Notas del Curso

INTEGRALES SINGULARES

II Congreso en homenaje a

Antonio Monteiro

Bahía Blanca, Abril 1993

Hugo Aimar

Estas notas contienen los temas de introducción a las integrales singulares expuestos en el curso "Integrales Singulares" dictado durante el Segundo Congreso "Antonio Monteiro" en Bahía Blanca, en el mes de abril de 1993.

El propósito de dicho curso fue, por una parte, mostrar la necesidad del estudio de las integrales singulares desde el enfoque de la teoría de potencial como herramientas para abordar problemas límites y de regularidad, por otra parte, proponer la necesidad de la generalización a contextos no algebraicos: espacios de tipo homogéneo y, finalmente, introducir, demostrar y aplicar el Lema de Cotlar sobre operadores casi ortogonales en espacios de Hilbert.

El Lema de Cotlar y la desigualdad de tipo débil (1,1) que han sido probados en el desarrollo del curso están sin demostración en estas notas (ver referencias bibliográficas)

Los lemas de cubrimiento de tipo Wiener y la descomposición de Calderón-Zygmund del espacio y de funciones integrables que usamos aquí se encuentran en las notas del curso "Lemas de Cubrimiento" de L. Forzani y R. Macías.

CAPITULO I

§ (1.) Introducción. Potenciales electrostáticos de Green e integrales singulares con núcleos de tipo Calderón–Zygmund.

A partir de la Ley de Coulomb y del principio de superposición, introduciremos el concepto de campo eléctrico generado por una distribución de cargas y su correspondiente potencial electrostático. Consideraremos tres casos especiales: potencial generado por una densidad espacial de cargas, potencial de capa simple y potencial de capa doble. Luego veremos que la fórmula de representación de Green permite expresar una función de clase C^2 en términos de estos tres potenciales básicos.

Finalmente observaremos cómo estos potenciales inducen sendas integrales singulares cuando se plantean problemas analíticos de regularidad de soluciones y de convergencia en la frontera. Obtendremos estimaciones de los núcleos singulares que serán fundamentales para dar un enfoque unificado en el contexto de espacios de tipo homogéneo al método de Calderón–Zygmund para el estudio de las propiedades de acotación de operadores integrales singulares.

Ley de Coulomb: Sea $\bar{q} \in I\!R$ la magnitud de una carga eléctrica ubicada en el punto x_0 del espacio euclídeo $I\!R^3$. La magnitud de la fuerza de atracción o repulsión que experimenta otra carga q ubicada en el punto $x \in I\!R^3$ está dada por

$$F(x,q) = \frac{|\bar{q}|\,|q|}{|x - x_0|^2}$$

La fuerza está dada por el vector

$$F(x,q) = \frac{\bar{q}\,q}{|x - x_0|^2} \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$$

Se llama campo eléctrico generado por la carga puntual $\bar{q}$ en x_0 al campo vectorial $E(x) = F(x,1)$. El campo eléctrico E generado por la carga puntual $\bar{q}$ en x_0 puede escribirse como convolución de la distribución $\bar{q}\,\delta_{x_0}$ con el campo vectorial $v(x) = \frac{x}{|x|^3}$, en símbolos

$$E(x) = [\bar{q}\,\delta_{x_0} * v](x)$$

Principio de superposición: Dado un sistema de cargas puntuales en el espacio se tiene que la fuerza que experimenta una carga q colocada en un punto $x \in I\!R^3$ es igual a la suma de las fuerzas que experimentaría q en x por la acción individual de cada una de las cargas puntuales del sistema.

En términos de la operación de convolución de distribuciones de Schwartz, la Ley de Coulomb junto con el principio de superposición pueden enunciarse así : Dada una distribución con soporte compacto ($T \in E'$) en el lenguaje de la Teoría de Distribuciones de Schwartz (T una distribución de cargas en el lenguaje físico) el campo eléctrico generado por T en $I\!R^3$ es la distribución

$$E = T * v$$

donde el miembro derecho debe entenderse como el vector cuya i–ésima componente es la convolución de T con la i–ésima componente de v.

El potencial de un campo eléctrico E es un campo escalar $\Phi : I\!R^3 \to I\!R$ tal que $\nabla\phi = E$. La diferencia de potencial $\phi(x_1) - \phi(x_2)$ entre dos puntos x_1 y x_2 del espacio es una medida del trabajo que debe hacerse contra el campo eléctrico E para trasladar la carga puntual unitaria desde x_1 hasta x_2.

El potencial del campo eléctrico $E = T * v$ generado por una distribución de cargas T en $\mathcal{E}'$ está dado por

$$\Phi = T * N \qquad ; \qquad N(x) = \frac{1}{|x|}$$

Ejemplos: (1) Si $T = T_f$ con $f \in S(I\!R^3)$ esto es $\langle T, \varphi\rangle = \int f\varphi$, entonces el potencial eléctrico y el campo eléctrico son funciones

$$\Phi(x) = \int_{I\!R^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy$$
$$E(x) = \int_{I\!R^3} f(y)\frac{(x-y)}{|x-y|^3}\, dy$$

Observamos aquí que tanto Φ como una coordenada cualquiera del campo eléctrico E están acotadas por una integral fraccionaria de la densidad espacial de cargas f, de la forma

$$I_\alpha f(x) = \int_{I\!R^3} \frac{f(y)}{|x-y|^{3-\alpha}}\, dy \quad ; \quad \alpha = 2, 1.$$

Escribiendo $I_\alpha f(x) = K_1 * f(x) + K_2 * f(x)$ con

$$K_1(z) = \frac{\chi_{B(0,1)}(z)}{|z|^{3-\alpha}}$$
$$K_2(z) = \frac{\chi_{B'(0,1)}(z)}{|z|^{3-\alpha}},$$

tenemos que $K_1 \in L^1(I\!R^3)$ y por consiguiente $K_1 * f$ converge para casi todo x y representa una función de L^p si $f \in L^p$ con $p \geq 1$. Por otra parte

$$\int_{I\!R^3} K_2(x-y)|f(y)|\,dy \;\leq\; \|f\|_p \Big(\int_{I\!R^3} K_2(z)^{p'}\,dz\Big)^{\frac{1}{p'}},$$

la última integral es convergente si $p < \frac{3}{\alpha}$. Si $f \in L^p(I\!R^3)$ con $p < \frac{3}{2}$, entonces, ambos Φ y E están definidos por integrales absolutamente convergentes.

(1.2) Si μ es una medida de Borel finita en $I\!R^3$, entonces,

$$\Phi(x) = \int_{I\!R^3} \frac{d\mu(y)}{|x-y|}$$
$$E(x) = \int_{I\!R^3} \frac{x-y}{|x-y|^3}\,d\mu(y)\,,$$

están bien definidos. Cuando $\mu = q\delta_{x_0}$ se tiene la ley de Coulomb.

Cuando Ω es un conductor cargado se tiene una distribución superficial de cargas sobre $\partial\Omega$ que se modela con la medida $d\mu = f d\sigma$, donde $d\sigma$ es la medida de superficie en $\partial\Omega$ y f es la densidad superficial de cargas, de este modo tenemos el *potencial de capa simple.*

$$\Phi(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{f(y)d\sigma(y)}{|x-y|}$$

y el correspondiente campo eléctrico generado por una *capa simple.*

En los ejemplos precedentes hemos introducido dos de los tres tipos básicos de potenciales, los ejemplos siguientes introducen el *potencial de capa doble.*

(1.3) La derivada direccional en la dirección u de la delta de Dirac corresponde al dipolo eléctrico puntual de momento u.

Sean q^+ y q^- dos cargas eléctricas, una positiva y la otra negativa de igual magnitud $|q^+| = |q^-| = q$. Supongamos que q^+ está en el origen de coordenadas y que q^- está en el punto $d\,u$, donde $d > 0$ y $|u| = 1$.

El potencial del campo eléctrico generado por este sistema de cargas está dado por

$$\Phi(x) = \frac{q^+}{|x|} + \frac{q^-}{|x - du|} = q\{\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x - du|}\} = qd.\frac{\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x-du|}}{d}$$

Supongamos que $d \to 0$ y $q \to \infty$ de modo que $qd \to 1$. Entonces, el potencial límite

$$\Phi(x) = D_u(\frac{1}{|x|}) = u.\nabla(\frac{1}{|x|}) = u.\nabla N$$

corresponde al "dipolo puntual de momento u". Para encontrar la distribución de cargas, necesitamos escribir Φ en la forma $T * N$. Sea $T = D_u\delta_0$ donde δ_0 es la Delta de Dirac soportada en el origen y $D_u\delta_0 = u.\nabla\delta_0 = \sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial\delta_0}{\partial x_i}$ se toma en el sentido de las distribuciones de Schwartz. Esto significa que

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i\langle\frac{\partial\delta_0}{\partial x_i}, \varphi\rangle = -\sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0).$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} T * N &= \sum_{i=1}^{3} u_i\frac{\partial\delta_0}{\partial x_i} * N \\ &= \sum_{i=1}^{3} u_i(\delta_0 * \frac{\partial N}{\partial x_i}) \\ &= u.\nabla N \\ &= \Phi \end{aligned}$$

y, en definitiva, el dipolo puntual de momento u en el origen está representado por la distribución $D_u\delta_0$.

(1.4) Potencial del campo eléctrico generado por una *capa doble*. Sea S una superficie regular en el espacio. Supongamos que en cada punto P de S hay un dipolo de dirección $\vec{\nu}(P)$ normal a S en P y de magnitud $f(P)$

El potencial del campo eléctrico generado por el elemento $d\sigma(P)$ en el punto x, de acuerdo al ejemplo (1.3), será

$$d\phi(x) = f(P)\,\nu(P).\nabla N(x-P)d\sigma(P)$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_S \frac{\nu(P).(x-P)}{|x-P|^3} f(P)\,d\sigma(P)\\ &= \int_S \frac{\partial N}{\partial \nu}(x-P)\,f(P)\,d\sigma(P)\end{aligned}$$

es el potencial del campo eléctrico generado por la capa doble de cargas con densidad $f(P)$ sobre la superficie S.

Ejercicio: Encontrar la distribución de Schwartz T tal que $T*N$ sea el potencial de capa doble. $(\Phi(x) = \sum_{i=1}^3 \int_S D^i N(x-P)\nu_i(P)\,f(P)\,d\sigma(P) = N*(\sum_{i=1}^3 D^i S^i)$ con $(S^i,\varphi) = \int_S \varphi(P)\nu_i(P)\,f(P)\,d\sigma(P))$.

Representación de Green de funciones de clase $C^2(\bar{\Omega})$.

Sea Ω un dominio acotado con borde regular de clase C^1 en $I\!R^n$. Sea u una función de clase $C^2(\bar{\Omega})$.

Problema: Encontrar una distribución de cargas soportada en $\bar{\Omega}$ tal que el potencial del campo eléctrico generado por esa distribución sea u.

Una solución de este problema viene dada por la fórmula de Green en la que intervienen los tres tipos básicos de potencial : N, newtoniano de una densidad espacial en Ω; C_d, de capa doble de una densidad sobre $\partial\Omega$ y C_s, capa simple de una densidad sobre $\partial\Omega$.

Sea

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\frac{1}{|x|^{n-2}}; & n>2\\ \frac{1}{2\pi}\log|x|; & n=2.\end{cases}$$

(1.5) **Lema**: Si $u\in C^2(\bar{\Omega})$, entonces, para todo $x\in\Omega$ se tiene

$$\begin{aligned}u(x) = &\int_D \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial D}\frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{\nu}}(x-y)\,u(y)\,d\sigma(y) - \int_{\partial D}\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}(y)\,d\sigma(y)\\ =&N(\Delta u)(x) + C_d(u)(x) - C_s(\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}})(x)\,.\end{aligned}$$

Demostración: Si D es un dominio en $\mathbb{R}^n$ que tiene las mismas propiedades que Ω y u y v están en $C^2(\bar{D})$, aplicando el teorema de la divergencia a los campos vectoriales $u\nabla v$ y $v\nabla u$, tenemos

$$\int_D \nabla u.\nabla v + \int_D u\,\Delta v = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}}$$
$$\int_D \nabla u.\nabla v + \int_D v\,\Delta u = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}$$

si a la segunda de estas ecuaciones restamos la primera, tenemos

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial D} (v\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}})$$

Sea x un punto fijo en Ω. Sea $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset \Omega$. Sea $D = \Omega - B(x,r)$. La función $v(y) = \Gamma(x-y)$ es armónica en D, por consiguiente

$$\begin{aligned}\int_D \Gamma(r-y)\Delta u(y)\,dy = \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(y)\,d\sigma(y) - \int_{|x-y|=r} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(y)\,d\sigma(y)\\ - \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial}{\partial \vec{\nu}}\Gamma(x-y)\,d\sigma(y) + \int_{|x-y|=r} u(y)\frac{\partial}{\partial \vec{\nu}}\Gamma(x-y)\,d\sigma(y)\end{aligned}$$

los vectores normales están siempre dirigidos hacia el exterior de los dominios que las superficies encierran. Observemos que el miembro izquierdo de la desigualdad precedente converge a $\int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(y)\,dy$ cuando $r \to 0$. El lema estará probado si demostramos que el segundo término en el miembro derecho tiende a cero y el último a $u(x)$ cuando $r \to 0$. En efecto ($n \geq 3$)

$$\begin{aligned}|\int_{|x-y|=r} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(y)\,d\sigma(y)| &\leq \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}\frac{1}{r^{n-2}}\int_{|x-y|=r} |\nabla u.\nu|d\sigma(y)\\ &\leq \frac{\|\nabla u\|_\infty}{n-2}\,r \to 0\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|=r} u(y)\nabla_y\Gamma(x-y).\vec{\nu}(y)d\sigma(y) &= \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{|x-y|=r} u(y)\frac{y-x}{|x-y|^n}.\frac{y-x}{r}\,d\sigma(y)\\ &= \frac{1}{r^{n-1}|S^{n-1}|}\int_{|x-y|=r} u(y)\,d\sigma(y) \to u(x), r \to 0.\end{aligned}$$

Integrales singulares asociadas a los potenciales newtonianos de capa simple y de capa doble

(1.6) Regularidad del potencial Newtoniano. En la fórmula de Green del lema precedente la función $f = \Delta u$ es continua ya que suponíamos que $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Resulta de interés desde el punto de vista de la teoría de Ecuaciones Diferenciales el problema recíproco: qué propiedades de regularidad tiene $Nf(x)$ cuando f está por ejemplo en un espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$. Dado que $Nf = \Gamma * f$, sus derivadas segundas en el sentido de las distribuciones están dadas por $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} Nf = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} * f$, donde $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}$ debe entenderse en el sentido de las distribuciones. Por consiguiente, si el operador

$$f \to \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j} * f$$

aplica L^p en L^p, tendremos que Nf pertenecerá al espacio de Sobolev $W^{2,p}$.

Supongamos por ejemplo, que $i \neq j$. Entonces, en el sentido de las distribuciones, tenemos que

$$\langle \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \rangle = v.p. \int K(y)\varphi(y)\, dy$$

donde $K(y) = c\frac{y_i y_j}{|y|^{n+2}}$. El miembro derecho es la distribución

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} K(y)\varphi(y)\, dy$$

Por consiguiente, la convolución de $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}$ con φ viene dada por

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)\varphi(y)\, dy$$

donde $K(x,y) = K(x-y)$. El núcleo $K(x,y)$ satisface las propiedades de tamaño y regularidad que constituyen el punto de partida para la aplicación de las técnicas de Calderón y Zygmund:

$$(1.7) \qquad |K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n};$$

$$(1.8) \qquad \text{existe} \delta > 0 \text{ tal que si } 2|x_o - x| < |x-y| \text{entonces}$$

$$|(K(x_o,y) - K(x,y)| + |K(y,x_o) - K(y,x)| \leq C\frac{|x-x_o|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}.$$

Observemos que $K(y) = \frac{\Omega(y)}{|y|^n}$ con $\Omega(y) = C\frac{y_i y_j}{|y|^2}$. La función Ω es homogénea de grado cero y acotada, de donde (1.7) sigue claramente. Para demostrar (1.8), notemos en primer lugar que $|\nabla K(z)| \leq \frac{C}{|z|^{n+1}}$. Como $K(x,y) = K(x-y)$, basta probar que

$$|K(x_0,y) - K(x,y)| \leq C\frac{|x-x_o|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \qquad para \qquad 2|x_0 - x| < |x-y| .$$

Sea $\psi(t) = K(tx_0+(1-t)x-y)$. Entonces $\psi\prime(t) = \nabla K(tx_0+(1-t)x-y).(x_0-x)$ y

$$\begin{aligned} |K(x_0,y) - K(x,y)| = |\psi(1) - \psi(0)| &\leq |\nabla K(tx_0 + (1-t)x - y)||x - x_0| \\ &\leq C\frac{|x-x_0|}{|tx_0 + (1-t)x - y|^{n+1}} \end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} |x-y| &\leq |tx_0 + (1-t)x - y| + |tx_0 + (1-t)x - x| \\ &\leq |tx_0 + (1-t)x - y| + |t(x_0 - x)| \\ &\leq |tx_0 + (1-t)x - y| + \frac{1}{2}|x-y|, \end{aligned}$$

por consiguiente (1.2) está probada.

Un núcleo K con las propiedades (1.7) y (1.8) será llamado núcleo de Calderón–Zygmund. Si en $I\!R^n$ introducimos la casi–métrica $d(x,y) = |x-y|^n$, entonces tendremos que

$$|B_d(x,r)| = c\,r$$

y que (1.7) y (1.8) toman la forma

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{d(x,y)}$$

y

$$|K(x_0,y) - K(x,y)| + |K(y,x_0) - K(y,x)| \leq \frac{C d(x,x_0)^\beta}{d(x,y)^{1+\beta}}$$

para $d(x,y) > C\,d(x_0,x)$.

(1.9) Valor de borde del potencial de capa doble de una densidad g sobre $\partial\Omega$

Sea Ω un dominio con borde C^1. Sea g una función de clase Lipschitz sobre el borde de Ω, entonces la integral

$$Dg(x) = C_n \int_{\partial\Omega} \frac{(x-\eta).\nu(\eta)}{|x-\eta|^n} g(\eta)\, d\sigma(\eta)$$

que define el valor del potencial de capa doble de g en el punto x perteneciente a Ω, es absolutamente convergente. Sea x un punto cualquiera en Ω, aplicando la identidad de Green a la función $u \equiv 1$ y eligiendo adecuadamente C_n vemos que

$$C_n \int_{\partial\Omega} \frac{(x-\eta).\nu(\eta)}{(x-\eta)^n}\, d\sigma(\eta) = 1\,.$$

Por consiguiente

$$Dg(x) = C_n \int_{\partial\Omega} \frac{(x-\eta).\nu(\eta)}{|x-\eta|^n}[g(\eta)-g(x)]\, d\sigma(\eta) + g(x)\,.$$

Como g es Lipschitz en $\partial\Omega$, la integral en el miembro derecho de la igualdad precedente es convergente aún cuando x sea un punto de $\partial\Omega$ y, para $\xi \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\xi \\ x\in\Omega}} Dg(x) =& C_n \int_{\partial\Omega} \frac{(\xi-\eta).\nu(\eta)}{|\xi-\eta|^n}[g(\eta)-g(\xi)]\, d\sigma(\eta) + g(\xi) \\ =& \frac{g(\xi)}{2} + C_n\, lim_{\epsilon\to 0} \int_{\substack{\partial\Omega \\ |\xi-\eta|>\epsilon}} \frac{(\xi-\eta).\nu(\eta)}{|\xi-\eta|^n} g(\eta)\, d\sigma(\eta)\,.\end{aligned}$$

Para probar la última igualdad bastará demostrar que, para g Lipschitz, se tiene

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0} C_n \int_{\substack{\partial\Omega \\ |\partial\xi-\eta|>\epsilon}} \frac{(\xi-\eta).\nu(\eta)}{|\xi-\eta|^n} g(\eta)\, d\sigma(\eta) \\ &= C_n \int_{\partial\Omega} \frac{(\xi-\eta).\nu(\eta)}{|\xi-\eta|^n}[g(\eta)-g(\xi)]\, d\sigma(\eta) + \frac{1}{2} g(\xi)\end{aligned}$$

Veamos esto, sea $K(\xi,\eta) = C_n \frac{(\xi-\eta).\nu(\eta)}{|\xi-\eta|^n}$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\substack{\partial\Omega \\ |\xi-\eta|>\epsilon}} K(\xi,\eta) g(\eta) d\sigma(\eta) =& \int_{\substack{\partial\Omega \\ |\xi-\eta|>\epsilon}} K(\xi,\eta)[g(\eta)-g(\xi)]\, d\sigma(\eta) \\ &+ g(\xi) \int_{\substack{\partial\Omega \\ |\xi-\eta|>\epsilon}} K(\xi,\eta)\, d\sigma(\eta)\end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$\int_{\substack{\partial\Omega \\ |\xi-\eta|>\epsilon}} K(\xi,\eta)\, d\sigma(\eta) = \int_{\partial(\Omega - B(\xi,\epsilon))} K(\xi,\eta)\, d\sigma(\eta) - \int_{\Omega\cap\partial B(x,\epsilon)} K(\xi,\eta)\, d\sigma(\eta)$$

y que el primer término es cero por el teorema de la divergencia. Para el segundo tenemos que

$$\int_{\Omega\cap\partial B(\xi,\varepsilon)} K(\xi,\eta)\,d\sigma(\eta) = \frac{C_n}{\varepsilon^{n-1}}\int_{\Omega\cap\partial B(x,\varepsilon)} d\sigma(\eta)$$

que converge a $\frac{1}{2}$ si $\partial\Omega$ tiene plano tangente en ξ.

Para g Lipschitz en $\partial\Omega$ tenemos que

$$Tg(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{\partial\Omega\\ |\xi-\eta|>\varepsilon}} K(\xi,\eta)g(\eta)\,d\sigma(\eta)$$

existe interés a estudiar la existencia del límite en el sentido de $L^p(\partial\Omega)$ y puntualmente en casi todo punto (con respecto a $d\sigma$) cuando la función g está en $L^p(\partial\Omega)$.

Sea Ω un abierto acotado de $I\!R^n$ tal que $\partial\Omega$ es Lipschitz. Esto significa que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $P_0 \in \partial\Omega$ existen un cubo C centrado en P_0 de lado ε, un sistema de coordenadas $(x_1,\ldots,x_{n-1};x_n) = (x\prime, x_n)$ y una función $\varphi(x\prime) = \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})$ de clase Lipschitz tales que

$$P_0 = (0,0,\ldots,0;0) = (0,\ \varphi(0)),$$

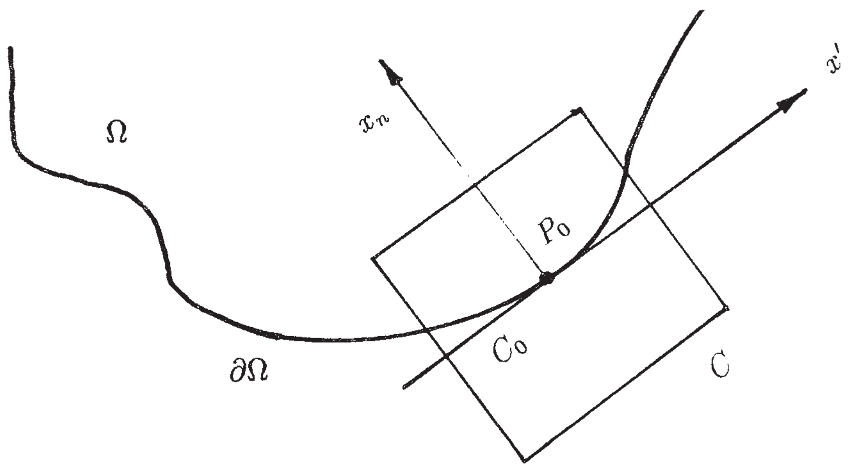
$$C\cap\partial\Omega = \{(x\prime,\varphi(x\prime)) : x\prime \in C_0\}$$

donde

$$C_0 = \{x\prime : \max_{i=1,\ldots,n-1} |x\prime_i| \le \varepsilon/2\}$$

y

$$\Omega\cap C = \{x_n > \varphi(x\prime)\}\cap C\,.$$



Sea $d : \partial\Omega\times\partial\Omega \to I\!R^+\cup\{0\}$ definida por $d(\xi,\eta) = |\xi-\eta|^{n-1}$. Entonces

i) $d(\xi,\eta) = 0 \Longleftrightarrow \xi = \eta$.

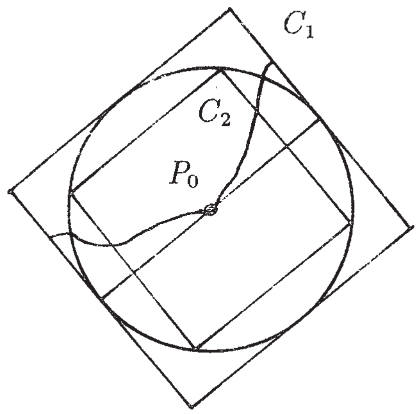
ii) $d(\xi,\eta) = d(\eta,\xi)$.

iii) $d(\xi,\eta) \leq K(d(\xi,\tau) + d(\tau,\eta))$.

Sea $d\sigma$ el área en la superficie $\partial\Omega$ extendida como una medida sobre la σ-álgebra de Borel en $\partial\Omega$. La estructura métrica y la estructura de espacio de medida están relacionadas. Sea

$$B(P_0,r) = \{Q \in \partial\Omega : d(P_0,Q) < r\} = \{Q \in \partial\Omega : |P_0 - Q| < r^{\frac{1}{n-1}}\}$$

Supongamos que $0 < r < (\frac{\varepsilon}{2})^{n-1}$. Sean C_1 y C_2 los cubos circunscripto e inscripto, respectivamente, en la bola $\{y \in I\!R^n : |P_0 - y| < r^{\frac{1}{n-1}}\}$ con aristas paralelas a las de C y a los ejes coordenados en P_0



Observemos que $C^2 \cap \partial\Omega \subset B(P_0,r) \subset C\prime \cap \partial\Omega$. Por consiguiente

$$\sigma(C^2 \cap \partial\Omega) \leq \sigma(B(P_0,r) \leq \sigma(C^1 \cap \partial\Omega).$$

Por otra parte

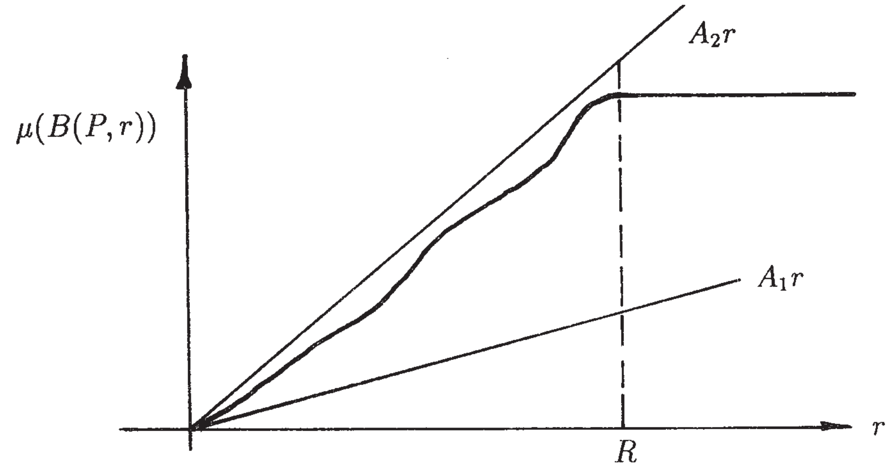
$$\begin{aligned}\sigma(C^2 \cap \partial\Omega) &= \int_{x\prime \in {C_0}^2} \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x\prime)|^2}\, dx\prime \\ &\geq \quad \text{área de} \quad {C_0}^2 = \alpha r^{\frac{n-1}{n-1}} = \alpha\, r\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sigma(C\prime \cap \partial\Omega) &= \int_{x\prime \in {C_0}^1} \sqrt{1 + |\nabla\varphi(x\prime)|^2}\, dx\prime \\ &\leq \sqrt{1 + M^2} \quad \text{área de} \quad {C_0}^1 \leq \beta r\end{aligned}$$

Dado que $\partial\Omega$ es acotado, existe $R > 0$ tal que $B(P_0,r) = \partial\Omega\,\forall r > R$. Como la función $\mu(B(P_0,r))$ es creciente de r y las constantes α y β no dependen de P_0 tenemos las siguientes estimaciones para $\mu(B(P,r))$: Existen constantes A_1, A_2 y K_1 tales que

$$\begin{aligned} A_1 r &\leq \mu(B(P,r)) && si \quad 0 < r < K_1 \\ A_2 r &\geq \mu(B(P,r)) && si \quad r > 0. \end{aligned}$$



Veremos ahora que el núcleo $K(\xi,\eta)$ tiene las siguientes propiedades:

(1.10)
$$|K(\xi,\eta)| \leq \frac{C}{d(\xi,\eta)} \qquad ;\forall \xi,\eta \in \partial\Omega$$

(1.11)
$$|K(\xi_0,\eta) - K(\xi,\eta)| + |K(\eta,\xi_0) - K(\eta,\xi)| \leq C\frac{d(\xi,\xi_0)^\delta}{d(\xi,\eta)^{1+\delta}}$$

para todos los $\xi, \eta, \xi_0 \in \partial\Omega$ tales que $d(\xi,\eta) > 2d(\xi_0,\xi)$.

La desigualdad (1.10) es clara:

$$|K(\xi,\eta)| \leq C_n \frac{|\xi-\eta|}{|\xi-\eta|^n} = C_n \frac{1}{d(\xi,\eta)}$$

Demostración de (2.2). Sean ξ,η y $\xi_0 \in \partial\Omega$ tales que $d(\xi,\eta) > 2d(\xi_0,\xi)$.

$$|K(\xi_0,\eta) - K(\xi,\eta)| = C_n \left| \frac{(\xi_0-\eta).\nu(\eta)}{|\xi_0-\eta|^n} - \frac{(\xi-\eta).\nu(\eta)}{|\xi-\eta|^n} \right|$$
$$\leq C_n \left| \frac{\xi_0-\eta}{|\xi_0-\eta|^n} - \frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|^n} \right| \leq C_n |\xi_0-\eta| \left| \frac{1}{|\xi_0-\eta|^n} - \frac{1}{|\xi-\eta|^n} \right|$$
$$+ C_n \frac{1}{|\xi-\eta|^n} |\xi-\xi_0| \leq C_n\, n |\xi_0-\eta| \frac{1}{t^{n-1}} \frac{||\xi-\eta| - |\xi_0-\eta||}{|\xi_0-\eta||\xi-\eta|} + C_n \frac{|\xi-\xi_0|}{|\xi-\eta|^n}$$

con t entre $|\xi_0 - \eta|$ y $|\xi - \eta|$. El segundo sumando puede escribirse así :

$$C_n \frac{d(\xi,\xi_0)^{\frac{1}{n-1}}}{d(\xi,\eta)^{1+\frac{1}{n-1}}}$$

que es de la forma requerida en (2.2) con $\delta = \frac{1}{n-1}$. Para obtener una estimación análoga del primer sumando, notemos que

$$|\xi_0 - \eta| \leq |\xi - \eta| + |\xi - \xi_0| < |\xi - \eta| + \frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}}|\xi - \eta| = C|\xi - \eta|$$

por consiguiente $t \simeq |\xi - \eta|$.

(1.12) El valor de borde de las derivadas del potencial de capa simple.

Sea Ω un dominio en $I\!R^n$ con las mismas propiedades que en el ejemplo anterior. Sea $X = \partial\Omega$; $d(\xi,\eta) = |\xi - \eta|^{n-1}$ y $d\mu = d\sigma =$ elemento de área en la superficie $\partial\Omega$. Sea $0 < \alpha < 1$. Definamos

(1.13)
$$S_\alpha(f)(\xi) = \int_X \frac{f(\eta)}{d(\xi,\eta)^\alpha}\, d\mu(\eta)$$

para $f \in L^p(X, d\mu)([\geq 1)$. El potencial de capa simple de una distribución de cargas dada por una densidad $f(\eta)$ en $\partial\Omega$ es

$$Sf(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\eta)}{|x-\eta|^{n-2}} d\sigma(\eta)\,,$$

y se escribe en la forma (3.0) con $\alpha = \frac{n-2}{n-1}$ para ξ en $\partial\Omega$.

(1.14) **Lema:** Existe una constante C independiente de $\xi \in \partial\Omega$ tal que

$$\int_X \frac{d\mu(\eta)}{d(\xi,\eta)^\alpha} \leq C$$

Demostración:

$$\int_X \frac{d\mu(\eta)}{d(\xi,\eta)^\alpha} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \int_{2^i \leq d(\xi,\eta) < 2^{i+1}} \frac{d\mu(\eta)}{d(\xi,\eta)^\alpha}$$
$$\leq \sum_{i=-\infty}^{i_0} \frac{1}{2^{\alpha i}} \mu[B(\xi, 2^{i+1})]$$

donde i_0 es tal que $X \subset B(\xi, i_0)$. Por otra parte, dado que $\mu(B(\xi,r)) \leq A_2 r$, tenemos que

$$\int_X \frac{d\mu(\eta)}{d(\xi,\eta)^\alpha} \leq 2A_2 \sum_{i=-\infty}^{i_0} \frac{2^i}{2^{\alpha i}} = 2A_2 \sum_{-\infty}^{i_0} 2^{(1-\alpha)i} < \infty$$

(1.15) **Lema:** Si $f \in L^p$ para $\infty \geq p \geq 1$ entonces $S_\alpha(f) \in L^p$ y

$$\|S_\alpha(f)\|_L^p (X, d\mu) \leq C \|f\|_L^p (X, d\mu)$$

Demostración: La tesis se obtiene del lema precedente, elevando a la potencia p y luego integrando la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |S_\alpha(f)(\xi)| &\leq \int_X \frac{|f(\eta)|}{d(\xi,\eta)^\alpha} \, d\mu(\eta) = \int_X \frac{|f(\eta)|}{d(\eta,\xi)^{\alpha/p}} \frac{d\mu(\eta)}{d(\eta,\xi)^{\alpha/q}} \\ &\leq \left(\int_X \frac{|f(\eta)|^p}{d(\eta,\xi)^\alpha} \, d\mu(\eta) \right)^{1/p} \left(\int \frac{d\mu(\eta)}{d(\eta,\xi)^\alpha} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Sea ahora $x \in \Omega$. Entonces la función $Sf(x)$ es diferenciable en x y

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(f)}{\partial x_i}(x) &= C_n \int_{\partial\Omega} \frac{x_i - \eta_i}{|x-\eta|^n} f(\eta) \, d\sigma(eta) \\ &= \int_{\partial\Omega} K_i(x,\eta) \, f(\eta) \, d\sigma(\eta) \end{aligned}$$

Cuando nos proponemos estudiar el valor de $\frac{\partial S_g(f)}{\partial x_i}$ en el borde de Ω estamos frente a una integral de la forma

$$\int_{\partial\Omega} K_i(\xi,\eta) \, f(\eta) \, d\sigma(\eta)$$

donde K_i satisface estimaciones de tamaño y regularidad análogas a (1.10) y (1.11) en el espacio de tipo homogéneo $(\partial\Omega, d, d\sigma)$.

TEOREMA [MS1] : Sea d una casi-distancia sobre X . Entonces existe una casi-distancia d' equivalente a d , un número $\alpha \in (0,1)$ y una constante finita C tal que

(1.16) para toda terna x,y,z de elementos de X y para todo $r > 0$ que satisfacen $d'(x,z) < r$ y $d'(y,z) < r$, vale la desigualdad

$$|d'(x,z) - d'(y,z)| \leq C\, r^{1-\alpha}\, d'(x,y)^{\alpha} .$$

Por consiguiente las bolas en la casi-distancia d' son conjuntos abiertos.

Cuando un espacio de tipo homogéneo está dotado de una casi-distancia con la propiedad (1.16), se dice que el espacio es de orden α . Incluiremos en esta definición el caso $\alpha = 1$ que ocurre cuando d' es una métrica.

En un espacio métrico, es clara la siguiente propiedad: si $z \in B(y,r)$ entonces $B(z,r - d(z,y)) \subset B(y,r) \subset B(z,r + d(z,y))$. En los espacios de orden α es válido un resultado análogo que probaremos en el próximo lema y usaremos en los capítulos siguientes.

(1.17) LEMA: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo de orden α . Sean k y C las constantes de (iii) y (1.16) respectivamente. Entonces, dados dos puntos z e y en X y un número $r > 0$ relacionados por la desigualdad

(1.18) $d(z,y) \leq [C \,.\, (2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}\, r$, se tiene que

$$\phi \neq B(z, r - \delta r^{1-\alpha} d(z,y)^{\alpha}) \subset B(y,r) \subset B(z, r + \delta r^{1-\alpha} d(z,y)^{\alpha}) ,$$

para todo δ tal que $C(2k)^{1-\alpha} \leq \delta < [r/d(z,y)]^{\alpha}$.

Demostración: Como

$$r - \delta r^{1-\alpha} d(z,y)^{\alpha} > r - [r/d(z,y)]^{\alpha} r^{1-\alpha} d(z,y)^{\alpha} = 0 ,$$

es claro que $B(z, r-\delta r^{1-\alpha} d(z,y)^{\alpha}) \neq \phi$. Tomando $z=x$ y $r=d(y,z)+\varepsilon$, para cualquier $\varepsilon > 0$, en (1.20), vemos que $C \geq 1$. Por lo tanto de (1.18) se deduce que $d(z,y) < r$. Sea $u \in B(z,r-\delta r^{1-\alpha} d(z,y)^{\alpha})$, entonces $d(u,z) < r$ y $d(u,y) \leq k[d(u,z)+d(z,y)] < 2k\, r$, usando la propiedad de orden α del espacio obtenemos

$$\begin{aligned} d(u,y) &\leq d(u,z) + C(2k)^{1-\alpha} r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha} \\ &< r + [C(2k)^{1-\alpha} - \delta] r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha} \leq r , \end{aligned}$$

lo que implica la primera inclusión en la tesis. Para verificar la segunda, tomemos un punto u en $B(y,r)$. Es claro que $d(u,y) < r$ y $d(u,z) < 2k\, r$, aplicando nuevamente la propiedad de orden α del espacio, se tiene que

$$d(u,z) \leq d(u,y) + C(2k)^{1-\alpha} r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha} < r + \delta r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha} ,$$

esto significa que $B(y,r) \subset B(z, r + \delta r^{1-\alpha} d(y,z)^{\alpha})$. C.Q.D.

Interesa especialmente una clase de espacios de tipo homogéneo para los cuales la medida de una bola de radio r , es proporcional a r . Más precisamente, en [MS2] se da la siguiente definición.

Un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ) es normal, si existen cuatro constantes positivas y finitas A_1, A_2, K_1, K_2 , $K_2 \leq 1 \leq K_1$ tales que

(1.19) $A_1\, r \leq \mu(B(x,r))$ si $r \leq K_1\, \mu(X)$

(1.20) $B(x,r) = X$ si $r > K_1\, \mu(X)$

(1.21) $A_2\, r \geq \mu(B(x,r))$ si $r \geq K_2\, \mu(\{x\})$

(1.22) $B(x,r) = \{x\}$ si $r < K_2\, \mu(\{x\})$.

En [MS1] se demuestra que dado un espacio de tipo homogéneo tal que las bolas son conjuntos abiertos, si se toma como distancia entre dos puntos diferentes el ínfimo de las medidas de bolas que contienen a ambos y se conserva la propiedad $d(x,x) = 0$, se obtiene un espacio de tipo homogéneo normal con la misma medida y topología.

(1.23) Ejemplo: Sea $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ la función definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2|x| - 2^j & \text{si } 2^j \leq |x| < 3 \,.\, 2^{j-1} \\ 2^{j+1} & \text{si } 3 \,.\, 2^{j-1} \leq |x| < 2^{j+1} \end{cases}$$

es, claramente, una función Lipschitz. Sea $X = \mathbb{R}$, m la medida de Lebesgue y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $d(x,y) = \rho(x-y)$. Es claro que

$$|x-y| \leq d(x,y) \leq 2|x-y| \,,$$

por lo tanto $(\mathbb{R},d,m)$ es un espacio de tipo homogéneo normal. Además, como ρ es Lipschitz, d es de orden 1. Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$B(0,2+\varepsilon) - B(0,2) = \{x : 2 \leq \rho(x) < 2+\varepsilon\}$$
$$\supset \{x : 3/2 \leq |x| < 2\} ,$$

por consiguiente $m[B(0,2+\varepsilon) - B(0,2)] > 1/2$ independientemente de ε. De modo que, en este espacio la medida de una corona no tiende a cero al tender a cero su amplitud.

Es preciso observar que si bien las funciones continuas y los espacios L^p son los mismos sobre $(\mathbb{R},d,m)$ que sobre $(\mathbb{R},|\cdot|,m)$ las propiedades de $(\mathbb{R},d,m)$ son insuficientes para la acotación de operadores integrales que quedan definidos de un modo natural en términos de la casi-distancia del espacio. En el Capítulo III se darán ejemplos de estos hechos.

Sin embargo, como veremos en los capítulos siguientes, la situación es diferente si se cuenta con la siguiente propiedad que en espacios de tipo homogéneo reemplaza a la relación que existe en $\mathbb{R}^n$ entre la medida de una corona y su amplitud:

(P) existe una constante finita C tal que

$$\mu(B(x, r+s)) - \mu(B(x, r)) \leq C\, s$$

para todo $x \in X$, r y $s \in \mathbb{R}^+$.

Lo mismo que la de orden α, la propiedad (P) tampoco subsiste por cambio de casi-métricas equivalentes, pero a diferencia de aquella, involucra las dos estructuras del espacio.

CAPITULO II

En este capítulo (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo normal y k es la constante de la desigualdad triangular

Un núcleo de Calderón-Zygmund en $\mathbb{R}^n$ acotado sobre la esfera unitaria, escrito en términos de la distancia normalizada de ese espacio, es el modelo para los núcleos singulares que se considerarán aquí. Supondremos en general que $K : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible que satisface la siguiente mayoración

(2.1) existe $C > 0$ tal que $|K(x,y)| \leq C\, d(x,y)^{-1}$ para $x \neq y$.

Menos uniformes serán las condiciones de suavidad en el núcleo, en algunos casos (tipo (2,2) y acotación en L^p con pesos) se requerirá una estimación puntual del tipo considerado en [MS3] en la primera o en la segunda variable de K

(2.2) existe $\alpha \in (0,1)$ y $C > 0$ tales que si $d(x,y) > 2\, d(y,z)$ se tiene que

a) $|K(y,x) - K(z,x)| \leq C\, d(y,z)^{\alpha}\, d(x,y)^{-1-\alpha}$

b) $|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\, d(y,z)^{\alpha}\, d(x,y)^{-1-\alpha}$,

o bien, más generalmente

(2.2') existe $C > 0$ y una función creciente $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\int_0^1 \psi(t)\, t^{-1}\, dt < \infty$ y si $d(x,y) > 2\, d(y,z)$ se tiene que

a) $|K(y,x) - K(z,x)| \leq C\, d(x,y)^{-1}\, \psi[d(y,z)\, d(x,y)^{-1}]$

b) $|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\, d(x,y)^{-1}\, \psi[d(y,z)\, d(x,y)^{-1}]$,

en otros casos será suficiente la más débil

(2.2'') existe $C > 0$ tal que

a) $$\int_{d(x,y) > 2d(y,z)} |K(y,x) - K(z,x)|\, d\mu(x) \leq C$$

b) $$\int_{d(x,y) > 2d(y,z)} |K(x,y) - K(x,z)|\, d\mu(x) \leq C \quad .$$

En lo que respecta a las propiedades de cancelación del núcleo, se considerarán dos tipos

(2.3) para todo par de números $R > r > 0$, se tiene que

a) $$\int_{r \leq d(x,y) < R} K(x,y)\, d\mu(y) = 0 \quad , \quad \text{para todo } x \in X$$

b) $$\int_{r \leq d(x,y) < R} K(x,y)\, d\mu(x) = 0 \quad , \quad \text{para todo } y \in X \; ,$$

o las más débiles análogas a las de [BCP] y [R]

(2.3') para todo par de números $R > r > 0$, se tiene que

a) $\left| \int_{r \leq d(x,y) < R} K(x,y)\, d\mu(y) \right|$ es acotada uniformemente en x, r y R , además $\int_{r \leq d(x,y) < 1} K(x,y)\, d\mu(y)$ converge uniformemente en x cuando r tiende a cero ,

b) $\left|\int_{r \le d(x,y) < R} K(x,y)\, d\mu(x)\right|$ es acotada uniformemente en y, r y R, además $\int_{r \le d(x,y) < 1} K(x,y)\, d\mu(x)$ converge uniformemente en y cuando r tiende a cero.

En este capítulo se estudiarán los problemas de acotación en L^p y tipo débil (1,1) para el operador con núcleo K truncado en coronas

(2.4) $$K_{R,r} f(x) = \int_{r \le d(x,y) < R} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) ,$$

el operador límite puntual y en L^p, Kf y el operador maximal asociado $K^* f$.

§.1 ACOTACION EN L^2

En [CW] se obtiene el tipo fuerte (p,p) y débil (1,1) de un operador integral que es acotado en L^2 y que satisface la condición (2.2''.b), para demostrar este resultado se hace uso de un lema tipo Calderón-Zygmund. En el caso clásico la acotación en L^2 se obtiene recurriendo a la transformada de Fourier en la que está involucrada la estructura algebraica del espacio. Existe otra técnica para obtener el tipo (2,2) con un núcleo de Calderón-Zygmund, es debida a Cotlar (ver [Co]) y se basa en el siguiente lema general sobre operadores en espacios de Hilbert.

<u>LEMA DE COTLAR</u>: Sea H un espacio de Hilbert y $T_1, T_2, \ldots, T_N$ una sucesión finita de operadores lineales y continuos de H en H. Sea $c : \mathbb{Z} \longrightarrow [0,\infty)$ tal que $\sum_{-\infty}^{\infty} c(\ell)^{1/2} = A < \infty$. Si T_i^* es el adjunto de T_i y si $\|T_i^* T_j\| \le c(i-j)$ y $\|T_i T_j^*\| \le c(i-j)$, entonces

$$\| \sum_{i=1}^{N} T_i \| \leq A \ .$$

Esta versión del lema y una demostración pueden hallarse en [G].

Para el caso de un operador integral singular en un espacio de tipo homogéneo puede aplicarse este lema prescindiendo de la estructura algebraica, pero exigiendo una propiedad geométrica adicional al espacio: la propiedad (P) presentada en el capítulo 1. Esta propiedad se requiere para obtener el próximo lema.

Para cada número entero i , χ_i denotará la función característica del conjunto

$$\{(x,y) \in X \times X : (2k)^i \leq d(x,y) < (2k)^{i+1}\}$$

y K_i la truncación $K\chi_i$ del núcleo K .

(2.5) LEMA: Supongamos que (X,d,μ) tiene las propiedades (P) y de orden α . Sea K un núcleo singular que satisface (2.1) y (2.2.a), entonces existe una constante finita C tal que

$$\int_X |K_i(y,x) - K_i(z,x)| \, d\mu(x) \leq C(2k)^{-\alpha i} \, d(y,z)^\alpha \tag{2.6}$$

Demostración: Observemos en primer lugar que, salvo un caso trivial, la propiedad (P) asegura que no puede haber puntos cuya medida sea positiva, entonces por la normalidad, la medida de una bola de radio r está acotada por una constante veces r .

Sean $y,z \in X$ e i un entero y sea C la constante de la desigualdad (1.16) que por hipótesis es satisfecha por la casi-distancia d .

Consideremos dos casos según el orden entre $(2k)^{\alpha i}\, d(y,z)^{-\alpha}$ y $4C(2k)^{1-\alpha}$.

(2.7) Supongamos que $(2k)^{\alpha i}\, d(y,z)^{-\alpha} \leq 4C(2k)^{1-\alpha}$. En este caso la estimación (2.6) es consecuencia de (2.1), en efecto

$$\int_X |K_i(y,x)-K_i(z,x)|\, d\mu(x) \leq \int_X |K_i(y,x)|\, d\mu(x) + \int_X |K_i(z,x)|\, d\mu(x)$$

$$\leq C \int_{(2k)^i \leq d(x,y)<(2k)^{i+1}} d(y,x)^{-1}\, d\mu(x)$$

$$+ C \int_{(2k)^i \leq d(x,z)<(2k)^{i+1}} d(z,x)^{-1}\, d\mu(x)$$

$$\leq C\ (2k)^{-i}\ \mu[B(y,(2k)^{i+1})]$$

$$+ C\ (2k)^{-i}\ \mu[B(z,(2k)^{i+1})],$$

el último término está acotado uniformemente en y, z e i con una cota que sólo depende de las constantes del espacio, y de la constante de (2.1), entonces de (2.7) se deduce (2.6).

(2.8) Supongamos que $(2k)^{\alpha i}\, d(y,z)^{-\alpha} > 4C(2k)^{1-\alpha}$. El miembro izquierdo de (2.6) está mayorado por una suma de dos integrales, una de las cuales contiene la información sobre la suavidad del núcleo, la otra involucra la geometría del espacio,

$$\int_X |K_i(y,x)-K_i(z,x)|\, d\mu(x) = \int_X |[K(y,x) - K(z,x)]\ \chi_i(y,x)$$

$$+ K(z,x)\ [\chi_i(y,x) - \chi_i(z,x)]|\, d\mu(x)$$

$$\leq \int_{(2k)^i \leq d(x,y) < (2k)^{i+1}} |K(y,x)-K(z,x)|\, d\mu(x)$$

$$+ \int_X |K(z,x)|\, |\chi_i(y,x) - \chi_i(z,x)|\, d\mu(x)$$

$$= (I) + (II) \ .$$

Para acotar (I), observemos que si x es un punto del dominio de integración, entonces

$$d(x,y) \geq (2k)^i > d(y,z)\ [4C(2k)^{1-\alpha}]^{1/\alpha} > 2d(y,z) \ ,$$

por consiguiente puede aplicarse la hipótesis (2.2.a) sobre el núcleo para obtener

$$(I) \leq C d(y,z)^\alpha \int_{(2k)^i \leq d(x,y) < (2k)^{i+1}} d(x,y)^{-1-\alpha}\, d\mu(x)$$

$$\leq C\ d(y,z)^\alpha\ (2k)^{-i(1+\alpha)}\ (2k)^{i+1} = C(2k)^{-\alpha i}\ d(y,z)^\alpha \ ,$$

que es el tipo de estimación necesaria. Por otra parte, es claro que

$$(II) = \int_{\Delta_i(y,z)} |K(z,x)|\, d\mu(x) \ ,$$

donde $\Delta_i(y,z) = [B(y,(2k)^{i+1}) - B(y,(2k)^i)]\ \Delta [B(z,(2k)^{i+1}) - B(z,(2k)^i)]$ y Δ denota la diferencia simétrica. Usaremos el lema (1.17) para incluir $\Delta_i(y,z)$ en una unión de dos coronas centradas en z. Sean $r_1 = (2k)^i$ y $r_2 = (2k)^{i+1}$ entonces, por la hipótesis presente sobre la relación entre y,z, e i, se tiene que

$$d(z,y) \leq [4C(2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}\ (2k)^{i} < [C(2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}\ r_1$$
$$< [C(2k)^{1-\alpha}]^{-1/\alpha}\ r_2\ ,$$

esto significa que, tanto r_1 como r_2 están en la hipótesis (1.18.) del lema (1.17) respecto del par $z,y \in X$. Si elegimos $\delta = 2C(2k)^{1-\alpha}$, tenemos que

$$C(2k)^{1-\alpha} < \delta < r_1^{\alpha}\ d(z,y)^{-\alpha} < r_2^{\alpha}\ d(z,y)^{-\alpha}\ ,$$

por lo tanto, si

$$a_i = (2k)^{i} - \delta(2k)^{i(1-\alpha)}\ d(z,y)^{\alpha}$$

$$b_i = (2k)^{i} + \delta(2k)^{i(1-\alpha)}\ d(z,y)^{\alpha}$$

son válidas las inclusiones

(2.9) $\quad B(z,a_i) \subset B(y,(2k)^{i}) \subset B(z,b_i)$

(2.10) $\quad B(z,a_{i+1}) \subset B(y,(2k)^{i+1}) \subset B(z,b_{i+1})$.

Por otra parte, es claro que

(2.11) $\quad B(z,a_i) \subset B(z,(2k)^{i}) \subset B(z,b_i)$

(2.12) $\quad B(z,a_{i+1}) \subset B(z,(2k)^{i+1}) \subset B(z,b_{i+1})$.

Observemos además que

(2.13) $\quad B(z,(2k)^{i}) \subset B(y,(2k)^{i+1})$

(2.14) $\quad B(y,(2k)^{i}) \subset B(z,(2k)^{i+1})$,

en efecto, si $u \in B(z,(2k)^{i})$, usando nuevamente (2.8) se tiene que $d(u,y) \leq k[d(u,z) + d(z,y)] < k[(2k)^{i} + (2k)^{i}] = (2k)^{i+1}$, lo que prueba (2.13). De las inclusiones (2.13) y (2.14) sigue que

$$\Delta_i(y,z) = [B(y,(2k)^{i+1})\ \Delta B(z,(2k)^{i+1})] \cup [B(y,(2k)^{i})\ \Delta B(z,(2k)^{i})] ,$$

que, por (2.9) a (2.12) resulta contenido en

$$[B(z,b_{i+1}) - B(z,a_{i+1})] \cup [B(z,b_i) - B(z,a_i)] .$$

Entonces, por (2.1) la integral (II) está acotada por

$$C \int_{a_{i+1} \leq d(x,z) < b_{i+1}} d(x,z)^{-1}\, d\mu(x) + C \int_{a_i \leq d(x,z) < b_i} d(x,z)^{-1}\, d\mu(x)$$

$$\leq C\, a_{i+1}^{-1} [\mu(B(z,b_{i+1})) - \mu(B(z,a_{i+1}))] + C\, a_i^{-1} [\mu(B(z,b_i)) - \mu(B(z,a_i))] ,$$

el miembro derecho de esta desigualdad puede mayorarse usando la propiedad (P), las definiciones de a_i y b_i, la elección δ y (2.8), con lo que se obtiene

$$(II) \leq C[a_{i+1}^{-1}(b_{i+1} - a_{i+1}) + a_i^{-1}(b_i - a_i)]$$

$$= C\left[\frac{2\delta(2k)^{(i+1)(1-\alpha)}\, d(z,y)^{\alpha}}{(2k)^{i+1} - \delta(2k)^{(i+1)(1-\alpha)}\, d(z,y)^{\alpha}} + \frac{2\delta(2k)^{i(1-\alpha)}\, d(z,y)^{\alpha}}{(2k)^{i} - \delta(2k)^{i(1-\alpha)}\, d(z,y)^{\alpha}}\right]$$

$$\leq C\,(2k)^{-\alpha i}\, d(z,y)^{\alpha}\ [1 - \delta(2k)^{-\alpha i}\, d(z,y)^{\alpha}]^{-1}$$

$$\leq C\,(2k)^{-\alpha i}\, d(z,y)^{\alpha} .$$

C.Q.D.

Observemos que si en lugar de la condición (2.2.a), el núcleo satisface (2.2.b) se obtiene una desigualdad análoga a (2.6) salvo que la integral se efectúa respecto de la primera variable de K .

En el siguiente teorema se demuestra la acotación uniforme en L^2 del operador $K_{R,r}$ definido por (2.4).

(2.15) TEOREMA: Sea (X,d,μ) como en el lema (2.5) y K un núcleo singular que satisface (2.1), (2.2) y (2.3). Entonces $K_{R,r}$ es acotado como operador en L^2 con norma independiente de R y r .

Demostración: Notemos en primer término, que todo espacio de tipo homogéneo es σ-finito en el sentido de la medida y por consiguiente podemos aplicar los teoremas de Fubini y Tonelli. Para $f \in L^2$ y $x \in X$, la función $K_j(x,y)\ f(y)$ es absolutamente integrable en la variable y . Entonces $\int K_j(x,y)\ f(y)\, d\mu(y)$ define una función de x que denotamos $T_j\ f(x)$. El operador T_j es lineal y continuo como operador en L^2 , en efecto, por la desigualdad de Schwartz y (2.1) son válidas las siguientes mayoraciones

$$\begin{aligned}|T_j f(x)|^2 &\le \{\int_X |K_j(x,y)|^{1/2}\ |f(y)|\ |K_j(x,y)|^{1/2}\ d\mu(y)\}^2 \\ &\le \{\int_X |K_j(x,y)|\,|f(y)|^2\ d\mu(y)\}\cdot\{\int_X |K_j(x,y)|\ d\mu(y)\} \\ &\le C\int_X |K_j(x,y)|\,|f(y)|^2\ d\mu(y)\ ,\end{aligned}$$

integrando en la variable x , invirtiendo el orden de integración y usando nuevamente (2.1), obtenemos

$$\|T_j f\|_2^2 \le C\int_X |f(y)|^2\ \{\int_X |K_j(x,y)|\ d\mu(x)\}d\mu(y) \le C\,\|f\|_2^2\ .$$

El adjunto de T_j es el operador integral con núcleo $\tilde{K}_j(x,y) = K_j(y,x)$, es decir

$$T_j^* g(x) = \int_X K_j(y,x)\ g(y)\ d\mu(y) \ ,$$

con $g \in L^2$. Para aplicar el lema de Cotlar, es necesario acotar las normas de los operadores $T_i^* T_j$ y $T_i T_j^*$. El teorema de Fubini permite escribir $T_i^* T_j$ como operador integral con núcleo

$$\int_X K_i(y,x)\ K_j(y,z)\ d\mu(y) \ ,$$

en efecto, si f es una función de L^2 se tiene que

$$\begin{aligned} T_i^* T_j f(x) &= \int_X K_i(y,x)\ T_j f(y)\ d\mu(y) \\ &= \int_X K_i(y,x)\ \{\int_X K_j(y,z)\ f(z)\ d\mu(z)\}\ d\mu(y) \\ &= \int_X \{\int_X K_i(y,x)\ K_j(y,z)\ d\mu(y)\}\ f(z)\ d\mu(z) \ . \end{aligned}$$

En consecuencia, es claro por la desigualdad de Schwartz que $|T_i^* T_j f(x)|^2$ está mayorada por

$$(2.16) \qquad \{\int_X |\int_X K_i(y,x)\ K_j(y,z)\ d\mu(y)|\ |f(z)|^2\ d\mu(z)\} \cdot \{\int_X |\int_X K_i(y,x)\ K_j(y,z)\ d\mu(y)|\ d\mu(z)\}$$

necesitamos estimar la integral de esta función de la variable x , con este fin consideraremos dos casos según sea $i \geq j$ o $j > i$.

a) $i \geq j$. El segundo factor de (2.16) está acotado de manera uniforme en i,j y x en virtud de la propiedad (2.1) del núcleo. Por lo tanto, usando la hipótesis de cancelación (2.3), el lema (2.5) y nuevamente (2.1), tenemos que

$$\|T_i^* T_j f\|_2^2 \leq C \int \{ \int | \int K_i(y,x)\, K_j(y,z)\, d\mu(y) |\, |f(z)|^2\, d\mu(z)\}\, d\mu(x)$$

$$= C \int \{ \int | \int [K_i(y,x) - K_i(z,x)]\, K_j(y,z)\, d\mu(y) |\, |f(z)|^2\, d\mu(z)\}\, d\mu(x)$$

$$\leq C \int |f(z)|^2 \int |K_j(y,z)| \int |K_i(y,x) - K_i(z,x)|\, d\mu(x)\, d\mu(y)\, d\mu(z)$$

$$\leq C \int |f(z)|^2 \int_{(2k)^j \leq d(y,z) < (2k)^{j+1}} d(y,z)^{\alpha-1}\, (2k)^{-\alpha i}\, d\mu(y)\, d\mu(z)$$

$$\leq C (2k)^{-\alpha i}\, (2k)^{(\alpha-1)j}\, (2k)^{j+1}\, \|f\|_2^2$$

$$= C (2k)^{-\alpha |i-j|}\, \|f\|_2^2 \ .$$

Como la desigualdad obtenida es válida para toda f en L^2 concluimos que $\|T_i^* T_j\| \leq C(2k)^{-\alpha|i-j|/2}$

b) $i < j$. En este caso estimemos mejor el segundo factor de (2.16). Para ello procedamos con él como se hizo con el primero en el caso a). Esto es, aplicando (2.3), (2.5) y (2.1) se tiene que

$$\int | \int K_i(y,x)\, K_j(y,z)\, d\mu(y) |\, d\mu(z) = \int | \int K_i(y,x) [K_j(y,z) - K_j(x,z)]\, d\mu(y) |\, d\mu(z)$$

$$\leq \int |K_i(y,x)| \int |K_j(y,z) - K_j(x,z)|\, d\mu(z)\, d\mu(y)$$

$$\le C \int_{(2k)^i \le d(x,y) < (2k)^{i+1}} d(x,y)^{\alpha-1} (2k)^{-\alpha j} \, d\mu(y$$

$$\le C\,(2k)^{-\alpha|i-j|} \quad .$$

Entonces, por la estimación (2.16), es claro que

$$\|T_i^* T_j f\|_2^2 \le C\,(2k)^{-\alpha|i-j|} \int |f(z)|^2 \int |K_j(y,z)| \int |K_i(y,x)| \, d\mu(x)\, d\mu(y)\, d\mu(z)$$

$$\le C\,(2k)^{-\alpha|i-j|} \, \|f\|_2^2 \quad ,$$

de modo que también en este caso obtenemos

$$\|T_i^* T_j\| \le C\,(2k)^{-\alpha|i-j|/2} \quad .$$

Por la simetría en las hipótesis sobre el núcleo es válida la misma acotación para $\|T_i \, T_j^*\|$.

Si ℓ es un número entero y $c(\ell) = C\,(2k)^{-\alpha|\ell|/2}$, se verifica que $\Sigma\, c(\ell)^{1/2} = A < \infty$, por consiguiente para $i < j$ el lema de Cotlar permite concluir que

$$\Big\| \sum_{\ell=i}^{j} T_\ell \Big\| \le A \quad .$$

Sean r y R tales que $0 < r < R < \infty$, existen enteros i y j de modo que $(2k)^i \le r < (2k)^{i+1}$ y $(2k)^j \le R < (2k)^{j+1}$, entonces

$$K_{R,r}\, f(x) = \int_{(2k)^j \le d(x,y) < R} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) + \sum_{\ell=i+1}^{j-1} T_\ell \, f(x)$$

$$+ \int_{r \le d(x,y) < (2k)^{i+1}} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) \quad .$$

Por lo tanto, para obtener la tesis será suficiente que los operadores definidos por el primero y tercer términos en la igualdad anterior, sean acotados en L^2 uniformemente en R y r . Esto ocurre, pues ambos están dominados superiormente por la función maximal de Hardy-Littlewood de f . Veamos por ejemplo el primero de ellos

$$\left|\int_{(2k)^j \le d(x,y) < R} K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\right|$$

$$\le C \int_{(2k)^j \le d(x,y) < (2k)^{j+1}} d(x,y)^{-1}\, |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\le C(2k)^{-j} \int_{B(x,(2k)^{j+1})} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$\le C\,.\,M f(x)$$

C sólo depende de las constantes del espacio y de la constante de (2.1)

C.Q.D.

El hecho de que el orden del espacio y el exponente en la condición (2.2) coincidan no es restrictivo. En el caso de ser diferentes, ambas propiedades se verifican para el mínimo de estos dos números.

Es claro que el mismo resultado del teorema es válido para el operador adjunto

$$(2.17) \qquad \tilde{K}_{R,r} f(x) = \int_{r \le d(x,y) < R} K(y,x)\, f(y)\, d\mu(y)$$

§.2 ACOTACION Y CONVERGENCIA EN L^p . TIPO DEBIL (1,1)

Como se mencionó en §.1 , para obtener los tipos fuerte (p,p) y débil (1,1) de un operador integral que es acotado en L^2 , es suficiente que el núcleo satisfaga una propiedad del tipo (2.2".b) . Además las normas en L^p y en L^1 débil del operador dependen sólo de la norma en L^2 y de la constante de (2.2")(ver (2.4) en el Cap.III de [CW]). Como corolario de este teorema de Coifman y de Guzmán se obtiene el siguiente resultado relativo al operador truncado $K_{R,r}$.

(2.18) TEOREMA: Sea (X,d,μ) tal que para cada $x \in X$ la medida del conjunto $\{x\}$ es cero. Sea K un núcleo singular que satisface (2.1) y (2.2".b) tal que $K_{R,r}$ es acotado en L^2 uniformemente en R y r . Entonces, si $1 < p \leq 2$ y $f \in L^p$ se tiene que

$$\| K_{R,r} f \|_p \leq C_p \| f \|_p \quad .$$

Si $f \in L^1$

$$\mu \{x \in X : |K_{R,r} f(x)| > \lambda\} \leq C_1 \lambda^{-1} \| f \|_1$$

con C_p y C_1 independientes de R , r y f .

Demostración: Por la observación precedente, el teorema estará probado si se demuestra que el núcleo $K_{R,r}(x,y) = K(x,y) \cdot \chi_{R,r}(x,y)$ satisface (2.2".b) con constante independiente de R y r , $\chi_{R,r}(x,y)$ denota la función característica del conjunto

$$\{(x,y) \in X \times X : r \leq d(x,y) < R\}$$

Procediendo como en la demostración del lema (2.5), obtenemos

$$\int_{d(x,y)>2d(y,z)} |K_{R,r}(x,z) - K_{R,r}(x,y)| \, d\mu(x)$$

$$\leq \int_{d(x,y)>2d(y,z)} \chi_{R,r}(x,z) |K(x,z) - K(x,y)| \, d\mu(x)$$

$$+ \int_{d(x,y)>2d(y,z)} |K(x,y)| \, |\chi_{R,r}(x,z) - \chi_{R,r}(x,y)| \, d\mu(x) \; ,$$

la primera integral está uniformemente acotada, pues K satisface (2.2''.b). Para estimar la segunda integral, observemos que su dominio de integración está contenido en $[B(y,R) \Delta B(z,R)] \cup [B(y,r) \Delta B(z,r)]$, entonces por (2.1) queda mayorada por

$$C \int_{\substack{B(y,R)\Delta B(z,R) \\ d(x,y)>2d(y,z)}} d(x,y)^{-1} \, d\mu(x) + C \int_{\substack{B(y,r)\Delta B(z,r) \\ d(x,y)>2d(y,z)}} d(x,z)^{-1} \, d\mu(x) \; .$$

Para acotar una de estas integrales, por ejemplo la primera, supondremos dos casos según el orden entre R y $2k\,d(y,z)$:

a) $R \leq 2k\,d(y,z)$. Es claro que

$$(2.19) \qquad \int_{\substack{B(y,R)\Delta B(z,R) \\ d(x,y)>2d(y,z)}} d(x,y)^{-1} \, d\mu(x) \leq d(y,z)^{-1} \, \mu[B(y,R) \Delta B(z,R)] \quad ,$$

si $x \in B(z,R)$ se tiene que

$$d(x,y) \leq k[d(x,z) + d(z,y)] < 3k^2 \, d(y,z) \quad ,$$

lo que significa que $B(y,R) \Delta B(z,R)$ está contenido en $B(y,3k^2 d(y,z))$. Este hecho junto con la normalidad del espacio y la hipótesis sobre la medida de los conjuntos unitarios permite acotar uniformemente el miembro derecho de (2.19).

b) $R > 2k\,d(y,z)$. En este caso son válidas las inclusiones

$$B(y,R/2k) \subset B(z,R) \subset B(y,2kR)$$

por consiguiente $B(y,R) \Delta B(z,R)$ está contenida en $B(y,2kR) - B(y,R/2k)$ y la integral a estimar está mayorada por

$$\int_{B(y,2kR) - B(y,R/2k)} d(x,y)^{-1}\, d\mu(x)$$

que resulta acotada uniformemente. C.Q.D.

Observemos que si el núcleo K satisface la hipótesis (2.2".a) en lugar de (2.2".b), el teorema (2.18) puede aplicarse al núcleo adjunto $\tilde{K}(x,y) = K(y,x)$ y por dualidad se obtiene el tipo fuerte (p,p) para $2 < p < \infty$ del operador $K_{R,r}$.

Como en el caso clásico, para obtener resultados de convergencia de los operadores truncados $K_{R,r}$ cuando r tiende a cero y R a infinito, es útil saber que un espacio de funciones suaves es denso en L^p. En el contexto de espacios de tipo homogéneo están bien definidas las clases de funciones Lipschitz, este tipo de suavidad es suficiente para nuestros propósitos. Si la medida es regular, la densidad en L^p de una de tales clases es consecuencia de la propiedad (1.20) de Macías-Segovia.

(2.20) LEMA: Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo que es regular en el sentido de la medida. Entonces existe $\beta\in(0,1)$ tal que las funciones de clase Lipschitz β con soporte acotado son densas en L^p, $1\leq p<\infty$.

Demostración: Si $f\in L^p$ y $f\geq 0$, entonces, como X es unión numerable de bolas concéntricas, existe una sucesión $\{f_m\}$ de funciones simples con soporte acotado, $0\leq f_1\leq\ldots\leq f_m\leq\ldots\leq f$ tal que $\lim f_m(x)=f(x)$. Esto reduce el problema a aproximar funciones características de conjuntos medibles acotados por funciones de clase Lipschitz con soporte acotado. Como se mencionó en el Capítulo I, para algún $\beta\in(0,1)$ existe una casi-distancia ρ de orden β equivalente a d. Sea E un conjunto medible y acotado en X y $\varepsilon>0$. Por la hipótesis de regularidad de la medida respecto de la topología del espacio, existen K y G un compacto y un abierto respectivamente tales que $K\subset E\subset G$ y $\mu(G-K)<\varepsilon$. Es claro que G puede elegirse acotado. Si G' denota el complemento de G y $\rho(x,A) = \inf\{\rho(x,y): y\in A\}$, la función

$$g(x)=\rho(x,G')[\rho(x,G')+\rho(x,K)]^{-1}$$

vale uno sobre K, cero fuera de G, toma valores entre cero y uno y es de clase Lipschitz β. Entonces

$$\|\chi_E-g\|_p^p=\int|\chi_E(x)-g(x)|^p\,d\mu(x)\leq 2^p\int_{G-K}d\mu(x)<2^p\varepsilon\quad.$$

C.Q.D.

(2.21) TEOREMA: Sea (X,d,μ) regular en medida y tal que para cada $x\in X$ la medida del conjunto $\{x\}$ es cero. Sea K un núcleo singular que satisface (2.1), (2.2".b) y (2.3'.a) tal que $K_{R,r}$ es acotado en L^2 uniformemente en R y r. Entonces si $1<p\leq 2$ y $f\in L^p$, existe el límite

en norma L^p de $K_{R,r}f$ cuando $r \to 0$ y $R \to \infty$. Si se denota por Kf este límite, se tiene que

$$\| Kf \|_p \leq C_p \| f \|_p \quad .$$

Demostración: Si $R_2 > R_1 > 1 > r_1 > r_2 > 0$, $f \in L^p$ y g es una función de clase Lipschitz β con soporte acotado, aplicando el teorema (2.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \| K_{R_2,r_2} f - K_{R_1,r_1} f \|_p &= \| K_{r_1,r_2} f + K_{R_2,R_1} f \|_p \\ &\leq \| K_{r_1,r_2}(f-g) \|_p + \| K_{R_2,R_1}(f-g) \|_p \\ &+ \| K_{r_1,r_2} g \|_p + \| K_{R_2,R_1} g \|_p \\ &\leq 2\,C_p \| f - g \|_p + \| K_{r_1,r_2} g \|_p \\ &+ \| K_{R_2,R_1} g \|_p \quad . \end{aligned}$$

Por el lema (2.20) puede elegirse g de clase Lipschitz β con soporte acotado de modo que $\| f - g \|_p$ sea arbitrariamente pequeño. Por otra parte la desigualdad integral de Minkowski permite obtener la siguiente mayoración

$$\| K_{R_2,R_1} g \|_p = \{ \int_X | \int_{R_1 \leq d(x,y) < R_2} K(x,y)\, g(y)\, d\mu(y) |^p \, d\mu(x) \}^{1/p}$$

$$\leq C \int_X |g(y)| \{ \int_{R_1 \leq d(x,y) < R_2} d(x,y)^{-p} \, d\mu(x) \}^{1/p} \, d\mu(y) \quad \leq C\, R_1^{(1-p)/p} \| g \|_1 \quad ,$$

como $p>1$ es claro que $\| K_{R_2,R_1} g \|_p$ tiende a cero cuando R_1 crece a infinito. Finalmente, haciendo uso de la propiedad de cancelación (2.3'.a) de K y de la suavidad de g es posible estimar $\| K_{r_1,r_2} g \|_p$, en efecto

$$K_{r_1,r_2} g(x) = \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} K(x,y)\,[g(y) - g(x)]\,d\mu(y)$$

$$+ g(x) \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} K(x,y)\,d\mu(y) \quad ,$$

por consiguiente, en virtud de (2.1) es válida la desigualdad

$$|K_{r_1,r_2} g(x)| \le C \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} d(x,y)^{\beta-1}\,d\mu(y)$$

$$+ C \left| \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} K(x,y)\,d\mu(y) \right|$$

$$\le C\,r_1^{\beta} + C \left| \int_{r_2 \le d(x,y) < r_1} K(x,y)\,d\mu(y) \right| \quad .$$

Por lo tanto $|K_{r_1,r_2} g(x)|$ es acotado y convergente a cero uniformemente cuando r_1 tiende a cero. Sean $x_0 \in X$ y $R>0$ tales que $\operatorname{sop} g \subset B(x_0,R)$, como $r_1 < 1$ se tiene que

$$\| K_{r_1,r_2} g \|_p^p = \int_{B(x_0,2kR)} |K_{r_1,r_2} g(x)|^p\,d\mu(x) \quad .$$

Entonces $\| K_{r_1,r_2} g \|_p$ tiende a cero cuando r_1 tiende a cero. La desigualdad de la tesis es consecuencia del teorema (2.18). C.Q.D.

Observemos que si además de las hipótesis del teorema (2.21), K satisface (2.2''.a), se obtiene el resultado para $2 < p < \infty$. Si $\tilde{K}$ también verifica (2.3'.b), existe $\tilde{K}$ límite en L^p de los operadores $\tilde{K}_{R,r}$ y vale la desigualdad $\|\tilde{K}f\|_p \leq C_p \|f\|_p$.

BIBLIOGRAFIA

(BCP) BENEDECK, A.; CALDERON, A.P. y PANZONE, R.: "Convolution Operators on Banach Space Valued Functions". Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 48 (1962) 356-365.

(Co) COTLAR, M.: "A Combinatorial Inequality and its Applications to L^2-Spaces" Revista Matemática Cuyana, V. 1 (1955), 41-55.

(CW) COIFMAN, R.R. y WEISS, G.: "Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogenes". Lecture Notes in Mathematics Nro. 242, Springer-Verlag, Berlín (1971).

(G) De GUZMAN, M.: "Real Variable Methods in Fourier Analysis". Notas de Matemática (75). North-Holland Mathematics Studies Nro. 46. North-Holland, Amsterdam (1981).

(MS1) MACIAS, R.A. y SEGOVIA, C.: "Lipschitz Functions on Spaces of Homogeneous Type". Advances in Mathematics, V. 33 (1979), 257-270.

(MS2) MACIAS, R.A. y SEGOVIA, C.: "A Decomposition into Atoms of Distributions on Spaces of Homogeneous Type". Advances in Mathematics, V. 33 (1979), 271-309.

(MS3) MACIAS, R.A. y SEGOVIA, C.: "Singular Integrals on Generalized Lipschitz and Hardy Spaces". Studia Mathematica, T. LXV (1879), 55-75.

(S) STEIN, E.M.: "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions". Princeton University Press. Princeton (1970).