iii) ⇒ i*) pero i*) no implica iii). Un ejemplo de esta situacion lo provee SU(n) para $n \geq 3$ que se puede considerar metido dentro del espacio euclideo de matrices complejas n x n. Este imbedding cumple i*) pero no iii). Es interesante notar que U(n), que contiene al anterior, sí cumple iii) por un conocido resultado de Kobayashi.

SECCION 3

Otras curvas que clásicamente han sido muy importantes en el estudio de la geometría de superficies son las denominadas secciones normales. En épocas mas recientes Chen, quien ha extendido esta noción al caso mas general de subvariedades de R^N, y otros, han realizado un estudio bastante sistemático de estas curvas en situaciones particulares. Por "particulares" queremos indicar que, en general, las hipótesis de trabajo se refieren a condiciones sobre la naturaleza de todas las secciones normales de una subvariedad.

Tomemos, como en la sección anterior, M una variedad Riemanniana compacta y conexa; $i:M^n \longrightarrow R^N$ un imbedding isométrico (inmersión uno a uno). Sea p un punto en M y T un vector unitario en el espacio tangente M_p a M en p. Asociado con p y T consideremos el subespacio afín de R^N definido por

$$E(p,T) = p + \mathrm{Span}\{ M_p^{\perp} , T \}$$

y para un entorno U de p en M consideremos la intersección $i(U) \cap E(p,T)$. Si U es un abierto suficientemente pequeño conteniendo p en M podemos considerar a esta intersección como la imagen de una curva regular γ, parametrizada por longitud de arco s, y cumpliendo $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = T$. En un sentido estricto, diferentes elecciones de U dan lugar a curvas diferentes . Cada una de estas curvas es llamada la sección en el entendimiento que dadas dos de ellas alrededor de p hay un entorno de 0 en R donde coinciden. Una consecuencia inmediata de la definición es que $\nabla_T(\gamma') = 0$ para cada sección normal ya que $\|\gamma'\| = 1$.

Tomamos una sección normal γ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = T$ y ponemos $c(t) = i(\gamma(t))$ para pensar a esta curva en el ambiente. Entonces

$$c'(t) = i_*(\gamma'(t))$$

$$c''(t) = \nabla^E_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'}\gamma' + \alpha(\gamma',\gamma')$$

$$\begin{aligned} c'''(t) &= \nabla^E_{\gamma'}(\nabla_{\gamma'}\gamma') + \nabla^E_{\gamma'}(\alpha(\gamma',\gamma')) \\ &= \nabla^2_{\gamma'}\gamma' + 3\,\alpha(\gamma',\nabla_{\gamma'}\gamma') - A_{\alpha(\gamma',\gamma')}\gamma' + (\overline{\nabla}_{\gamma'}\alpha)(\gamma',\gamma'). \end{aligned}$$

Haciendo t = 0 tenemos

$$c'(0) = i_*(T)$$

$$c''(0) = \alpha(T, T)$$

$$c'''(0) == \nabla^2_T\gamma' - A_{\alpha(T,\ T)}T + (\overline{\nabla}_T\alpha)(T,\ T).$$

y se ve claramente que $c'(0)$, $c''(0)$ y $c'''(0)$ serán linealmente dependientes si y sólo si $\alpha(T, T)$ y $(\bar{\nabla}_T\alpha)(T, T)$ lo son pues siendo γ una sección normal debe ocurrir que $\nabla_T^2\gamma' - A_{\alpha(T, T)}T$ es un múltiplo de T. En caso de que esto se cumpla decimos que la sección γ es *puntualmente plana*.

Tenemos ahora el siguiente teorema debido a Chen [Ch]

(3.1)Teorema: Sea M^n una variedad Riemanniana compacta y conexa y sea $i:M^n \longrightarrow R^N$ un imbedding isométrico. Si $i(M)$ está contenida en una esfera en R^N entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.

i) Todas las secciones normales de M son puntualmente planas.

ii) La segunda forma fundamental de M en R^N es paralela.■

Como no hemos podido conseguir la demostración original de Chen y pensamos que algo similar puede ocurrirle al lector interesado, incluiremos nuestra versión de esta demostración. Sin embargo antes de entrar en ella remarcamos que este es tambien un teorema donde se ve que el problema de encontrar todas las subvariedades de R^N que tengan secciones normales puntualmente planas tiene solución homogenea y curiosamente es la misma que la del teorema de Ferus aun cuando nada hace suponer esto.

Demostración: Es claramente trivial que ii) $\Rightarrow$ i); por lo cual solo hay que estudiar la otra implicación.

Analicemos primero la condición de "esfericidad" de la inmersión. A fin de simplificar la notación identificamos M con i(M) como es usual. Denotemos con p^* el campo normal a M definido por $p^*(q) = q \quad \forall\, q \in M$. Entonces para cada $q \in M$

tenemos

(3.2) $\qquad A_{p*}(Z) = A^{\#}_{p*}(Z)$ para todo $Z \in M_q$

donde A es el operador forma de M y $A^{\#}$el operador forma de la esfera que contiene a M. Para probar (3.2) hacemos lo siguiente: Llamemos $\hat{p}^*$ a la extensión de p^* a la esfera S. $\hat{p}^*(q) = q \ \forall \ q \in S$. Calculemos $\nabla^E_Z(\hat{p}^*)$ para Z en M_q. Si R es el radio de S entonces $<\hat{p}^*, \hat{p}^*> = R^2$ y así $Z<\hat{p}^*, \hat{p}^*> = 0$. Pero $Z<\hat{p}^*, \hat{p}^*> = 2 <\nabla^E_Z(\hat{p}^*), \hat{p}^*>$ lo cual implica $\nabla^E_Z(\hat{p}^*) \perp \hat{p}^*$. Entonces concluimos $- A^{\#}_{\hat{p}*}(Z) = \nabla^E_Z(\hat{p}^*) = \frac{1}{R} Z$.

Claramente ahora tenemos

$$\nabla^E_Z(\hat{p}^*) = \nabla^E_Z(p^*) = - A_{p*}(Z) + \nabla^{\perp}_Z(p^*)$$

y por lo tanto, por (3.2), resulta

(3.3) $\qquad \nabla^{\perp}_Z(p^*) = 0.$

Sea ahora γ una sección normal en $p \in M$ en la dirección de T. $< \alpha(\gamma', \gamma'), p^* > = <A_{p*}(\gamma'), \gamma'> = \frac{1}{R}\|\gamma'\|^2 = \frac{1}{R}$.

Entonces para $Z \in M_p$ tenemos:

$0 = Z < \alpha(\gamma', \gamma'), p^* > = <\nabla^{\perp}_Z(\alpha(\gamma', \gamma')), p^*> + < \alpha(\gamma', \gamma'), \nabla^{\perp}_Z(p^*)>$

y por (3.3) resulta

(3.4) $\qquad <\nabla^{\perp}_Z(\alpha(\gamma', \gamma')), p^*> = 0.$

Ahora, si tenemos que todas las secciones de M en cada punto p de M son puntualmente planas, para cada $T \in M_p$ debe existir un real $\lambda(T)$ tal que

$$(\bar{\nabla}_T\alpha)(T, T) = \lambda(T) \ \alpha(T, T).$$

Esto es equivalente a

$$\nabla^{\perp}_T(\alpha(\gamma', \gamma')) = \lambda(T) \ \alpha(T, T)$$

y especificando $Z = T$ en (3.4) tenemos

$$0=<\nabla_T^{\perp}(\alpha(\gamma',\gamma')),p^*>=\lambda(T)<\alpha(T,T),p^*>=\lambda(T)<A_{p^*}(T),T>=-\frac{1}{R}\lambda(T)$$

Entonces $\lambda(T) = 0 \quad \forall\ T \in M_p$ y por lo tanto tenemos

$$(\bar{\nabla}_T\alpha)(T,\ T) = 0.$$

Por la ecuación de Codazzi resulta que α es paralela y hemos completado la demostración de (3.1).■

Desde nuestro punto de vista, parece adecuado presentar juntos los teoremas de Chen y Ferus ya que ambos indican manifestaciones, sobre ciertas curvas naturalmente asociadas a una subvariedad, de un mismo fenómeno. El paralelismo de la segunda forma fundamental.

SECCION 4

Los resultados de Ferus y Chen sugieren numerosos problemas de los cuales mencionaré solo unos pocos. En primer lugar notemos que la equivalencia entre ii) y iii) de (2.6) ha sido extendida en [OS] para cubrir el caso de *todos* los R-espacios o, como es mas usual denominarlos ahora, órbitas de s-representaciones. La expresión de este resultado es:

(4.1) Teorema [OS]: Sea M una subvariedad compacta conexa y substancial de R^N. Entonces son equivalentes

i) M admite una conexión canónica y su segunda forma fundamental es paralela con respecto a esa conexión canónica.

ii) M es una orbita de una s-representación (R-espacio).■

Esto plantea el interrogante de como extender los resultados de Ferus y Chen a la situación general de los

R-espacios. Naturalmente, por tratarse de teoremas de caracterización, ellos no extienden a la situación general y es allí donde aparecen las preguntas interesantes. En el caso del trabajo de Ferus uno puede plantear el estudio, como curvas en R^N, de las geodésicas de los R-espacios en general pero eso parece un problema de mucha complejidad. Por otra parte puede plantearse tambien el estudio de las geodésicas canónicas que parece un problema mas sencillo. Sobre estas últimas se sabe, [S], que son curvas de Frenet en R^N.

El estudio de las secciones normales por otra parte, presenta varios problemas de interés. Para señalar solo algunos, sería tal vez util e interesante tener una caracterización de los R-espacios en general en términos de las secciones normales que contenga al resultado de Chen. Además es claro que en un R-espacio aparecen secciones que no son puntualmente planas y sería bueno tener idea de su naturaleza y distribución.

REFERENCIAS

[Ch] Bb. J.Chen "Differential Geometry of Submanifolds with planar Normal Sections" Ann Mat Pura Apl. 130,(1982), 59-66.

[OS] Carlos Olmos y Cristián Sánchez "A geometric characterization of the orbits of s-representations" J. reine angew. Math 420 (1991) 195-202.

[S] Cristián Sanchez "A characterization theorem for extrinsic k-symmetric submanifolds of R^N" . Revista de la Unión Matemática Argentina. en prensa.

[F] d. Ferus "Submanifolds in Euclidean Space with Simple Geodesics" Math. Ann. 260 (1982), 57-62.

[F1] D. Ferus "Symmetric submanifolds of Euclidean space" M A(1 A(198(198(19881-981-93.-93.

[St] W. Strübing "Symmetric submanifolds of Riemannian Manifolds"

Math. Ann. 245, (1979)

Fa.M.A.F.
Universidad Nacional de Córdoba
Valparaiso y Martinez
Ciudad Universitaria
5000 Córdoba, Argentina.