Espacios de Hardy y Descomposiciones Atómicas

Carlos Segovia

U.B.A. - CONICET

El propósito de esta conferencia de clausura del 2do. Congreso en honor de Antonio Monteiro es presentar un tema de Análisis Armónico en forma atrayente para jóvenes estudiantes que sientan una inclinación hacia el análisis. Este fué el encargo que recibí de los organizadores y los lectores juzgarán en que medida he cumplido con lo que se me encomendó.

1 Prerrequisitos.

Sea f una función localmente integrable definida sobre $\mathbf{R}^n$. La función maximal de Hardy-Littlewood $Mf(x)$ se define como:

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} |Q|^{-1} \int_Q |f(y)|dy,$$

donde Q denota un cubo de lados paralelos a los ejes coordenados en $\mathbf{R}^n$ que contiene al punto x. Sería equivalente suponer que Q son bolas en lugar de cubos. Los resultados que supondremos conocidos para la función maximal son:

(1.1) (i) *Para todo* p, $1 < p \leq \infty$, *existe una constante* c_p *tal que* $\|Mf\|_p \leq c_p \|f\|_p$ *(Tipo fuerte p-p de M) y*

(ii) *Si* $\|Mf\|_1 < \infty$ *entonces* $f(x) = 0$ *en casi todo* x.

Para una demostración ver [RG].

Sea $k(x)$ una función medible definida en $\mathbf{R}^n - \{0\}$. Diremos que $k(x)$ es un núcleo integral singular si verifica:

(i) $k(x)$ *es positivamente homogénea de grado* $-n$, *esto es* $k(\lambda x) = \lambda^{-n} k(x)$ *para todo* $x \neq 0$, *y* $\lambda > 0$,

(ii)

$$\int_{|x|=1} k(x) d\sigma(x) = 0,$$

donde $d\sigma(x)$ *denota el elemento de área de la esfera unidad en* $\mathbf{R}^n$, *y*

(iii) *Si* $|x| > 2|y|$, *se verifica* $|k(x-y) - k(x)| \leq c|y|/|x|^{n+1}$.

Si $f(x)$ es una función buena, por ejemplo C^1 y con soporte compacto, entonces:

$$Kf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)f(y)dy,$$

existe para todo $x \in \mathbf{R}^n$, supuesto que $k(x)$ sea un núcleo integral singular. Así queda definido un operador que denominaremos operador integral singular.

Supondremos conocido que para cada p, $1 < p < \infty$, existe una constante c_p tal que

(1.2)
$$\|Kf\|_p \leq c_p \|f\|_p \quad (\textit{Tipo fuerte } p{-}p \textit{ para } K).$$

Para una demostración ver [RG].

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las funciones $f \in C^\infty$ que satisfacen para todo k y m enteros no negativos

$$p_{k,m}(f) = sup(1+|x|)^k \max_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f(x)| < \infty.$$

donde α es un multiíndice y $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Este conjunto $\mathcal{S}$ provisto de las normas $p_{k,m}$ se denomina *espacio de funciones rápidamente decrecientes.* Se llamará *distribución temperada* a toda funcional lineal y continua sobre $\mathcal{S}$. La acción de f sobre ψ se denotará $< f, \psi >$.
El espacio de las funcionales lineales continuas sobre $\mathcal{S}$ se denota $\mathcal{S}'$. La convolución de f con ψ es la función de C^∞ definida como

$$< f, \psi(x - .) > .$$

La transformada de Fourier $\hat{f}$ de una función f de L^1 se define como

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $\hat{f} \in \mathcal{S}$. Mas aún la aplicación $f \longrightarrow \hat{f}$ es una biyección continua de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$. Si F es una distribución temperada, entonces definimos $\widehat{F}$ como la distribución temperada definida por

$$< \widehat{F}, \psi > = < F, \widehat{\psi} > .$$

La transformada de Fourier define una aplicación continua y biyectiva de $\mathcal{S}'$ en $\mathcal{S}'$.
Para más información ver [SW].

2 La integral fraccionaria.

Dada $f \in \mathcal{S}$, definimos la integral fraccionaria de orden α de f como

$$\widehat{I_\alpha f}(y) = |y|^{-\alpha}\hat{f}(y), \ 0 < \alpha < n.$$

Obervese que $\widehat{I_\alpha f}$ pertenece a $L^1(\mathbf{R}^n)$. Calcularemos la antitransformada de Fourier de $|y|^{-\alpha}\hat{f}(y)$.
Cambios de variables elementales muestran que si $h(t) = e^{-\pi t^2}$ entonces

$$|y|^{-\alpha} = \frac{2\pi^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty h(|y|t)t^{\alpha-1}dt, \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{2}\,\pi^{(\alpha-n)/2}\Gamma\Big(\frac{n-\alpha}{2}\Big)\,|y|^{\alpha-n} = \int_0^\infty t^{-n}h(|y|/t)t^{\alpha-1}dt.$$

Por lo tanto,

$$\int |y|^{-\alpha}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}dy$$

$$= \frac{2\pi^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty\Big(\int h(|y|t)\ \hat{f}(y)e^{2\pi ixy}dy\Big)t^{\alpha-1}dt$$

$$= \frac{2\pi^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty\Big(\int t^{-n}h(|y|/t)f(x-y)dy\Big)t^{\alpha-1}dt$$

$$= \frac{\pi^{\alpha-(n/2)}\,\Gamma\Big(\dfrac{n-\alpha}{2}\Big)}{\Gamma(\alpha/2)}.\int\frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy.$$

Esto implica que, salvo un factor númerico, $I_\alpha f$ coincide con

$$\int\frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy$$

para $f \in \mathcal{S}$ y $0 < \alpha < n$. En lo sucesivo, ignoraremos el factor númerico.

Nuestro propósito inmediato será estudiar desigualdades en norma del tipo

(2.1)
$$\|I_\alpha f\|_q \ \leq c_{q,p}\ \|f\|_p.$$

En primer lugar veamos para que valores de p y q puede ser válida esta desigualdad. Es fácil verificar que para $\delta > 0$

$$I_\alpha f(x/\delta) = I_\alpha g(x)\delta^{-\alpha}, \text{ donde } g(x) = f(x/\delta).$$

Entonces aplicando (2.1) a g resulta

$$\|I_\alpha g\|_q \leq c_{q,p}\|g\|_p.$$

Como $\|I_\alpha g\|_q = \delta^{\alpha+(n/q)} \|I_\alpha f\|_q$ y $\|g\|_p = \delta^{n/p} \|f\|_p$ resulta

$$\|I_\alpha f\|_q \leq c_{q,p}\, \delta^{(n/p)-\alpha-(n/q)} \|f\|_p.$$

Haciendo tender δ a cero y a infinito resulta que la desigualdad (2.1) es posible solamente si

$$1/q = 1/p - \alpha/n.$$

Veamos ahora bajo que condiciones sobre p se verifica (2.1). Sea $\varphi \in \mathcal{S}$, radial, no negativa y con integral igual a uno. Definimos $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t),\ t > 0$.
Un cambio de variable muestra que

$$|y|^{\alpha-n} = c. \int_0^\infty \varphi_t(y)t^{\alpha-1}dt.$$

Entonces, si $u(x,t) = (\varphi_t * f)(x)$, resulta

(2.2)
$$\int \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy = c\int_0^\infty u(x,t)t^{\alpha-1}dt.$$

Definimos

$$f^*(x) = \sup_{|x-z|<t} |u(z,t)|.$$

Entonces resulta

$$|u(x,t)| \leq f^*(z) \ \ si \ \ |x-z| < t.$$

De esta desigualdad resulta inmediatamente

(2.3)
$$|u(x,t)| \leq \frac{c}{t^{n/p}}\|f^*\|_p.$$

En virtud de (2.2), tenemos

$$I_\alpha f(x) = c\Big(\int_0^N + \int_N^\infty\Big)u(x,t)t^{\alpha-1}dt = A + B.$$

Para A tenemos la estimación

$$|A| \leq c\, f^*(x)\, N^\alpha$$

y para B, en virtud de (2.3)

$$|B| \leq c \int_N^\infty |u(x,t)| t^{\alpha-1} dt \leq c \|f^*\|_p \int_N^\infty t^{\alpha-1-(n/p)} dt = c \|f^*\|_p N^{\alpha-(n/p)},$$

si $p < n/\alpha$. Tomando $N = \left(\|f^*\|_p / f^*(x)\right)^{p/n}$ resulta

$$|I_\alpha f(x)| \leq c f^*(x)^{1-\alpha p/n} \|f^*\|_p{}^{\alpha p/n}.$$

Por lo tanto

$$\|I_\alpha f\|_q \leq c\, \|f^*\|_p{}^{(p/q)+(\alpha p/n)} = c\, \|f^*\|_p,$$

dado que $1/q = 1/p - \alpha/n$.

Ahora bien, nosotros pretendíamos una desigualdad en norma con $\|f\|_p$ y obtuvimos una con $\|f^*\|_p$. Es bien conocido que si $\varphi \in \mathcal{S}$ entonces $f^*(x) \leq cMf(x)$ y por (1.1) resulta para $1 < p < \infty$

$$\|f^*\|_p \leq c\, \|Mf\|_p \leq c' \|f\|_p.$$

Resumiendo, hemos obtenido que si $0 < \alpha < n,\ 1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$, entonces

$$\|I_\alpha f\|_q \leq c\, \|f\|_p$$

y para $p = 1$ tomando $q = \dfrac{n}{n-\alpha}$

(2.4)

$$\|I_\alpha f\|_{n/(n-\alpha)} \leq c\, \|f^*\|_1.$$

En esta desigualdad no puede cambiarse $\|f^*\|_1$, por $\|f\|_1$.
En efecto si χ es la función característica de $\{x : |x| \leq 1\}$ tenemos que para $|x| > 2$,

$$I_\alpha(\chi)(x) = \int_{|y|\leq 1} \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \geq \frac{c}{|x|^{n-\alpha}}.$$

Entonces

$$\|I_\alpha(\chi)\|_{n/(n-\alpha)} \geq c\Big(\int_{|x|>2} \frac{dx}{|x|^n}\Big)^{\frac{n-\alpha}{n}} = +\infty\,.$$

3 Atomos y descomposiciones de H^p.

Para el caso $p = 1$ tuvimos que contentarnos con (2.4). Surge la pregunta ¿ Existen funciones f tales que $\|f^*\|$ sea finita ? ¿ Es posible una descripción simple de todas ellas? Daremos una respuesta afirmativa a la primera pregunta.

Sea $f(x)$ una función acotada con soporte contenido en una bola B de radio r y con integral nula. Podemos suponer que el centro de B es 0. Calcularemos $f^*(x)$.

Tenemos
$$u(y,t) = \int \varphi_t(y-z)f(z)dz$$

de donde resulta $|u(y,t)| \leq \|f\|_\infty$.

Además dado que $\int f(x)dx = 0$, tenemos

$$u(y,t) = \int [\varphi_t(y-z) - \varphi_t(y)]f(z)dz.$$

Como $\varphi \in \mathcal{S}$, tenemos que $|\nabla\varphi(x)| \leq c\ (1+|x|)^{-n-1}$. Entonces por el teorema del valor medio resulta

$$|\varphi_t(y-z) - \varphi_t(y)| \leq t^{-n}|\nabla\varphi\Big(\frac{(y-z)}{t}(1-\theta) + \frac{y}{t}\theta\Big)|(|z|/t)$$

$$\leq c(|(y-z)(1-\theta) + y\theta| + t)^{-n-1}|z|.$$

Supongamos $|y| + t > 2r,\ |z| \leq r$. Entonces

$$(|(y-z)(1-\theta) + y\theta| + t) \geq |y| + t - r \geq (|y| + t)/2.$$

En consecuencia
$$|\varphi_t(y-z) - \varphi_t(y)| \leq c\ \frac{r}{\Big(|y|+t\Big)^{n+1}}\ ,$$

y por lo tanto
$$|u(y,t)| \leq c\|f\|_\infty \frac{r^{n+1}}{\Big(|y|+t\Big)^{n+1}}\ .$$

Si $|x| > 2r$ y $|x-y| < t$ tenemos $|y| + t > |x| - t + t = |x| > 2r$.
Entonces
$$|u(y,t)| \leq c\ \|f\|_\infty \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n+1}.$$

En definitiva tenemos

$$f^*(x) \leq \|f\|_\infty \text{ si } |x| \leq 2r, \quad \text{y}$$

$$f^*(x) \leq c\|f\|_\infty \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n+1}, \; si \; |x| > 2r.$$

Entonces

(3.1)

$$\int f^*(x)dx \leq c \; \|f\|_\infty . r^n.$$

Esto nos dice que las funciones $f(x)$ cuyas $f^*(x)$ pertenecen a L^1 pueden ser distintas de la función 0. Esto contesta la primera pregunta, al principio del parágrafo.
En el próximo parágrafo contestaremos a la segunda pregunta.

4 Atomos y Espacios H^p.

Sea N = parte entera de $n\left(\frac{1}{p} - 1\right)$. Diremos que una función $a(x)$ es un p-átomo , $0 < p \leq 1$, si existe una bola B tal que

(i) soporte de $a \subset B$,

(ii) $\|a\|_\infty \leq |B|^{-1/p}$,

(iii) $\int x^\alpha \, a(x) \, dx = 0$ para todo multiíndice α, $|\alpha| \leq N$.

Si $p = 1$, (3.1) implica que

$$\int a^*(x)dx \leq c.$$

Si $0 < p < 1$, argumentos análogos a los que condujeron a (3.1) muestran que

$$\int a^*(x)^p dx \leq c.$$

El concepto de átomo se debe a R. Coifman [C].

Podemos definir H^1 como el espacio de todas las funciones f cuyas f^* pertenecen a L^1, con $\|f\|_{H^1} = \|f^*\|_1$.

Para definir los H^p con $0 < p < 1$ debemos considerar distribuciones temperadas. Sea f una distribución temperada, definimos:

$$u(x,t) = < f, \varphi_t(x - .) > .$$

Diremos que $f \in H^p$ si $f^*(x) = \sup_{|x-y|<t} |u(y,t)|$ pertenece a L^p *con* $\|f\|_{H^p} = \|f^*\|_p$.

Teorema de descomposición atómica (*R. Coifman*). Dado $f \in H^p$ existen una sucesión $\{a_k\}$ de p-átomos y $\{\lambda_k\}$ una sucesión de números reales tales que $\sum |\lambda_k|^p < \infty$ y

(4.1)
$$f = \sum \lambda_k \, a_k.$$

Además, existen constantes c_1, c_2 independientes de f tales que

$$c_1 \, \|f^*\|_p \leq inf(\sum |\lambda_k|^p)^{1/p} \leq c_2 \|f^*\|_p,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles descomposiciones de f de la forma (4.1).

Este teorema da una descripción muy simple de los espacios H^p en término de átomos con lo que damos una respuesta afirmativa, a la segunda pregunta al comienzo del parágrafo 3.

Para una demostración de la descomposición atómica ver [R.G.] o [T].

Para terminar daremos una aplicación a integrales singulares.

Sea K un operador integral singular con $p > n/(n+1)$. Entonces N en la definición de p-átomo es igual a cero. Sea $a(x)$ un p- átomo. Supongamos para simplificar que el centro de B es cero. Entonces

$$\int_{2B} |Ka(x)|^p dx \leq c \, (\int |Ka(x)|^2 dx)^{p/2} . |B|^{\frac{2-p}{2}}$$

En virtud de (1.2), tenemos

$$\int_{2B} |Ka(x)|^p dx \leq c \, (\int |a(x)|^2 dx)^{p/2} . |B|^{1-(p/2)} \leq c|B|^{-1}|B|^{p/2}|B|^{1-(p/2)} = c.$$

Por otra parte, si $x \notin 2B$ y como $\int a(y)dy = 0$, tenemos

$$Ka(x) = \int k(x-y)a(y)dy = \int [k(x-y) - k(x)]a(y)dy.$$

Entonces, como $|x| > 2r \geq 2|y|$

$$|Ka(x)| \leq c|x|^{-n-1} \, r^{1-(n/p)+n},$$

de donde

$$\int_{x\notin 2B} |Ka(x)|^p dx \le c\, r^{-n} \int_{|x|>2r} (r/|x|)^{(n+1)p} dx = c.$$

En conclusión

$$\int |Ka(x)|^p \, dx \le c.$$

Entonces, si $f \in H^p$ y $f = \sum \lambda_k a_k$ con $\sum |\lambda_k|^p \le c\|f^*\|_p^p$, tenemos $Kf = \sum \lambda_k K a_k$ y

$$\int |Kf(x)|^p dx \le \sum |\lambda_k|^p \int |Ka_k|^p dx \le c \sum |\lambda_k|^p \le c\|f^*\|_p^p = c\|f\|_{H^p}^p$$

o sea K es un operador acotado de H^p en L^p,

$$\|Kf\|_p \le c\|f\|_{H^p}.$$

Bibliografía

[C] Coifman, R.- *A real variable characterization of H^p*, Studia Math. 51 (1974), 269-274.

[R.G.] Rubio de Francia, J.L. and García Cuerva, J. -*Weighted Norm Inequalities and Related Topics.* North-Holland, Mathematical Studies 116, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford , 1985.

[S.W.] Stein, E.M. and Weiss, G.- *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, Princeton, 1971.

[T] Torchinsksy, A. - *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, New York, 1986.