

SOBRE ALGUNOS NOTABLES CONJUNTOS PLANOS, III: LA PIEL DEL DRAGON

A. Benedek y R. Panzone

ABSTRACT. We give upper and lower bounds for the Hausdorff measure of the skin J of the twindragon F , $J:=\partial F$, providing bounds for a conspicuous piece of that boundary. This piece is a self-similar fractal set with a special characteristic, property A , associated to a parameter Δ that we estimate.

RESUMEN. En el presente trabajo de matemática experimental se prueba que el contorno del dragón de Knuth tiene su medida de Hausdorff en el intervalo $(0.156, 3.248)$. Esto se muestra estudiando en ese contorno un trozo conspicuo. Este es, por otra parte, un conjunto $2^{3/2}$ -casi-autosemejante.

1. **EL CONTORNO DEL DRAGON DE KNUTH.** F_0 , o simplemente F , es el conjunto de los números complejos de la forma (cf. Fig.2): $(0.a_{-1}a_{-2}\dots)_b$, $a_j \in (0,1)$, en la base $b=-1+i$. Se le conoce como el dragón de Knuth (twindragon), (cf.[K], [E]). Nuestro objetivo es acotar la medida de Hausdorff de $J:=\partial F$, la piel del dragón, continuando de esta manera el trabajo [B] al que referimos al lector para definiciones y detalles no incluidos aquí. J está constituido por 6 arcos semejantes al conjunto $A:=F_0 \cap F_1$, que se muestran en la Fig.2. En la Fig.3a se observa a G , la cápsula convexa de A . Será suficiente acotar $H^S(A)$ para estimar $H^S(J)$ pues $H^S(J) = 2(1+\mu+1/\mu)H^S(A)$, donde μ es la solución positiva de $x^3-x^2-2 = 0$, $\mu \approx 1.69562$. La dimensión de Hausdorff de J es $s=2(\log \mu)/\log 2 \approx 1.5234$ y J es un s -conjunto, (cf.[B], Lemma 5, Th.6). Luego, $H^S(J) \approx 6.5707xH^S(A)$. En la Fig.1a pueden observarse los primeros 4 pasos de la iteración para obtener el fractal A , que se muestra en la Fig.1b, a partir del segmento $[x,y]$. A es el conjunto invariante correspondiente a las semejanzas:

$$(1) \quad \begin{cases} \tau_0(z) = z/b^3 + (1+i)/4 & \tau_2(z) = z/b^3 + (1-i)/4 \\ \tau_1(z) = -z/b + (1-2i)/10 \end{cases}$$

El sistema iterativo de funciones $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2\}$ satisface la condición del conjunto abierto de Morán por lo que la dimensión de Hausdorff de A y su dimensión de semejanza coinciden. En las tablas v y V se encuentran las coordenadas de ciertos puntos relevantes del conjunto A y en la tabla D las distancias entre algunos de ellos. Esta información será utilizada para obtener una cota superior de $H^S(A)$. Dado un conjunto plano B denotaremos con $|B|$ al diámetro de B. Sea $(j) = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, $j_k \in \{0, 1, 2\}$.

$|j| := m$ es la longitud de (j) . Denotaremos con $B_{(j)} = B_{j_1 \dots j_m}$ al conjunto $\tau_{j_1} \dots \tau_{j_m}(B) = \tau_{(j)}(B)$.

x e y son los extremos del arco de Jordan A (cf. [B]) y vale $|x-y| \approx 0.6325$. Pero $|A| = |R-R'| \approx 0.6872$. El conjunto

$\alpha := A_0 \cup A_1$ es tal que $|\alpha| = |Q-r'|$ y $f_1(\alpha) := |b^{-3}|^S + |b^{-1}|^S \approx 0.79489$. Usando el teorema 6.2 del trabajo de Marion [M1], obtenemos: $H^S(A) \leq |\alpha|^S / f_1(\alpha) \approx 0.5142 < |A|^S \approx 0.5646$.

Esta desigualdad puede mejorarse de la siguiente manera.

Escribiremos entre paréntesis las imágenes de los vértices de G por la transformación $\tau_0 \cdot \tau_2(z) = (-iz+2+i)/8$ y con letras minúsculas los vértices correspondientes de $\tau_1(G)$, (véase tabla V y Fig.3b). Sea $\beta := A_{02} \cup A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12} \cup A_{20}$. Entonces, $f_2(\beta) = 2|b^{-6}|^S + 2|b^{-4}|^S + |b^{-2}|^S = 2|b|^{-6S} + |b|^{-2S}$ pues $\mu^2 = 2^S = |b|^{2S}$ y $\mu^3 = \mu^2 + 2$. Por tanto, $f_2(\beta) = 2 \cdot 8^{-S} + 2^{-S/2}$.

De las tablas V y D obtenemos: $|\beta| = |r-r'| \approx 0.4859$. En efecto, $\text{Im}(r) = \text{Im}((X)) = \text{Im}((T))$ y $\text{Re}((Q)) < \text{Re}((P))$. Luego, recurriendo nuevamente al T.6.2 de [M1], resulta:

$$(2) \quad H^S(A) \leq |\beta|^S / f_2(\beta) < 0.4942 \qquad H^S(J) < 3.24724.$$

2. EL ARCO DE JORDAN A. La siguiente función f define un homeomorfismo entre $0 \leq t \leq 1$ y A de manera que $f(0)=x$, $f(1)=y$,

(cf. [B], Th.4),

$$(3) \quad t = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} \longrightarrow f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{a_1} \cdot \dots \cdot \tau_{a_n} (0)$$

donde $a_j \in \{0,1,2\}$, (t se representa en la base 3 con cifras a_j).

Los puntos de la forma $t = \sum_{j=1}^N a_j 3^{-j}$ tienen por imágenes los vértices de la N -ésima poligonal aproximante que surge en la construcción de A partiendo de $[x,y]$. Este segmento y los casos $N = 1,2,3$ se exhiben en la Fig.1a.

2.1. LA PROPIEDAD A DEL CONJUNTO $A = f([0,1])$. En primer término observemos que los arcos $f([0,2/9])$ y $f([2/9,4/9])$ son trasladados uno del otro. Más precisamente,

PROPOSICION 1. Si $0 \leq t \leq 2/9$ entonces $f(t+2/9) = f(t) + 1/4b$, $1/4b = f(1/3) - f(1/9)$.

DEMOSTRACION. Sea $0 \leq t < 1/9$. Luego, $t = (0.00a_{-3}\dots)_3$ y $t+2/9 = (0.02a_{-3}\dots)_3$. Se deduce que si $a = (0.a_{-3}\dots)_3$ entonces

$$f(t) = \tau_0(\tau_0(f(a))) \quad \text{y} \quad f(t+2/9) = \tau_0(\tau_2(f(a))).$$

Pero $(\tau_0 \cdot \tau_2 - \tau_0 \cdot \tau_0)(z) = 1/4b = (\tau_1 \cdot \tau_0 - \tau_0 \cdot \tau_1)(z)$. Luego,

$$f(t+2/9) - f(t) = 1/4b = \lim_{t \rightarrow 1/9} \{f(t+2/9) - f(t)\} = f(1/3) - f(1/9).$$

Análogamente, si $1/9 < t < 2/9$ entonces

$$t = 0.01a_{-3}\dots \quad \text{y} \quad t + 2/9 = 0.10a_{-3}\dots$$

Por tanto, $f(t) = \tau_0(\tau_1(f(a)))$, $f(t+2/9) = \tau_1(\tau_0(f(a)))$.

Nuevamente resulta $f(t+2/9) - f(t) = 1/4b = f(1/3) - f(1/9)$, QED.

Denotaremos con I_{jk} intervalos de la forma $[j/9, k/9]$. Definamos:

$$(4) \quad \Delta := \frac{1}{2} \min \{ \text{dist}(f(I_{02}), f(I_{39})); \text{dist}(f(I_{03}), f(I_{49})); \text{dist}(f(I_{01}), f(I_{29})) \}.$$

Veremos en el §2.2 que $\Delta > 3/100$.

TEOREMA 1. La curva A verifica la propiedad A con este Δ .

DEMOSTRACION. Esta propiedad A fue introducida en [P], pg. 63, para conjuntos autosemejantes generales. En nuestro caso se expresaría en la siguiente forma.

Para todo $x \in A$ y para toda bola (abierta) $B_r(x)$ con $r < \Delta$ existen $y \in A$ y una isometría Y del plano de manera que valen:

a) $Y(B_r(y) \cap A) = B_r(x) \cap A$; b) $B_r(y) \cap A \subset \tau_i(A)$ para algún $i \in \{0,1,2\}$.

Sea $p = f(t)$, $0 < t < 1$, $r < \Delta$. Como

$$\text{dist}(\tau_0(A), \tau_2(A)) \geq \text{dist}(f(I_{03}), f(I_{49})) \geq 2\Delta$$

resulta que $B_r(p)$ es disjunta con $\tau_0(A)$ ó $\tau_2(A)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que es disjunta con $\tau_2(A)$.

Vale la alternativa:

j) $B_r(p) \cap A \subset \tau_i(A)$ con $i = 0$ ó 1

jj) $B_r(p) \cap A \subset f(I_{24}) = f([2/9, 4/9])$.

En efecto, si no valiera j) y $B_r(p)$ contuviera algún punto de $f(I_{02})$ o de $f(I_{49})$ entonces, por (4), $2r \geq 2\Delta$, absurdo.

En el caso j) la condición A se cumple con Y la transformación identidad. Si no vale j), la condición A se cumple con la traslación: $Y^{-1}(z) = \sigma(z) := z + f(1/9) - f(1/3)$. Para ver esto llamemos $q = \sigma(p)$. Dado que ahora vale jj), tenemos:

$B_r(p) \cap f(I_{23}) \neq \emptyset$. De la proposición 1 sigue entonces que

$B_r(q) \cap f(I_{01}) \neq \emptyset$. Luego, $B_r(q) \cap f(I_{29}) = \emptyset$ y se obtiene:

$\sigma(B_r(p) \cap f(I_{24})) = B_r(q) \cap f(I_{02})$. En todo caso, $\sigma(B_r(p) \cap A) = B_r(q) \cap A \subset \tau_0(A)$, o bien, $\subset \tau_1(A)$, QED.

Del teorema 11 de [PP] se deduce el siguiente

COROLARIO 1. A es un conjunto $2^{3/2}$ -casi-autosemejante en el sentido de McLaughlin, (cf. [Mc]).

2.2. CALCULO DE Δ . La tabla d al pie de las Figs. 1a y 1b exhibe las distancias entre algunos arcos de la curva A.

A modo de ejemplo calcularemos dos elementos de esta tabla.

Veamos que $\hat{D} := d(f[1/3+1/27, 1/3+2/27], f[1/9+1/27, 2/9-1/27])$

≈ 0.117 . En efecto, sea $D = d(G, \sigma(G))/|b|^5 = d(G, \sigma(G))/4\sqrt{2}$

con σ la traslación en $t := \sigma(y) - y = (x-y)/2 + (3/2)(-i)(x-y)$.

(Véanse las Figs. 1a y 1c). Los valores de x e y se encuentran

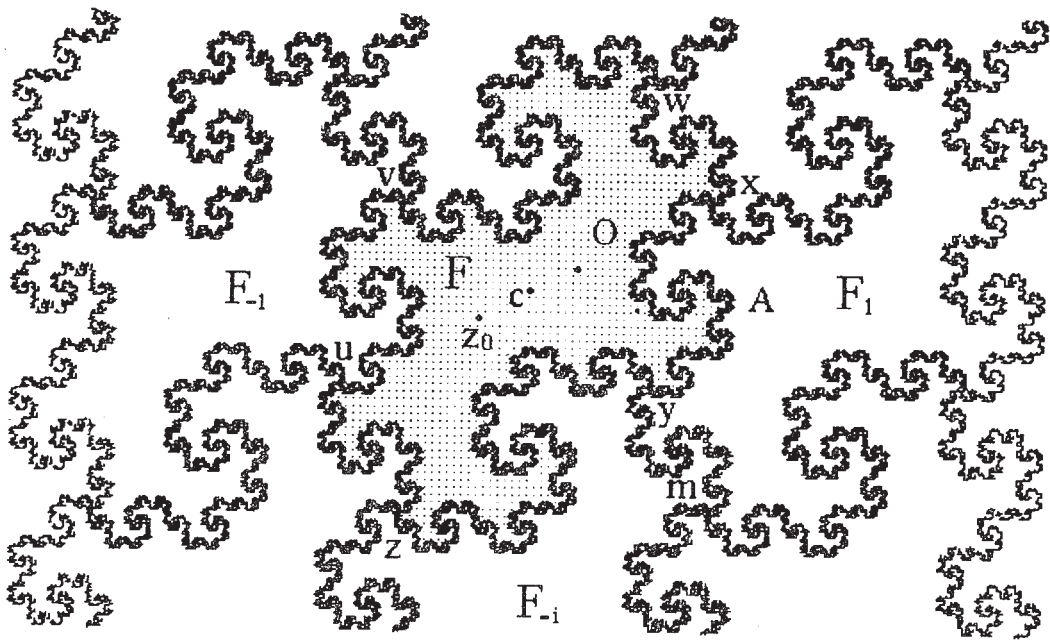


Fig. 2

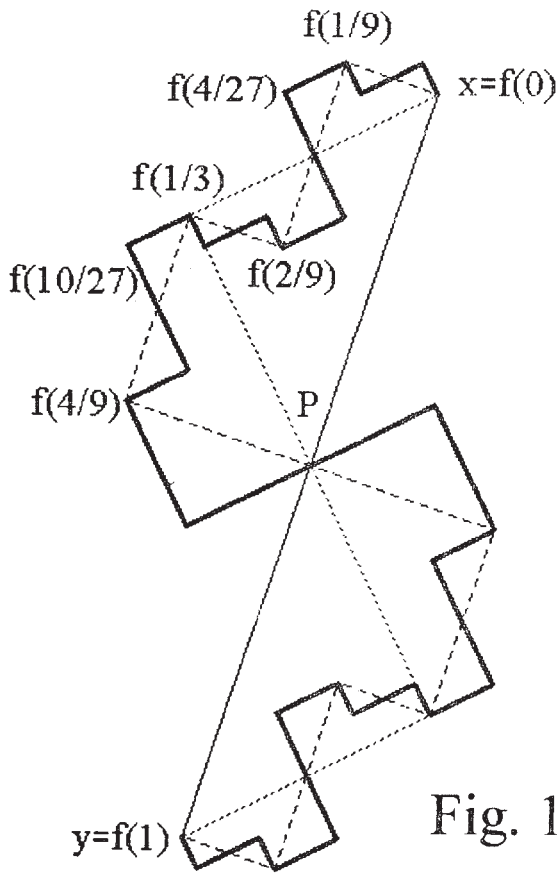


Fig. 1a

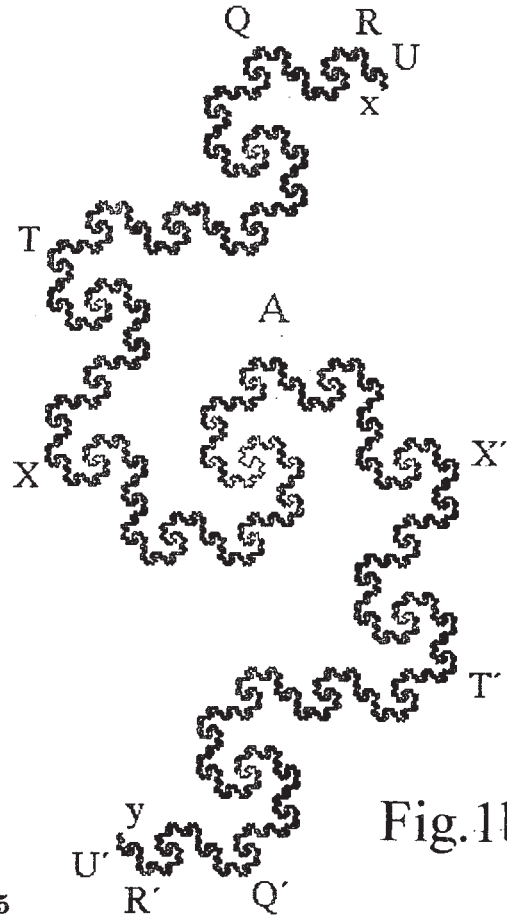


Fig. 1b

en la tabla v. Se tiene $t = 1$. Por tanto, $\sigma(z) = z + 1$. Luego, $D = (2/3)/4\sqrt{2}$. Como $d(\text{co}(A), \text{co}(\sigma(A))) = d(X', \sigma(X))$ y $X, X' \in A$, sigue que $d(\text{co}(A), \sigma(\text{co}(A))) = d(A, \sigma(A))$. En consecuencia, $D = d(A, \sigma(A))/4\sqrt{2}$. Entonces, $\hat{D} = D = \sqrt{2}/12$.

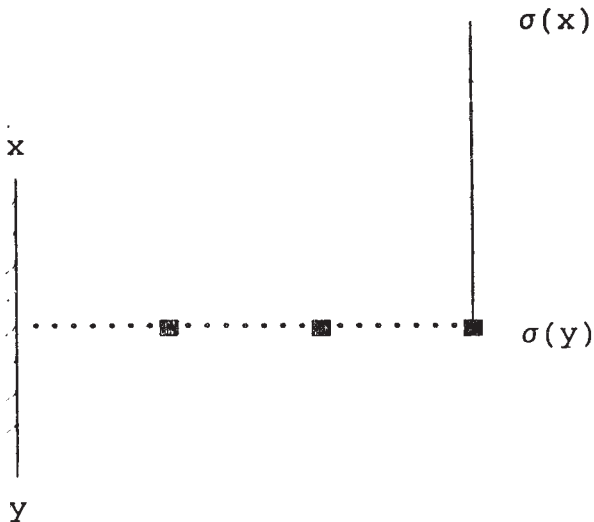


FIG. 1c

Veamos ahora que vale

$$(5) \quad d(f[1/3+1/27, 1/3+2/27], f[2/9-1/27, 2/9]) \approx 0.0740.$$

Sea \hat{d} el miembro izquierdo de (5) y definamos,

$d' = d(G, \sigma(G))/4\sqrt{2}$ donde $\sigma(z) = (-i/2)(z-y) + y + (x-y)(1/2 - i) = (-i/2)z + (11 - 2i)/10$, (cf. Figs. 1a y 1d). En este caso, $d(G, \sigma(G)) = d(T', \sigma(R')) = d(A, \sigma(A))$, y se obtiene:

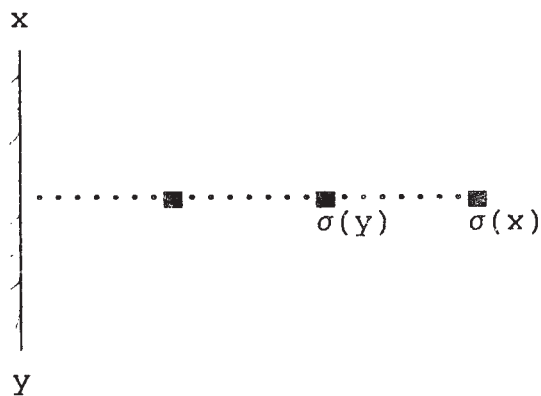


FIG. 1d

$\hat{d} = d' = d(T', \sigma(R'))/4\sqrt{2}$. Las coordenadas de T' y R' se encuentran en la tabla V, qed.

PROPOSICION 2. $2\Delta = \hat{d} = d(f(I_{02}), f(I_{39})) =$

$$= d(f[1/3, 1/3 + 1/27], f[1/9 + 1/27, 2/9 - 1/27]) \approx 0.0740.$$

DEMOSTRACION. Resulta de (4) y la tabla d observando que

$$i) d(f(I_{49}), f(I_{03})) = d(f(I_{45}), f(I_{03})) = \inf\{d(f(I_{45}), f(I_{12})), d(f(I_{45}), f(I_{23}))\} \approx 0.0833.$$

$$ii) d(f(I_{02}), f(I_{39})) = d(f(I_{12}), f(I_{39})) = \\ = \inf\{d(f(I_{45}), f(I_{12})), d(f(I_{34}), f(I_{12}))\} = d(f(I_{34}), f(I_{12})).$$

En efecto, de la tabla d obtenemos,

$$d(f(I_{34}), f(I_{12})) = \\ = d(f[1/3 + 1/27, 1/3 + 2/27], f[1/9 + 2/27, 2/9]) = \\ = d(f[1/3, 1/3 + 1/27], f[1/9 + 1/27, 1/9 + 2/27]) \approx 0.0740.$$

Y de i) que $d(f(I_{45}), f(I_{12})) > d(f(I_{34}), f(I_{12}))$.

$$iii) d(f(I_{01}), f(I_{29})) = \\ = \inf\{d(f(I_{01}), f(I_{23})), d(f(I_{01}), f(I_{34})), d(f(I_{01}), f(I_{45}))\} \geq \\ \inf\{d(f(I_{01}), f(I_{23})), d(f(I_{12}), f(I_{34})), d(f(I_{12}), f(I_{45}))\} = \\ = d(f(I_{12}), f(I_{34})), \text{ QED.}$$

3. UNA COTA INFERIOR DE LA MEDIDA DE A. A es un conjunto autosemejante que satisface la condición del conjunto abierto y la propiedad A por lo que vale que $\Delta^S \leq H^S(A)$, (cf.[P]). En nuestro caso $\Delta \approx 0.037$ y se tiene:

$$0.00659 < H^S(A) \qquad 0.0433 < H^S(J).$$

Sea $G = \text{co}(A)$, la cápsula convexa de A. Obviamente $A \not\subset \partial G$ y por tanto A tiene la propiedad Z, i.e., existe (j) tal que

$G_{(j)} \subset \text{int}(G)$, (cf.[P] y [PP] §4). Sea G_r la familia de conjuntos $G_{(j)}$, $|j|=r \geq 1$ y $P(G_r)$ la familia de subconjuntos no vacíos de G_r . A cada conjunto Γ de $P(G_r)$ le asignamos un peso $J_r(\Gamma)$:

$$J_r(\Gamma) = J_r(G_{i_1 \dots i_r}, \dots, G_{j_1 \dots j_r}) := (r_{i_1} \dots r_{i_r})^S + \dots + (r_{j_1} \dots r_{j_r})^S.$$

Si $J_r^{-1}(\alpha) \neq \emptyset$ definimos el diámetro interno correspondiente a α como: $h_r(\alpha) = \min_{B \in J_r^{-1}(\alpha)} \max\{d(G_{(j)}, G_{(k)}) : G_{(j)}, G_{(k)} \in B\}$ donde

$d(.,.)$ es la distancia entre conjuntos. Sea $\delta \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$, $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ y $U_r(\delta) = \max\{\alpha: h_r(\alpha) \leq \delta\}$. Esta función está bien definida si $r \geq r_0(\epsilon_1)$. Definimos: $B_r = \sup\{U_r(\delta)/\delta^S: \delta \in I\}$ donde $I := [\epsilon_1, \epsilon_2]$.

Entonces, $B_r \geq 1/H^S(A)$ y $B_r \rightarrow 1/H^S(A)$ si $r \rightarrow \infty$, supuesto que

$\epsilon_1 = \Delta$, $\epsilon_2 = \Delta \cdot 2\sqrt{2}$. Sea $r = 3$. Si numeramos los conjuntos de G_3 consecutivamente y de arriba hacia abajo como en la Fig. 4b, obtenemos, con notación obvia:

$$\alpha_1 = J_3(13,14) \approx 0.2763, \quad \alpha_2 = J_3(11,13,14) \approx 0.34767,$$

$$\alpha_3 = J_3(11,12,13,14) \approx 0.37246, \quad \alpha_4 = \inf\{\alpha; \alpha > \alpha_3\} \approx 0.3735;$$

$$h_3(\alpha_1) = 0, \quad h_3(\alpha_2) \approx 0.0589, \quad h_3(\alpha_3) \approx 0.06645, \quad h_3(\alpha_4) > \Delta \cdot 2\sqrt{2}.$$

En la figura 5 puede verse la función $U_3(\delta)$ que necesita, para ser calculada sobre I , solamente estos valores. Sigue enseguida que $1/B_3 \approx \Delta^S/0.276 \approx 3.62 \cdot \Delta^S$. Y logramos,

$$(6) \quad 0.0238 < H^S(A) \qquad 0.156 < H^S(J).$$

4. TABLAS UTILIZADAS EN EL TEXTO.

TABLA d.

$$d(f(I_{01}), f(I_{23})) \approx 0.117$$

$$d(f(I_{45}), f(I_{23})) > 0.0939$$

$$d(f(I_{45}), f(I_{12})) \approx 0.0833$$

$$d(f[1/3, 1/3 + 1/27], f[2/9 - 1/27, 2/9]) > 0.085$$

$$d(f[1/3, 1/3 + 1/27], f[1/9 + 1/27, 2/9 - 1/27]) \approx 0.0740$$

$$d(f[1/3, 1/3 + 1/27], f[1/9, 1/9 + 1/27]) \approx 0.117$$

$$d(f[1/3 + 1/27, 1/3 + 2/27], f[2/9 - 1/27, 2/9]) \approx 0.0740$$

$$d(f[1/3 + 1/27, 1/3 + 2/27], f[1/9 + 1/27, 2/9 - 1/27]) \approx 0.117$$

$$d(f[1/3 + 1/27, 1/3 + 2/27], f[1/9, 1/9 + 1/27]) \approx 0.167$$

$$d(f[1/3 + 2/27, 1/3 + 1/9], f[2/9 - 1/27, 2/9]) \approx 0.117$$

$$d(f[1/3 + 2/27, 1/3 + 1/9], f[1/9 + 1/27, 2/9 - 1/27]) \approx 0.167$$

$$d(f[1/3 + 2/27, 1/3 + 1/9], f[1/9, 1/9 + 1/27]) \approx 0.224$$

TABLA v.

$$\begin{array}{lll}
 x = \frac{2+i}{5} & u = \frac{-4-2i}{5} & m = x-i = \frac{2-4i}{5} = v \cdot b \\
 y = \frac{1-2i}{5} & v = \frac{-3+i}{5} & u = w \cdot b \\
 z = \frac{-3-4i}{5} & w = \frac{1+3i}{5} & w = y \cdot b \\
 z_0 = \frac{-2-i}{5} & c = \frac{z_0}{2} &
 \end{array}$$

TABLA V.

$$\begin{array}{lll}
 U = (97+51i)/240 & R = (23+14i)/60 & Q = (9+7i)/30 \\
 T = (2+i)/15 & X = (4-3i)/30 & U' = (47-99i)/240 \\
 R' = (13-26i)/60 & Q' = (9-13i)/30 & T' = (7-4i)/15 \\
 X' = (14-3i)/30 & P = (3-i)/10 & r = (21+13i)/120 \\
 r' = (51-37i)/120 & (T) = (62+26i)/240 & (Q) = (67+21i)/240 \\
 (U') = (381+193i)/1920 & (X) = (57+26i)/240 &
 \end{array}$$

TABLA D.

$$\begin{array}{lll}
 |b^{-1}| \approx 0.7071 & |b^{-3}| \approx 0.3536 & s \approx 1.5234 \\
 |T'-X'| \approx 0.1667 & |X'-U| \approx 0.3187 & |U-R| \approx 0.0295 \\
 |R-Q| \approx 0.0833 & |Q-T| \approx 0.2357 & |R-R'| \approx 0.68718 \\
 |Q-Q'| \approx 0.6667 & |U-U'| \approx 0.6588 & |U-R'| \approx 0.6725 \\
 |U-u'| \approx 0.5208 & |R-u'| \approx 0.5421 & |R-r'| \approx 0.5433 \\
 |Q-u'| \approx 0.5516 & |Q-r'| \approx 0.5559 & |r-r'| \approx 0.4859
 \end{array}$$

4.1. NOTA FINAL. La cota inferior de $H^S(A)$ obtenida con $r=3$ (cf.(6)) podría lograrse con una simple calculadora. Debe esperarse un incremento importante de esa cota aumentando r , y ya con $r=4$. Ese comportamiento se ha constatado, por ejemplo, en el molde de Sierpinski, (cf.[PP]).

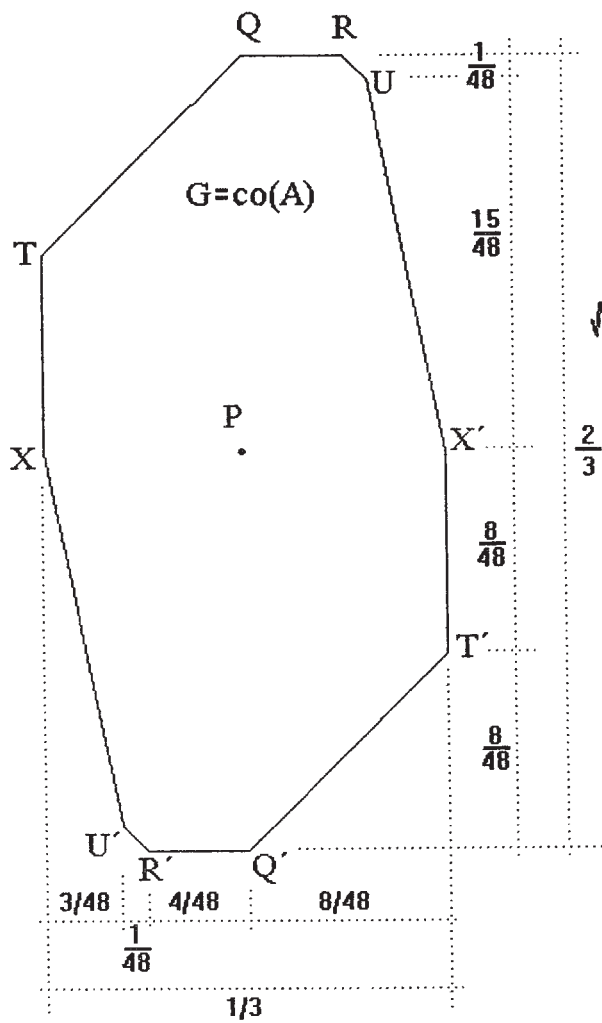
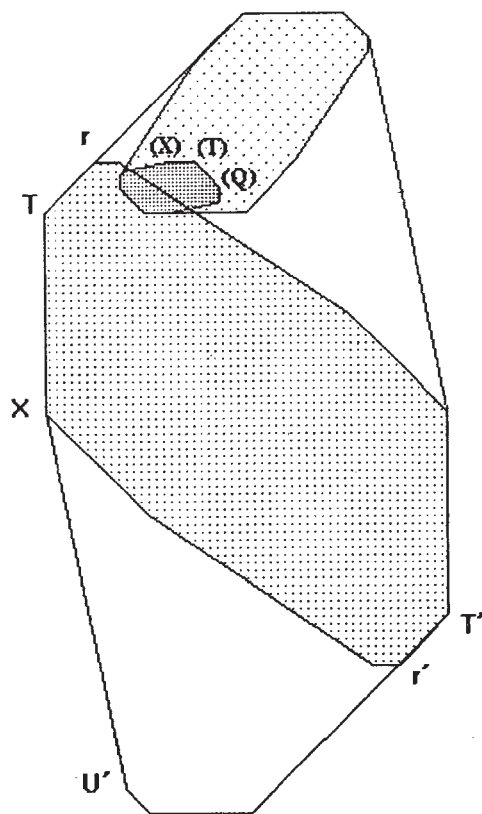
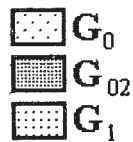


Fig. 3a

$$|A|=|G|=|R-R'|=\sqrt{17/6}>|Q-Q'|=\sqrt{16/6}$$

Fig. 3b



$$|G_{02} \cup G_1 \cup G_{20}| = |r-r'|$$

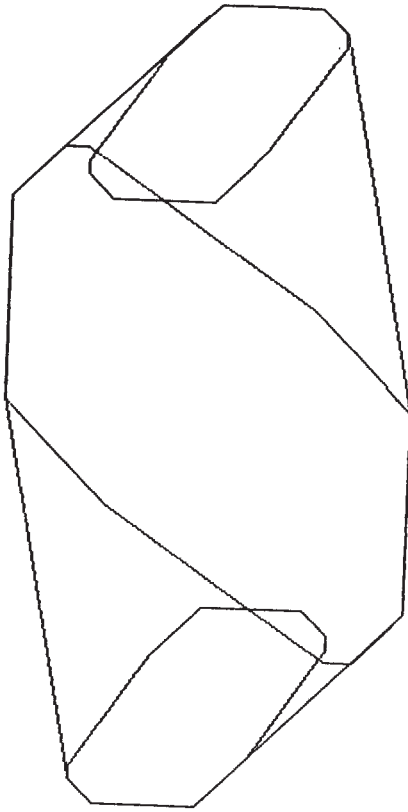


FIG. 4a

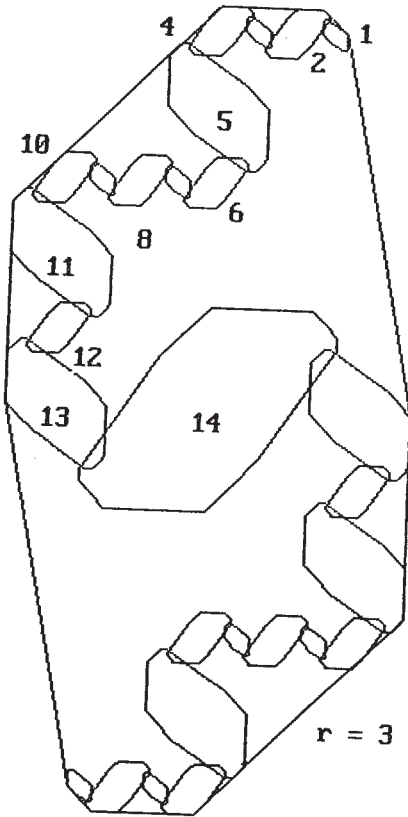
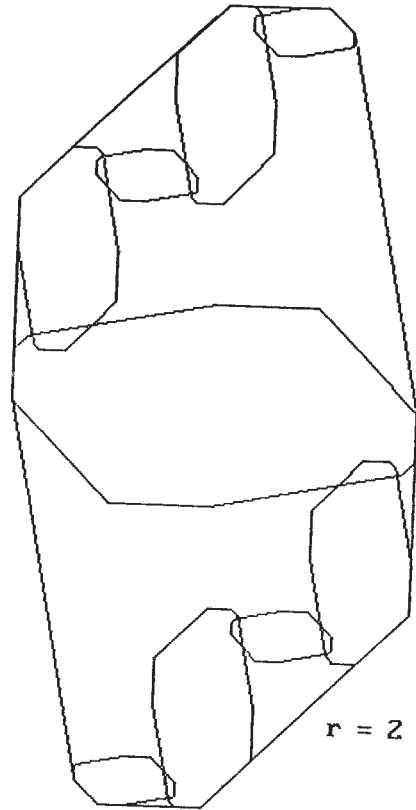
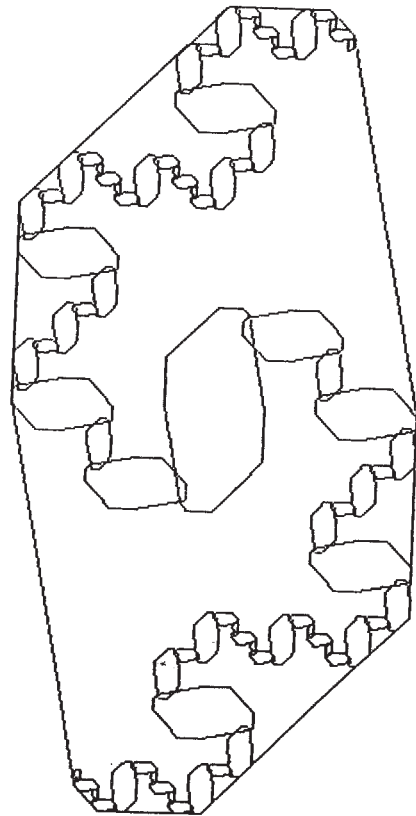


FIG. 4b



Observemos finalmente que la dimensión de entropía (box dimension) coincide con la de Hausdorff (cf.[FK]) :

$$(7) \quad \dim_B(J) = \dim_H(J).$$

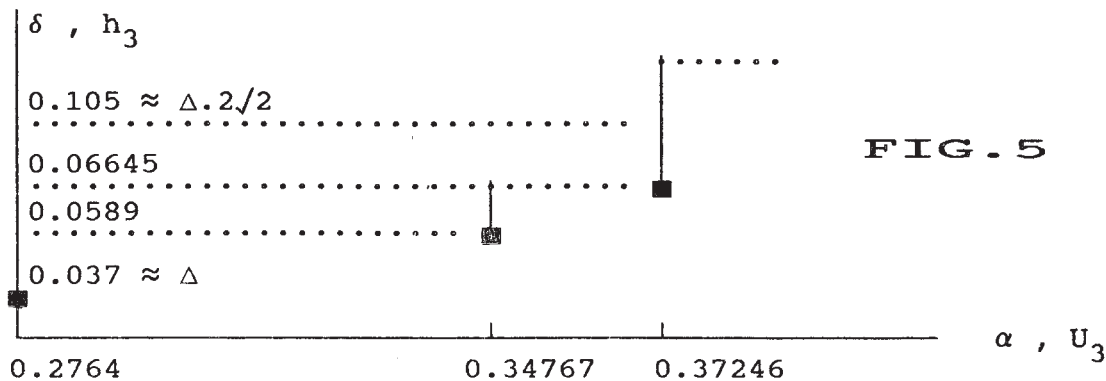


FIG. 5

BIBLIOGRAFIA.

- [B] Benedek, A. and Panzone, R., The set of gaussian fractions, Actas 2° Congreso "Dr. A. A. R. Monteiro", INMABB, (UNS-CONICET), (1993), 11-40.
- [E] Edgar, G. A., MEASURE, TOPOLOGY and FRACTAL GEOMETRY, Springer, (1990).
- [F] Falconer, K., FRACTAL GEOMETRY, J. Wiley & Sons, (1990).
- [FK] Falconer, K.J., Dimensions and measures of quasi self-similar sets, Proc.of the AMS, 106,2(1989)543-554.
- [H] Hutchinson, J.E., Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J., 30(1981), 713-747.
- [K] Knuth, D. E., THE ART OF COMPUTER PROGRAMMING, Vol. 2, Ch. 4, Addison-Wesley, Reading, (1969).
- [M1] Marion, J., Mesure de Hausdorff d'un fractal à similitude interne, Ann. Sc. Math. Québec, 10(1986), 51-84.
- [Mc] McLaughlin, J., A note on Hausdorff measures of quasi-self-similar sets, Proc. AMS, vol.100(1987), 183-186.
- [M] Morán, P. A .P., Additive functions of intervals and Hausdorff measure, Proc. Camb. Phil. Soc., 42(1946), 15-23.
- [P] Panzone, Pablo A., On the measure of self-similar sets, Rev. Unión Mat. Arg., 38(1992), 48-87.
- [PP] Benedek, A., Panzone, P. A. and Panzone, R., Some comments on the Hausdorff measure of self-similar sets, Volumen de homenaje a R. Ricabarra, INMABB, (1995)35-52.

DEPARTAMENTO E INSTITUTO DE MATEMATICA, UNIV. NAC. DEL SUR.