Convergencia de mejores aproximantes

Felipe Zó

Introducción. En esta nota describiremos algunos problemas de continuidad para operadores de mejor aproximación cuando se varía la clase aproximante. Existen dos motivaciones naturales para considerar este tipo de problemas. Primero pensemos que nuestra clase aproximante es un conjunto de funciones definido sobre cierto dominio del espacio euclídeo y que queremos encontrar una "buena aproximación"de la mejor aproximación, que a veces no puede ser calculada directamente. Si la clase aproximante tiene dimensión infinita es natural aproximar esta clase por otra de dimension finita, calcular la mejor aproximación dentro de esta clase y ver como varía el mejor aproximante cuando la clase aproximante original es alcanzada de alguna manera por estas clases de dimensión finita. Creemos que sería ilustrativo para el lector tener presente el caso cuando la clase aproximante es el conjunto de todas las funciones monótonas crecientes en el intervalo $[0,1]$ y que además son de cuadrado integrable. Un cálculo efectivo de la mejor aproximante de una función, digamos con la norma L^2, se puede hacer tomando una partición finita fija del intervalo $[0,1]$ y considerando la mejor aproximación de la función original sacada de la clase aproximante formada por las funciones monótonas escaleras asociadas a la partición dada. Es de esperar que refinamientos de la partición conducirán a la convergencia de las mejores aproximantes así obtenidas.

La segunda motivación puede encontrarse en el estudio de la teoría de las martingalas con sus ya conocidas aplicaciones a las Probabilidades, la Estadística y aún en el Análisis Matemático. Así describiremos en un primer término algunas propiedades de continuidad para la esperanza condicional. Pensaremos la esperanza condicional como un operador de mejor aproximación en L^2 siendo su clase aproximante un subespacio, o sea que es una proyección ortogonal. Este operador tiene una serie de propiedades que, de alguna manera, se extienden a otros operadores como son los de predicción y de mejor aproximación isotónica. El operador de predicción se obtiene en forma análoga a la esperanza condicional pero cambiando la norma L^2 por la norma L^p ; en cambio para obtener la mejor aproximación isotónica se cambia también la clase aproximante, usualmente conjuntos convexos, lo que nos lleva a problemas no lineales aún trabajando con la norma L^2. Una descripción de las aplicaciones de este último operador se puede encontrar en los libros [BBBB] y [RWD] y en los trabajos [LR], [BR].

I Esperanza condicional.

Trabajaremos en un espacio de medida finita M con una σ-álgebra $\mathbf{M}$. Sean $f \in L^2(\mathbf{M})$ y $\mathbf{F} \subset \mathbf{M}$ una σ-álgebra. Denotaremos por $E_{\mathbf{F}}(f)$ a la proyección $P_F(f)$ con $F = L^2(\mathbf{F})$. La expresión $E_{\mathbf{F}}(f)$ es la esperanza condicional de la función f, dada la σ-álgebra $\mathbf{F}$. Estamos frente a un operador simétrico idempotente que cumple:

$$\|E_{\mathbf{F}}(f)\|_p \leq \|f\|_p \quad 1 \leq p < \infty,$$

así, $E_{\mathbf{F}}(f)$ tiene una extensión continua a todo $L^1(\mathbf{M})$. Discutiremos la continuidad de $E_{\mathbf{F}}(f)$ haciendo variar la σ -álgebra $\mathbf{F}$.

1. *Sea* $\mathbf{F}_n$ *una sucesión de* σ*-álgebras encajadas contenidas en* $\mathbf{M}$ *y denotemos por* $\mathbf{F}$ *la* σ*-álgebra límite, y para* $f \in L^1(\mathbf{M})$ *sea* $f_n = E_{\mathbf{F}_n}(f)$, *entonces*

(1.1) *Para* $f \in L^2$ *la sucesión* f_n *converge hacia* $E_{\mathbf{F}}(f)$ *en* L^2.

(1.2) *Si* $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, f_n *converge hacia* $E_{\mathbf{F}}(f)$ *en* L^p.

(1.3) *Hay convergencia en casi todo punto para* f *integrable.*

El resultado **(1.1)** se puede obtener mediante un teorema abstracto de proyecciones y de que, por ejemplo, $L^2(\mathbf{F})$ es igual al subespacio generado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{F}_n)$. Fácilmente se demuestra que **(1.2)** es equivalente a **(1.1)**. La parte **(1.3)** es un conocido resultado de Doob. La demostración clásica de (**1.3**) se basa en que la función maximal $\bar{f}(x) = \sup_{n\geq 1} |f_n(x)|$ es de tipo débil L^1. Se puede demostrar la convergencia puntual para $f \in L^2$ sin hacer uso de la función maximal, ver [**LR**] (1980).

Para obtener convergencia puntual es importante que las σ-álgebras estén encajadas, ejemplo de Boylan (1971). Si las σ-álgebras no están encajadas pero " convergen rápidamente", Mukerjee (1984), vale la convergencia puntual.

Ejemplo de Boylan. En el espacio $[0,1)$ consideramos una sucesión de conjuntos (A_n), $A_n \subseteq [\frac{1}{2}, 1)$, $limsup A_n = [\frac{1}{2}, 1]$, $|A_n| \to 0$.

Con $B_n = [0, \frac{1}{2}) \cup A_n$ formamos la σ-álgebra $\mathbf{F}_n = \{\phi, [0,1), B_n, B_n'\}$.Se puede ver que $d(\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_\infty) = |A_n|$, donde $\mathbf{F}_\infty = \{\phi, [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1), [0,1)\}$.

La distancia de Hausdorff entre dos σ-álgebras está dada por

$$d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = max(\sup_{B\in\mathbf{B}} \inf_{A\in\mathbf{A}} |B \triangle A|, \sup_{A\in\mathbf{A}} \inf_{B\in\mathbf{B}} |B \triangle A|)$$

Para $f = \chi_{[0,\frac{1}{2})}$ obtenemos

$$E_{\mathbf{F}_n}(f)(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+|A_n|} & \text{si } x \in B_n \\ 0 & \text{si } x \in B_n'. \end{cases}$$

Si $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ tenemos $0 = liminf\, E_{\mathbf{F}_n}(f)(x) < limsup\, E_{\mathbf{F}_n}(f)(x) = 1$.

(1.4).Mukerjee(1984).Si $f \in L^1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} d(\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_\infty) < \infty$ entonces la sucesión $E_{\mathbf{F}_n}(f)(x)$ converge a $E_{\mathbf{F}_\infty}(f)(x)$ en casi todo punto.

Convergencia en norma. Criterios para la convergencia en norma, digamos en L^2, para $E_{\mathbf{F}_n}(f)$ cuando $\mathbf{F}_n \subseteq \mathbf{M}$ no están necesariamente encajadas fueron dados por Kudo (1974), Tsukada (1984), Brambila-Alonso (1990). Dada una sucesión de σ-álgebras $\mathbf{F}_n$ definimos

$$liminf\ \mathbf{F}_n = \mathbf{F}_\infty = \{\, E \in \mathbf{M} \mid \lim_{n\to\infty} \inf_{F\in\mathbf{F}_n} |E \triangle F| = 0 \,\}.$$

$$W = \{\, f \in L^2(\mathbf{M}) \mid existe\,(f_{n_k})\, en\, L^2(\mathbf{F}_{n_k}) \,:\, f_{n_k} \rightharpoonup f \,\},$$

entonces ponemos $\mathbf{F}^\infty$ para la mínima σ-álgebra que hace medible W. Siempre se cumple $\underline{\mathbf{F}} \subset \mathbf{F}_\infty \subset \mathbf{F}^\infty \subset \overline{\mathbf{F}}$, siendo $\underline{\mathbf{F}}$ y $\overline{\mathbf{F}}$ los límites conjuntistas de la sucesión $(\mathbf{F}_n)$.

(1.5). *Las σ-álgebras $\mathbf{F}_\infty$,$\mathbf{F}^\infty$ coinciden p.p. sii $E_{\mathbf{F}_n}(f)$ es de Cauchy en L^2.*

Lo anterior se puede obtener como corolario de un resultado general de Tsukada (1983), este último basado en un trabajo de Mosco (1969). Existen varias maneras de caracterizar la convergencia en norma.

Equiconvergencia en norma. Boylan (1972), Neveu (1972), Rogge (1974) y Mukerjee (1984). Para ciertos $\Phi \subset L^1$ ponemos

$$M_\Phi = \sup_{f\in\Phi} \|E_{\mathbf{F}_n}(f) - E_{\mathbf{F}_\infty}(f)\|_2$$

(1.6). *Sea Φ el conjunto de las funciones medibles valuadas en $[0,1]$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ σ-álgebras en* **M**, *entonces tenemos* $d(\mathbf{A},\mathbf{B}) \leq M_\Phi \leq c_2(d(\mathbf{A},\mathbf{B})(1 - d(\mathbf{A},\mathbf{B})))^{\frac{1}{2}}$, *siendo* c_2 *una constante que se conoce exactamente y* $d(.,.)$ *la distancia de Hausdorff definida anteriormente.*

II Extensiones.

Sea $\mathbf{L}$ un σ-reticulado en $\mathbf{M}$, ponemos $L^p(\mathbf{L})$ para las funciones $\mathbf{L}$ medibles en L^p y para $f \in L^p(\mathbf{M})$ sea $P_\mathbf{L}(f)$ la proyección de f sobre $L^p(\mathbf{L})$ con la norma $\|.\|_p$. La función $P_\mathbf{L}(f)$ claramente existe para $1 < p < \infty$. También existe para $0 < p$. **[LR2]**.

El siguiente es un resultado de Brunk (1975).

(2.1). *Si* $2 \leq p$, $\|f\|_\infty \leq 1$, $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *σ-reticulados, entonces tenemos* $\|P_\mathbf{A}(f) - P_\mathbf{B}(f)\|_p^p \leq 2^p(d(\mathbf{A},\mathbf{B})(1 - d(\mathbf{A},\mathbf{B})))^{\frac{1}{p}}$.

No sé si existen resultados similares a **(2.1)** para $p < 2$.

Para $p = 2$ el orden de convergencia de $\|P_{\mathbf{L}_n}(f) - P_{\mathbf{L}_\infty}(f)\|_2$ dado por este último resultado es $(d(\mathbf{L}_n, \mathbf{L}_\infty))^{\frac{1}{4}}$, mientras que los resultados en **(1.6)** para el caso de σ-álgebras nos da un orden de convergencia de $(d(\mathbf{L}_n, \mathbf{L}_\infty))^{\frac{1}{2}}$. El operador $P_\mathbf{L}(f))$ fue ampliamente estudiado por Landers y Rogge (1981) obteniendo resultados similares a los indicados en **1**.

(2.2). *El operador* $P_\mathbf{L}(f)$ *se extiende con continuidad monótona a* $L^{p-1}(\mathbf{M})$, *aun para* $1 < p < 2$.

(2.3). *Si los σ- reticulados* $\mathbf{L}_n \nearrow \mathbf{L}_\infty$ $(\mathbf{L}_n \searrow \mathbf{L}_\infty)$ *entonces tenemos* $P_{\mathbf{L}_n}(f) \to P_{\mathbf{L}_\infty}(f)$ *p.p. para* $f \in L^{p-1}$, $1 < p < \infty$.

(2.4). *Sean los σ-reticulados como en* **(2.3)**, *entonces se tiene convergencia en norma* L^q *para* $p - 1 \leq q$.

(2.5). *Sea* $\overline{P}(f) = \sup_n P_{\mathbf{L}_n}(|f|)$ *entonces* $|\{\overline{P}(f) > t\}| \leq \frac{c_p}{t^{p-1}} \int |f|^{p-1}$ *y además* $\|\overline{P}(f)\|_q \leq \|f\|_q$, $p - 1 < q$.

Pregunta. De qué forma convergen los reticulados $\mathbf{L}_n$ para que valga: $\mathbf{L}_n \to \mathbf{L}_\infty$ sii $\|P_{\mathbf{L}_n}(f) - P_{\mathbf{L}_\infty}(f)\|_p \to 0$, cuando $n \to \infty$?

III Extensiones clásicas a espacios de Orlicz.

En lo que sigue φ es al menos una función convexa, no negativa, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(x) \to \infty$ si $x \to \infty$. Supondremos que los espacios de Orlicz cumplen $L^\varphi = L^\varphi_\infty$. Las clases aproximantes C, C_n y C_∞ serán al menos conjuntos reticulados y cerrados en L^φ. Pondremos

$$\mu_\varphi(f/C) = \{\, g \in C \mid \int \varphi(|f-g|) = \inf_{h\in C} \int \varphi(|f-h|)\,\}$$

$$\mu_{\|\ \|_\varphi}(f/C) = \{\, g \in C \mid \|f-g\|_\varphi = \inf_{h\in C} \|f-h\|_\varphi \,\}$$

(3.1).*Landers y Rogge (1981).Sean C_n y C_∞ tal que $C_n \nearrow C_\infty$ ($C_n \searrow C_\infty$), f_n una sucesión en L^φ que converge p.p. hacia f tal que $\sup_n |f_n| \in L^\varphi$. Para cada sucesión $g_n \in \mu_\varphi(f_n/C_n)$ tenemos:*

a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} g_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} g_n \in \mu_\varphi(f/C_\infty)$

b) $\sup_{1\leq n} |g_n| \in L^\varphi$.

Se conoce que $\mu_\varphi(\,.\,/C)$ y $\mu_{\|\ \|_\varphi}(\,.\,/C)$ son operadores continuos en L^φ, C debe ser además un cono. Ver [**LR1**].

Un conjunto C contenido en L^φ es φ-cerrado sii $f_n \in C$, $f_n \nearrow f \in L^\varphi$ o $f_n \searrow f \in L^\varphi$ entonces $f \in C$.

(3.2). *L-R (1980). Suponemos φ no negativa, no decreciente, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\infty) = \infty$. Los aproximantes C_n y C_∞ como en* **(3.1)** *pero φ-cerrados. Sean $f \in L^\varphi$ y $f_n \in \mu_\varphi(f/C_n)$. Entonces*

a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \in \mu_\varphi(f/C_\infty)$

b) $\sup_{1\leq n} |f_n| \in L^\varphi$.

Si además la función φ es convexa se obtienen resultados análogos a **(3.2)** reemplazando $\mu_{\|\ \|_\varphi}(f/C_n)$ por $\mu_\varphi(f/C_n)$. Aquí la convergencia se debe entender en $\|\ \|_\varphi$. Ver [**LR2**].

Pregunta. Es cierto el resultado **(3.1)** para funciones φ más generales que las funciones convexas?

IV Extensiones a espacios normados del problema de convergencia en norma.

Suponemos que X es un espacio real normado de dimensión finita o en su defecto que X y X^* tienen normas Frechet diferenciables. Las clases aproximantes C_n son subconjuntos convexos cerrados no vacíos de X. Siguiendo a Mosco (1969) definimos los siguientes límites

$$s - liminf\, C_n = C_\infty = \{\, x \in X \mid d(x, C_n) \to 0 \;, n \to \infty \,\}$$

$$w - limsup\, C_n = C^\infty = \overline{Co}\{\, x \in X \mid existe\; x_{n_k} \in C_{n_k} : x_{n_k} \rightharpoonup x \,\}$$

En la situación supuesta las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $s - liminf\, C_n = w - limsup\, C_n \neq \phi$.

b) *Las proyecciones métricas* $P_{C_n}(x)$ *convergen cuando* $n \to \infty$ *para cada* $x \in X$.

Recordemos que X^* tiene una norma Frechet diferenciable sii X es estrictamente convexo, reflexivo y tiene la propiedad H. Nos interesará estudiar el problema de la convergencia en norma para espacios de Orlicz no reflexivos.

V Resultados más recientes en espacios de Orlicz.

Suponemos que la función φ es estrictamente convexa, no negativa, vale 0 en el origen, tiende a infinito en el infinito, $\varphi(2x) \leq c\varphi(x)$ para valores grandes de x y $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Supondremos que las clases aproximantes $C_n \subset X$ son conjuntos convexos cerrados en L^1.

(5.1). *Si* $C_\infty = C^\infty = C$, $C \neq \emptyset$ y $f_n \xrightarrow{L^\varphi} f$ *entonces tenemos* $\|\mu_{\|\,\|_\varphi}(f_n/C_n) - \mu_{\|\,\|_\varphi}(f/C)\|_\varphi \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Los límites C_∞ y C^∞ están definidos en forma similar a lo hecho en **IV**, más precisamente:

$$C_\infty = \{\, g \in L^\varphi \mid existe\, g_n \in C_n \;:\; \|g_n - g\|_\varphi \to 0 \; si\; n \to \infty \,\},$$

$$C^\infty = \{\, g \in L^\varphi \mid existe\, g_{n_k} \in C_{n_k} \;:\; g_{n_k} \rightharpoonup g\, en\, L^1 \; si\; k \to \infty \,\}.$$

La demostración de **(5.1)** se basa en el siguiente resultado.

(5.2). *Con las mismas hipótesis de* **(5.1)** *para* C_n *se sigue que*

$\| \mu_\varphi(f_n/C_n) - \mu_\varphi(f/C) \|_\varphi \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

También se puede obtener convergencia puntual para $\mu_\varphi(f_n/C)$ si C es además un reticulado.

Estas técnicas se pueden utilizar para obtener mejores aproximaciones por funciones monótonas. Ver [**C**].

Ejemplo de técnica de demostración.

Sea $e(f/C) := \inf_{g\in C} \ \|f-g\|_\varphi$,veremos que

(5.3). *Si* $f_n \overset{L^\varphi}{\to} f$ *cuando* $n \to \infty$ *y* $\lim C_n = C \neq \emptyset$, *entonces* $e(f_n/C_n) \to e(f/C)$, *cuando* $n \to \infty$.

Suponemos que $f_n \equiv f$. Sea (n_k) tal que $lim_{k\to\infty} e(f/C_{n_k}) = \underline{\lim}_{n\to\infty} e(f/C_n)$. Sean $h_{n_k} \in \mu_{\|\,\|_\varphi}(f/C_{nk})$ y $g \in C$ arbitrarias, y sea ahora $g_n \in C_n$ tal que $g_n \overset{L^\varphi}{\to} g$. Como $\|f - h_{n_k}\|_\varphi \leq \|f - g_{n_k}\|_\varphi$, tenemos que la sucesión (h_{n_k}) es acotada en L^φ, luego existe una subsucesión de ella, denotada nuevamente por h_{n_k}, y una función $h \in L^1$ tal que $h_{n_k} \overset{L^1}{\rightharpoonup} h$. Como $C = C^\infty$ se tiene $h \in C$, pero además $h \in \mu_{\|\,\|_\varphi}(f/C)$. En efecto

$\|f-h\|_\varphi \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \|f-h_{n_k}\|_\varphi \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|f-g_n\|_\varphi = \|f-g\|_\varphi$.

Por lo tanto $e(f/C) \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \|f-h_{n_k}\|_\varphi = \underline{\lim}_{n\to\infty} \ e(f/C_n)$

Sean $h \in \mu_{\|\,\|_\varphi}(f/C)$, $h_n \in \mu_{\|\,\|_\varphi}(h/C_n)$ y $g_n \in \mu_{\|\,\|_\varphi}(f/C_n)$,luego

$e(f/C_n) = \|f-g_n\|_\varphi \leq \|f-h_n\|_\varphi$.

Pero como $h \in C = C_\infty$ se sigue $d_{\|\,\|_\varphi}(h/C_n) \to 0$, i.e. $h_n \overset{L^\varphi}{\to} h$. Luego

$\overline{\lim}_{n\to\infty} e(f/C_n) \leq \lim_{n\to\infty} \|f-h_n\|_\varphi = \|f-h\|_\varphi = e(f/C)$.

Para el caso general se usa

$|e(f_n/C_n) - e(f/C)| \ \leq \ \|f-f_n\|_\varphi + |e(f/C_n) - e(f/C)|$.

Referencias.

[BBBB]. Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M., and Brunk, H. D. *Statistical Inference Under Order Restrictions.* Wiley, New York (1972).

[RWD]. Robertson, T., Wright, F.T., and Dykstra, R. L. *Order Restricted Statistical Inference.* John Wiley (1988).

[N]. Neveu, J. *Note on the Tightness of the metric on the set of Complete Sub σ-álgebras of a Probability Space.* The Ann. of Mathematical Statistics, 1972, Vol. 43, No. 4, 1369-1371.

[R]. Rogge, L. *Uniform Inequalities for Conditional Expectations.* The Ann. of Probability, 1974, Vol.2, No. 3,486-489.

[B]. Boylan, E. S. *Equiconvergence of Martingales.* The Ann. of Math. Statistics, 1971, Vol. 42, No., 552-559.

[K]. Kudõ, Hirokichi. *A note on the strong convergence of σ-álgebras.*The Ann. of Probability 1974, Vol. 2, No. 1, 76-83.

[M]. Mukerjee, H. G. *Almost sure equiconvergence of conditional expectations* .The Ann. of Probability, 1984, Vol. 12, No.3, 733-741.

[BA]. Brambila-Paz, F. and Alonso A. *L^p Continuity of Conditional Expectations.* Trieste, IC/90/117.

[LR]. Landers, D. and Rogge, L. *Isotonic Approximation in L_s* . JOAT 31, 199-223 (1981).

[BR]. Brunk, H. D. *Uniform inequalities for conditional p-means given σ-lattices.* The Ann. of Probability,1975, Vol.3, No.6, 1025-1030.

[T]. Tsukada, M. *Convergence of Closed Convex Sets and σ-Fields.*Z. Wahr.,62,137-146 (1983).

[T1]. Tsukada, M. *Convergence of Best Approximations in a Smooth Banach Space,*JOAT Vol.40, No.4, 301-309 (1984).

[LR1]. Landers, D. and Rogge, L. *Continuity of Best Approximants,*Proc. AMS, Vol.83, No. 4, 683-689 (1981).

[LR2]. Landers, D. and Rogge, L. *Best Approximants in L_φ Spaces, Z. Wahrs.,51, 215-237 (1980).*

[C]. *Cuenya, H.Mejores Aproximantes en Espacios de Orlicz , Tesis Doctoral UNSL, Febrero 1992.*

[CZ]. *Cuenya, H.and Zó, F. Convergence of best norm approximation in Orlicz Spaces. Preprint UNSL.*

Nota: El texto anterior está basado en la conferencia dictada por el autor en el 2^0 Congreso "Dr. A. Monteiro", Bahía Blanca 30 de abril de 1993.
Deseo expresar mi agradecimiento a la Comisión Organizadora de este Congreso por la hospitalidad ofrecida durante mi estada en dicha ciudad.

Instituto de Matemática Aplicada San Luis. UNSL-CONICET.

Av. Ejército de los Andes 950. 5700. San Luis. Argentina.