REPRESENTACION POR HACES DE ESTRUCTURAS RETICULADAS

Diego J. Vaggione

Sea A un álgebra (es decir un modelo de un lenguaje sin símbolos de relación). Un **sistema de congruencias** será un conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1(\theta_1) \\ x &\equiv x_2(\theta_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv x_n(\theta_n) \end{aligned}$$

donde $\theta_1,\theta_2,\ldots\ldots,\theta_n \in \mathrm{Con}(A)$, $x_1,\ldots.,x_n \in A$ y además la siguiente condición (obviamente necesaria para que el sistema tenga una solución x en A) se cumple:

$$(x_k,x_l) \in \theta_k \vee \theta_l \quad \forall\ k,l$$

Si $\mathcal{M}$ es una clase de álgebras, entonces $\Sigma(A,\mathcal{M})$ denotará al conjunto $\{\theta \in \mathrm{Con}(A) /\ A/\theta \in I(\mathcal{M})\}$ donde

$$I(\mathcal{M}) = \{B / B \cong C \text{ para algún } C \in \mathcal{M}\}$$

Por un **Espacio de Stone** entenderemos el espacio de representación topológica (de Stone) de un reticulado distributivo con 0 y 1 (ver [1]).

Si $X, Y \subseteq \mathcal{P}(S) = \{T / T \subseteq S\}$, entonces diremos que X **minoriza** a Y cuando $\forall\ T \in Y$ hay un $R \in X$ tal que $R \subseteq T$.

Se dice que un álgebra A satisface el **Teorema Chino del Resto** cuando todo sistema de congruencias de A tenga una solución en A. Es un hecho conocido que un álgebra A satisface el Teorema Chino del Resto si y solo si A es aritmética (o sea sus congruencias permutan y Con (A) es distributivo) (ver por ejemplo [3, pág. 221, ejercicio 68]).

Diremos que un álgebra A satisface el **Teorema Chino del Resto con respecto a una clase** $\Sigma \subseteq \mathrm{Con}(A)$ cuando todo sistema $\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n$ tal que $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ minoriza a Σ tenga una **solución en A.**

Los resultados básicos y la notación sobre haces que usaremos en esta nota están claramente expuestos en [4].

El Teorema 6.7 de [4] (*Ledbetter*) establece que bajo ciertas condiciones sobre A y $\mathcal{M}$, una condición suficiente para que A sea expresable como el álgebra de las secciones globales de cierto haz de álgebras de $\mathcal{M}$ es que A satisfaga el Teorema Chino del Resto . El siguiente Teorema probado en [7, corolario 2 del teorema 6.2] muestra como puede debilitarse la anterior condición a los fines de volverla una condición también necesaria. Recordamos que dados $x, y \in \Pi\{A_i : i \in I\}$, el **ecualizador de x e y** es el conjunto $E(x,y) = \{i \in I / x(i) = y(i)\}$.

TEOREMA 1: Sea A un álgebra tal que Con (A) es distributivo y sea $\mathcal{M}$ una clase universal de álgebras que contiene todas las imágenes homomórficas subdirectamente irreducibles de A. Entonces son equivalentes:

(1) A es **isomorfa** al álgebra de las secciones globales de un haz de algebras de $\mathcal{M}$.

(2) El embedding

$$g\colon A \to g(A) \subseteq \Pi\{A/\theta\colon \theta \in \Sigma(A,\mathcal{M})\}$$
$$x \to g(x) = (x/\theta\colon \theta \in \Sigma(A,\mathcal{M})$$

produce un isomorfismo entre A y g(A), el álgebra de las secciones globales del haz construido a partir del producto subdirecto

$$g(A) \subseteq \Pi\{A/\theta\colon \theta \in \Sigma(A,\mathcal{M})\}$$

donde $\Sigma(A,\mathcal{M})$ lleva la topología generada por

$$\{E(g(x),g(y))\colon x,y \in A\}$$

la cual hace de $\Sigma(A,\mathcal{M})$ un espacio de Stone en el cual los conjuntos de la forma,

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} E(g(x_j^k),g(y_j^k)), \text{ con } x_j^k, y_j^k \in A, n, m \geq 0$$

son precisamente los conjuntos fundamentales de $\Sigma(A,\mathcal{M})$.

(3) A satisface el Teorema Chino del Resto con respecto a $\Sigma(A,\mathcal{M})$.

El teorema anterior se aplica naturalmente tomando **A** en una variedad de estructuras reticuladas y tomando $\mathcal{M}$ como la clase de las álgebras totalmente ordenadas de tal variedad. (*Nótese que el Teorema de Jónsson* (ver [2, pág. 147]), ***nos asegura*** *que en una* ***variedad*** *de estructuras reticuladas las álgebras subdirectamente irreducibles de la subvariedad generada por las álgebras totalmente ordenadas* ***serán también totalmente ordenadas***) Sin embargo veremos que hay otras posibles elecciones interesantes para $\mathcal{M}$ en el caso de estructuras reticuladas.

En lo que sigue usaremos la dualidad *topológica de Priestley* (ver [5] y [6]) para estudiar el Teorema Chino del Resto en los reticulados distributivos. Como es usual, **X(L)** denotará el espacio de Priestley de un reticulado distributivo y acotado L. Si $x \in L$,

$$\sigma(x) = \{p \in X(L) / p \ni x\}$$

El siguiente resultado es bien conocido:

a) $Y \to \theta_Y = \{(x,y) \in L^2 \ / \ \sigma(x) \cap Y = \sigma(y) \cap Y\}$

es un anti-isomorfismo entre el reticulado de los subconjuntos cerrados de X(L) y el reticulado Con(L).

TEOREMA 2: Todo reticulado distributivo L satisface el Teorema Chino del Resto con respecto a $\Sigma(L,\{2,3\})$.

Demostración: Llamemos θ_p a la congruencia

$$\{(x,y) / \ x \in p \Leftrightarrow y \in p\}$$

donde p es un filtro primo. Además supongamos que L es acotado ya que si no lo es, podemos "adjuntarle las cotas que le falten" y el reticulado resultante cumplirá el Teorema 2 si L lo hace (es trabajoso pero fácil chequear tal cosa).

Sea $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_n, x_1, \ldots\ldots, x_n$ un sistema tal que $\{\theta_1, \ldots\ldots \theta_n\}$

minoriza a $\Sigma(L,\{2,3\})$. Además supongamos que $\theta_1, \ldots\ldots \theta_n$ son congruencias compactas. Por (a) hay **clopens** (cerrados y abiertos) $Y_1, \ldots, Y_n$ tales que $\theta_k = \theta_{Y_k}, k = 1, \ldots, n$. Ya que los conjuntos de la forma σ(x) son precisamente los clopens crecientes de X(L), buscar una solución al sistema anterior significa (***topológicamente hablando***) encontrar un clopen creciente U tal que:

$$U \cap Y_k = \sigma(x_k) \cap Y_k, \ k = 1, \ldots, n$$

Pero sea $U = \bigcup_{k=1}^{n} \sigma(x) \cap Y_k$, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} U\cap Y_1 &= \bigcup_{k=1}^{n} \sigma\,(x_k)\cap Y_k\cap Y_1 \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} \sigma\,(x_1)\cap Y_k\cap Y_1 \end{aligned}\right\} \text{ ya que}(x_k,x_1)\in\theta_k\vee\theta_1=\theta_{Y_k\cap Y_1}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \sigma\,(x_1)\cap Y_1\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \sigma\,(x_1)\cap Y_1\cap X(L) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{ya que } \theta_1\cap \ldots\ldots \cap\theta_n=\Delta \text{ puesto} \\ \text{que } \cap\Sigma(L,\{2,3\})=\Delta \\ (\Delta = \text{congruencia diagonal})\end{array}$$

$$= \sigma\,(x_1)\cap Y_1.$$

O sea que ya que U es un clopen, solamente nos faltaría probar que U es creciente. Primero nótese que:

$$\Sigma(L,\{2,3\})=\{\theta_p\cap\theta_q:\ p\leq q, p,q\in X(L)\}$$

Sea $p\in\sigma\,(x_k)\cap Y_k$ y supongamos $q\geq p$. Ya que el sistema minoriza, hay un $1/\ \theta_{Y_1}=\theta_1\subseteq\theta_p\cap\theta_q$, es decir, $p,q\in Y_1$. Ya que

$$\sigma\,(x_k)\cap Y_k\cap Y_1=\sigma\,(x_1)\cap Y_k\cap Y_1\ \left((x_k,x_1)\in\theta_k\vee\theta_1=\theta_{Y_k\cap Y_1}\right)$$

tenemos que $p\in\sigma\,(x_1)$lo cual implica $q\in\sigma\,(x_1)$, con lo cual $q\in U$. Es decir que U es creciente Y $\therefore$ hemos probado que en L todo sistema tal que minoriza y sus congruencias son compactas, tiene solución. Si $\theta_1,\ldots,\theta_n,x_1,\ldots,x_n$ es un sistema que minoriza, entonces hay $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ congruencias compactas tales que

$$\delta_1\subseteq\theta_1,\ldots,\delta_n\subseteq\theta_n \text{ y } (x_k,x_1)\in\delta_k\vee\delta_1\ \ \forall\ k,l,$$

con lo cual el sistema $\theta_1,\ldots,\theta_n,x_1,\ldots,x_n$ tiene solución. □

En general probar que cierto tipo de sistema tiene solución es dificultoso ya que la existencia de la solución puede depender del axioma de elección y $\therefore$ no tendremos un x candidato a ser solución. Notese que en el caso de un reticulado distributivo y acotado, un sistema $\theta_{Y_1},\ldots,\theta_{Y_n},x_1,\ldots,x_n$ tiene solución si $U=\bigcup_{k=1}^{n}\sigma(x_k)\cap Y_k$ es clopen creciente, es decir, en el contexto topológico tenemos un objeto concreto el cual representa la solución y del cual solo debemos probar que cumple cierta propiedad. Es decir, la dualidad de Priestley transforma un contexto de trabajo que es esencialmente no constructivo en uno constructivo.

Sea A un álgebra y sea $\mathcal{M}$ una clase . La **topología de los ecualizadores** de $\Sigma(A,\mathcal{M})$ es la topología generada por los conjuntos $E(g(x),g(y))$, $x,y\in A$, donde

$$g: A\to \Pi\ \{A/\theta:\ \theta\in\Sigma(A,\mathcal{M})\}$$
$$x\to(x/\theta)\quad \theta\in\Sigma(A,\mathcal{M})$$

En general pensaremos a $\Sigma(A,\mathcal{M})$como un espacio topológico con tal topología. Con E denotaremos el conjunto:

$$\left\{\bigcup_{k=1}^{n}\bigcap_{l=1}^{m}E(g(x_k^l),g(y_k^l))\ \ x_k^l,y_k^l\in A,n,m\geq 0\right\}$$

Llamaremos $\mathcal{T}(A,\mathcal{M})$ al haz construido a partir del producto subdirecto $g(A)\subseteq\Pi\{A/\theta:\ \theta\in\Sigma(A,\mathcal{M})\}$ (ver [4,pág. 23]).

Si $\mathcal{T}$ es un haz, con $\Gamma(\mathcal{T})$ denotaremos el álgebra de las secciones globales de $\mathcal{T}$. Combinando Teoremas 1 y 2, obtenemos:

TEOREMA 3:

(a) Si L es un *reticulado distributivo,* entonces

$$L\cong\Gamma(\mathcal{T}(L,\{1,2,3\}))\ \text{y}\,\Sigma(L,\{1,2,3\})$$

es un espacio de Stone cuyos fundamentales son precisamente los elementos de E.

(b) Si L es un *reticulado distributivo acotado,* entonces

$$L \cong \Gamma(\mathcal{T}(L,\{2,3\}) \ \text{y} \ \Sigma(L,\{2,3\})$$

es un espacio de Stone cuyos fundamentales son precisamente los elementos de E. $\square$

Como una aplicación del Teorema 3 daremos el siguiente:

TEOREMA 4: Sea L un reticulado distributivo. Entonces son equivalentes:

(1) $L \cong \Gamma(\mathcal{T})$ para algún haz $\mathcal{T}$con fibras en $\{1,2\}$.

(2) $L \cong \Gamma(\mathcal{T}(L,\{1,2\})$ y $\Sigma(L,\{1,2\})$ y es un espacio de Stone cuyos fundamentales son precisamente los èlementos de E.

(3) Todo sistema de congruencias tal que la intersección de sus congruencias sea la congruencia diagonal, tiene una solución.

(4) L es relativamente complementado.

(5) Todo filtro primo de L es maximal.

(6) Las congruencias de L permutan.

Demostración: (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3) es por Teorema 1. Veamos (1)$\Rightarrow$(4). Sean $x \leq u \leq y$, $x,u,y \in \Gamma(\mathcal{T})$, con $\mathcal{T} = \langle S,\eta,I\rangle$ un haz con fibras en $\{1,2\}$. Definamos:

$$w(i) = \begin{cases} y(i) & \text{si } i \in E(x,u) \\ x(i) & \text{si } i \in E(y,u) \end{cases}$$

Claramente w es contínua ya que E(x,u) $\cup$ E (y,u) = I, lo cual nos dice $w \in \Gamma(\mathcal{T})$. Es trivial verificar que w es el complemento de u en [x,y]. (4)$\Rightarrow$(5) es un simple ejercicio .(5)$\Rightarrow$(1) ya que si se da (5), es obvio que 3 no es imagen homomórfica de L y $\therefore$ se aplica el Teorema 3. Además es un hecho bien conocido que (6) es equivalente a (4). $\square$

Nota: La equivalencia (4)$\Leftrightarrow$ (5) del Teorema 4 es debida a **Nachbin** (ver [1]).

En [8] se prueba el siguiente análogo al Teorema 3, para el caso de las p-álgebras distributivas. Remitimos al lector a [1] por las nociones básicas sobre p-álgebras distributivas. Con D(L) denotaremos al filtro de los elementos densos de una p-álgebra L, y con B_0, B_1, ...,B_n,...... denotaremos las subvariedades propias no triviales de la variedad B_w de todas las p-álgebras distributivas.

TEOREMA 5 : Sea $\mathcal{F}_\omega = \{L \oplus 1\colon\ D(L) \in \{1,2\}\}$ y definamos $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_\omega \cap B_n,\ n \geq 0$.

Entonces

(1) $\mathcal{F}_0 = \{2\}$,

$\mathcal{F}_n = \left\{\left((2^k \oplus 1)\mathrm{x}2^l\right) \oplus 1\colon\ k+l \leq n,\ l \leq n-1\right\} \cup \{2\}, n \geq 1,$

$\mathcal{F}_\omega = \{S \oplus 1\colon\ S \leq (B \oplus 1)\mathrm{x}B',\ B, B' \text{algebras de Boole}\} \cup \{2\}$

(2) Para todo $L \in B_\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq w,\ L \cong \Gamma(\mathcal{T}(L, \mathcal{F}_\alpha))$ y $\Sigma(L, \mathcal{F}_\alpha)$ es un espacio de Stone cuyos fundamentales son precisamente los elementos de E.

(3) Todo elemento de $\mathcal{F}_\omega$ es globalmente indescomponible, es decir si $L \in \mathcal{F}_\omega$ y $L \cong \Gamma(\mathcal{T})$ para algún haz subdirecto $\mathcal{T}$, entonces L es isomorfo a alguna fibra de $\mathcal{T}$. $\square$

Cabe aclarar que un haz $\mathcal{T}$ se dice **subdirecto** cuando es producto subdirecto de las fibras.

El Teorema 5 puede aplicarse para obtener el siguiente resultado el cual es probado en [8].

TEOREMA 6: Sea L una p-álgebra distributiva . Entonces son equivalentes:

(1) $L \cong \Gamma(\mathcal{T})$ para algún haz $\mathcal{T}$ con fibras de la forma $B \oplus 1$, con B un álgebra de Boole.

(2) $L \cong \Gamma(\mathcal{T}(L,\mathcal{M}))$ y $\Sigma(L,\mathcal{M})$ es un espacio de Stone cuyos fundamentales son precisamente los elementos de E, donde $\mathcal{M} = \{B \oplus 1$: B es álgebra de Boole$\}$.

(3) Todo sistema de congruencias en L tal que la intersección de sus congruencias sea la diagonal, tiene una solución.

(4) D(L) es relativamente complementado.

(5) L no tiene cadenas de filtros primos de más de dos elementos.

(6) Las congruencias de L permutan.

(7) L es un álgebra de Heyting de la variedad de álgebras de Heyting generada por la clase $\{B \oplus 1$: B es álgebra de Boole$\}$.

(8) Idem (7) más la condición $\mathrm{Con}(\langle L, \rightarrow \rangle) = \mathrm{Con}(L)$. □

Es fácil de verificar que para el caso de los reticulados distributivos, la clase $\{1,2,3\}$ - $\{1\}$ cumple que sus elementos son globalmente indescomponibles (ver (3) del Teorema 5). Análogamente la clase $\{2,3\}$ tiene tal propiedad cuando consideramos la variedad de los reticulados distributivos acotados. (Recuerdese que toda álgebra trivial es isomorfa al producto subdirecto de la familia vacia de álgebras y $\therefore$ el haz $\mathcal{T} = \langle \varnothing, \eta, \varnothing \rangle$ con $\eta: \varnothing \to \varnothing$ la función cuyo gráfico es $\varnothing$, es tal que toda álgebra trivial es isomorfa al álgebra $\Gamma(\mathcal{T}) = \{\text{sección cuyo gráfico es } \varnothing\}$.)

O sea que para el caso de las variedades de reticulados distributivos, reticulados distributivos acotados y todas las B_α, $0 \leq \alpha \leq \omega$, hemos encontrado una clase $\mathcal{M}$ la cual cumple:

(a) Toda álgebra A de la variedad es tal que $A \cong \Gamma(\mathcal{T}(A, \mathcal{M}))$ y $\Sigma(A, \mathcal{M})$ es un espacio de Stone cuyos fundamentales son precisamente los elementos de E.

(b) $\forall A$ en $\mathcal{M}$-{álgebras triviales}, si $A \cong \Gamma(\mathcal{T})$ con $\mathcal{T}$ un haz subdirecto sobre un espacio de Stone, entonces A es isomorfa a alguna fibra de $\mathcal{T}$.

Es decir la clase $\mathcal{M}$ es una clase mínima con la propiedad de que se pueda expresar toda álgebra de la variedad como el álgebra $\Gamma(\mathcal{T})$, con $\mathcal{T}$ un haz sobre un espacio de Stone, con fibras en $\mathcal{M}$.

Uno podría pensar que lo anterior es un fenómeno particular de las variedades antes mencionadas. A continuación daremos una lista de algunas otras variedades que poseen una clase $\mathcal{M}$ con las propiedades (a), (b).

Algebras de Boole con $\mathcal{M} = \{2\}$.

Algebras de Heyting con $\mathcal{M}$ ={L / 1 es join irreducible}

f- Anillos con $\mathcal{M}$ = {f - anillos totalmente ordenados}.

Vector groups con $\mathcal{M}$ ={ Vector groups totalmente ordenados}

Algebras de Wajsverg con $\mathcal{M}$ = {A: A es totalmente ordenada}

Variedades con discriminador con $\mathcal{M}$ = {álgebras simples}.

La diferencia entre los casos desarrollados en este trabajo y los listados recien es que estos últimos tienen la característica en común de que las variedades en cuestión son de congruencias permutables, lo cual *nos garantiza trivialmente* que se cumple el Teorema Chino del Resto en toda álgebra de la variedad. Además nótese que en todos estos casos la clase $\mathcal{M}$ resulta ser la clase de los finitamente subdirectamente irreducibles.

Los dos siguientes problemas están claramente emparentados con los casos desarrollados en este trabajo:

PROBLEMA 1: Encontrar una clase $\mathcal{M}$ que cumpla (a) y (b) para la variedad de las álgebras de De Morgan.

PROBLEMA 2: Idem problema 1 para la variedad de las p-álgebras dobles distributivas.

Como se puede notar, en este trabajo se han presentado dos tipos de aplicaciones del Teorema 1, una la cual consiste en encontrar una clase $\mathcal{M}$ que cumpla (a) y (b), y otra que consiste en fijar una clase $\mathcal{M}$ (que contenga los subdirectamente irreducibles de la variedad en cuestión) y estudiar que álgebras son representables por un haz con fibras en $\mathcal{M}$ (Teoremas 4 y 6). Ambos problemas son interesantes. Nótese que el primero puede ser visto como un análogo al Birkhoff's Subdirect Representation Theorem el cual de más información que este último (por ejemplo como se ve en la prueba del Teorema 4, de la representación de un reticulado distributivo L, $L \mapsto \Pi\{L/\theta\colon \theta \in \Sigma(L,\{1,2,3\})\}$ podemos obtener rápidamente el Teorema de Nachbin (*pensandola como un haz*) , cosa que en principio no parece suceder con la representación de Birkhoff, $L \mapsto \Pi\{L/\theta\colon L/\theta \cong 2\}$.

Referencias:

[1] R. BALBES and P. DWINGER, Distributive Lattices, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.

[2] S.BURRIS and H.P. SANKAPPANAVAR, A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag New York, 1981.

[3] G. GRATZER, Universal Algebra, Van Nostrand, Princeton, 1968.

[4] P.H. KRAUSS and D.M. CLARK, Global subdirect Products, Amer.Math. Soc. Mem. 210 (1979).

[5] H.PRIESTLEY, Representation of Distributive Lattices by means of Ordered Stone Spaces, Bull. London Math. Sòc.,2 (1970),186-190.

[6] ,Ordered Sets an Quality for Distributive Lattices, Annals of Discrete Math. 23 (1984) 39-60.

[7] D.J. VAGGIONE, Sheaf Representation and Chinese Remainder Theorems, Algebra Universalis 29 (1992), 232-272

[8] ,A Sheaf Representation for Distributive p-álgebras, en referato.

Facultad de Matemática, Astronomia y Física (FaMAF)
Universidad Nacional de Córdoba
Valparaiso y R. Martínez - Ciudad Universitaria
5000 - Córdoba - ARGENTINA