ACTAS DEL XVI CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2021)
2023, Páginas 3–41

# UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

ADRIÁN ANDRADA

RESUMEN. Estas notas fueron escritas para el curso del mismo título en el XVI Congreso Dr. Antonio Monteiro, llevado a cabo de manera virtual en junio de 2021. Hemos incluido las nociones básicas de la geometría simpléctica, y están dirigidas a estudiantes avanzados de Licenciatura en Matemática o estudiantes de Doctorado en Matemática.

## ÍNDICE



## 1. INTRODUCCIÓN

La geometría simpléctica surgió como la geometría de la mecánica clásica, pero actualmente se encuentra en el centro de una fecunda interacción de diversas áreas de la matemática, como por ejemplo geometría riemanniana, compleja, algebraica o de contacto, teoría de Lie, sistemas dinámicos, análisis, combinatoria, entre otras.

Veamos un poco de sus orígenes. Consideremos un sistema mecánico formado por $k$ partículas moviéndose en $\mathbb{R}^3$ sujetas a la acción de ciertas fuerzas. Sea $x_i \in \mathbb{R}^3$ el vector posición de la $i$-ésima partícula. Entonces todas las posibles posiciones del sistema están descriptas por $k$-uplas $(x_1,\dots,x_k) \in (\mathbb{R}^3)^k$. El espacio $(\mathbb{R}^3)^k$ se denomina el espacio de configuraciones. La evolución en el tiempo del sistema está dada por una curva $(x_1(t),\dots,x_k(t)) \in (\mathbb{R}^3)^k$ y se rige por la segunda ley de Newton:

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = F_i(x_1,\dots,x_k,x_1',\dots,x_k',t),$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53D05; Secondary 70H05, 53D17, 57S25.

donde $F_i$ es la fuerza que actúa en la $i$-ésima partícula (que depende de las posiciones y velocidades de todas las partículas y del tiempo), $x_i' = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$ y $m_i$ es la masa de la $i$-ésima partícula. Por simplicidad, de ahora en más asumiremos $m_i = 1$ para todo $i$.

Renombremos las variables. Si $x_i = (q_{3i-2}, q_{3i-2}, q_{3i})$ entonces el espacio de configuraciones es $\mathbb{R}^n$, con $n = 3k$, y las ecuaciones de movimiento quedan

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_\alpha}{\mathrm{d}t^2} = F_\alpha(q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n', t), \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$

Supongamos ahora que las fuerzas no dependen del tiempo y que son conservativas, es decir, existe una función $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $F_\alpha(q_1, \ldots, q_n, q_1', \ldots, q_n', t) = F_\alpha(q_1, \ldots, q_n) = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}(q_1, \ldots, q_n)$ para todo $\alpha$. Las ecuaciones de movimiento ahora quedan

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}(q_1, \ldots, q_n), \quad 1 \leq \alpha \leq n. \tag{1}$$

Como es usual, transformamos el sistema de segundo orden (1) en un sistema de primer orden, duplicando las variables:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t} = v_\alpha, \\ \frac{\mathrm{d}v_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \end{cases} \qquad 1 \leq \alpha \leq n.$$

Introducimos ahora la función $H(q, v) = \frac{1}{2}\sum_\alpha v_\alpha^2 + V(q)$, en $\mathbb{R}^{2n}$, y así obtenemos

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\mathrm{d}v_\alpha}, \\ \frac{\mathrm{d}v_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \end{cases} \qquad 1 \leq \alpha \leq n. \tag{2}$$

Entonces la evolución del sistema queda determinada completamente por la función $H$, que representa la energía total. La "antisimetría" de este sistema se puede interpretar de la siguiente manera. Consideremos en $\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ la siguiente 2-forma:

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i,$$

que claramente es *cerrada* ($\mathrm{d}\omega_0 = 0$) y *no degenerada* ($\omega_0^n = \omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_0$ es nunca nula). Luego, si $z = (q, v) \in \mathbb{R}^{2n}$, la ecuación

$$\omega_0(X_H(z), \cdot) = \mathrm{d}H(z) \tag{3}$$

define un único campo en $\mathbb{R}^{2n}$, y es fácil verificar que $X_H = (\frac{\partial H}{\mathrm{d}v}, -\frac{\partial H}{\partial q})$. El flujo de $X_H$ nos proporciona las soluciones del sistema (2). De $X_H(H) = 0$ se deduce que $H$ es constante en las curvas integrales de $X_H$, lo que se interpreta como la conservación de la energía total.

La reformulación sin coordenadas (3) de las ecuaciones de Hamilton (2) fue posible gracias a la existencia de la 2-forma $\omega_0$. Entonces surge de manera natural la siguiente definición: una *variedad simpléctica* es una variedad diferenciable equipada con una 2-forma cerrada y no degenerada, llamada forma simpléctica.

Hay diferencias notables con las variedades riemannianas. En primer lugar, existen variedades diferenciables que no admiten formas simplécticas; en segundo lugar, las variedades simplécticas no admiten invariantes locales. En estas notas estudiaremos propiedades básicas de estas variedades, haciendo énfasis en los ejemplos.

Estas notas están organizadas de la siguiente manera. En la Sección 2 estudiamos la teoría lineal de espacios vectoriales simplécticos. En la Sección 3 introducimos las variedades simplécticas y damos algunos ejemplos básicos y mostramos algunas obstrucciones para la existencia de formas simplécticas. En las Secciones 4 y 5 discutimos en profundidad ejemplos muy importantes de variedades simplécticas: los fibrados cotangentes y las órbitas de la acción coadjunta, respectivamente. En la Sección 6 estudiamos unas subvariedades destacadas de las variedades simplécticas, las llamadas subvariedades lagrangianas, mientras que en la Sección 7 probamos el Teorema de Darboux que establece que todas las variedades simplécticas de la misma dimensión son localmente isomorfas. En la Sección 8 establecemos el formalismo de los campos hamiltonianos y obtenemos las ecuaciones de Hamilton. En la Sección 9 introducimos una estructura de álgebra de Lie en el espacio de todas las funciones diferenciables a valores reales en la variedad simpléctica, con la que podemos reinterpretar muchos resultados previos; más aún, esta estructura de álgebra de Lie se utiliza para definir una generalización natural de las variedades simplécticas, que son las variedades de Poisson. Por último, en la Sección 10 estudiamos formas simplécticas invariantes a izquierda en grupos de Lie.

Las nociones básicas (y no tan básicas) de la geometría simpléctica pueden encontrarse en los libros [1, 2, 4, 5, 8, 12, 16, 15, 19]. En estos libros se desarrollan temas que no tuvieron lugar en estas notas, por ejemplo: estructuras casi complejas asociadas a las formas simplécticas, los teoremas de Moser, la aplicación momento, la reducción simpléctica, variedades de contacto, y otros.

## 2. Álgebra lineal simpléctica

Sea $V$ un espacio vectorial real de dimensión $m$.

**Definición 2.1.** Una forma simpléctica en $V$ es una forma bilineal antisimétrica y no degenerada, es decir, $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineal tal que:

1. $\omega(v,w) = -\omega(w,v)$ para todo $v,w \in V$;
2. si $\omega(v,w) = 0$ para todo $w \in V$ entonces $v = 0$.

El par $(V,\omega)$ se denomina un espacio vectorial simpléctico.

Si $\omega$ es una forma bilineal arbitraria en $V$ y si $\mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_m\}$ es una base ordenada de $V$, se define la matriz de $\omega$ en la base $\mathscr{B}$ por

$$[\omega]_{\mathscr{B}} = (\omega_{ij})_{1\le i,j\le m} \in \mathrm{M}(m,\mathbb{R}), \qquad \text{con } \omega_{ij} = \omega(e_i,e_j).$$

En la siguiente proposición mostraremos que dada una forma bilineal antisimétrica en $V$ siempre podemos encontrar una base en la que la matriz de la forma tiene un aspecto canónico.

**Proposición 2.2.** *Sea $V$ un espacio vectorial real de dimensión $m$ y sea $\omega$ una forma bilineal antisimétrica en $V$. Entonces existe una base $\mathscr{B} = \{u_1,\dots,u_k,e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n\}$ de $V$ tal que:*

- *$\omega(u_i,v) = 0$ para todo $i$ y para todo $v \in V$;*
- *$\omega(e_i,e_j) = \omega(f_i,f_j) = 0$ para todo $i,j$;*
- *$\omega(e_i,f_j) = \delta_{ij}$ para todo $i,j$.*

*Demostración.* Sea $U := \{u \in V \mid \omega(u,v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$, y se elige una base $\{u_1,\dots, u_k\}$ arbitraria de $U$. Sea ahora $W$ un subespacio complementario a $U$, es decir, $V = U \oplus W$. Sea $e_1 \in W$, $e_1 \neq 0$. Entonces existe $f_1 \in W$ tal que $\omega(e_1,f_1) \neq 0$. Más aún, podemos asumir $\omega(e_1,f_1) = 1$.

Denotamos $W_1 := \operatorname{span}\{e_1,f_1\}$ y $W_1^{\perp} = \{w \in W \mid \omega(w,v) = 0 \text{ para todo } v \in W_1\}$. Notemos que:

1. $W_1 \cap W_1^{\perp} = \{0\}$. En efecto, si $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^{\perp}$ entonces:
$$0 = \omega(v, e_1) = -b, \quad 0 = \omega(v, f_1) = a \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$
2. $W_1 \oplus W_1^{\perp} = W$. En efecto, sea $v \in W$ con $\omega(v, e_1) = c$, $\omega(v, f_1) = d$. Entonces:
$$v = (de_1 - cf_1) + (v - de_1 + cf_1) \in W_1 \oplus W_1^{\perp}.$$

Seguimos de la misma manera: eligiendo $0 \neq e_2 \in W_1^{\perp}$, existe $f_2 \in W_1^{\perp}$ tal que $\omega(e_2, f_2) = 1$. Sea $W_2 = \operatorname{span}\{e_2, f_2\}$ y $W_2^{\perp} = \{w \in W_1^{\perp} \mid \omega(w, v) = 0 \text{ para todo } v \in W_2\}$, y continuamos igual que antes.

Este proceso termina en algún momento pues $\dim V < \infty$. Obtenemos así una descomposición
$$V = U \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n,$$
donde los sumandos son $\omega$-ortogonales y $W_i$ tiene una base $\{e_i, f_i\}$ con $\omega(e_i, f_i) = 1$. □

**Observaciones 2.3.**
1. La base $\mathscr{B}$ no es única.
2. En notación matricial:
$$[\omega]_{\mathscr{B}} = \left( \begin{array}{c|cc} 0_k & & \\ \hline & 0_n & \mathrm{I}_n \\ & -\mathrm{I}_n & 0_n \end{array} \right).$$
3. Si $\mathscr{B}^* = \{u^1, \dots, u^k, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n\}$ es la base dual de $V^*$ entonces la forma $\omega$ se puede escribir como
$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge f^i.$$

Cuando $\omega$ es simpléctica, es decir, no degenerada, tenemos lo siguiente:
- $k = \dim U = 0$, por lo que $\dim V = 2n$ es *par*.
- Existe una base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de $V$ tal que:
$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \qquad \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0.$$
Una base de este estilo (aunque no es única) se denomina base simpléctica. La matriz de $\omega$ en esta base es
$$[\omega] = \left( \begin{array}{c|c} 0_n & \mathrm{I}_n \\ \hline -\mathrm{I}_n & 0_n \end{array} \right).$$
- En términos de la base dual de $V^*$ podemos escribir $\omega = \sum_{i=1}^{n} e^i \wedge f^i$.

**Ejemplo 2.4.** Sea $W$ un espacio vectorial real de dimensión finita arbitrario y sea $V = W \oplus W^*$. En $V$ definimos
$$\omega((v, \alpha), (w, \beta)) = \alpha(w) - \beta(v).$$
Es claro que $\omega$ es bilineal y antisimétrica. Veamos que es no degenerada. En efecto, si $\omega((v, \alpha), (w, \beta)) = 0$ para todo $(w, \beta) \in V$, tenemos que:
- si $\beta = 0$ entonces $\alpha(w) = 0$ para todo $w \in W$, y por lo tanto $\alpha = 0$;
- si $w = 0$ entonces $\beta(v) = 0$ para todo $\beta \in W^*$, y por lo tanto $v = 0$.

Luego, $\omega$ es una forma simpléctica en $V$.

Dada una forma bilineal antisimétrica $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ en el espacio vectorial $V$, podemos definir

$$\omega^\flat : V \to V^*, \quad \omega^\flat(v)(w) = \omega(v,w), \tag{4}$$

para $v, w \in V$. También se define el producto interior (para $q$-formas en general) de la siguiente manera:

$$\iota : V \times \bigwedge^q V^* \to \bigwedge^{q-1} V^*, \quad (v,\theta) \mapsto \iota(v)\theta,$$

donde $\iota(v)\theta(v_1,\dots,v_{q-1}) = \theta(v,v_1,\dots,v_{q-1})$. Por lo tanto: $\omega^\flat(v) = \iota(v)\omega \in V^*$ para todo $v \in V$. Por ejemplo, si $\omega = \sum_{i=1}^n e^i \wedge f^i$ entonces es claro que

$$\omega^\flat(e^j) = f^j, \quad \omega^\flat(f^j) = -e^j, \quad j = 1,\dots,n.$$

La demostración del siguiente lema no es difícil y queda como ejercicio.

**Lema 2.5.** *Sea $V$ un espacio vectorial real de dimensión $2n$, y sea $\omega \in \bigwedge^2 V^*$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\omega$ es no degenerada;*
2. *$\omega^\flat$ es un isomorfismo;*
3. *la $2n$-forma $\omega^n := \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ es no nula.*

**Ejemplo 2.6.** Todo espacio vectorial simpléctico $(V,\omega)$ puede descomponerse como $V = W \oplus W^*$. En efecto, si $\{e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n\}$ es una base simpléctica de $V$, definimos $W = \operatorname{span}\{e_1,\dots,e_n\}$. Entonces $W^*$ es isomorfo, vía $\omega^\flat$, al subespacio generado por $\{f_1,\dots,f_n\}$. Llegamos así a que $V = W \oplus W^*$ y $\omega$ coincide con la forma simpléctica del Ejemplo 2.4.

**Ejercicio 2.7.** Sea $V$ un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ una 2-forma (no necesariamente no degenerada). Si $N := \ker \omega^\flat$, probar que $\omega$ induce una forma simpléctica $\tilde{\omega}$ en $V/N$ definida por: $\tilde{\omega}([x],[y]) = \omega(x,y)$.

**Definición 2.8.** Sean $(V_1,\omega_1)$ y $(V_2,\omega_2)$ dos espacios vectoriales simplécticos. Una transformación lineal $\varphi : V_1 \to V_2$ se dice simpléctica si $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$, es decir, para todo $v,w \in V_1$ vale

$$\omega_2(\varphi(v),\varphi(w)) = \omega_1(v,w).$$

Es claro que si $\varphi$ es simpléctica entonces $\varphi$ es inyectiva. En efecto, si $\varphi(v) = 0$ obtenemos que $\omega_1(v,w) = 0$ para todo $w \in V_1$, y como $\omega_1$ es no degenerada resulta $v = 0$. En consecuencia, si $\dim V_1 = \dim V_2$ entonces $\varphi$ es un isomorfismo. En particular, si $(V_1,\omega_1) = (V_2,\omega_2) = (V,\omega)$, toda transformación lineal simpléctica es un automorfismo de $V$. Se denota:

$$\mathrm{Sp}(V,\omega) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi \text{ es simpléctica}\}.$$

Notar que $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(V)$ con la composición.

La forma simpléctica canónica $\omega_0$ en $\mathbb{R}^{2n}$ está dada por

$$\omega_0((x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n),(x_1',\dots,x_n',y_1',\dots,y_n')) = \sum_i (x_i y_i' - x_i' y_i),$$

o bien,

$$\omega_0 = \sum_i e^i \wedge f^i,$$

donde $\{e^1,\dots,e^n,f^1,\dots,f^n\}$ es la base dual de la base canónica $\{e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n\}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ En este caso, el grupo $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ se denota $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ y es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$.

Notemos que la forma canónica $\omega_0$ en $\mathbb{R}^{2n}$ se puede escribir en términos del producto interno canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^{2n}$ como: $\omega_0(v,w) = \langle v, Jw \rangle$, donde $J$ es la matriz

$$J = \left( \begin{array}{c|c} 0_n & \mathrm{I}_n \\ \hline -\mathrm{I}_n & 0_n \end{array} \right). \tag{5}$$

Notar que $J^2 = -\mathrm{I}_{2n}$ y por lo tanto $J^{-1} = -J$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \omega_0(\varphi(v), \varphi(w)) = \omega_0(v,w) \\ &\Leftrightarrow \langle \varphi(v), J\varphi(w) \rangle = \langle v, Jw \rangle \\ &\Leftrightarrow \varphi^\top J \varphi = J. \end{aligned}$$

Si escribimos a $\varphi$ como una matriz en bloque: $\varphi = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$, entonces se deduce de la condición anterior que

$$\varphi \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad A^\top C = C^\top A, \; B^\top D = D^\top B, \; A^\top D - C^\top B = \mathrm{I}.$$

Se verifica que:

- Si $\varphi \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ entonces $\det \varphi = 1$,
- Si $\varphi \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de $\varphi$ con multiplicidad $k$ entonces $\lambda^{-1}$ también es un autovalor de $\varphi$ con multiplicidad $k$,
- $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ es un grupo de Lie, conexo, no compacto, con $\pi_1(\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$.

El álgebra de Lie de $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ se denota por $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ y se verifica que

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) &= \{M \in \mathrm{M}(2n,\mathbb{R}) \mid \omega_0(Mv,w) = -\omega(v,Mw) \text{ para todo } v,w \in \mathbb{R}^{2n}\} \\ &= \{M \in \mathrm{M}(2n,\mathbb{R}) \mid M^\top J = -JM\} \\ &= \left\{ \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathrm{M}(2n,\mathbb{R}) \mid D = -A^\top, B^\top = B, C^\top = C \right\}. \end{aligned}$$

Se deduce de esta última caracterización de los elementos de $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ que

$$\dim \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}) = \dim \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) = n(2n+1).$$

Usando las bases simplécticas, podemos ver que todos los espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión son simplectomorfos, es decir, existe un isomorfismo simpléctico entre ellos.

**Proposición 2.9.** *Sean $(V_1,\omega_1)$ y $(V_2,\omega_2)$ espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión $2n$. Entonces existe un isomorfismo simpléctico $\varphi : V_1 \to V_2$.*

*Demostración.* Sea $\{e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n\}$ una base simpléctica de $V_1$ y sea $\{e'_1,\dots,e'_n,f'_1,\dots,f'_n\}$ una base simpléctica de $V_2$. Definimos una aplicación lineal $\varphi : V_1 \to V_2$ mediante:

$$\varphi(e_j) = e'_j, \quad \varphi(f_j) = f'_j, \qquad \text{para } j = 1,\dots,n.$$

Entonces $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$, por definición de base simpléctica. □

### 2.1. Subespacios vectoriales de un espacio vectorial simpléctico.

**Definición 2.10.** Si $W$ es un subespacio vectorial de $(V,\omega)$ se define:

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \omega(v,w) = 0 \text{ para todo } w \in W\},$$

que es llamado el espacio $\omega$-ortogonal de $W$.

Recordemos que la forma simpléctica $\omega$ determina un isomorfismo $\omega^{\flat} : W \to W^*$, dado por (4). Entonces es fácil verificar que

$$\omega^{\flat}(W^{\perp}) = W^{\circ} := \{\lambda \in W^* \mid \lambda(w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}.$$

Sabemos de álgebra lineal que $\dim W + \dim W^{\circ} = \dim V$, y en consecuencia obtenemos que

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V.$$

Pero, en general no vale que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (considerar por ejemplo $W$ con $\dim W = 1$). Queda como ejercicio verificar el siguiente resultado.

**Lema 2.11.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *la restricción de $\omega$ a $W$ es no degenerada,*
2. *$W \cap W^{\perp} = \{0\}$,*
3. *$W \oplus W^{\perp} = V$.*

Denominamos *radical* de $W$ al subespacio $\operatorname{rad} W := W \cap W^{\perp}$. Es decir,

$$\operatorname{rad} W = \{w \in W \mid \omega^{\flat}(w)|_W = 0\}.$$

Es claro que $\dim(W \cap W^{\perp}) + \operatorname{rango}(\omega|_{W\times W}) = \dim W$, y de ahí deducimos que

$$\dim(\operatorname{rad} W) = \dim W - \operatorname{rango}(\omega|_{W\times W}).$$

Podemos formar ahora el cociente $W^{red} := W/\operatorname{rad} W$, que es un espacio vectorial simpléctico de dimensión igual a $\operatorname{rango}(\omega|_{W\times W})$, debido al Ejercicio 2.7. Si $U$ es un subespacio de $V$ con $W = \operatorname{rad} W \oplus U$, entonces $(U, \omega|_{U\times U})$ es simpléctico e isomorfo a $W^{red}$; más aún, $U$ es $\omega$-ortogonal a $\operatorname{rad} W$ (pues $\operatorname{rad} W \subseteq W$).

De la misma manera, si $U'$ es un subespacio que cumple $W^{\perp} = \operatorname{rad} W \oplus U'$ entonces $(U', \omega|_{U'\times U'})$ es simpléctico e isomorfo a $(W^{\perp})^{red} = W^{\perp}/\operatorname{rad} W$.

**Definición 2.12.** Sea $(V,\omega)$ un espacio vectorial simpléctico y $W \subseteq V$ un subespacio vectorial.

(i) $W$ se dice simpléctico si $\omega|_{W\times W}$ es no degenerada (o bien, $\operatorname{rad} W = \{0\}$),
(ii) $W$ se dice isotrópico si $\omega|_{W\times W} = 0$ (es decir, $W \subseteq W^{\perp}$, o $\operatorname{rad} W = W$),
(iii) $W$ se dice coisotrópico si $W^{\perp}$ es isotrópico (es decir, $W^{\perp} \subseteq W$, o $\operatorname{rad} W = W^{\perp}$),
(iv) $W$ se dice lagrangiano si es isotrópico y coisotrópico (es decir, $W = W^{\perp} = \operatorname{rad} W$).

**Observación 2.13.** Si $\dim V = 2n$, entonces:

- $W$ isotrópico $\Rightarrow$ $\dim W \leq n$,
- $W$ coisotrópico $\Rightarrow$ $\dim W \geq n$,
- $W$ lagrangiano $\Rightarrow$ $\dim W = n$.

En particular, los subespacios lagrangianos son los subespacios isotrópicos maximales.

Los subespacios lagrangianos son muy importantes en el álgebra vectorial simpléctica. A continuación caracterizaremos todos los subespacios lagrangianos de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Todo subespacio vectorial de dimensión $n$ de $\mathbb{R}^{2n}$ puede ser representado por una matriz $2n \times n$ $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ de rango $n$, tal que los vectores columna de $Z$ forman una base de $W$. Dos matrices $Z$ y $Z'$ describen el mismo subespacio si y sólo si existe $\varphi \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que $Z\varphi = Z'$.

**Proposición 2.14.** *El subespacio $W$ es lagrangiano si y sólo si las matrices $X$ e $Y$ que lo definen satisfacen $X^\top Y = Y^\top X$.*

*Demostración.* Sean $u, u' \in \mathbb{R}^n$ y denotemos $z := Zu = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} u$, $z' := Zu' = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} u'$. Notemos que $Xu, Yu, Xu', Yu'$ están en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que la forma canónica $\omega_0$ en $\mathbb{R}^{2n}$ se puede escribir como $\omega_0(v, w) = \langle v, Jw \rangle$, donde $J$ es la matriz dada en (5). Entonces:

$$\begin{aligned} \omega_0(z, z') &= \omega_0((Xu, Yu), (Xu', Yu')) \\ &= \omega_0((Xu, Yu), (Yu', -Xu')) \\ &= \langle Xu, Yu' \rangle - \langle Yu, Xu' \rangle \\ &= \langle (Y^\top X - X^\top Y)u, u' \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\omega_0|_{W \times W} = 0$ si y sólo si $Y^\top X = X^\top Y$. □

En particular, si $W$ es el gráfico de una transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entonces $W$ puede ser representado por $Z = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n \\ A \end{pmatrix}$. Luego, $W$ es lagrangiano si y sólo si $A$ es simétrica.

## 3. Variedades simplécticas

En esta sección introducimos las formas simplécticas y mostramos varios ejemplos. Mostramos además que existen restricciones (topológicas) para su existencia.

**Definición 3.1.** Sea $M$ una variedad diferenciable. Una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ se dice una *forma simpléctica* si:

1. $\omega$ es cerrada, i.e. $\mathrm{d}\omega = 0$,
2. $\omega_p$ es una 2-forma no degenerada en $T_pM$ para todo $p \in M$.

El par $(M, \omega)$ se denomina una variedad simpléctica.

**Observaciones 3.2.**

1. La dimensión de una variedad simpléctica es par.
2. si $(M^{2n}, \omega)$ es variedad simpléctica, entonces $\omega^n := \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ ($n$ veces) es una forma de volumen en $M$ (es decir, una forma de grado máximo nunca nula). En particular, $M$ es *orientable*.

A continuación veremos unos primeros ejemplos de variedades simplécticas.

**Ejemplos 3.3.**

1. Los ejemplos más sencillos de variedades simplécticas son los espacios euclídeos. Consideremos $\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas globales $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. La 2-forma canónica
$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i$$

es claramente cerrada y no degenerada. Más aún, el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}\bigg|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\bigg|_p \right\}$$

es una base simpléctica de $T_p\mathbb{R}^{2n}$ para todo $p \in \mathbb{R}^{2n}$.

2. Sea $M = \mathbb{C}^n$ el espacio euclídeo complejo con coordenadas complejas $(z_1, \dots, z_n)$. Entonces la 2-forma
$$\omega_0 = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\bar{z}_k$$
es simpléctica. De hecho, coincide con la forma simpléctica del ejemplo anterior, mediante la identificación
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ z_k & \mapsto & x_k + iy_k \end{array}.$$
3. Sea $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. Entonces podemos identificar, para cada $p \in S^2$,
$$T_pS^2 \equiv \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v\rangle = 0\},$$
donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Se puede definir una forma simpléctica standard $\omega$ en $S^2$ de la siguiente manera: para $p \in S^2$ y $u, v \in T_pS^2$,
$$\omega_p(u, v) := \langle p, u \times v\rangle.$$
La 2-forma $\omega$ es claramente cerrada pues es de grado máximo. Además es no degenerada pues para todo $u \in T_pS^2$, $u \neq 0$, tenemos que
$$\omega_p(u, u \times p) = \langle p, u \times (u \times p)\rangle = \langle p, -p\rangle = -1 \neq 0.$$
Notar que esta construcción no se puede generalizar a $S^{2n}$ para $n > 1$. ¿Habrá otras esferas que admitan estructuras simplécticas? (*Spoiler alert*: no...).
4. El ejemplo anterior sí se puede extender a otras superficies distintas de la 2-esfera. Sea $S$ una superficie orientada en $\mathbb{R}^3$ y sea $N$ un campo diferenciable normal y unitario en $S$. Dados $p \in S$ y $u, v \in T_pS$, definimos una 2-forma $\omega$ por:
$$\omega_p(u, v) := \langle N_p, u \times v\rangle.$$
Es fácil verificar que $\omega$ es simpléctica.
5. Si $(M_1, \omega_1)$ y $(M_2, \omega_2)$ son variedades simplécticas, entonces $M_1 \times M_2$ admite una estructura simpléctica natural $\omega_1 \oplus \omega_2$, llamada la estructura simpléctica producto, definida por:
$$\omega_1 \oplus \omega_2 = \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2,$$
donde $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_i$ es la proyección para $i = 1, 2$. Más aún, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces $\lambda_1\pi_1^*\omega_1 + \lambda_2\pi_2^*\omega_2$ es una forma simpléctica en $M_1 \times M_2$.
6. Una estructura casi compleja en una variedad diferenciable $M$ es un tensor $J : TM \to TM$ que satisface $J^2 = -\mathrm{Id}$, y $(M, J)$ se denomina una variedad casi compleja. Una métrica riemanniana $g$ en $M$ se dice compatible con $J$ si $J$ es ortogonal con respecto a $g$, es decir, $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para todos los campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Como $J^2 = -\mathrm{Id}$, esta condición resulta equivalente a que $J$ sea antisimétrica con respecto a $g$: $g(JX, Y) = -g(X, JY)$. En este caso, el triple $(M, J, g)$ se denomina una variedad casi hermitiana.

   Podemos definir ahora una 2-forma $\omega$ en $M$ mediante: $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$, para $X, Y$ campos en $M$. Cuando se cumple que $\mathrm{d}\omega = 0$, el triple $(M, J, g)$ se denomina una variedad *casi Kähler*. Entonces $\omega$ resulta ser una forma simpléctica en $M$, pues al ser $J$ un isomorfismo en cada espacio tangente, $\omega$ resulta no degenerada.

Si $\omega$ satisface la condición más fuerte $\nabla^g \omega = 0$, donde $\nabla^g$ denota la conexión de Levi-Civita asociada a $g$, entonces $(M, J, g)$ se llama una variedad *Kähler*. En este caso $J$ induce en $M$ una estructura de variedad compleja. Las variedades Kähler son las variedades complejas más importantes, y poseen propiedades topológicas muy interesantes cuando son compactas. Un ejemplo de variedad Kähler es el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ con la métrica de Fubini-Study. Recordemos que $\mathbb{C}P^n$ se define como el espacio cociente $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por: $z, w \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, $z \sim w \Leftrightarrow z = \lambda z$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo.

**Definición 3.4.** Si $(M_1, \omega_1)$ y $(M_2, \omega_2)$ son variedades simplécticas, una función diferenciable $f : M_1 \to M_2$ se dice una *aplicación simpléctica* si $f^*\omega_2 = \omega_1$. Si además $f$ es un difeomorfismo, se dice que $f$ es un *simplectomorfismo*. Se denota por $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ al grupo de todos los simplectomorfismos $(M, \omega) \to (M, \omega)$.

**Observación 3.5.** Dada una variedad simpléctica $(M^{2n}, \omega)$ tenemos naturalmente asociada una forma de volumen, dada por $\omega^n$. Luego, el volumen de un subconjunto (abierto) $U$ de $M$ está dado por $\mathrm{vol}(U) = c_n \int_U \omega^n$ para cierta constante $c_n > 0$. Si $\varphi : M \to M$ es un simplectomorfismo, entonces $\varphi^*\omega^n = \omega^n$, y en consecuencia $\varphi$ preserva volumen.

Veremos a continuación que existen variedades de dimensión par, orientables, que no admiten estructuras simplécticas. Podremos hacer esto viendo una propiedad de las variedades simplécticas compactas que involucra a su cohomología de de Rham. Recordemos que el $k$-ésimo grupo de cohomología de de Rham de una variedad $M$ se define por

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))}{\mathrm{Im}(\mathrm{d} : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))} = \frac{\{k\text{-formas cerradas}\}}{\{k\text{-formas exactas}\}}.$$

Es claro que $H^k_{dR}(M) = 0$ si $k > \dim M$, y se sabe que los espacios vectoriales $H^k_{dR}(M)$, $k = 0, \ldots, \dim M$, tienen dimensión finita si $M$ es compacta. Los números definidos por $b_k(M) = \dim H^k_{dR}(M)$ se denominan los números de Betti de $M$. Por el Teorema de de Rham, los espacios $H^k_{dR}(M)$ (y los números de Betti) son invariantes topológicos de $M$.

**Proposición 3.6.** *Sea $(M^{2n}, \omega)$ una variedad simpléctica compacta. Entonces, para $k = 1, \ldots, n$, la clase $[\omega^k] \in H^{2k}_{dR}(M)$ es no nula, donde $\omega^k = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ ($k$ veces). Es decir, $\omega^k$ es una $2k$-forma cerrada pero no exacta.*

*Demostración.* En primer lugar, notemos que $\mathrm{d}\omega = 0$ implica que $\mathrm{d}\omega^k = 0$, por lo que está bien definida la clase $[\omega^k] \in H^{2k}_{dR}(M)$. Ahora queremos ver que $[\omega^k] \neq 0$.

Supongamos que $[\omega^k] = 0$ para algún $k$, es decir, $\omega^k = \mathrm{d}\alpha$ para alguna $\alpha \in \Omega^{2k-1}(M)$. Entonces podemos escribir a la forma de volumen $\omega^n$ como

$$\begin{aligned} \omega^n &= \omega^k \wedge \omega^{n-k} \\ &= \mathrm{d}\alpha \wedge \omega^{n-k} \\ &= \mathrm{d}(\alpha \wedge \omega^{n-k}) \qquad (\text{pues } \mathrm{d}\omega^{n-k} = 0). \end{aligned}$$

Como estamos en una variedad compacta, podemos integrar la forma de volumen y obtenemos

$$0 \neq \int_M \omega^n = \int_M \mathrm{d}(\alpha \wedge \omega^{n-k}) = 0,$$

donde la última igualdad se obtiene usando el Teorema de Stokes. Este absurdo nos dice que $[\omega^k] \neq 0$ para todo $k$. $\square$

**Corolario 3.7.** *La esfera $S^{2n}$ admite estructuras simplécticas si y sólo si $n = 1$.*

*Demostración.* Ya vimos que $S^2$ admite formas simplécticas. Para terminar la demostración basta recordar que $H^2_{dR}(S^{2n}) = 0$ si $n > 1$, que es un hecho standard de la topología algebraica. $\square$

## 4. Ejemplo importante: el fibrado cotangente

Sea $X$ una variedad diferenciable de dimensión $n$ y sea $M = T^*X$ su fibrado cotangente, es decir, $M := \sqcup_{x\in X} T^*_x X$ (unión disjunta). Denotaremos a los elementos de $T^*X$ (en un abuso de notación) por $(x,\xi)$, donde $\xi \in T^*_x X$. Además, se define la proyección canónica $\pi : T^*X \to X$ por $\pi(x,\xi) = x$.

Sea $(U, \varphi = (x_1,\dots,x_n))$ un entorno coordenado en $X$, por lo que $\{(\mathrm{d}x_1)_x,\dots,(\mathrm{d}x_n)_x\}$ forma una base de $T^*_x X$ para todo $x \in U$. Luego, si $\xi \in T^*_x X$, entonces

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (\mathrm{d}x_i)_x \qquad \text{para algunos } \xi_i \in \mathbb{R}.$$

Podemos así definir una función biyectiva

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}, \quad (x,\xi) \mapsto (x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n).$$

Usaremos los pares $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ para definir una estructura diferenciable en $T^*X$. En primer lugar, consideramos en $T^*X$ la topología que tiene como base a

$$\mathscr{B} = \{\tilde{\varphi}^{-1}(W) \mid (U,\varphi) \text{ es entorno coordenado de } X, W \subseteq \mathbb{R}^{2n} \text{ abierto}\}.$$

Con esta topología, es claro que si $(U,\varphi)$ es un entorno coordenado en $X$ entonces $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $T^*X$ y $\tilde{\varphi}$ es un homeomorfismo, por lo que $T^*X$ resulta un espacio localmente euclídeo. Se puede verificar también que $T^*X$ resulta Hausdorff y $N_2$.

El par $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi} = (x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n))$ es un entorno coordenado de $T^*X$; las coordenadas $(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ son las coordenadas cotangentes asociadas a las coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$ en $U$. Veamos ahora que las funciones de transición son diferenciables: sean $(U, \varphi = (x_1,\dots,x_n))$ y $(U', \varphi = (x'_1,\dots,x'_n))$ dos cartas en $X$ y $x \in U \cap U'$. Si $\xi \in T^*_x X$, entonces

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (\mathrm{d}x_i)_x = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\right) (\mathrm{d}x'_j)_x = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j (\mathrm{d}x'_j)_x,$$

donde

$$\xi'_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\right).$$

Al variar $x$, obtenemos que $\xi'_j$ es una función diferenciable en $U \cap U'$ para todo $j$. Luego, $T^*X$ es una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

**Ejercicio 4.1.** Verificar que la proyección $\pi : T^*M \to M$ es diferenciable.

Sea $(U, (x_1,\dots,x_n))$ un entorno coordenado en $X$ y $(\pi^{-1}(U), (x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n))$ el coordenado cotangente asociado. Definimos una 2-forma $\omega$ en $\pi^{-1}(U)$ por

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}\xi_i.$$

Notar que si $\alpha$ es la 1-forma en $\pi^{-1}(U)$ dada por

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, \mathrm{d}x_i, \tag{6}$$

entonces $\omega = -\,\mathrm{d}\alpha$.

**Proposición 4.2.** *La* 1*-forma* $\alpha$ *está bien definida en* $T^*X$.

*Demostración.* Sean $(\pi^{-1}(U),(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n))$ y $(\pi^{-1}(U'),(x_1',\dots,x_n',\xi_1',\dots,\xi_n'))$ dos entornos coordenados cotangentes con $U\cap U' \neq \emptyset$. Probaremos que las correspondientes 1-formas $\alpha$ y $\alpha'$ definidas según (6) coinciden en su dominio común de definición.

En $\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(U')$ se tiene que

$$\xi_j' = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j'}\right), \qquad \mathrm{d}x_j' = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \sum_j \xi_j' \,\mathrm{d}x_j' \\
&= \sum_j \left(\sum_k \xi_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j'}\right)\right)\left(\sum_i \left(\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\right) \\
&= \sum_i \left(\sum_{j,k} \xi_j \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j'}\right)\left(\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right)\right)\mathrm{d}x_i \\
&= \sum_i \left(\sum_k \xi_k \sum_j \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j'}\right)\left(\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right)\right)\mathrm{d}x_i \\
&= \sum_i \xi_i \,\mathrm{d}x_i \\
&= \alpha,
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad usamos que $\sum_j \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j'}\right)\left(\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right) = \delta_{ik}$. □

En consecuencia, la 2-forma $\omega$ también está bien definida en todo $T^*X$. La 1-forma $\alpha$ se denomina la *forma de Liouville* y $\omega$ la forma simpléctica canónica.

**Observación 4.3.** Notar que la forma simpléctica canónica en un fibrado cotangente es exacta, de donde deducimos que la hipótesis de compacidad es crucial en la Proposición 3.6.

Daremos a continuación una descripción intrínseca de la forma simpléctica canónica en $T^*X$, independiente de sistemas coordenados. Recordemos que la proyección canónica $\pi : T^*X \to X$ dada por $\pi(x,\xi) = x$, $\xi \in T_x^*X$, es una función diferenciable. Definimos, para cada $p = (x,\xi) \in M$,

$$\alpha_p = (\mathrm{d}\pi)_p^*\xi, \quad \text{es decir, } \alpha_p(v) = \xi((\mathrm{d}\pi)_p v), \forall v \in T_pM. \tag{7}$$

Mostraremos ahora que $\alpha$ así definida coincide con la 1-forma de Liouville. Notemos primero que en un entorno coordenado cotangente $(\pi^{-1}(U),(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n))$ vale:

$$(\mathrm{d}\pi)_p \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x, \qquad (\mathrm{d}\pi)_p \left.\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right|_p = 0.$$

Si $\alpha_p = \sum_i A_i \,\mathrm{d}x_i|_p + \sum_i B_i \,\mathrm{d}\xi_i|_p$ para algunos $A_i, B_i \in \mathbb{R}$, entonces

$$A_i = \alpha_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \right) = \xi \left( (\mathrm{d}\pi)_p \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \right) = \xi \left( \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x \right) = \xi_i,$$

$$B_i = \alpha_p \left( \frac{\partial}{\partial \xi_i}\bigg|_p \right) = \xi \left( (\mathrm{d}\pi)_p \frac{\partial}{\partial \xi_i}\bigg|_p \right) = 0.$$

Así obtenemos que $\alpha = \sum_i \xi_i \,\mathrm{d}x_i$, que es la expresión de la forma de Liouville.

*Naturalidad:* Sean $X_1$ y $X_2$ dos variedades diferenciables y $f : X_1 \to X_2$ un difeomorfismo entre ellas. Sean $M_1 = T^*X_1$ y $M_2 = T^*X_2$ equipados con las correspondientes formas $\alpha_1, \omega_1, \alpha_2$ y $\omega_2$. Entonces existe un difeomorfismo natural $\overline{f} : M_1 \to M_2$ que levanta a $f$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & M_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ X_1 \arrow[r, "f"'] & X_2 \end{tikzcd} \tag{8}$$

En efecto, podemos definir $\overline{f}$ de la siguiente manera: si $p_1 = (x_1, \xi_1) \in M_1$ con $x_1 \in X_1$ y $\xi_1 \in T^*_{x_1}X_1$, entonces

$$\overline{f}(p_1) = (x_2, \xi_2) \in M_2, \quad \text{donde} \quad x_2 = f(x_1) \in X_2,\ \xi_2 = (\mathrm{d}f^{-1})^*_{x_2}\xi_1. \tag{9}$$

Es claro que el diagrama (8) conmuta y que $\overline{f}$ es biyectiva.

**Ejercicio 4.4.** Probar que $\overline{f}$ es un difeomorfismo. (Como $(\overline{f})^{-1} = \overline{(f^{-1})}$, sólo falta verificar que $\overline{f}$ es diferenciable).

**Proposición 4.5.** *El pullback de $\alpha_2$ por $\overline{f}$ coincide con $\alpha_1$: $\overline{f}^*\alpha_2 = \alpha_1$.*

*Demostración.* Sean $p_1 = (x_1, \xi_1) \in M_1$, $p_2 = \overline{f}(p_1) = (x_2, \xi_2)$ como en (9) y $v \in T_{p_1}M_1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(\overline{f}^*\alpha_2)_{p_1}(v) &= (\alpha_2)_{p_2}((\mathrm{d}\overline{f})_{p_1}v) \\
&= ((\mathrm{d}f^{-1})^*_{x_2}\xi_1)((\mathrm{d}\pi_2)_{p_2}(\mathrm{d}\overline{f})_{p_1}v) \\
&= ((\mathrm{d}f^{-1})^*_{x_2}\xi_1)((\mathrm{d}f)_{x_1}(\mathrm{d}\pi_1)_{p_1}v) \\
&= \xi_1((\mathrm{d}f^{-1})_{x_2}(\mathrm{d}f)_{x_1}(\mathrm{d}\pi_1)_{p_1}v) \\
&= \xi_1((\mathrm{d}\pi_1)_{p_1}v) \\
&= (\alpha_1)_{p_1}(v).
\end{aligned}$$

□

**Corolario 4.6.** *El levantamiento $\overline{f}$ de un difeomorfismo $f : X_1 \to X_2$ es un simplectomorfismo entre $(M_1, \omega_1)$ y $(M_2, \omega_2)$.*

*Demostración.* Ya sabemos que $\overline{f}$ es un difeomorfismo. Verifiquemos ahora la compatibilidad con las formas simplécticas:

$$\overline{f}^*\omega_2 = -\overline{f}^*(\mathrm{d}\alpha_2) = -\mathrm{d}(\overline{f}^*\alpha_2) = -\mathrm{d}\alpha_1 = \omega_1.$$

Esto significa que $\overline{f}$ es una aplicación simpléctica. □

Si $f : X_1 \to X_2$ y $g : X_2 \to X_3$ son difeomorfismos, entonces $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$. Ahora, si $X$ es una variedad diferenciable y $\mathrm{Diff}(X)$ denota al grupo de todos los difeomorfismos de $X$ con la composición, entonces tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Diff}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Symp}(M,\omega) \\ f & \mapsto & \overline{f} \end{array} \tag{10}$$

es un morfismo de grupos *inyectivo*. Nos preguntamos si podrá ser también *suryectivo*. Veremos a continuación que la respuesta es No.

En efecto, sea $h : X \to \mathbb{R}$ una función diferenciable no constante. Luego, $(\mathrm{d}h)_x \in T_x^*X$ para todo $x \in X$. Definimos ahora $\tau_h : M \to M$ por:

$$\tau_h(x,\xi) = (x, \xi + (\mathrm{d}h)_x).$$

Es fácil verificar que $\tau_h^*(\alpha) = \alpha + \pi^*(\mathrm{d}h)$; por lo tanto $\tau_h^*\omega = \omega$. Entonces $\tau$ es un simplectomorfismo, pero no es de la forma $\overline{f}$ pues $\tau_h$ no preserva la forma de Liouville.

**Observación 4.7.** Se puede probar que un simplectomorfismo $g \in \mathrm{Symp}(M,\omega)$ es de la forma $\overline{f}$ si y sólo si $g^*\alpha = \alpha$).

## 5. Órbitas de la acción coadjunta

En esta sección exhibiremos más ejemplos de variedades simplécticas, esta vez construidos a partir de la acción coadjunta de un grupo de Lie en el espacio dual de su álgebra de Lie. Comenzamos dando unas definiciones útiles.

**Definición 5.1.** Sean $G$ un grupo de Lie y $M$ una variedad diferenciable. Una *acción (a izquierda)* de $G$ en $M$ es una aplicación diferenciable $\lambda : G \times M \to M$ que satisface:

- $\lambda(e,m) = m$ para todo $m \in M$ (donde $e \in G$ es el elemento neutro),
- $\lambda(a \cdot b, m) = \lambda(a, \lambda(b,m))$ para todo $a,b \in G$, $m \in M$.

Si denotamos $\lambda(a,m) = a \cdot m$, entonces estas condiciones quedan:

$$e \cdot m = m, \qquad (a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m).$$

Para cada $a \in G$ fijo, la aplicación $\lambda_a : M \to M$ dada por $\lambda_a(m) = a \cdot m$ es un difeomorfismo de $M$, con inversa $\lambda_{a^{-1}}$. Luego, la acción de $G$ en $M$ da origen a un homomorfismo de grupos $G \to \mathrm{Diff}(M)$, $a \mapsto \lambda_a$.

Algunas nociones relacionadas son las siguientes:

- La acción es *efectiva* si $g \cdot m = m$ para todo $m \in M$ implica $g = e$.
- La acción es *libre* si $g \cdot m = m$ para algún $m \in M$ implica $g = e$.
- La acción es *transitiva* si para $x, y \in M$ arbitrarios existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. En este caso se dice que $M$ es homogénea bajo esta acción.
- Dado $m \in M$, la $G$-órbita de $m$ es: $G \cdot m := \{g \cdot m \mid g \in G\}$.
- Dado $m \in M$, el grupo de isotropía de $m$ es: $G_m := \{g \in G \mid g \cdot m = m\}$. Es fácil verificar que $G_m$ es un subgrupo cerrado de $G$.

**Teorema 5.2.** *Si el grupo de Lie actúa en la variedad diferenciable $M$ a la izquierda, entonces las órbitas $G \cdot m$, con $m \in M$, son subvariedades de $M$. Además, $G \cdot m$ es difeomorfa al espacio homogéneo $G/G_m$ para todo $m \in M$.*

*Demostración.* Daremos sólo un esbozo de la demostración, que sigue de las siguientes observaciones:

1. Como ya notamos antes, el grupo de isotropía $G_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\}$ es un subgrupo cerrado de $G$.
2. El espacio cociente $G/G_m$ admite una única estructura de variedad diferenciable tal que la aplicación cociente $G \to G/G_m$ es una submersión. Además, $G$ actúa en $G/G_m$ transitivamente por multiplicación a izquierda: $g \cdot (hG_m) = (gh)G_m$, $g, h \in G$ (ver [13, Theorem 21.17]).
3. La aplicación diferenciable $G \to M$ dada por $g \mapsto g \cdot m$ pasa al cociente y así se obtiene una aplicación diferenciable $F_m : G/G_m \to M$ que define una biyección entre $G/G_m$ y la órbita $G \cdot m$.
4. La aplicación $F_m$ es equivariante con respecto a las acciones a izquierda de $G$ en $G/G_m$ y en $M$ (es decir, $F_m(g \cdot (hG_m)) = g \cdot F_m(hG_m)$ para todo $g, h \in G$). En particular, $F_m$ tiene rango constante.
5. Como $F_m$ es una aplicación inyectiva de rango constante, resulta que es una inmersión, y entonces su imagen $G \cdot m$ es una subvariedad de $M$.

□

**Observación 5.3.** Cuando $G$ es compacto, las órbitas son subvariedades incrustadas y cerradas de $M$. Por otra parte, en [16, Section 14.1, Example (f)] se encuentra el ejemplo de un grupo no compacto actuando a izquierda en una variedad de modo que existen órbitas que no son subvariedades incrustadas.

Todo grupo de Lie actúa en sí mismo por conjugación:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, a) & \mapsto & \psi_g(a) := gag^{-1}. \end{array}$$

Tenemos así la aplicación $\psi_g : G \to G$ dada por $\psi_g(a) = gag^{-1}$, que resulta ser un difeomorfismo de $G$.

Derivando obtenemos $(\mathrm{d}\psi_g)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, que es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ para cada $g \in G$. Denotando $\mathrm{Ad}_g := (\mathrm{d}\psi_g)_e$, obtenemos así una aplicación $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Esta aplicación es un homomorfismo de grupos de Lie y se denomina la *representación adjunta* de $G$.

**Observación 5.4.** Si $G$ es un subgrupo de matrices, $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, entonces $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y se verifica que $\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

La derivada de $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ en $e$ da origen a la representación adjunta $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se verifica que $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ y por lo tanto $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Consideraremos a continuación la representación *coadjunta* de $G$ en $\mathfrak{g}^*$, que es la representación dual (o contragradiente) de $\mathrm{Ad} : G \to \mathfrak{g}$. Concretamente, se define $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ por:

$$\mathrm{Ad}^*_g(\xi)(x) = \xi(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(x)), \quad g \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*, x \in \mathfrak{g}.$$

Se considera $g^{-1}$ en el miembro de la derecho para asegurar que $\mathrm{Ad}^*$ sea un homomorfismo de grupos. En efecto:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}^*_{gh}(\xi)(x) &= \xi(\mathrm{Ad}_{(gh)^{-1}}(x)) = \xi(\mathrm{Ad}_{h^{-1}g^{-1}}(x)) = \xi(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(x)) \\ &= \mathrm{Ad}^*_h(\xi)(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(x)) = \mathrm{Ad}^*_g \mathrm{Ad}^*_h(\xi)(x). \end{aligned}$$

**Observación 5.5.** Si $\mathfrak{g}$ admite una forma bilineal simétrica no degenerada $\langle\cdot,\cdot,\rangle$ que satisface

$$\langle \mathrm{Ad}_g x, \mathrm{Ad}_g y\rangle = \langle x,y\rangle$$

para todo $g\in G$, $x,y\in\mathfrak{g}$, entonces las representaciones Ad y $\mathrm{Ad}^*$ son equivalentes. En particular, esta condición se cumple para grupos semisimples y grupos compactos.

La derivada de $\mathrm{Ad}^* : G\to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ en $e$ da origen a la representación coadjunta $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se verifica que

$$\mathrm{ad}^*_x(\xi)(y) = -\xi([x,y]), \qquad x,y\in\mathfrak{g},\ \xi\in\mathfrak{g}^*,$$

y además $\mathrm{ad}^*_{[x,y]} = [\mathrm{ad}^*_x, \mathrm{ad}^*_y]$.

Las órbitas $G\cdot\xi$ en $\mathfrak{g}^*$ se denominan *órbitas coadjuntas*. Veremos a continuación que cada una de ellas admite una forma simpléctica natural. Este resultado fue desarrollado por Kirillov, Arnold, Kostant y Souriau a mediados de la década de los '60s.

Sea $\xi\in\mathfrak{g}^*$ fijo y sea $G\cdot\xi$ la órbita correspondiente, con $G_\xi$ el correspondiente grupo de isotropía. La órbita $G\cdot\xi$ admite una estructura de variedad diferenciable heredada del cociente $G/G_\xi$, y con dicha estructura resulta ser una subvariedad de $\mathfrak{g}^*$ (por Teorema 5.2). En consecuencia, podemos identificar $T_x(G\cdot\xi)$ con un subespacio de $\mathfrak{g}^*$ para cada $x\in G\cdot\xi$. Más concretamente, podemos identificar $T_x(G\cdot\xi)$ con $\mathfrak{g}\cdot x$ (via la representación coadjunta $\mathrm{ad}^*$) para todo $x\in G\cdot\xi$.

Si $v,w\in T_x(G\cdot\xi)$ entonces $v=V\cdot x$, $w=W\cdot x$ para ciertos $V,W\in\mathfrak{g}$. Se define una 2-forma $\omega$ en $G\cdot\xi$ por

$$\omega_x(v,w) = x([V,W]).$$

(i) $\omega$ está bien definida: si $v=V'\cdot x$ y $w=W'\cdot x$ con $V',W'\in\mathfrak{g}$ entonces $(V-V')\cdot x=0$, $(W-W')\cdot x=0$. Así tenemos que:

$$\begin{aligned} x([V',W']) &= x([(V'-V)+V,(W'-W)+W]) \\ &= ((V-V')\cdot x)(W'-W) + ((V-V')\cdot x)(W) - ((W-W')\cdot x)(V) + x([V,W]) \\ &= x([V,W]). \end{aligned}$$

(ii) $\omega$ es diferenciable: si $X,Y\in\mathfrak{g}$, sean $X^*,Y^*$ los campos diferenciables en $G\cdot\xi$ dados por $X^*_y = X\cdot y$, $Y^*_y = Y\cdot y$ para todo $y\in G\cdot\xi$. Entonces

$$\omega(X^*,Y^*)(y) = \omega_y(X^*_y,Y^*_y) = y([X,Y]),$$

que es diferenciable como función de $y$.

(iii) $\omega$ es no degenerada: sea $v\in T_x(G\cdot\xi)$ tal que $\omega_x(v,w)=0$ para todo $w\in T_x(G\cdot\xi)$. Si $v=V\cdot x$ y $w=W\cdot x$ con $V,W\in\mathfrak{g}$ entonces $x([V,W])=0$ para todo $W\in\mathfrak{g}$, es decir, $V\cdot x=0$, y esto nos dice que $v=0$.

(iv) $\omega$ es cerrada: basta probar que $\mathrm{d}\omega(X^*,Y^*,Z^*)=0$ para $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ arbitrarios. Recordemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X^*,Y^*,Z^*) = {} & X^*\omega(Y^*,Z^*) + Y^*\omega(Z^*,X^*) + Z^*\omega(X^*,Y^*) \\ & - \omega([X^*,Y^*],Z^*) - \omega([Y^*,Z^*],X^*) - \omega([Z^*,X^*],Y^*). \end{aligned}$$

Ahora, si $f\in\mathscr{C}^\infty(G\cdot\xi)$ entonces

$$X^*_y f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 f(\exp(tX)\cdot y), \qquad X\in\mathfrak{g},\ y\in G\cdot\xi.$$

Luego, para $f = \omega(Y^*, Z^*)$,

$$
\begin{aligned}
X_y^* \omega(Y^*, Z^*) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 \omega_{\exp(tX)\cdot y}(Y^*_{\exp(tX)\cdot y}, Z^*_{\exp(tX)\cdot y}) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 (\exp(tX)\cdot y)([Y,Z]) \\
&= (X\cdot y)([Y,Z]) \\
&= -y([X,[Y,Z]]).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, aceptaremos sin demostración que $[X^*, Y^*] = -[X,Y]^*$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}\omega)_y(X_y^*, Y_y^*, Z_y^*) &= -y([X,[Y,Z]]) - y([Y,[Z,X]]) - y([Z,[X,Y]]) \\
&\quad + y([[X,Y],Z]) + y([[Y,Z],X]) + y([[Z,X],Y]) \\
&= 0 \qquad \text{(por la identidad de Jacobi).}
\end{aligned}
$$

Así concluye la verificación de que $\omega$ es una forma simpléctica en $G\cdot\xi$. En particular, todas las órbitas coadjuntas tienen dimensión par.

**Ejemplos 5.6.**

1. Sea $G := \mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid AA^\top = A^\top A = \mathrm{I}_n\}$, que tiene como álgebra de Lie a $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid A^\top = -A\}$. Existe un producto interno $\mathrm{O}(n)$-invariante en $\mathfrak{g}$, dado por $\langle x,y\rangle = -\operatorname{tr}(x\cdot y)$, $x,y\in\mathfrak{g}$. De aquí se deduce que las representaciones $(\mathrm{Ad},\mathfrak{g})$ y $(\mathrm{Ad}^*,\mathfrak{g}^*)$ de $G$ son equivalentes, por lo que podemos considerar las órbitas adjuntas en vez de las coadjuntas. Recordemos que como $G$ es un grupo de matrices vale que $\mathrm{Ad}(g)(\xi) = g\xi g^{-1}$, donde $g\in\mathrm{O}(n), \xi\in\mathfrak{so}(n)$.

   Si $\xi = E_{21} - E_{12} \in \mathfrak{g}$, entonces que es fácil verificar que la isotropía $G_\xi$ está dada por
   $$G_\xi = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \mid a \in \mathrm{SO}(2), A \in \mathrm{O}(n-2) \right\},$$
   donde $\mathrm{SO}(n) = \{A\in\mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$. Entonces la órbita $G\cdot\xi$ es difeomorfa al espacio homogéneo $\mathrm{O}(n)/(\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{O}(n-2))$, y en consecuencia, este espacio homogéneo admite una estructura simpléctica. Este espacio puede identificarse con el espacio de planos orientados en $\mathbb{R}^n$.
2. Sea ahora $G := \mathrm{U}(n) = \{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid AA^* = A^*A = \mathrm{I}_n\}$, que tiene como álgebra de Lie a $\mathfrak{g} := \mathfrak{u}(n) = \{A\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid A^* = -A\}$. En este caso el producto interno $\mathrm{U}(n)$-invariante dado por $\langle x,y\rangle = -\operatorname{Re}(\operatorname{tr}(x\cdot y))$ nos permite verificar que las representaciones $(\mathrm{Ad},\mathfrak{g})$ y $(\mathrm{Ad}^*,\mathfrak{g}^*)$ de $G$ son equivalentes. Entonces nuevamente podemos considerar las órbitas adjuntas en vez de la coadjuntas.

   Para $0 < p < n$, sea $\xi_p = \begin{pmatrix} i\mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -i\mathrm{I}_{n-p}\end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$. El grupo de isotropía correspondiente $G_{\xi_p}$ está dado por
   $$G_{\xi_p} = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \mid A \in \mathrm{U}(p), B \in \mathrm{U}(n-p) \right\},$$
   es decir, $G_{\xi_p} \cong \mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(n-p)$. Luego, la órbita $G\cdot\xi_p$, que es difeomorfa al espacio homogéneo $\mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(n-p))$, admite una forma simpléctica. Este espacio se identifica con $\mathrm{Gr}_p(\mathbb{C}^n)$, la grassmanniana de subespacios complejos de dimensión $p$ en $\mathbb{C}^n$.

En particular, cuando $p=1$, obtenemos el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^{n-1}$. Se puede verificar que la forma simpléctica en $\mathbb{C}P^{n-1}$ obtenida como una órbita coadjunta coincide con la forma de Kähler correspondiente a la métrica de Fubini-Study.

**Ejercicio 5.7.** Describir todas las órbitas de la acción coadjunta para $G=\mathrm{O}(3)$.

## 6. Subvariedades lagrangianas

Como en el caso de subespacios de un espacio vectorial simpléctico, en las variedades simplécticas tenemos subvariedades distinguidas. Las más importantes de ellas son las subvariedades lagrangianas que definimos a continuación.

**Definición 6.1.** Sea $(M,\omega)$ una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Una subvariedad $L$ de $M$ se dice una *subvariedad lagrangiana* de $M$ si $T_xL$ es un subespacio lagrangiano de $(T_xM,\omega_x)$ para todo $x\in L$. Equivalentemente, si $j:L\hookrightarrow M$ denota la inclusión, $j^*\omega=0$ y $\dim L=n$.

Por lo general, se asume que las subvariedades lagrangianas están incrustadas, es decir, $j:L\to M$ es un embedding.

Veamos algunos ejemplos de subvariedades lagrangianas.

**Ejemplos 6.2.**

1. En $\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ y la forma simpléctica canónica $\omega_0=\sum_i \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}y_i$, las siguientes subvariedades son lagrangianas:
   - $L_1=\{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\mid y_1=\cdots=y_n=0\}$,
   - $L_2=\{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\mid x_1=\cdots=x_n=0\}$,
   - $\Delta=\{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\mid x_i=y_i \text{ para todo } i\}$.
2. Sea $X$ una variedad diferenciable y sea $T^*X$ su fibrado cotangente, con la forma simpléctica definida en § 4. La sección nula de $T^*X$ es
$$X_0=\{(x,\xi)\in T^*X\mid \xi=0 \text{ en } T_x^*X\}.$$
$X_0$ es una subvariedad incrustada de $T^*X$ cuya intersección con un entorno coordenado cotangente $(\pi^{-1}(U),(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n))$ está dada por las ecuaciones $\xi_1=\cdots=\xi_n=0$. Claramente, la 1-forma de Liouville $\alpha=\sum_i \xi_i\,\mathrm{d}x_i$ se anula en $X_0\cap\pi^{-1}(U)$. En particular, si $j:X_0\hookrightarrow T^*X$ es la inclusión, tenemos que $j^*\alpha=0$. Como la forma simpléctica $\omega$ en $T^*X$ está dada por $\omega=-\mathrm{d}\alpha$, resulta que
$$j^*\omega=-j^*(\mathrm{d}\alpha)=-\mathrm{d}(j^*\alpha)=0.$$
En consecuencia, $X_0$ es lagrangiana.
3. Otras subvariedades lagrangianas de $T^*X$ están dadas por las fibras sobre cada punto, es decir, por los espacios cotangentes en cada punto, $\pi^{-1}(x)=T_x^*X\hookrightarrow T^*X$. Si $x\in X$ es claro que $T_x^*X$ es una subvariedad incrustada de $T^*X$; más aún, si $(U,(x_1,\dots,x_n))$ es un entorno coordenado alrededor de $x$, entonces $T_x^*X$ se describe en el entorno coordenado $(\pi^{-1}(U),(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n))$ por las ecuaciones $x_i=c_i$, con $c_i$ una constante real para todo $i$. Entonces es inmediato observar que $\alpha\equiv 0$ en $T_x^*X$, por lo que, como en el ejemplo anterior, $T_x^*X$ resulta ser una subvariedad lagrangiana de $T^*X$.

4. Sea $(M,\omega)$ una variedad simpléctica y $f : M \to M$ un simplectomorfismo. Entonces el gráfico $\Gamma_f$ de $f$, dado por
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in M\},$$
es una subvariedad lagrangiana de $(M \times M, \omega \oplus (-\omega))$. En efecto, si $j : M \hookrightarrow M \times M$ es la inclusión, entonces
$$j^*(\omega \oplus (-\omega)) = j^*(\pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2) = (\pi_1 \circ j)^*\omega - (\pi_2 \circ j)^*\omega = \omega - f^*\omega = \omega - \omega = 0.$$
Por lo tanto, $\Gamma_f$ es lagrangiana.

Exhibiremos ahora otras subvariedades lagrangianas en fibrados cotangentes, que extienden al ejemplo de la sección nula visto anteriormente.

Sea $\mu$ una 1-forma en la variedad diferenciable $X$. Es sencillo comprobar que
$$X_\mu := \{(x, \mu_x) \in T^*X \mid x \in X\},$$
es una subvariedad incrustada de $T^*X$. ¿Cuándo es $X_\mu$ lagrangiana?

**Proposición 6.3.** *Sea $\mu$ una 1-forma en $X$, y sea $s_\mu : X \to T^*X$ la 1-forma $\mu$ considerada como una función diferenciable, con $X_\mu = imagen(s_\mu)$. Si $\alpha$ denota la 1-forma de Liouville en $T^*X$ entonces $s_\mu^*\alpha = \mu$.*

*Demostración.* Para un $x \in X$ fijo, se tiene que $s_\mu(x) = (x, \mu_x)$. Entonces, para $v \in T_xX$,
$$(s_\mu^*\alpha)_x(v) = \alpha_{s_\mu(x)}((\mathrm{d}s_\mu)_x v) = \mu_x((\mathrm{d}\pi)_{s_\mu(x)}(\mathrm{d}s_\mu)_x v) = \mu_x(\mathrm{d}(\pi \circ s_\mu)_x v) = \mu_x(v),$$
donde hemos usado (7) en la segunda igualdad y $\pi \circ s_\mu = \mathrm{id}$ en la cuarta. $\square$

Tenemos así el diagrama
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_\mu} & T^*X \\ & & \uparrow j \\ & & X_\mu \end{array} \tag{11}$$

Como $s_\mu : X \to T^*X$ es un embedding, por el lema de factorización existe un difeomorfismo $\tau : X \to X_\mu$ que hace conmutativo al diagrama (11). Utilizaremos este difeomorfismo para determinar condiciones sobre $\mu$ para que $X_\mu$ es lagrangiana.
$$\begin{aligned} X_\mu \text{ es lagrangiana } &\Leftrightarrow j^*(\mathrm{d}\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tau^*(j^*(\mathrm{d}\alpha)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (j \circ \tau)^*(\mathrm{d}\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow s_\mu^*(\mathrm{d}\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{d}(s_\mu\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{d}\mu = 0, \end{aligned}$$
gracias a la Proposición 6.3. Así hemos probado

**Teorema 6.4.** *La subvariedad $X_\mu$ de $T^*X$ es lagrangiana si y sólo si $\mu$ es cerrada.*

En particular, toda $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$ da origen a una subvariedad lagrangiana de $T^*X$, considerando $\mu = \mathrm{d}f$. Una tal $f$ se denomina función generadora de la subvariedad lagrangiana $X_{\mathrm{d}f}$. Cuando $H^1_{dR}(X) = 0$, toda subvariedad lagrangiana $X_\mu$ admite una función generadora.

Los ejemplos que hemos visto en esta sección nos muestran que podemos identificar a muchos objetos geométricos como subvariedades lagrangianas de alguna variedad simpléctica. Esto llevó a Alan Weinstein a proclamar en [21] que

*"Todo es una subvariedad lagrangiana".*

El siguiente resultado sobre subvariedades lagrangianas compactas se debe a Weinstein [20].

**Teorema 6.5.** *Sea $L$ una subvariedad lagrangiana compacta de una variedad simpléctica $(M,\beta)$. Entonces existen un entorno $\mathscr{U}(L)$ de $L$ en $M$, un entorno $\mathscr{V}(L_0)$ de la sección nula $L_0$ en $T^*L$ y un simplectomorfismo $\Phi : \mathscr{U}(L) \to \mathscr{V}(L_0)$ de modo que*

$$\Phi^*\omega = \beta \quad y \quad \Phi|_L = \mathrm{id},$$

*donde $\omega = -\,\mathrm{d}\alpha$ es la forma simpléctica canónica en $T^*L$.*

## 7. El Teorema de Darboux

El Teorema de Darboux establece que todas las variedades simplécticas de dimensión $2n$ son localmente equivalentes a $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$. La demostración clásica de Darboux emplea inducción en la dimensión, y puede encontrarse en [5]. La demostración que daremos a continuación sigue ideas de Moser y Weinstein, y puede encontrarse en [19].

Primero necesitamos introducir la noción de *campo vectorial dependiente del tiempo* en una variedad diferenciable $M$: es una aplicación diferenciable $X : \Omega \subseteq \mathbb{R}\times M \to TM$, con $\Omega$ abierto en $\mathbb{R}\times M$, tal que $X_t(p) := X(t,p) \in T_pM$ para todo $(t,p)\in\Omega$. Pediremos también que $\{0\}\times M \subset \Omega$.

Notar que para cada $t\in\mathbb{R}$ tal que $\Omega_t := \{p\in M \mid (t,p)\in\Omega\}$ es no vacío, $X_t$ es un campo vectorial usual en el abierto $\Omega_t$ de $M$.

Una *curva integral* del campo vectorial dependiente del tiempo $X$ es una función diferenciable $\alpha : I \to M$ (con $I$ un intervalo abierto en $\mathbb{R}$) tal que para todo $t\in I$, $(t,\alpha(t))\in\Omega$ y $\alpha'(t) = X(t,\alpha(t))$.

Se puede definir, a partir de $X$, un campo vectorial usual $\tilde{X}$ en $\Omega$ como sigue:

$$\tilde{X}(t,p) = (1, X(t,p)), \quad (t,p)\in\Omega,$$

donde se identifica $T_{(t,p)}(\mathbb{R}\times M) \equiv \mathbb{R}\times T_pM$. Si denotamos $\frac{\partial}{\partial t}$ al campo vectorial en $\mathbb{R}\times M$ cuya proyección a $\mathbb{R}$ es el campo constante $= 1$, y cuya proyección a $M$ es el campo nulo, entonces $\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + X$. Si $t\mapsto\alpha(t)$ es una curva integral de $X$ entonces $\mapsto (t,\alpha(t))$ es una curva integral de $\tilde{X}$. Recíprocamente, toda curva integral de $\tilde{X}$ es de la forma $s\mapsto (t_0+s,\alpha(s))$, con $t_0\in\mathbb{R}$ constante, y entonces $t\mapsto\alpha(t-t_0)$ es una curva integral de $X$.

**Teorema 7.1.** *Dado el campo vectorial dependiente del tiempo $X$ en $\Omega$, existe una única aplicación $\tilde{\varphi} : D(X) \to M$, donde $D(X)$ es un abierto en $\mathbb{R}\times\Omega$, tal que, para cada $(t_0,p)\in\Omega$, la curva $t\mapsto\tilde{\varphi}(t,(t_0,p))$ es la curva integral maximal de $X$ que pasa por $(t_0,p)$. La aplicación $\tilde{\varphi}$ se denomina el flujo de $X$.*

A partir de $\tilde{\varphi}$ definimos $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t,(0,p))$. Si $t\in\mathbb{R}$ satisface que $D_t := \{p\in M \mid (t,p)\in D(X)\}$ es no vacío, entonces $\varphi_t : p\mapsto\varphi(t,p)$ es un difeomorfismo entre $D_t(X)$ y su imagen.

Finalmente, mencionamos el siguiente resultado que utilizaremos en la demostración del Teorema de Darboux: si $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ es la familia de difeomorfismos recién definidos y $\{\omega_t\}_{t\in I}$

es una familia diferenciable de $k$-formas en $M$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^*\omega_t) = \varphi_t^*\left(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t + \frac{\mathrm{d}\omega_t}{\mathrm{d}t}\right), \tag{12}$$

donde $\mathscr{L}$ denota la derivada de Lie (ver el Apéndice para la definición de la derivada de Lie de formas y sus propiedades). Una demostración de esta formula se encuentra en [2, Lemma 2.1].

**Teorema 7.2.** *Sea $(M^{2n},\omega)$ una variedad simpléctica. Entonces para todo $p\in M$ existe un entorno coordenado $(U,(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n))$ alrededor de $p$ tal que*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i\wedge \mathrm{d}y_i. \tag{13}$$

*Demostración.* Como el teorema es de carácter local, podemos asumir que $M=\mathbb{R}^{2n}$ y $p=0$. Si $(x_1,\dots,x_{2n})$ son las coordenadas globales usuales de $\mathbb{R}^{2n}$, entonces $\omega=\sum_{i<j} f_{ij}\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$ para ciertas $f_{ij}\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Sea ahora $\omega' := \sum_{i<j} f_{ij}(0)\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$, y definimos

$$\tilde\omega := \omega'-\omega,\quad \omega_t := \omega + t\tilde\omega,\quad t\in[0,1].$$

Notar que $\omega_0=\omega$, $\omega_1=\omega'$, y $\omega_t=\sum_{i<j}(f_{ij}+t(f_{ij}(0)-f_{ij}))\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$. Luego, $\omega_t(0)=\omega(0)$, que es no degenerada. Entonces existe una bola abierta $V$ centrada en 0 tal que $\omega_t(q)$ es no degenerada para todo $q\in V$, $0\le t\le 1$.

Por otro lado, $\mathrm{d}\tilde\omega=0$. Como $V$ es contráctil, existe $\alpha\in\Omega^1(V)$ tal que $\mathrm{d}\alpha=\tilde\omega$. Podemos asumir además que $\alpha(0)=0$.

Definimos $X_t\in\mathfrak{X}(V)$ mediante: $\iota(X_t)\omega_t=-\alpha$ (pues $\omega_t$ es no degenerada en $V$). Entonces $X_t$ define un campo vectorial dependiente del tiempo en $V$, donde podemos asumir que $-\varepsilon<t<1+\varepsilon$ para algún $\varepsilon>0$. Achicando $V$ si fuera necesario (y notando que $X_t(0)=0$ para $0\le t\le 1$) podemos asumir que $\varphi_t(q)$ está definido para $0\le t\le 1$, $q\in V$. Usando (12), calculamos:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^*\omega_t) &= \varphi_t^*\left(\mathscr{L}_{X_t}\omega_t+\frac{\mathrm{d}\omega_t}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= \varphi_t^*(\mathrm{d}(\iota(X_t)\omega_t)+\iota(X_t)\,\mathrm{d}\omega_t+\tilde\omega)\quad \text{usando la ecuación de Cartan,}\\ &= \varphi_t^*(-\mathrm{d}\alpha+\tilde\omega)\quad \text{pues } \mathrm{d}\omega_t=0,\\ &=0,\end{aligned}$$

por lo que $\varphi_t^*\omega_t$ es constante es $t$. En particular, $\varphi_1^*\omega_1=\varphi_0^*\omega_0$. Como $\varphi_0^*=\mathrm{Id}$, obtenemos

$$\varphi_1^*\omega'=\omega.$$

Recordando que $\omega'$ tiene coeficientes constantes, el difeomorfismo $\varphi_1$ define una carta con coordenadas $(U,(z_1,\dots,z_{2n}))$ alrededor de 0 tal que

$$\omega|_U=\sum_{i<j} b_{ij}\,\mathrm{d}z_i\wedge\mathrm{d}z_j,\quad b_{ij}\in\mathbb{R}.$$

Sea $B=(b_{ij})_{i,j=1}^n$ la matriz de $\omega(p)$ en la base $\{\frac{\partial}{\partial z_i}|_p\}_{i=1}^n$ para todo $p\in U$. Por álgebra lineal simpléctica, existe una matriz $P$ tal que $P^\top BP=J_0$. La composición $P\circ\varphi$ determina coordenadas $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ en $U$ para las cuales la forma $\omega$ se expresa como en (13). $\square$

El Teorema de Darboux 7.2 admite la siguiente generalización para 2-formas cerradas no necesariamente no degeneradas, pero que tienen rango constante en toda la variedad.

**Teorema 7.3.** *Sea $\omega$ una 2-forma cerrada de rango constante $2n$ en una variedad $M^{2n+k}$, $k\in\mathbb{N}$. Entonces el fibrado nulo*

$$N_\omega = \{(p,v)\in TM \mid \omega_p(v,w)=0 \text{ para todo } w\in T_pM\}$$

*es integrable y tiene rango constante $k$. Más aún, todo $p\in M$ está en un entorno coordenado $(U,(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_k))$ tal que $N_\omega|_U$ está generado por los $\{\frac{\partial}{\partial z_i}\}_{i=1}^k$ y*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i\wedge \mathrm{d}y_i.$$

*Demostración.* Como $\omega$ tiene rango constante $k$, es claro que $N_\omega$ es un subfibrado de $TM$ de rango $k$. Notemos que un campo vectorial $X$ en $M$ es una sección de $N_\omega$ si y sólo si $\imath(X)\omega=0$. En particular, como $\mathrm{d}\omega=0$, por la fórmula de Cartan obtenemos

$$\mathscr{L}_X\omega = \mathrm{d}(\imath(X)\omega)+\imath(X)\mathrm{d}\omega=0.$$

Si $X,Y$ son dos secciones de $N_\omega$ entonces

$$\imath([X,Y])\omega = \mathscr{L}_X(\imath(Y)\omega)-\imath(Y)(\mathscr{L}_X\omega)=0,$$

por lo que $[X,Y]$ es una sección de $N_\omega$. Luego $N_\omega$ es integrable.

Por el Teorema de Frobenius, dado $p\in M$ existe una carta $(U,(z_1,\dots,z_{2n+k}))$ alrededor de $p$ tal que $N_\omega|_U$ está generado por los campos $Z_i=\frac{\partial}{\partial z_i}$, para $i=1,\dots,k$. Como $\imath(Z_i)\omega=0$ y $\mathscr{L}_{Z_i}\omega=0$ para $1\le i\le k$, tenemos que $\omega|_U$ depende exclusivamente de las variables $z_{k+1},\dots,z_{2n+k}$. En particular, $\omega|_U$ puede ser considerada como una 2-forma simpléctica en un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$. El teorema se deduce del Teorema 7.2. ☐

Este teorema puede ser considerado como una generalización del Ejercicio 2.7 al contexto de variedades simplécticas.

**7.1. Invariantes simplécticos.** Por el Teorema de Darboux, en la geometría simpléctica no existen invariantes locales, distintos de la dimensión. Esto muestra un marcado contraste con la geometría riemanniana, donde la curvatura provee tales invariantes locales. Es por eso que McDuff y Salamon en su libro [15] dicen que se debería hablar de *topología* simpléctica en vez de geometría simpléctica.

Hay varias maneras de asociar invariantes globales a variedades simplécticas; muchos de ellos están asociados a los *embeddings* simplécticos. Por lo general, se estudian embeddings simplécticos de la forma $U\to M$, donde $U$ es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y $(M,\omega)$ es una variedad simpléctica de dimensión $2n$. La siguiente definición fue introducida por Gromov en [11], un trabajo esencial sobre embeddings simplécticos.

**Definición 7.4.** Dada una variedad simpléctica $(M,\omega)$ de dimensión $2n$, se define el *radio simpléctico* de $M$, $r(M)$, de la siguiente manera:

$$r(M)=\sup\{r>0 \mid \text{existe un embedding simpléctico } B^{2n}(r)\to M\},$$

donde $B^{2n}(r)$ es la bola abierta unitaria centrada en 0 en $\mathbb{R}^{2n}$.

El radio simpléctico es un invariante simpléctico, y puede ser considerado el equivalente simpléctico del radio de inyectividad en geometría riemanniana.

Un teorema muy importante en geometría simpléctica es el siguiente, que también fue probado por Gromov en [11].

**Teorema 7.5** (Gromov's non-squeezing theorem)**.** *Para los números positivos* $r$, $R$, *sean*

$$B^{2n}(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \mid |x|^2 + |y|^2 < r^2\}$$

*la bola abierta unitaria centrada en* $0$ *en* $\mathbb{R}^{2n}$, *y*

$$Z(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + y_1^2 < R^2\}$$

*un cilindro abierto. Si existe un embedding simpléctico* $\varphi : B^{2n}(r) \to \mathbb{R}^{2n}$ *tal que*

$$\varphi(B^{2n}(r)) \subseteq Z(R), \quad \textit{entonces} \quad r \leq R.$$

¿Cuál es la importancia de este teorema? Es fácil verificar que se puede "meter" una bola de cualquier radio dentro de un cilindro de cualquier radio de manera que se preserve el volumen (basta "apretar" la bola en una dirección adecuada). Por lo tanto, el Teorema 7.5 nos dice que, por más que las aplicaciones simplécticas preservan volumen, es mucho más restrictivo ser una aplicación simpléctica que una aplicación que preserva volumen.

## 8. Campos hamiltonianos

Sea $(M,\omega)$ una variedad simpléctica. Como $\omega$ es no degenerada, existe un isomorfismo entre los fibrados tangentes y cotangentes de $M$:

$$\omega^\flat : TM \to T^*M, \quad v \in T_pM \mapsto \iota(v)\omega_p \in T_p^*M,$$

donde $(\iota(v)\omega_p)(w) = \omega_p(v,w)$. Este isomorfismo da origen a una correspondencia biyectiva

$$\omega^\flat : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M), \quad X \mapsto \iota(X)\omega. \tag{14}$$

Una clase distinguida de campos vectoriales en $(M,\omega)$ es la siguiente:

**Definición 8.1.** Un campo vectorial $X$ en la variedad simpléctica $(M,\omega)$ se dice *simpléctico* si $\mathscr{L}_X\omega = 0$.

Podemos dar una interpretación más precisa de los campos simplécticos mediante el siguiente lema:

**Lema 8.2.** *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *$X$ es simpléctico, i.e., $\mathscr{L}_X\omega = 0$;*
(ii) *$\iota(X)\omega$ es cerrada;*
(iii) *el flujo $\{\varphi_t\}$ de $X$ consiste de aplicaciones simplécticas.*

*Demostración.* (i) $\Leftrightarrow$ (ii): es consecuencia de la fórmula de Cartan para la derivada de Lie:

$$\mathscr{L}_X\omega = \iota(X)\,\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(\iota(X)\omega) = \mathrm{d}(\iota(X)\omega),$$

pues $\mathrm{d}\omega = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): es consecuencia de la definición de la derivada de Lie:

$$(\mathscr{L}_X\omega)_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (\varphi_t^*\omega)_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \omega_p = 0$$

para todo $p \in M$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): queremos probar que $\varphi_t^*\omega = \omega$ para todo $t$. Para un $p \in M$ fijo consideremos la curva diferenciable $c(t) = (\varphi_t^*\omega)_p$ en $\bigwedge^2 T_p^* M$; veremos que $c' \equiv 0$. De $\mathscr{L}_X\omega = 0$ obtenemos que $c'(0) = 0$. Para un $s \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c'(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_s c(t) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_s (\varphi_t^*\omega)_p \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 (\varphi_{s+t}^*\omega)_p \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 \varphi_s^*(\varphi_t^*\omega)_p \\
&= \varphi_s^*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 (\varphi_t^*\omega)_p\right) \\
&= \varphi_s^*(c'(0)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego, $c(t)$ es constante, y así $c(t) = c(0) = \omega_p$ para todo $t$ y para todo $p \in M$, es decir, $\varphi_t^*\omega = \omega$. Así hemos probado que $\varphi_t$ es una aplicación simpléctica. $\square$

Es claro que el conjunto de campos simplécticos en $(M,\omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(M)$. En el siguiente resultado mostraremos que, más aún, es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

**Proposición 8.3.** *Si $X,Y$ son campos simplécticos en $(M,\omega)$ entonces $[X,Y]$ también lo es, y $\imath([X,Y])\omega = \mathrm{d}H$, donde $H$ es la función diferenciable en $M$ dada por $H = -\omega(X,Y)$.*

*Demostración.* Sean $X$ e $Y$ campos vectoriales simplécticos, entonces:

$$\begin{aligned}
\imath([X,Y])\omega &= [\mathscr{L}_X, \imath(Y)]\omega \\
&= \mathscr{L}_X(\imath(Y)\omega) - \imath(Y)(\mathscr{L}_X\omega) \\
&= \mathscr{L}_X(\imath(Y)\omega) \quad \text{pues } X \text{ es simpléctico} \\
&= \mathrm{d}(\imath(X)\imath(Y)\omega) + \imath(X)\mathrm{d}(\imath(Y)\omega) \quad \text{por la ecuación de Cartan} \\
&= \mathrm{d}\omega(Y,X) \quad \text{pues } Y \text{ es simpléctico.}
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\imath([X,Y])\omega = \mathrm{d}H$ con $H = -\omega(X,Y)$, por lo que $\imath([X,Y])\omega$ es exacta, y se deduce del Lema 8.2 que $[X,Y]$ es simpléctico. $\square$

Notemos que, en realidad, en la proposición anterior se probó un hecho más fuerte: la 1-forma $\imath([X,Y])\omega$ es exacta. Los campos simplécticos para los que vale esta propiedad reciben un nombre especial:

**Definición 8.4.** Un campo vectorial $X$ en la variedad simpléctica $(M,\omega)$ se dice *hamiltoniano* si $\imath(X)\omega$ es exacta, es decir, existe $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$ tal que $\imath(X)\omega = \mathrm{d}H$.

Recíprocamente, dada una función $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$, existe un único campo $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ que satisface

$$\imath(X_H)\omega = \mathrm{d}H, \tag{15}$$

debido a (14). El campo $X_H$ se denomina el campo hamiltoniano asociado a $H$.

Sean:

$$\mathfrak{X}_{ham}(M,\omega) = \{\text{campos vectoriales hamiltonianos en } M\},$$
$$\mathfrak{X}_{sym}(M,\omega) = \{\text{campos vectoriales simplécticos en } M\}.$$

Entonces

$$\mathfrak{X}_{ham}(M,\omega) \subseteq \mathfrak{X}_{sym}(M,\omega) \subseteq \mathfrak{X}(M),$$

y cada inclusión es un homomorfismo de álgebras de Lie, pues de la Proposición 8.3 obtenemos que si $X,Y \in \mathfrak{X}_{sym}(M,\omega)$ entonces $[X,Y] \in \mathfrak{X}_{ham}(M,\omega)$.

Notar que, localmente, todo campo simpléctico es hamiltoniano, pues todo punto de una variedad posee un abierto contráctil. Más aún, si $H^1_{dR}(M) = 0$ entonces globalmente todo campo simpléctico es hamiltoniano.

**Ejemplo 8.5.** En el toro $T^2 = S^1 \times S^1$ con forma simpléctica $\omega = \mathrm{d}\theta_1 \wedge \mathrm{d}\theta_2$ (donde $\theta_1$ y $\theta_2$ son las coordenadas usuales en cada copia de $S^1$), los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial\theta_1}$ y $\frac{\partial}{\partial\theta_2}$ son simplécticos pero no hamiltonianos.

Sea $H \in \mathscr{C}^\infty(M)$ y sea $X_H$ el campo hamiltoniano asociado. Entonces, usando la fórmula de Cartan, se tiene que:

$$\mathscr{L}_{X_H} H = \iota(X_H)\,\mathrm{d}H = \iota(X_H)\iota(X_H)\omega = \omega(X_H, X_H) = 0,$$

mientras que, por la definición de la derivada de Lie, llegamos a:

$$\mathscr{L}_{X_H} H = X_H(H) = (\mathrm{d}H)X_H,$$

de donde deducimos que

$$(\mathrm{d}H)X_H = 0.$$

Esta ecuación nos dice que las curvas integrales de $X_H$ están contenidas en los conjuntos de nivel de $H$: si $\gamma(t)$ es una curva integral de $X_H$ entonces $H(\gamma(t)) = c$ para todo $t$. En efecto, de $\gamma'(t) = X_H(\gamma(t))$ deducimos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\gamma(t)) = (\mathrm{d}H)_{\gamma(t)}\gamma'(t) = (\mathrm{d}H)_{\gamma(t)} X_H(\gamma(t)) = 0.$$

Esta relación se interpreta como el teorema de conservación de la energía en mecánica clásica.

*Expresión en coordenadas:* Consideremos un entorno coordenado dado por el Teorema de Darboux, es decir, $(U,(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n))$ tal que $\omega|_U = \sum_i \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i$.

Sea $H : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $X_H$ el campo hamiltoniano asociado. Entonces podemos escribir:

$$X_H|_U = \sum_i \left( a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad \mathrm{d}H|_U = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i + \frac{\partial H}{\partial y_i} \mathrm{d}y_i \right),$$

para ciertas $a_i, b_i \in \mathscr{C}^\infty(U)$. A continuación daremos expresiones para $a_i, b_i$ en términos de $H$. De (15) se deduce que

$$(\iota(X_H)\omega)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \mathrm{d}H\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \Rightarrow \omega\left(X_H, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial x_i},$$

y por lo tanto

$$b_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Análogamente, evaluando (15) en $\frac{\partial}{\partial y_i}$ llegamos a $a_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}$, por lo que

$$X_H|_U = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \tag{16}$$

¿Cómo podemos determinar las curvas integrales de un campo hamiltoniano? Si seguimos trabajando en el sistema coordenado provisto por el Teorema de Darboux, a una curva integral $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ la podremos escribir como $\gamma(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t),y_1(t),\dots,y_n(t))$. Esta curva satisface $\gamma'(t) = X_H(\gamma(t))$ y de (16) se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x_i' = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad y_i' = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1,\dots,n, \tag{17}$$

que se conoce como las *ecuaciones de Hamilton*.

**Observación 8.6.** Consideremos en $\mathbb{R}^{2n}$ la forma simpléctica canónica $\omega_0 = \sum_i \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i$. Si $H \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ entonces el gradiente de $H$ es el campo $\nabla H$ determinado por la ecuación $g_0(\nabla H, X) = (\mathrm{d}H)X$ para todo campo $X$ en $\mathbb{R}^{2n}$. Entonces, en coordenadas, $\nabla H$ está dado por:

$$\nabla H = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

Si $J$ denota la estructura compleja canónica en $\mathbb{R}^{2n}$, es decir, $J(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}$, $J(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces tenemos la siguiente relación entre $X_H$ y $\nabla H$:

$$X_H = -J(\nabla H).$$

## 9. El corchete de Poisson

En esta sección veremos que si $(M,\omega)$ es una variedad simpléctica, entonces $\mathscr{C}^\infty(M)$ admite una estructura de álgebra de Lie (con cierta propiedad extra).

**Definición 9.1.** Sea $(M,\omega)$ una variedad simpléctica. Se define el *corchete de Poisson* de dos funciones $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ por:

$$\{f,g\} = \omega(X_f, X_g),$$

donde $X_f$, $X_g$ son los campos hamiltonianos asociados a $f$ y $g$, respectivamente.

Un resultado básico que necesitaremos más adelante es el siguiente:

**Lema 9.2.** *Para $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$, vale que:*
(i) $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$,
(ii) $\{f,g\} = -X_f(g) = X_g(f)$.

*Demostración.* De la Proposición 8.3 deducimos que

$$\iota([X_f,X_g])\omega = -\mathrm{d}(\omega(X_f,X_g)) = -\{f,g\}.$$

Como $\omega$ es no degenerada, llegamos a $[X_f,X_g] = -X_{\{f,g\}}$, por lo que vale (i).

Para probar (ii), usamos la definición de campo hamiltoniano (15):

$$\{f,g\} = \omega(X_f,X_g) = (\iota(X_f)\omega)(X_g) = (\mathrm{d}f)X_g = X_g(f),$$

y de manera similar se verifica la otra igualdad. □

**Proposición 9.3.** *El corchete* $\{\cdot,\cdot\} : \mathscr{C}^\infty(M) \times \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ *satisface:*

(i) *Antisimetría:* $\{f,g\} = -\{g,f\}$,
(ii) *Identidad de Jacobi:* $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$,
(iii) *Regla de Leibniz:* $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$.

*Demostración.* (i) La antisimetría es clara, por la antisimetría de $\omega$.

(ii) Para verificar la identidad de Jacobi, aplicamos el Lema 9.2 y la definición del corchete de Lie:

$$\begin{aligned}\{f,\{g,h\}\} &= X_{\{g,h\}}(f)\\ &= -[X_g,X_h](f)\\ &= -X_g(X_h f) + X_h(X_g f)\\ &= X_g(\{h,f\}) + X_h(f,g)\\ &= -\{g,\{h,f\}\} - \{h,\{f,g\}\}.\end{aligned}$$

(iii) La regla de Leibniz es consecuencia de $X(uv) = X(u)v + uX(v)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $u,v \in \mathscr{C}^\infty(M)$. En efecto,

$$\{f,gh\} = -X_f(gh) = -X_f(g)h - gX_f(h) = \{f,g\}h + g\{f,h\}.$$

□

Como consecuencia inmediata del Lema 9.2 y de la Proposición 9.3 obtenemos:

**Corolario 9.4.** $(\mathscr{C}^\infty(M),\{\cdot,\cdot\})$ *es un álgebra de Lie que además satisface la regla de Leibniz. Más aún, la aplicación*

$$\begin{array}{ccc}(\mathscr{C}^\infty(M),\{\cdot,\cdot\}) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M)\\ H & \mapsto & -X_H\end{array}$$

*es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

Podemos obtener un resultado más fuerte cuando nos restringimos a la subálgebra de Lie de los campos hamiltonianos. Definimos primero las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{cccc} i: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(M)\\ & c & \mapsto & f_c\end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} j: & \mathscr{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}_{ham}(M)\\ & H & \mapsto & -X_H\end{array}$$

donde $f_c(x) = c$ para todo $x \in M$.

**Proposición 9.5.** *Si* $(M,\omega)$ *es una variedad simpléctica con* $M$ *conexa, la sucesión*

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathscr{C}^\infty(M) \xrightarrow{j} \mathfrak{X}_{ham}(M) \to 0 \tag{18}$$

*es una sucesión exacta de álgebras de Lie. Es decir,* $i$ *es inyectiva,* $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} j$ *y* $j$ *es suryectiva.*

*Demostración.* Es claro que $i$ es inyectiva y que $j$ es suryectiva. Por otro lado, es inmediato que $\operatorname{Im} i \subseteq \operatorname{Ker} j$, pues el campo hamiltoniano asociado a una función constante es el campo nulo. Sólo debemos verificar que $\operatorname{Ker} j \subseteq \operatorname{Im} i$.

Si $j(f) = 0$ entonces $X_f = 0$, y por definición de campo hamiltoniano tenemos

$$0 = \iota(X_f)\omega = \mathrm{d}f.$$

Como $M$ es conexa llegamos a que $f$ es una función constante. □

**Observación 9.6.** Un teorema de Dumortier y Takens ([9]) afirma que, bajo las mismas hipótesis de la Proposición 9.5, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $M$ es compacta,
2. la sucesión exacta corta (18) se parte, es decir, existe un homomorfismo de álgebras de Lie $\kappa : \mathfrak{X}_{ham}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ tal que $j \circ \kappa = \mathrm{Id}$,
3. $\{\mathscr{C}^\infty(M), \mathscr{C}^\infty(M)\} \neq \mathscr{C}^\infty(M)$.

*Expresión en coordenadas:* sea $(U, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n))$ un entorno coordenado en $M$ tal que $\omega|_U = \sum_i \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i$. Si $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$, entonces:

$$\{f,g\}|_U = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \tag{19}$$

En efecto, como

$$\mathrm{d}f|_U = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \mathrm{d}y_i \right) \qquad \text{y} \qquad X_g = \sum_j \left( \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

reemplazando estas expresiones en $\{f,g\} = X_g(f) = (\mathrm{d}f)X_g$ obtenemos (19).

**9.1. Variedades de Poisson.** Una generalización natural de las variedades simplécticas es la siguiente:

**Definición 9.7.** Una *variedad de Poisson* es una variedad diferenciable $M$ tal que $\mathscr{C}^\infty(M)$ está equipada con un corchete de Lie $\{\cdot,\cdot\}$ que satisface la regla de Leibniz. Es decir, $\{\cdot,\cdot\}$ satisface todas las condiciones de la Proposición 9.3.

Claramente, toda variedad simpléctica es una variedad de Poisson, pero veremos a continuación que hay muchas variedades de Poisson que no son simplécticas.

**Ejemplo 9.8.** Sean $(M, \omega)$ una variedad simpléctica y $N$ una variedad arbitraria; sea $P = M \times N$ la variedad producto. Definimos un corchete $\{\cdot,\cdot\}$ en $\mathscr{C}^\infty(P)$ de la siguiente manera: para $f, g \in \mathscr{C}^\infty(P)$,

$$\{f,g\}(m,x) = \{f_x, g_x\}(m), \quad m \in M, x \in N,$$

donde $f_x, g_x : M \to \mathbb{R}$ están definidas por $f_x(m) = f(m,x)$, $g_x(m) = g(m,x)$, y $\{\cdot,\cdot\}$ en el miembro de la derecha es el corchete de Poisson en $M$ inducido por $\omega$. Es sencillo verificar que el corchete así definido es efectivamente un corchete de Poisson en $P$. Notar que $N$ es arbitraria, por lo que la dimensión de $P$ puede ser par o impar.

**Proposición 9.9.** *Para cada $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, la aplicación $X_f : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$, $X_f(g) = \{f,g\}$, es un campo vectorial en $M$.*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata de la regla de Leibniz. □

**Definición 9.10.** El campo $X_f$ asociado a la función $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ definido en la Proposición 9.9 se denomina el campo hamiltoniano asociado a $f$.[1]

*Expresión en coordenadas:* Sea $(U, (x_1, \dots, x_n))$ un entorno coordenado arbitrario en $M$ y $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Entonces

$$\{f,g\}|_U = \sum_{i<j} \{x_i, x_j\} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \tag{20}$$

[1]Notar el cambio de signo con respecto al Lema 9.2. Con esta convención, la aplicación $f \to X_f$ es un homomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathscr{C}^\infty(M)$ y $\mathfrak{X}(M)$.

En efecto, $\{f,g\} = X_f(g)$, y $X_f|_U = \sum_j X_f(x_j)\frac{\partial g}{\partial x_j}$. Además,

$$X_f(x_j) = \{f,x_j\} = -\{x_j,f\} = -X_{x_j}(f) = -\sum_i X_{x_j}(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_i \{x_i,x_j\}\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Luego, $\{f,g\}|_U = \sum_{i,j}\{x_i,x_j\}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}$, que es equivalente a (20).

**Definición 9.11.** Si $M$ es una variedad de Poisson, una función $g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ se dice una *integral primera* de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ si $g$ es constante respecto de $X$, es decir, $Xg = 0$.

En particular, se deduce de $\{f,f\} = 0$ que $f$ es un integral primera de $X_f$.

**Proposición 9.12.** *Si $M$ es una variedad de Poisson y $g$ y $h$ son integrales primeras de $X_f$ entonces $\{g,h\}$ también lo es.*

*Demostración.* Sabemos que $0 = X_f(g) = \{f,g\}$ y $0 = X_f(h) = \{f,h\}$. De la identidad de Jacobi para el corchete de Poisson, deducimos que $\{f,\{g,h\}\} = 0$, lo que prueba la proposición. □

Una familia importante de ejemplos de variedades de Poisson está dada por los duales de álgebras de Lie, como veremos a continuación.

**Ejemplo 9.13.** Sea $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ un álgebra de Lie real de dimensión finita. Recordemos que existe un isomorfismo natural $(\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$ definido de la siguiente manera: a cada funcional lineal $f : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ se le asocia un único elemento $\tilde{f} \in \mathfrak{g}$ que satisface $f(\lambda) = \lambda(\tilde{f})$ para $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ arbitraria.

Si $f$ y $g$ son dos funcionales lineales en $\mathfrak{g}^*$ entonces se define:

$$\{f,g\}(\alpha) = \alpha([\tilde{f},\tilde{g}]), \qquad \alpha \in \mathfrak{g}^*. \tag{21}$$

Si $\{e_1,\dots,e_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, con $[e_i,e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$, entonces $\{x_i,x_j\} = \sum_k c_{ij}^k x_k$, donde $x_r : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ es la única funcional lineal en $\mathfrak{g}^*$ que satisface $\tilde{x}_r = e_r$, $r = 1,\dots,n$. Eligiendo $(x_1,\dots,x_n)$ como un sistema de coordenadas (global) en $\mathfrak{g}^*$ podemos establecer ahora un corchete de Poisson en $\mathfrak{g}^*$ usando (20), es decir, si $F,G \in \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ entonces

$$\{F,G\} = \sum_{i<j}\{x_i,x_j\}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial x_i}\right).$$

Es fácil verificar que este corchete así definido satisface la identidad de Jacobi y la regla de Leibniz, por lo que $\mathfrak{g}^*$ admite una estructura de Poisson.

Este corchete también se puede definir de una manera intrínseca: si $F,G : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables y $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ entonces $(\mathrm{d}F)_\lambda, (\mathrm{d}G)_\lambda : T_\lambda\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ son lineales. Identificando de la manera usual $T_\lambda\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*$, podemos considerar a $(\mathrm{d}F)_\lambda, (\mathrm{d}G)_\lambda$ como funcionales lineales en $\mathfrak{g}^*$. Entonces

$$\{F,G\}(\lambda) = \lambda([\widetilde{(\mathrm{d}F)}_\lambda, \widetilde{(\mathrm{d}G)}_\lambda]).$$

Podemos observar que en las dos familias de ejemplos vistas anteriormente, cada variedad de Poisson que aparece puede escribirse como una unión disjunta de subvariedades simplécticas. En efecto, a la variedad $P = M \times N$ del Ejemplo 9.8 la podemos escribir como $P = \bigcup_{x\in N} M \times \{x\}$, y cada $M \times \{x\}$ es claramente simpléctica. Por otro lado, sabemos que a los duales de álgebras de Lie vistos en el Ejemplo 9.13 los podemos descomponer como la unión de las órbitas coadjuntas, y cada una de estas órbitas admite una estructura simpléctica. Esto no es casualidad, como esbozaremos a continuación.

Sea $(M,\{\cdot,\cdot\})$ una variedad de Poisson, y para cada $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$ consideramos el campo $X_f$ definido en la Proposición 9.9. Se define el *espacio característico* de $\{\cdot,\cdot\}$ en $x\in M$ por:

$$\mathscr{D}_x := \{X_f(x) \mid f\in\mathscr{C}^\infty(M)\}\subseteq T_xM.$$

La dimensión de $\mathscr{D}_x$ se denomina el rango de $\{\cdot,\cdot\}$ en $x$, y $\text{máx}_{x\in M}\dim\mathscr{D}_x$ se llama el rango de $\{\cdot,\cdot\}$. Cuando el rango de $\{\cdot,\cdot\}$ coincide con $\dim M$ se dice que $\{\cdot,\cdot\}$ es no degenerado en $x$. Si el rango de $\{\cdot,\cdot\}$ es constante para todo $x$, se dice que $\{\cdot,\cdot\}$ es un corchete de Poisson regular.

Se puede comprobar que:

- el rango de $\{\cdot,\cdot\}$ en $x$ es par para todo $x\in M$,
- $\{\cdot,\cdot\}$ es no degenerado en toda $M$ si y sólo si $\{\cdot,\cdot\}$ está inducido por una forma simpléctica en $M$.

Es fácil verificar que $\mathscr{D}_x$ admite una forma bilineal antisimétrica no degenerada, llamada la forma simpléctica inducida. En efecto, si $X,Y\in\mathscr{D}_x$ entonces $X=X_f$, $Y=X_g$ para ciertas funciones $f,g$ diferenciables en $M$. Se define entonces

$$\omega_x(X,Y)=\{f,g\}(x). \tag{22}$$

Se verifica que $\omega_x$ está bien definida y que si $\{\cdot,\cdot\}$ proviene de una estructura simpléctica en $M$, se recupera así la forma simpléctica original.

La asignación $\mathscr{D}: x\mapsto\mathscr{D}_x\subseteq T_xM$ es una distribución *singular* en $M$, pues $\dim\mathscr{D}_x$ puede cambiar al variar $x\in M$. Esta distribución $\mathscr{D}$ es preservada por los campos hamiltonianos, es decir, si $X$ es un campo hamiltoniano en $M$ con flujo $\{\varphi_t\}$ entonces $\varphi_t$ manda $\mathscr{D}_x$ a $\mathscr{D}_{\varphi_t(x)}$. Un teorema de Stefan-Sussmann (ver [8, Theorem 1.5.1]) nos permite asegurar que $\mathscr{D}$ es *integrable*, es decir, por cada punto de $M$ pasa una variedad integral maximal conexa $S$ de dimensión máxima de $\mathscr{D}$ (i.e., $S$ es una subvariedad conexa de $M$ tal que $T_yS=\mathscr{D}_y$ para todo $y\in S$, y es maximal). Estas variedades integrales serán llamadas *hojas*. Teniendo en cuenta ciertos detalles técnicos, se puede probar que las formas simplécticas (22) de cada espacio característico se "pegan" bien en una forma simpléctica en cada hoja. Se obtiene así:

**Teorema 9.14.** *Dada una variedad de Poisson $(M,\{\cdot,\cdot\})$, cada hoja de la distribución singular $\mathscr{D}$ es una variedad simpléctica, donde la inclusión es un morfismo de Poisson*[2]. *El corchete de Poisson está completamente determinado por las formas simplécticas en las hojas de $\mathscr{D}$.*

El teorema previo fue probado por A. Weinstein en su trabajo fundacional [22]; otra demostración puede encontrarse en [8, Theorem 1.5.6]. Como aplicación, consideraremos los duales de álgebras de Lie equipados con la estructura de Poisson dada en Ejemplo 9.13. Daremos a continuación un esbozo de la demostración de que las hojas simplécticas correspondientes son exactamente las órbitas de la acción coadjunta.

**Teorema 9.15.** *Sea $G$ un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Entonces las hojas simplécticas en $\mathfrak{g}^*$ asociadas a la estructura de Poisson dada en el Ejemplo 9.13 coinciden con las órbitas de la representación coadjunta de $G$ en $\mathfrak{g}^*$.*

*Demostración.* Debido a la regla de Leibniz, los espacios característicos están generados por los campos hamiltonianos asociados a funcionales lineales $\mathfrak{g}^*\to\mathbb{R}$. Si $f,g$ son funcionales lineales en $\mathfrak{g}^*$ y $\lambda\in\mathfrak{g}^*$ entonces, según (21),

$$X_f(h)(\lambda)=\lambda(\{f,h\})=\lambda([\tilde f,\tilde h])=-\operatorname{ad}^*_{\tilde f}(\lambda)(\tilde h).$$

[2]Dadas dos variedades de Poisson $(M_i,\{\cdot,\cdot\}_i)$, $i=1,2$, se dice que una función diferenciable $\phi: M_1\to M_2$ es un morfismo de Poisson si $\{f\circ\phi, g\circ\phi\}_1=\{f,g\}_2\circ\phi$ para $f,g\in\mathscr{C}^\infty(M_2)$

Esto dice que los espacios tangentes a las hojas simplécticas coinciden con los espacios tangentes a las órbitas coadjuntas. Resulta entonces que las órbitas coadjuntas son subconjuntos abiertos y cerrados de las hojas simplécticas, y como estas hojas son conexas, coinciden. □

**Observación 9.16.** Es posible verificar que las hojas simplécticas de una variedad de Poisson se pueden describir de la manera siguiente: $x, y \in M$ se encuentran en una misma hoja simpléctica si y sólo si ellos pueden ser conectados por una curva diferenciable a trozos formada por curvas integrales de campos hamiltonianos.

**Ejemplo 9.17.** Exhibiremos un corchete de Poisson distinto del usual en $\mathbb{R}^6$ y determinaremos las hojas simplécticas asociadas. Este ejemplo apareció en [3]. Usaremos la notación $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ y $f_j := \frac{\partial f}{\partial x_j}$ para $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^6)$, con $(x_1, \ldots, x_6)$ las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^6$.

Para $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^6)$, definimos

$$\begin{aligned}\{f, g\} = x_1(f_3 g_5 - f_5 g_3) + x_2(f_3 g_6 - f_6 g_6) - x_2(f_4 g_5 - f_5 g_4) \\ + x_1(f_4 g_6 - f_6 g_4) - \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2)(f_5 g_6 - f_6 g_5).\end{aligned}$$

Queda como ejercicio verificar que $\{\cdot, \cdot\}$ así definido es efectivamente un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^6$. El campo hamiltoniano asociado a $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^6)$ está dado por

$$\begin{aligned}X_f = (-x_1 f_5 - x_2 f_6)\,\partial_3 + (x_2 f_5 - x_1 f_6)\,\partial_4 \\ + \left(x_1 f_3 - x_2 f_4 + \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2) f_6\right)\partial_5 + \left(x_2 f_3 + x_1 f_4 - \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2) f_5\right)\partial_6.\end{aligned}$$

En primer lugar, determinamos los espacios característicos asociados a este corchete de Poisson, es decir, $\mathscr{D}_x = \{X_f(x) \mid f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^6)\}$. Es claro que $\mathscr{D}_x = \{0\}$ si y sólo si $x_1 = x_2 = 0$. Denotemos por $p_j$, $j = 1, \ldots, 6$, las proyecciones $p_j(x_1, \ldots, x_6) = x_j$. Entonces $X_{p_1} = X_{p_2} = 0$ y además

$$\begin{aligned}X_{p_3} &= x_1 \partial_5 + x_2 \partial_6, \\ X_{p_4} &= -x_2 \partial_5 + x_1 \partial_6, \\ X_{p_5} &= -x_1 \partial_3 + x_2 \partial_4 - \frac{1}{6}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\partial_6, \\ X_{p_6} &= -x_2 \partial_3 - x_1 \partial_4 + \frac{1}{6}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\partial_5.\end{aligned}$$

Notemos que si $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ entonces $\{X_{p_3}|_x, X_{p_4}|_x, X_{p_5}|_x, X_{p_6}|_x\}$ es una base de $\mathscr{D}_x$. Más aún, de las expresiones obtenidas recién para $X_{p_j}(x)$, se deduce que $\{\partial_3|_x, \partial_4|_x, \partial_5|_x, \partial_6|_x\}$ es otra base de $\mathscr{D}_x$. De todas estas observaciones obtenemos la siguiente descripción de las hojas simplécticas:

- las hojas simplécticas de dimensión 0 son los puntos $\{(0, 0, c_3, c_4, c_5, c_6)\}$;
- no hay hojas simplécticas de dimensión 2;
- las hojas simplécticas de dimensión 4 son los subespacios afines

$$\mathscr{F}_{c_1, c_2} = \{(c_1, c_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mid x_3, \ldots, x_6 \in \mathbb{R}\},$$

donde $c_1, c_2$ son constantes con $c_1^2+c_2^2\neq 0$. La forma simpléctica $\omega_{c_1,c_2}$ en $\mathscr{F}_{c_1,c_2}$ inducida por $\{\cdot,\cdot\}$ está dada por

$$\omega_{c_1,c_2} = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}x_4 - (c_1^2+c_2^2)^{-1}(c_1\,\mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}x_5 + c_2\,\mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}x_6 - c_2\,\mathrm{d}x_4\wedge \mathrm{d}x_5 + c_1\,\mathrm{d}x_4\wedge \mathrm{d}x_6),$$

donde $(x_3,\dots,x_6)$ son coordenadas globales en $\mathscr{F}_{c_1,c_2}$.

## 10. Grupos de Lie con estructura simpléctica invariante a izquierda

Una gran fuente de ejemplos de variedades simplécticas está dada por los grupos de Lie equipados con formas simplécticas invariantes a izquierda.

Recordemos que una $k$-forma diferenciable $\eta$ en un grupo de Lie $G$ se dice *invariante a izquierda* si $L_g^*\eta=\eta$ para todo $g\in G$, donde $L_g: G\to G$ es el difeomorfismo de $G$ definido por $L_g(x)=g\cdot x$ para todo $x\in G$. Es decir, $\eta$ es invariante a izquierda si y sólo si

$$\eta_{gx}((\mathrm{d}L_g)_x v_1,\dots,(\mathrm{d}L_g)_x v_k) = \eta_x(v_1,\dots,v_k),$$

para todo $g\in G$, $x\in G$ y $v_1,\dots,v_k\in T_xG$. En particular, cuando $x=e$, la identidad de $G$, obtenemos

$$\eta_g((\mathrm{d}L_g)_e v_1,\dots,(\mathrm{d}L_g)_e v_k) = \eta_e(v_1,\dots,v_k),$$

para todo $g\in G$ y $v_1,\dots,v_k\in T_eG\cong\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de $G$. Esto nos dice que $\eta$ queda determinada por su valor $\eta_e$ en $e$. Recíprocamente, toda $k$-forma $\mu$ en el espacio vectorial $\mathfrak{g}$ define unívocamente una $k$-forma invariante a izquierda $\tilde\mu$ en $G$, mediante

$$\tilde\mu_g(v_1,\dots,v_k) = \mu((\mathrm{d}L_{g^{-1}})_g v_1,\dots,(\mathrm{d}L_{g^{-1}})_g v_k),$$

para $v_1,\dots,v_k\in T_gG$ arbitrarios. En definitiva, hay una correspondencia biunívoca entre $\Omega^k_{inv}(G)$, el espacio de $k$-formas invariantes a izquierda en $G$, y $\bigwedge^k\mathfrak{g}^*$.

Notar también que la derivada exterior d en $G$ satisface $\mathrm{d}\big(\Omega^k_{inv}(G)\big)\subset\Omega^{k+1}_{inv}(G)$, pues d conmuta con los "pull-backs": si $\eta$ es una $k$-forma invariante a izquierda entonces $L_g^*(\mathrm{d}\eta) = \mathrm{d}(L_g^*\eta)=\mathrm{d}\eta$ para todo $g\in G$.

Pasamos ahora a la definición que nos interesa: una estructura simpléctica invariante a izquierda en un grupo de Lie $G$ es una 2-forma invariante a izquierda, no degenerada y cerrada, es decir, $\mathrm{d}\omega=0$.

Como ya mencionamos antes, para verificar que la 3-forma invariante a izquierda $\mathrm{d}\omega$ se anula, basta verificar que se anula en $e$, es decir, $\mathrm{d}\omega(x,y,z)=0$ para $x,y,z\in\mathfrak{g}$. Recordemos que, en general, la derivada exterior de una 2-forma está dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X,Y,Z) = {} & X\omega(Y,Z)+Y\omega(Z,X)+Z\omega(X,Y)\\ & -\omega([X,Y],Z)-\omega([Y,Z],X)-\omega([Z,X],Y).\end{aligned}$$

Si $\omega$ es invariante a izquierda y los campos $X,Y,Z$ son invariantes a izquierda, entonces los tres primeros sumandos en la ecuación de arriba se anulan, pues las funciones $\omega(Y,Z)$ son constantes. Luego, para $x,y,z\in\mathfrak{g}$ obtenemos:

$$\mathrm{d}\omega(x,y,z) = -\omega([x,y],z)-\omega([y,z],x)-\omega([z,x],y). \tag{23}$$

De la misma manera se ve que si $\lambda$ es una 1-forma invariante a izquierda en $G$, entonces se tiene

$$\mathrm{d}\lambda(x,y) = -\lambda([x,y]),\quad x,y\in\mathfrak{g}. \tag{24}$$

En resumen, una forma simpléctica invariante a izquierda en un grupo de Lie $G$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es equivalente a tener una 2-forma $\omega\in\bigwedge^2\mathfrak{g}^*$ que es no degenerada y satisface (23).

**Ejemplo 10.1.** Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de dimensión 4 con base $\{e_1,\dots,e_4\}$ y corchete no nulo dado por $[e_1,e_2]=e_3$. Entonces, si $\{e^1,\dots,e^4\}$ denota la base dual de $\mathfrak{g}^*$, la 2-forma $\omega=e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^4$ es una forma simpléctica en $\mathfrak{g}$. En efecto, utilizando (24) se llega a

$$\mathrm{d}e^1=\mathrm{d}e^2=\mathrm{d}e^4=0,\quad \mathrm{d}e^3=-e^1\wedge e^2.$$

Luego, $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}e^1\wedge e^3-e^1\wedge \mathrm{d}e^3+\mathrm{d}e^2\wedge e^4-e^2\wedge \mathrm{d}e^4=e^1\wedge(e^1\wedge e^2)=0$, es decir, $\omega$ es cerrada. Además, $\omega^2=-e^1\wedge e^2\wedge e^3\wedge e^4\neq 0$, por lo que $\omega$ es no degenerada.

El grupo de Lie simplemente conexo $G$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es el siguiente grupo de matrices:

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & z & 0\\ & 1 & y & 0\\ & & 1 & 0\\ & & & e^t\end{pmatrix} \mid x,y,z,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Este grupo es difeomorfo a $\mathbb{R}^4$, identificando a cada matriz en $G$ con $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. Las 1-formas invariantes a izquierda $e^1,e^2,e^3,e^4$ en $G$ se corresponden con las siguientes 1-formas en $\mathbb{R}^4$:

$$e^1=\mathrm{d}x,\quad e^2=\mathrm{d}y,\quad e^3=\mathrm{d}z-x\,\mathrm{d}y,\quad e^4=\mathrm{d}t.$$

Luego, la forma simpléctica $\omega$ definida recién a nivel del álgebra de Lie tiene la siguiente expresión en coordenadas en $\mathbb{R}^4$:

$$\omega=\mathrm{d}x\wedge(\mathrm{d}z-x\,\mathrm{d}y)+\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}t.$$

Sea $\Gamma$ el subconjunto de $G$ obtenido al tomar $x,y,z,t\in\mathbb{Z}$; es fácil comprobar que $\Gamma$ es un subgrupo discreto de $G$, por lo que $M_\Gamma:=\Gamma\backslash G$ admite una estructura de variedad diferenciable tal que la proyección canónica $\pi: G\to M_\Gamma$ es un difeomorfismo local. Más aún, se verifica que $M_\Gamma$ es compacta, con grupo fundamental isomorfo a $\Gamma$. Las formas $e^1,\dots,e^4$, al ser invariantes a izquierda, pasan al cociente, y lo mismo ocurre con $\omega$. Es decir, existe una 2-forma $\tilde\omega$ en $M_\Gamma$ tal que $\omega=\pi^*\tilde\omega$. Es claro que $\tilde\omega$ es no degenerada y cerrada, por lo que $\tilde\omega$ es una forma simpléctica en $M_\Gamma$. La variedad $M_\Gamma$ es conocida como la variedad de Kodaira–Thurston.

**Observación 10.2.** Este comentario va al lector familiarizado con variedades Kähler. La variedad de Kodaira–Thurston fue el primer ejemplo de una variedad compacta que admite formas simplécticas pero que no admite ninguna métrica de Kähler. En efecto, se puede calcular el primer número de Betti de $M_\Gamma$: $b_1(M_\Gamma)=3$. Como en toda variedad Kähler compacta los números de Betti "impares" $b_{2i+1}$ son pares, resulta que $M_\Gamma$ no admite ninguna estructura Kähler. En [14], McDuff construyó el primer ejemplo de variedad compacta simpléctica no-Kähler que es simplemente conexa. Este ejemplo se obtuvo a partir de $M_\Gamma$, utilizando un "blow-up" particular. Ejemplos de tales variedades en toda dimensión fueron construidos por Gompf en [10].

Una pregunta natural que surge en este contexto es si hay restricciones para la existencia de formas simplécticas invariantes a izquierda en grupos de Lie. Los grupos de Lie nilpotentes y solubles que poseen formas simplécticas invariantes a izquierda son numerosos, pero veremos a continuación que, en cambio, ningún grupo semisimple posee tales estructuras. Necesitamos unos preliminares algebraicos primero.

**Definición 10.3.** Sea $(A,\cdot)$ un álgebra, no necesariamente asociativa. Esta álgebra se dice *simétrica a izquierda* (o LSA, por sus siglas en inglés) si:

$$(x\cdot y)\cdot z-x\cdot(y\cdot z)=(y\cdot x)\cdot z-y\cdot(x\cdot z), \tag{25}$$

para $x,y,z \in A$ arbitrarios.

Definiendo $[x,y] := x \cdot y - y \cdot x$, $x,y \in A$, es fácil verificar que se cumple la identidad de Jacobi para este corchete y así $\mathfrak{g}_A = (A,[\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie. Más aún, si definimos $\ell(x) \in \operatorname{End}(A)$ por $\ell(x)y = x \cdot y$, se deduce de (25) que $\ell : \mathfrak{g}_A \to \operatorname{End}(A)$, $x \mapsto \ell(x)$, es una representación de $\mathfrak{g}_A$, es decir, $\ell([x,y]) = [\ell(x),\ell(y)]$ para todos los $x,y \in \mathfrak{g}_A$.

Si, por otro lado, tenemos un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que admite una estructura LSA tal que la operación $(x,y) \mapsto x \cdot y - y \cdot x$ coincide con el corchete $[x,y]$, se dice que la estructura LSA es compatible con su corchete.

**Ejemplo 10.4.** Toda álgebra asociativa es una LSA. En efecto, ambos miembros en (25) se anulan.

**Observación 10.5.** Las álgebras simétricas a izquierda tienen la siguiente interpretación geométrica. Si $G_A$ es un grupo de Lie que tiene a $\mathfrak{g}_A$ como su álgebra de Lie, definimos $\nabla_X Y = X \cdot Y$ para $X,Y$ campos invariantes a izquierda en $G_A$. Esta operación se extiende de manera única a una *conexión lineal* en $G_A$, que resulta ser sin torsión y plana, como consecuencia de (25).

¿Cuál es la relación entre grupos de Lie con formas simplécticas invariantes a izquierda y álgebras simétricas a izquierda? En el siguiente resultado encontraremos la respuesta.

**Teorema 10.6** ([6, Theorem 6])**.** *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con una forma simpléctica entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura LSA compatible con su corchete.*

*Demostración.* Sea $\omega$ una forma simpléctica en $\mathfrak{g}$. Dados $x,y \in \mathfrak{g}$, consideremos la funcional lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \omega([x,v],y). \end{array}$$

Como $\omega$ es no degenerada, existe un único $z \in \mathfrak{g}$ tal que $\omega(z,v) = \omega([v,x],y)$. Definimos entonces $x \cdot y = z$. Para ver una manera equivalente de definir este producto, calculamos $\mathscr{L}_x(\iota(y)\omega)$:

$$\mathscr{L}_x(\iota(y)\omega)(v) = x(\omega(y,v)) - (\iota(y)\omega)([x,v]) = \omega([x,v],y) = \omega(x \cdot y, v) = \iota(x \cdot y)\omega(v),$$

donde se usó que $x(\omega(y,v)) = 0$ pues $\omega(y,v) \in \mathbb{R}$ al ser todos los objetos invariantes a izquierda. Es decir,

$$\iota(x \cdot y)\omega = \mathscr{L}_x(\iota(y)\omega).$$

Entonces, usando una de las ecuaciones del Apéndice:

$$\iota([x,y])\omega = [\mathscr{L}_x, \iota(y)]\omega = \mathscr{L}_x(\iota(y)\omega) - \iota(y)(\mathscr{L}_x\omega). \tag{26}$$

Notemos ahora que, por la fórmula de Cartan y $\mathrm{d}\omega = 0$, se tiene:

$$\iota(y)(\mathscr{L}_x\omega) = \iota(y)(d(\iota(x)\omega)) = \mathscr{L}_y(\iota(x)\omega) - \mathrm{d}(\iota(y)\iota(x)\omega) = \mathscr{L}_y(\iota(x)\omega),$$

donde en la última igualdad se usó que $\omega(x,y) \in \mathbb{R}$. Reemplazando en (26) obtenemos:

$$\begin{aligned} \iota([x,y])\omega &= \mathscr{L}_x(\iota(y)\omega) - \mathscr{L}_y(\iota(x)\omega) \\ &= \iota(x \cdot y)\omega - \iota(y \cdot x)\omega \\ &= \iota(x \cdot y - y \cdot x)\omega. \end{aligned}$$

Como $\omega$ es no degenerada, obtenemos $[x,y] = x \cdot y - y \cdot x$, por lo que el producto es compatible con el corchete de $\mathfrak{g}$.

Para verificar ahora que este producto define una estructura LSA en $\mathfrak{g}$, usaremos la identidad $\mathscr{L}_{[x,y]} = [\mathscr{L}_x, \mathscr{L}_y]$ que vale en general para campos en variedades. Entonces:

$$\begin{aligned}
\iota([x,y]\cdot z)\omega &= \mathscr{L}_{[x,y]}(\iota(z)\omega) \\
&= [\mathscr{L}_x, \mathscr{L}_y](\iota(z)\omega) \\
&= \mathscr{L}_x(\mathscr{L}_y(\iota(z)\omega)) - \mathscr{L}_y(\mathscr{L}_x(\iota(z)\omega)) \\
&= \mathscr{L}_x(\iota(y\cdot z)\omega) - \mathscr{L}_y(\iota(x\cdot z)\omega) \\
&= \iota(x\cdot(y\cdot z))\omega - \iota(y\cdot(x\cdot z))\omega \\
&= \iota(x\cdot(y\cdot z) - y\cdot(x\cdot z))\omega.
\end{aligned}$$

Como $\omega$ es no degenerada, resulta $[x,y] = x\cdot(y\cdot z) - y\cdot(x\cdot z)$, y como el producto es compatible con el corchete, esta identidad es equivalente a (25), por lo que este producto es una estructura LSA en $\mathfrak{g}$. □

Para probar el siguiente teorema usaremos resultados un poco más avanzados que los utilizados hasta el momento sobre álgebras de Lie, en particular, sobre la cohomología de álgebras de Lie.

**Teorema 10.7** ([6, Theorem 7])**.** *Un álgebra de Lie semisimple no admite estructuras LSA.*

*Demostración.* Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y supongamos que admite una estructura LSA, con representación asociada

$$\ell : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}), \quad \ell(x)y = x\cdot y.$$

Notar que de la identidad $\ell([x,y]) = [\ell(x), \ell(y)]$ se deduce que $\mathrm{tr}\,\ell([x,y]) = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ es semisimple, sabemos que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, por lo que

$$\mathrm{tr}\,\ell(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}. \tag{27}$$

Considerando ahora la representación adjunta de $\mathfrak{g}$, es decir, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad}_x(y) = [x,y]$, llegamos de la misma manera a

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_x = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g}. \tag{28}$$

Recordamos ahora unos conceptos mínimos sobre cohomología de álgebras de Lie:

- Un endomorfismo lineal $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ se dice un *1-cociclo* con respecto a la representación $\ell$ si $f([x,y]) = \ell(x)f(y) - \ell(y)f(x)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.
- Un endomorfismo lineal $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ se dice un *1-coborde* con respecto a la representación $\ell$ si existe $e \in \mathfrak{g}$ tal que $f(x) = \ell(x)e$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.
- Es claro que todo 1-coborde es un 1-cociclo.
- Cuando $\mathfrak{g}$ es semisimple, uno de los famosos Lemas de Whitehead asegura que *todo 1-cociclo es un 1-coborde*.

Sea I el operador identidad en $\mathfrak{g}$. Es claro que $\mathrm{I} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\ell$. Por la observación anterior, I es un 1-coborde de $\mathfrak{g}$, es decir, existe $e \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{I}(x) = \ell(x)e$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, es decir, $x \cdot e = x$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Ahora calculamos:

$$\mathrm{ad}_e(x) = [e,x] = e\cdot x - x\cdot e = e\cdot x - x = \ell(e)x - \mathrm{I}(x),$$

es decir, $\mathrm{ad}_e = \ell(e) - \mathrm{I}$. De allí se deduce

$$\dim \mathfrak{g} = \mathrm{tr}\,\mathrm{I} = \mathrm{tr}\,\ell(e) - \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_e = 0,$$

usando (27) y (28). Este absurdo muestra que no puede existir una estructura LSA en $\mathfrak{g}$. □

De los Teoremas 10.6 y 10.7 se deduce inmediatamente:

**Corolario 10.8** ([6, Theorem 8])**.** *Ningún grupo de Lie semisimple admite formas simplécticas invariantes a izquierda.*

¿Qué ocurre con los grupos compactos? Veremos como consecuencia de estos resultados sobre álgebras de Lie semisimples que los únicos grupos compactos que admiten formas simplécticas invariantes a izquierda son los toros.

**Proposición 10.9** ([6, Theorem 10])**.** *Si* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times \mathfrak{r}$ *(producto directo de álgebras de Lie) con* $\mathfrak{s}$ *semisimple y* $\mathfrak{r}$ *soluble y* $\mathfrak{g}$ *admite formas simplécticas, entonces* $\mathfrak{s} = \{0\}$*, es decir,* $\mathfrak{g}$ *es soluble.*

*Demostración.* Supongamos $\mathfrak{s} \neq \{0\}$. Si $\omega$ una forma simpléctica en $\mathfrak{g}$, probaremos primero que $\omega(\mathfrak{s}, \mathfrak{r}) = 0$. En efecto, si $x, y \in \mathfrak{s}$ y $u \in \mathfrak{r}$ entonces de $d\omega(x,y,u) = 0$ y usando (23) llegamos a

$$\omega([x,y],u) = -\omega([y,u],x) - \omega([u,x],y) = 0.$$

Como $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$ resulta $\omega(\mathfrak{s},\mathfrak{r}) = 0$.

Sean $\{x_1, \dots, x_p\}$ una base de $\mathfrak{s}$ y $\{x_{p+1}, \dots, x_{2n}\}$ una base de $\mathfrak{r}$. Entonces la matriz de $\omega$ en la base $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$ es de la forma

$$[\omega] = \left(\begin{array}{c|c} (\omega(x_i,x_j))_{1\le i,j\le p} & 0 \\ \hline 0 & (\omega(x_i,x_j))_{p+1\le i,j\le 2n} \end{array}\right).$$

Notemos que $\omega|_{\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}}$ es cerrada. Como $\mathfrak{s}$ no admite formas simplécticas, entonces

$$\det(\omega(x_i,x_j))_{1\le i,j\le p} = 0.$$

Luego, $\det[\omega] = 0$, que es un absurdo. Llegamos así a $\mathfrak{s} = \{0\}$. □

**Corolario 10.10.** *Si un grupo de Lie compacto G admite formas simplécticas invariantes a izquierda entonces G es un toro.*

*Demostración.* Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de $G$. Es sabido que $\mathfrak{g}$ admite una descomposición como producto directo $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times \mathfrak{z}$, donde $\mathfrak{s}$ es semisimple y $\mathfrak{z}$ es el centro de $\mathfrak{g}$, en particular $\mathfrak{z}$ es abeliano (y por lo tanto soluble). Por la Proposición 10.9 obtenemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}$ es abeliano, y es sabido que los únicos grupos de Lie compactos y abelianos son los toros $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. □

Otra consecuencia de la Proposición 10.9 se refiere a grupos de Lie en dimensión 4:

**Corolario 10.11** ([6, Theorem 9])**.** *Si un grupo de Lie G de dimensión 4 admite formas simplécticas invariantes a izquierda entonces G es soluble.*

*Demostración.* Si $G$ no es soluble entonces su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, con $\mathfrak{s}$ subálgebra semisimple de dimensión 3 y $\mathfrak{r}$ ideal soluble de dimensión 1. Mostraremos que $[\mathfrak{s},\mathfrak{r}] = 0$, como consecuencia de $\dim \mathfrak{r} = 1$. En efecto, sea $x_0$ un elemento no nulo de $\mathfrak{r}$, y definamos $c : \mathfrak{s} \to \mathbb{R}$ por $[u, x_0] = c(u)x_0$, $u \in \mathfrak{s}$. Ahora, si $u, v \in \mathfrak{s}$ entonces se deduce de $[[u,v],x_0] = -[[v,x_0],u] - [[x_0,u],v]$ que $c([u,v]) = 0$. Como $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$ resulta $c \equiv 0$ y entonces $[\mathfrak{s},\mathfrak{r}] = 0$.

De la Proposición 10.9 se obtiene que $\mathfrak{s} = \{0\}$, que contradice $\dim \mathfrak{s} = 3$. Luego $\mathfrak{g}$ es soluble. □

**Observaciones 10.12.**

1. No todos los grupos de Lie solubles de dimensión 4 admiten formas simplécticas invariantes a izquierda. La clasificación de las álgebras de Lie de dimensión 4 que admiten formas simplécticas fue dada en [17]. Queda como ejercicio demostrar que el álgebra de Lie $\mathfrak{d}_4$, que tiene una base $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ con corchetes $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_4,e_1]=e_1$, $[e_4,e_2]=-e_2$, no admite tales formas (se verifica que toda 2-forma cerrada es degenerada).
2. Se sabe que en dimensión 6 hay 34 clases de isomorfismo de álgebras de Lie nilpotentes. En [18] se probó que las álgebras de exactamente 8 de esas clases no admiten formas simplécticas.

**Ejemplo 10.13.** ([6]) Exhibimos a continuación un álgebra de Lie no soluble de dimensión 6 que admite formas simplécticas. Sea

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ 0 & a_4 & a_5\\ 0 & a_6 & -a_4\end{pmatrix} \mid a_i\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}).$$

$\mathfrak{g}$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ y contiene una subálgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ (tomando $a_1=a_2=a_3=0$), por lo que $\mathfrak{g}$ no es soluble.

Sea $\{e_i \mid i=1,\dots,6\}$ la base de $\mathfrak{g}$ dada por: $e_i=(a_i=1, a_j=0\ \forall j\neq i)$. Si $\{e^i \mid i=1,\dots,6\}$ denota la base dual de $\mathfrak{g}^*$ entonces es fácil comprobar, usando (24), que

$$\mathrm{d}e^1=0,\quad \mathrm{d}e^2=-e^{12}-e^{24}-e^{36},\quad \mathrm{d}e^3=-e^{13}-e^{25}+e^{34},$$
$$\mathrm{d}e^4=-e^{56},\quad \mathrm{d}e^5=-2e^{45},\quad \mathrm{d}e^6=2e^{46}.$$

Aquí estamos usando la notación $e^{ij}=e^i\wedge e^j$.

La verificación de que $\omega=e^{12}+e^{24}+e^{36}-e^{45}$ es una forma simpléctica en $\mathfrak{g}$ es sencilla.

Hay restricciones para la existencia de formas simplécticas en álgebras de Lie con centro no trivial, como lo muestra el siguiente resultado.

**Teorema 10.14.** *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con centro $\mathfrak{z}$ no trivial y $\mathfrak{g}$ admite formas simplécticas entonces* $\dim\mathfrak{z}+\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\leq\dim\mathfrak{g}$.

*Demostración.* Sea $\mathfrak{z}^\perp=\{x\in\mathfrak{g}\mid\omega(x,z)=0 \text{ para todo } z\in\mathfrak{z}\}$. Como $\omega$ es no degenerada vale que $\dim\mathfrak{z}+\dim\mathfrak{z}^\perp=\dim\mathfrak{g}$. Luego, basta probar que $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\leq\dim\mathfrak{z}^\perp$. Para ver esto, sean $x,y\in\mathfrak{g}$ arbitrarios y $z\in\mathfrak{z}$. De $\mathrm{d}\omega(x,y,z)=0$ y usando (23) se obtiene

$$\omega([x,y],z)=-\omega([y,z],x)-\omega([z,x],y)=0,$$

es decir, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{z}^\perp$, y por lo tanto $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\leq\dim\mathfrak{z}^\perp$. □

**Corolario 10.15** ([7, Proposition 4.8])**.** *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente (i.e., $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{z}$) y admite formas simplécticas entonces* $\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\leq\frac{1}{2}\dim\mathfrak{g}$.

**Ejemplo 10.16.** Dado un espacio vectorial real $V$ de dimensión finita $n\geq 2$, podemos construir un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de la siguiente manera. El espacio vectorial subyacente es $\mathfrak{g}=V\oplus\bigwedge^2 V$, y el corchete de Lie está dado por $[u,v]=u\wedge v$ para $u,v\in V$. Entonces $\mathfrak{z}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\bigwedge^2 V$. El álgebra $\mathfrak{g}$ se denomina el álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre en $n$ generadores.

Si $\mathfrak{g}$ admite una forma simpléctica entonces, por el corolario previo, tenemos que

$$\binom{n}{2}\leq\frac{1}{2}\left(n+\binom{n}{2}\right),$$

y de allí se deduce $n \leq 3$. La única posibilidad para tener $\dim \mathfrak{g}$ par es $n = 3$, con $\dim \mathfrak{g} = 6$, y es fácil verificar que en este caso $\mathfrak{g}$ admite efectivamente formas simplécticas. Luego, la única álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre que admite formas simplécticas es la que tiene 3 generadores.

Por último, mencionamos el siguiente resultado, cuya demostración es más complicada y no la incluimos en estas notas. Recordamos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice unimodular si $\operatorname{tr} \operatorname{ad}_x = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

**Teorema 10.17** ([6, Theorem 11]). *Si un álgebra de Lie unimodular $\mathfrak{g}$ admite formas simplécticas entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*

Este último teorema nos proporciona otra demostración de que los grupos de Lie semisimples no admiten formas simplécticas invariantes a izquierda.

## 11. Apéndice: La derivada de Lie

Recopilamos aquí algunos preliminares sobre la derivada de Lie. $M$ denota a una variedad diferenciable arbitraria.

(i) Derivada de Lie de una función: para $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, se define $\mathscr{L}_X f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ por

$$\mathscr{L}_X f = Xf.$$

(ii) Derivada de Lie de una forma diferencial: para $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$, se define $\mathscr{L}_X \beta \in \Omega^k(M)$ por

$$\mathscr{L}_X \beta = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_t^* \beta,$$

donde $\{\varphi_t\}$ denota el flujo asociado a $X$.

(iii) Derivada de Lie de un campo vectorial: para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define $\mathscr{L}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$\mathscr{L}_X Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi_{-t})_* Y,$$

donde $\{\varphi_t\}$ denota el flujo asociado a $X$. Se verifica que $\mathscr{L}_X Y = [X, Y]$.

(iv) Producto interior: para $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$, se define $\imath(X)\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ por

$$(\imath(X)\beta)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \beta(X, X_1, \ldots, X_{k-1}),$$

con $X_i \in \mathfrak{X}(M)$.

(v) Fórmulas varias: para $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha \in \Omega^k(M)$, valen:

1. $$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha(X_0, \ldots, X_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \mathscr{L}_{X_i}(\alpha(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k). \end{aligned}$$
2. Fórmula de Cartan: $\mathscr{L}_X \alpha = \mathrm{d}(\imath(X)\alpha) + \imath(X)\,\mathrm{d}\alpha$.
3. $\mathscr{L}_X \alpha$ es $\mathbb{R}$-bilineal en $X$ y en $\alpha$, y $\mathscr{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathscr{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathscr{L}_X \beta$.
4. $\imath([X, Y])\alpha = [\mathscr{L}_X, \imath(Y)]\alpha$.
5. $\mathscr{L}_{[X,Y]}\alpha = [\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y]\alpha$.

## REFERENCIAS


[1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, second edition, Benjamin/Cummings, Advanced Book Program, Reading, MA, 1978. MR 0515141.

[2] B. Aebischer, M. Borer, M. Kälin, Ch. Leuenberger, and H. M. Reimann, *Symplectic Geometry: An Introduction based on the Seminar in Bern, 1992*, Progress in Mathematics, 124, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. MR 1296462.

[3] A. Andrada, M. L. Barberis and G. Ovando, Lie bialgebras of complex type and associated Poisson Lie groups, *J. Geom. Phys.* **58** (2008), no. 10, 1310–1328. MR 2453666.

[4] R. Berndt, *An Introduction to Symplectic Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 26, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001. MR 1793955.

[5] R. Bryant, An Introduction to Symplectic Geometry and Lie Groups: A series of nine lectures on Lie groups and symplectic geometry delivered at the Regional Geometry Institute in Park City, Utah, 24 June–20 July 1991, disponible en https://services.math.duke.edu/~bryant/ParkCityLectures.pdf.

[6] B. Y. Chu, Symplectic homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **197** (1974), 145–159. MR 0342642.

[7] I. Dotti and P. Tirao, Symplectic structures on Heisenberg-type nilmanifolds, *Manuscripta Math.* **102** (2000), no. 3, 383–401. MR 1777526.

[8] J.-P. Dufour and N. T. Zung, *Poisson structures and their normal forms*, Progress in Mathematics, 242, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005. MR 2178041.

[9] F. Dumortier and F. Takens, Characterization of compactness for symplectic manifolds, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **4** (1973), no. 2, 167–173. MR 0423413.

[10] R. E. Gompf, A new construction of symplectic manifolds, *Ann. of Math. (2)* **142** (1995), no. 3, 527–595. MR 1356781.

[11] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), no. 2, 307–347. MR 0809718.

[12] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. MR 1306732.

[13] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, second edition, Graduate Texts in Mathematics, 218, Springer, New York, 2013. MR 2954043.

[14] D. McDuff, Examples of simply-connected symplectic non-Kählerian manifolds, *J. Differential Geom.* **20** (1984), no. 1, 267–277. MR 0772133.

[15] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, second edition, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1998. MR 1698616.

[16] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, second edition, Texts in Applied Mathematics, 17, Springer, New York, 1999. MR 1723696.

[17] G. Ovando, Complex, symplectic and Kähler structures on four dimensional Lie groups, *Rev. Un. Mat. Argentina* **45** (2004), no. 2, 55–67. MR 2189839.

[18] S. M. Salamon, Complex structures on nilpotent Lie algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **157** (2001), no. 2-3, 311–333. MR 1812058.

[19] N. R. Wallach, *Symplectic Geometry and Fourier Analysis*, Lie Groups: History, Frontiers and Applications, Vol. V, Math Sci Press, Brookline, MA, 1977. MR 0488148.

[20] A. Weinstein, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Advances in Math.* **6** (1971), 329–346. MR 0286137.

[21] A. Weinstein, Symplectic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **5** (1981), no. 1, 1–13. MR 0614310.

[22] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 3, 523–557. MR 0723816.



(Adrián Andrada) FAMAF-CIEM, UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, CIUDAD UNIVERSITARIA, 5000 CÓRDOBA, ARGENTINA

*Email address*: `andrada@famaf.unc.edu.ar`