ACOTACIÓN DE LA INTEGRAL FRACCIONARIA EN ESPACIOS DE ORLICZ Y DE OSCILACIÓN MEDIA ϕ –ACOTADA

por

Eleonor Harboure, Oscar Salinas y Beatriz Viviani.

§ 1-Introducción y enunciado de los teoremas.

El objetivo de este trabajo es extender algunas acotaciones de la integral fraccionaria a espacios que generalizan los de Lebesgue, los de variación acotada y los de las funciones Lipschitz. Para $0 < \alpha < n$, y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ medible, la integral fraccionaria de orden α se define como

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

cuando esta integral existe. Es bien conocido que si $f \in L^p$, $1 < p < n/\alpha$, $I_\alpha f$ existe en casi todo punto y además es una función de L^q, con $1/q = 1/p - \alpha/n$. Para el caso $p = n/\alpha$, con una adecuada redefinición de I_α (que asegura la existencia de la integral en el infinito) se puede ver que $I_\alpha f$ es una función de oscilación media acotada. También es conocido que si $f \in L^p$ con $p > n/\alpha$ nuevamente una adecuada redefinición de I_α la hace acotada de L^p en el espacio de las funciones Lipschitz de orden β, con $\beta = n\left(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p}\right)$ siempre que $\beta < 1$. Más aún, esto sigue siendo cierto si se pide que la función sólo pertenezca a L^p-débil. Finalmente, la integral fraccionaria también resulta acotada actuando sobre funciones Lipschitz de orden γ dando por resultado una función Lipschitz de orden β para $\beta = \gamma + \frac{\alpha}{n}$, $\beta < 1$. Estos resultados son clásicos y han sido extendidos a ciertos espacios de tipo homogéneo (ver [GV]).

Una familia de espacios que contiene y generaliza a los espacios de Lebesgue es la de los espacios de Orlicz.

Estos espacios vienen definidos a través de una "función de Young", esto es, una función $\phi : I\!R^+ \longrightarrow I\!R^+$ no decreciente, continua a izquierda, tal que $\lim_{t\to 0^+} \phi(t) = 0$ y que satisface la condición Δ_2, es decir, existe una constante A tal que

$$\phi(2t) \le A\ \phi(t) \qquad \forall t > 0$$

Dada una tal función ϕ se define el espacio de Orlicz L_ϕ como el de aquellas funciones medibles para las cuales $\int_{I\!R^n} \phi(|f|) < \infty$. A este espacio se le puede dar una norma (ver [O]). Análogamente puede introducirse la noción de espacio de Orlicz débil.

Dada una función $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ definimos su doble reordenada como $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$, si $t \ne 0$ y $f^{**}(0) = f^*(0)$, donde f^* es la reordenada no creciente de f. Con el concepto de doble reordenada definiremos una noción de espacio de Orlicz débil que ya fue introducido por G.G. Lorentz ([L]) y R. O'Neil ([O]).

(1.4) Definición: Sea ϕ una función creciente no negativa. Diremos que una función $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ está en $\tilde{L}_\phi$ si existe una constante $c > 0$ tal que

$$f^{**}(t) \le c\phi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$$

para todo $t > 0$. Indicaremos con $[f]_\phi$ al ínfimo de las constantes c para las que se cumple la condición anterior.

(1.5) Observación: La función $[\ .\ ]_\phi$ es una norma en $\tilde{L}_\phi$. Para una demostración, ver [O].

(1.6) Observación: Teniendo en cuenta que $f^*(t) \le f^{**}(t)\ \ \forall t$, es inmediato que si $f \in \tilde{L}_\phi$, luego $f^*(t) \le [f]_\phi \phi^{-1}(\frac{1}{t}),\ \ \forall t$. Esto, a su vez, es equivalente a $t\phi(f^*(t)/[f]_\phi) \le 1, \forall t$, lo que nos conduce a $|\{|f| > t\}| \le 1/\phi(t/[f]_\phi),\ \ \forall t$.

Por otra parte los espacios de oscilación media acotada y los espacios de Lipschitz admiten las siguientes generalizaciones.

(1.7) Definición: Sea ϕ una función creciente no negativa. Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está en $BMO(\phi)$ si existe $c > o$ tal que

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - m_B f|dy \leq c\phi(|B|^{\frac{1}{n}})$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$, donde $m_B f = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx$. Denotaremos con $||f||_{BMO(\phi)}$ al ínfimo de las constantes c que satisfagan la condición anterior.

(1.8) Definición: Sea ϕ una función creciente no negativa. Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está en $\Lambda(\phi)$ si existe una constante $c > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c\phi(|x - y|),$$

para todo x, y en $\mathbb{R}^n$. Denotaremos con $||f||_{\Lambda(\phi)}$ al ínfimo de las constantes c que satisfacen la condición anterior.

(1.9) Observación: Es inmediato que $\Lambda(\phi) \subset BMO(\phi)$. Por otra parte, es posible probar (ver [S]) que si $\int_0^1 \frac{\phi(t)}{t}dt < \infty$, luego $BMO(\phi) \subset \Lambda(\psi)$, donde $\psi(t) = \int_0^t \frac{\phi(s)}{s}ds$

Tanto para las funciones ϕ de la definición (1.1) como para las ϕ de las definiciones (1.4) y (1.5) nos serán útiles los siguientes conceptos:

(1.10) Definición: Diremos que una función $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es de tipo superior β (respectivamente de tipo inferior) si para cada $s \geq 1$ (respectivamente $s \leq 1$) existe una constante A tal que para todo $t \in \mathbb{R}^+$ se tiene

$$\phi(st) \leq As^\beta \phi(t)$$

Los resultados obtenidos en este trabajo proveen extensiones de la acotación de la integral fraccionaria sobre L^p-débil, $p \geq \frac{n}{\alpha}$, y sobre los espacios de Lipschitz al contexto de los espacios de Orlicz débiles, $BMO(\phi)$ y $\Lambda(\phi)$. La extensión del resultado de acotación de L^p a L^q fue tratada por O'Neil en [O].

Los resultados más importantes están contenidos en los siguientes teoremas.

(1.11) Teorema: Sean $0 < \alpha < n$ y ϕ una función creciente, no negativa, de tipo inferior mayor o igual que n/α y de tipo superior menor que $n/(\alpha-1)^+$. Luego existe una constante $c > 0$ tal que

$$||I_\alpha f||_{BMO(\psi)} \leq c[f]_\phi,$$

para toda $f \in \tilde{L}_\phi$, con $\psi(t) = \phi^{-1}(\frac{1}{t})\, t^{\frac{\alpha}{n}}$ y donde

$$I_\alpha f(x) = \int_{I\!R^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}}\, f(y)dy.$$

(1.12) Teorema: Sean $0 < \alpha < 1$ y ϕ una función creciente, no negativa y de tipo superior β, $0 \leq \beta < 1-\alpha$. Luego existe $c > 0$ tal que

$$||\tilde{I}_\alpha f||_{\Lambda(\psi)} \leq c||f||_{BMO(\phi)}$$

para toda $f \in BMO(\phi)$, con $\psi(t) = t^\alpha \phi(t)$, y donde

$$\tilde{I}_\alpha f = \int_{I\!R^n} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} \right) f(y)dy.$$

Las demostraciones de estos teoremas aparecen en la sección 3. La sección 2 estará dedicada a la demostración de algunos resultados técnicos.

§ 2. Lemas previos

A fin de ordenar las demostraciones de los teoremas daremos una serie de lemas que pueden resultar interesantes en sí mismos.

(2.1) Lema: Sea ϕ una función creciente no negativa de tipo inferior $\beta > 1$. Luego existe una constante $C > 0$ tal que

$$||\chi_B f||_1 \leq C|B|\phi^{-1}(1/|B|)[f]_\phi$$

para toda $f \in \tilde{L}_\phi$ y toda bola $B \subset I\!R^n$.

Demostración: Sean $f \in \tilde{L}_\phi$ y B una bola en $I\!R^n$. Podemos escribir

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{aligned} \int_B |f| &= \int_0^\infty |\{x \in B/|f(x)| > t\}|dt \\ &\leq a|B| + \int_a^\infty |\{x \in B/|f(x)| > t\}|dt \end{aligned}$$

donde a es un número a elegir. Luego, teniendo en cuenta que $f \in \tilde{L}_\phi$ y ϕ es de tipo inferior $\beta > 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^\infty |\{x \in B/|f(x)| > t\}|dt &\leq a \int_1^\infty \frac{1}{\phi(ta/[f]_\phi)} dt \\ &\leq \frac{Ca}{\phi(a/[f]_\phi)} \int_1^\infty \frac{1}{t^\beta} dt \\ &= \frac{Ca}{\phi(a/[f]_\phi)} \end{aligned}$$

Finalmente, la conclusión del lema se sigue de la última desigualdad y (2.2), tomando $a = \phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)[f]_\phi$. ∎

(2.3) Lema: Sea ϕ una función creciente no negativa, de tipo inferior $\beta > 1$ y de tipo superior γ. Si $\varepsilon > 0$ verifica $\gamma'\varepsilon > 1$, con $\gamma' = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$, luego existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{I\!R^n - B} \frac{f(y)}{|x_0 - y|^{n\varepsilon}} dy \leq C\phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)|B|^{1-\varepsilon}[f]_\phi,$$

para toda $f \in \tilde{L}_\phi$, toda bola $B \in I\!R^n$ de centro x_0 y todo x_0 en $I\!R^n$.

Demostración: Sean $f \in \tilde{L}_\phi$, B una bola y a un número a elegir. Definimos $f^a = f\chi_{\{|f|>a\}}$ y $f_a = f - f^a$. Luego

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{aligned} \int_{I\!R^n - B} \frac{f(y)}{|x_0 - y|^{n\varepsilon}} dy &= \int_{I\!R^n - B} \frac{f^a(y)}{|x_0 - y|^{n\varepsilon}} dy \\ &+ \int_{I\!R^n - B} \frac{f_a(y)}{|x_0 - y|^{n\varepsilon}} dy = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Ahora bien, como $f \in \tilde{L}_\phi$ y ϕ es de tipo inferior mayor que 1, tenemos

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} I_1 \leq |B|^{-\varepsilon}\|f^a\|_1 &= |B|^{-\varepsilon}\int_0^\infty |\{x/|f^a(x)|>t\}|dt \\ &\leq |B|^{-\varepsilon}\left(a|\{x/|f(x)|>a\}|+\int_a^\infty |\{x/|f(x)|>t\}|dt\right) \\ &\leq |B|^{-\varepsilon}\left(\frac{a}{\phi(a/[f]_\phi)}+a\int_1^\infty \frac{1}{\phi(\,ta/[f]_\phi\,)}dt\right) \\ &\leq C\frac{|B|^{-\varepsilon}}{\phi(\,a/[f]_\phi\,)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, tomando p tal que $p>\gamma$ y $p'\varepsilon>1$, se sigue

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \|f_a\|_p\left(\int_{I\!R^n-B}\frac{dy}{|x_0-y|^{n\varepsilon p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= C\|f_a\|_p|B|^{-\varepsilon+\frac{1}{p}} \\ &= C|B|^{-\varepsilon+\frac{1}{p}}\left(p\int_0^a t^{p-1}|\{x/|f(x)|>t\}|dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C|B|^{-\varepsilon+\frac{1}{p}}[f]_\phi\left(\int_0^{a/[f]_\phi}\frac{t^{p-1}}{\phi(t)}dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C|B|^{-\varepsilon+\frac{1}{p}}a\left(\frac{1}{\phi\,(a/[f]_\phi)}\int_0^1 t^{p-\gamma-1}dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C|B|^{-\varepsilon+\frac{1}{p}}\frac{a}{\phi(a/[f]_\phi)^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

Entonces, la acotación buscada se sigue de (2.4), (2.5) y la última desigualdad tomando $a=\phi^{-1}(\,\frac{1}{|B|}\,)[f]_\phi$. ■

(2.6) Lema: Sea ϕ una función creciente no negativa tal que $\phi(2r)\leq c\phi(r)$ para alguna constante $c>0$ y todo $r>0$. Luego

$$\|f\|_{BMO(\phi)} \simeq \sup_B \frac{1}{\phi(|B|^{\frac{1}{n}})}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f-m_Bf|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1\leq p<\infty$.

Demostración: Es claro que para probar el resultado, basta ver que para cada $p \in [1, \infty)$, existe una constante $c > 0$, tal que la desigualdad

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f - m_{\tilde{B}} f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\phi(|B|^{\frac{1}{n}})||f||_{BMO(\phi)},$$

vale para cada bola B, donde $\tilde{B}$ es una dilatación fija de B. Ahora bien, dada $f \in BMO(\phi)$, a partir de [A] es fácil ver que existen constantes $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$ y $0 < \gamma < 1$ tal que para cada bola B se verifica que la reordenada no creciente de $|f - m_{\tilde{B}} f|$, donde $\tilde{B}$ es la bola del mismo centro que B y radio $2/\gamma^{\frac{1}{n}}$ veces el radio de B, está acotada en $(0, |B|)$ por la función

$$\psi_B(t) = \beta||f||_{BMO(\phi)} \int_{\frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{5\gamma}\left(\frac{t}{|B|}\right)^{\alpha}}^{\frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{\gamma}} \frac{\phi(s)}{s} ds.$$

Luego, indicando con $f^{*,B}$ a la reordenada mencionada, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B |f - m_{\tilde{B}} f|^p &= \frac{p}{|B|}\int_0^{|B|} t^{p-1}|\{s \in (0,|B|)/f^{*,B}(s) > t\}|dt \\
&\leq \frac{p}{|B|}\int_0^{|B|} t^{p-1}|\{s \in (0,|B|)/\psi_B(s) > t\}|dt \\
&= \frac{1}{|B|}\int_0^{|B|} \psi_B(t)^p dt \\
&\leq c\frac{||f||_{BMO(\phi)}}{|B|}\phi(|B|^{\frac{1}{n}})^p \int_0^{|B|} (log5(\frac{|B|}{t})^{\alpha})^p dt \\
&= c\phi(|B|^{\frac{1}{n}})^p ||f||^p_{BMO(\phi)} \int_0^1 (log(\frac{5}{t^{\alpha}})^p dt \\
&= c\phi(|B|^{\frac{1}{n}})^p ||f||^p_{BMO(\phi)}
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el lema. ∎

§ 3. Demostración de los teoremas

Usando los resultados de los lemas de la sección anterior demostraremos los teoremas enunciados en la Sección 1.

Demostración del Teorema 1.11: ~~Sea~~ $f \in \tilde{L}_\phi$ y sea $B = B(x_0, r)$ una bola. Para $\tilde{B} = B(x_0, 2r)$ definimos

$$a_B = \int_{I\!R^n} \left(\frac{1 - \chi_{\tilde{B}}(y)}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} - \frac{1 - \chi_{B(0,1)}(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right) f(y) dy.$$

Teniendo en cuenta que la expresión entre paréntesis en el integrando está acotada y se comporta como $|x_0 - y|^{-n+\alpha-1}$ para valores grandes de y, a partir de los lemas (2.1) y (2.3) se sigue que a_B es finito. Podemos escribir

$$\begin{aligned} I_\alpha f(x) - a_B &= \int_{\tilde{B}} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy \\ &+ \int_{I\!R^n - \tilde{B}} \left(\frac{1}{|x - y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} \right) f(y) dy \\ &= I_1(x) + I_2(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahora bien, aplicando el teorema de Tonelli y el lema (2.1), resulta

$$\int_B |I_1(x)| dx \le C |B|^{1+\frac{\alpha}{n}} \phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) [f]_\phi \tag{3.2}$$

Por otra parte, utilizando el lema (2.3), tenemos para $x \in B$

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\le C|B|^{\frac{1}{n}} \int_{I\!R^n - \tilde{B}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha+1}} dy \\ &\le C |B|^{\frac{\alpha}{n}} \phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) [f]_\phi \end{aligned} \tag{3.3}$$

Luego la tesis se sigue fácilmente de (3.1), (3.2) y (3.3). ∎

Demostración del Teorema 1.12: Notemos que la diferencia $|x_1 - .|^{\alpha-n} - |x_2 - .|^{\alpha-n}$ tiene integral nula sobre $I\!R^n$ para todo par $x_1, x_2 \in I\!R^n$. Luego es claro que para probar el Teorema basta ver que existe $C > 0$ tal que

$$(3.4) \quad \int_{I\!R^n} \left|\frac{1}{|x_1-y|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x_2-y|^{n-\alpha}}\right| |f(y)-m_B f| dy \le C\|f\|_{BMO(\phi)} \psi(|x_1-x_2|)$$

para todo par $x_1,\ x_2 \in I\!R^n$, donde $B = B(x_1, 2|x_1-x_2|)$. Ahora, denotando con I_1 e I_2 al valor de la integral restringida a B y $I\!R^n - B$, respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} I_1 &\le \int_B \frac{1}{|x_1-y|^{n-\alpha}} |f(y)-m_B f| dy + \int_{\tilde{B}} \frac{1}{|x_2-y|^{n-\alpha}} |f(y)-m_B f| dy \\ &= I_{11} + I_{12} \end{aligned}$$

donde $\tilde{B} = B(x_2, 4|x_1-x_2|)$. Estimemos I_{11}. Aplicando la desigualdad de Hölder para $p > \frac{n}{\alpha}$ y el lema (2.6), se sigue

$$\begin{aligned} I_{11} &\le |B|^{1/p} \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-m_B f|^p dy\right)^{1/p} \left(\int_B \frac{dy}{|x_1-y|^{(n-\alpha)p'}}\right)^{1/p'} \\ &\le C\|f\|_{BMO(\phi)} \phi(|B|^{1/n}) |B|^{\alpha/n} \end{aligned}$$

En cuanto a I_{12}, sumando y restando $m_{\tilde{B}} f$ y aplicando la estimación precedente obtenemos

$$\begin{aligned} I_{12} &\le \int_{\tilde{B}} \frac{1}{|x_2-y|^{n-\alpha}} |f(y)-m_{\tilde{B}}| dy + |m_B f - m_{\tilde{B}} f| |\tilde{B}|^{\alpha/n} \\ &\le C\|f\|_{BMO(\phi)} \phi(|B|^{1/n}) |B|^{\alpha/n}, \end{aligned}$$

donde, para llegar a la última expresión, hemos utilizado que ϕ es de tipo superior no negativo. Por otra parte, para estimar I_2, partiendo la integral en coronas diádicas e indicando con B_k a la dilatación de orden 2^k de B, tenemos

$$I_2 \le C|B|^{\alpha/n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(1-\alpha)}} \left(\frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} |f(y)-m_B f| dy\right).$$

Ahora bien, para cada k vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} |f(y)-m_B f| dy &\le \frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} |f(y)-m_B f| dy + \sum_{j=1}^{k-1} |m_{B_{j+1}} - m_{B_j} f| \\ &\le C\|f\|_{BMO(\phi)} \sum_{j=1}^{k} \phi(|B_j|^{1/n}) \\ &\le C\|f\|_{BMO(\phi)} k\phi(|B_k|^{1/n}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando que ϕ es de tipo superior β y que $0 < \alpha + \beta < 1$, se sigue

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C|B|^{\alpha/n}||f||_{BMO(\phi)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k(1-\alpha)}} \phi(|B_k|^{1/n}) \\ &\leq C|B|^{\alpha/n}\phi(|B|^{1/n})||f||_{BMO(\phi)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k(1-\alpha-\beta)}} \\ &= C||f||_{BMO(\phi)}\phi(|B|^{1/n})|B|^{\alpha/n}. \end{aligned}$$

Finalmente, (3.4) se deduce inmediatamente a partir de las estimaciones que obtuvimos para I_1 e I_2. ∎

Bibliografía

[A] Aimar, H.: "Rearrangement and continuity properties of $BMO(\phi)$ functions on spaces of homogeneous type", Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. 18 (1991), 353-362.

[GV] Gatto, A. y Vagi, S.: "Fractional integrals on spaces of homogeneous type", impresión previa.

[L] Lorentz, G.: "Some new functional spaces", Ann. of Math. 51 (1950) 37-55.

[O] O'Neil, R.: "Fractional integration in Orlicz spaces", Trans. A.M.S. Vol. 115 (1965), 300-328.

[S] Spanne, S.: "Some functions spaces defined using the mean oscilation over cubes", Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. 19 (1965), 593-608.

Programa Especial de Matemática Aplicada. (CONICET)

Facultad de Ingeniería Química. (UNL)

Güemes 3450.

3000 Santa Fe. Argentina.