# La Conjetura de Roldán en el caso $\tilde{A}_n$

Sonia Elisabet Trepode
Universidad Nacional de Mar del Plata
Universidade de São Paulo

En el presente trabajo mostraremos que A un álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$ de representación finita puede ser obtenida de $\tilde{A}_n$ por una sucesión de módulos inclinantes y álgebras de endomorfismos de dichos módulos donde todas las álgebras que intervienen son de representación finita.

En todo el trabajo A es una k-álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k algebráicamente cerrado, asociativa y con identidad; mod A representa la categoria de módulos a derecha finitamente generados. Decimos que A es de representación finita ó de tipo finito, si el número de clases de isomorfía de módulos indescomponibles es finito.

Recordamos de [7],[9],[10] que un módulo T se dice inclinante (tilting) se satisface las siguientes propriedades homológicas:

i) $pd_A T \leq 1$

ii) $Ext_A^1(T,T) = 0$

iii) EL número de sumandos indescomponibles de T es igual al número de clases de isomorfía de simples sobre el álgebra A.

Un módulo inclinante tiene asociada una teoria de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ tal que:

$$\mathcal{T}(T) = \{M \in modA : Ext_A^1(T,M) = 0\}$$

$$\mathcal{F}(T) = \{M \in modA : Hom_A(T,M) = 0\}$$

el módulo inclinante se dice separante (separating) si $modA = \mathcal{T}(T) \cup \mathcal{F}(T)$.

Un álgebra $A$ se dice inclinada (tilted) si existe un álgebra hereditaria $H = kQ$ y un módulo inclinante $T_H$ tal que $A = End_H T$

Un álgebra A se dice inclinada iterada (tilted iterated) de tipo $Q$ se existe una sucesión de módulos inclinantes separantes $T_0,T_1,\cdots,T_{n-1}$ y álgebras $A_0,A_1,\cdots,A_n$, $A_i = End_{A_{i-1}} T_i$, $A_0 = A$ y $A_n = kQ$ donde $Q$ no posee circuitos orientados.

Las álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_n$ fueron totalmente clasificadas por Assem y Skowronski en función de su carcaj (quiver) ordinario, en el mismo trabajo ellos mostraron que la propiedad del álgebra ser de tipo finito se refleja en una condición sobre el carcaj ordinario. Por otra parte, Roldán clasificó las álgebras inclinadas de tipo $\tilde{A}_n$ y los posibles carcajs para ellas.

Exhibiremos aqui una sucesión de módulos inclinantes separantes que transforma el carcaj de un álgebra inclinada iterada de tipo finito en el carcaj de un álgebra inclinada de tipo finito.

# 1 Preliminares

La siguiente conjetura debida a Roldán establece que si $A$ es un álgebra inclinada iterada de representación finita de tipo $kQ$, donde $Q$ no possee circuitos orientados y no es un diagrama de Dynkin, entonces $A$ puede ser obtenida de $kQ$ por una sucesión de módulos inclinantes y sus respectivas álgebras de endomorfismos donde todas ellas son de representación finita.

**Conjetura 1.1** *"Sea $B$ un álgebra inclinada iterada de tipo de representación finito entonces existen sucesiones de módulos inclinantes separantes $T_0',\ldots.\ T_{m-1}'$ y álgebras $B_0,\ldots.,B_m$ ,donde $B_i = End_{B_{i-1}}T_{i-1}$ con $B_0 = B$ ,$B_m = kQ$ y $B_{m-1}$ de tipo de representación finito".*

El objectivo es ver que la conjetura de Roldán se satisface en el caso $\tilde{A}_n$ para esto necesitamos algunos lemas previos y algunos teoremas de caracterización. Assem y Skowronski caracterizaron totalmentes las álgebras inclinadas iteradas de tipo $\tilde{A}_n$ en función de su carcaj ordinario en [4], recordamos aqui los teoremas principales:

**Teorema 1.2** *(Assem-Skowronski) Sea $k$ un cuerpo algebráicamente cerrado, y $A$ una $k$-álgebra de dimensión finita, básica y conexa. Entonces son equivalentes:*

*i) $A$ es un álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$.*

*ii) $A$ es isomorfa al álgebra del carcaj $kQ/I$ donde el carcaj $(Q,I)$ satisface las siguientes condiciones:*

*($R_1$) El número de flechas que llegan o salen de un vértice es como máximo dos.*

*($R_2$) Para cada flecha $\alpha$, existe como máximo una flecha $\beta$ e una flecha $\gamma$ tal que $\alpha\beta$ y $\gamma\alpha$ no pertenecen a $I$.*

*($R_3$) $I$ esta generado por caminos de longitud dos.*

*($R_4$) Para cada flecha $\alpha$ en $Q$ existe como máximo una flecha $\beta$ e una flecha $\gamma$ tal que $\alpha\beta$ e $\gamma\alpha$ pertenecen a $I$.*

*($R_5$) $Q$ contiene un único circuito no orientado $C$.*

*($R_6$) El número de relaciones orientadas en sentido horario en $C$ es igual al número de relaciones orientadas en sentido antihorario en $C$.*

*($R_7$) $Q$ contiene exactamente $n$+1 vértices.*

**Observación 1.3** *Un álgebra que satisface de ($R_1$) hasta ($R_7$) se dice que satisface la propiedad ($R$)*

En el mismo trabajo mostraron que la propiedad de un álgebra ser de tipo finito se refleja como una concición adicional sobre el carcaj ordinario.

**Teorema 1.4** *(Assem-Skowronski) Sea $k$ algebráicamente cerrado y $A$ una $k$-álgebra de dimensión finita, básica y conexa. Las seguintes condiciones son equivalentes:*

*i) $A$ es un álgebra inclinada iterada de tipo de representación finito de tipo $\tilde{A}_n$.*

*ii) $A$ satisface a condición (R) junto con la condición adicional:*

*($R_8$) El circuito $C$ esta ligado por lo menos una relación.*

Sea $Q_A$ sin circuitos orientados. Para cada pozo $i$ en $Q_A$ el APR módulo inclinante asociado es:

$$T^i = \tau^{-1}e_iA \oplus (1 - e_i)A$$

que es un módulo inclinante separante, ver[5].

Supongamos que el carcaj (Q,I) satisface la propiedad (R) y que $T_A^i$ es el APR inclinante asociado al pozo $i$, describiremos el carcaj de $B = EndT_A^i$ y mostraremos que tambien satisface la propiedad (R). Denotaremos por $j^*$ el vértice de $Q_B$ correspondiente al vértice $j$ de $Q_A$. El pozo $i$ se llamará *ligado* si es el punto final de por lo menos una relación cero en $Q_A$, en el caso contrario se llamará *libre*.

Necesitaremos los siguientes lemas de [4]

**Lema 1.5** *(Assem-Skowronski) Sea $A$ satisfaciendo la condición (R) y $i$ un pozo libre en $Q_A$. Entonces:*

*i)Toda flecha $j \to i$ en $Q_A$ induce una flecha $i^* \to j^*$ en $Q_B$.*

*ii) Toda flecha $h \to j$ ($j \neq i$) en $Q_A$ induce una flecha $h^* \to j^*$ em $Q_B$.*

*iii)Todas las flechas en $Q_B$ son exactamente de la forma i) ó ii)*

*iv) Las relaciones en $Q_B$ son exactamente aquellas de $Q_A$ -$\{i\}$(esto es, existe una relación $a^* \to b^* \to c^*$ si y solo si existe una relación cero $a \to b \to c$ en $Q_A$, y estas relaciones forman un conjunto minimal de generadores en $I_B$)*

**Lema 1.6** *(Assem-Skowronki) Sea $A$ satisfaciendo la condición (R) y $i$ un pozo ligado en $Q_A$. Entonces:*

*i)Toda flecha $h \to i$ en $Q_A$ induce una flecha $i^* \to h^*$ em $Q_B$.*

*ii)Toda relación de $j$ a $i$ en $Q_A$ induce una flecha $j^* \to i^*$ en $Q_B$.*

*iii)Toda flecha $h \to j$ ($j \neq i$) tal que no hay una relación cero $h \to j \to i$ induce una flecha $h^* \to j^*$ en $Q_B$, si existe una relación cero $h \to j \to i$ entonces hay flechas $h^* \to i^* \to j^*$ en $Q_B$.*

*iv) Todas las flechas en $Q_B$ son de la forma (i),(ii) o (iii).*

*v)Un sistema minimal de generadores para $I_B$ es dado por relaciones cero dela forma $a^* \to b^* \to c^*$ donde $a \to b \to c$ es una relación cero en $Q_A$ e $c \neq i$ ,de la forma $h^* \to i^* \to j^*$ donde no hay camino de $h$ para $j$ en $Q_A$ y de la forma $a^* \to h^* \to i^*$ si hay relaciones cero $a \to h \to j$ y $h \to j \to i$ en $Q_A$.*

**Proposición 1.7** *(Assem-Skowronski) Si $A$ satisface la propiedad (R) y $T_A^i$ es el APR inclinante asociado al pozo $i$, entonces $B = End_A T^i$ tambien satisface la propiedad (R).*

Estos módulos apareceran en la prueba del teorema, asi como tambien compuestas de ellos, mostraremos por medio de los siguientes lemas que los módulos inclinantes a utilizar son composiciones de APR inclinantes y la propiedad (R) se mantiene en todos los casos.

**Corolário 1.8** *Sea $A$ satisfaciendo (R), y $T_A$ una composición de APR inclinantes. Entonces $End_A T$ satisface la propiedad (R).*

Los siguientes lemas pueden probarse usando las técnicas de [2], omitimos la demostración por razones de espacio.

**Lema 1.9** *Sea $e = \sum_{i=0}^{l} e_i$ y sea $T_A = \tau^{-1} eA \oplus (1-e)A$ entonces $T_A$ es un módulo inclinante que es una composición de APR inclinantes.*

**Lema 1.10** *Sea $S$ una sección completa (complete slice) con un número finito de predecesores e sin circuitos orientados entre sus predecesores. Sea $T$ el módulo de la sección $S$ (slice module), entonces $T$ es un módulo inclinante que es composición de APR inclinantes.*

Recordamos de [3] el siguiente lema:

**Lema 1.11** *(Assem-Happel) Sea $H$ un álgebra hereditaria de tipo $A_n$ linealmente ordenado con $r$ vértices. Sea $T_r = P(r)$ y $T_i = P(r)/P(i)$ para $(i \neq r)$ .Sea*

$$T = \oplus_{i=1,..,r} T_i$$

*Entonces*

*a)$T$ es un módulo inclinante.*

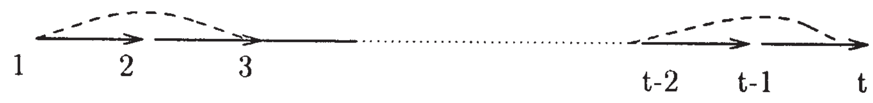
*b)$T$ es separante.*

*c)$(Q_A, I_A)$ de $A = End_H T$ satisface la propiedad (R).*

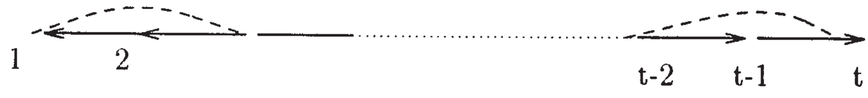
En el siguiente teorema de [11] Roldán caracteriza las álgebras inclinadas de tipo $\tilde{A}_n$ en función de su carcaj ordinario.

**Teorema 1.12** *(Roldán)Sea $A$ un álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$. Entonces $A$ es inclinada si y solo si $A$ es isomorfa a un álgebra de carcaj $kQ/I$ donde el carcaj $(Q,I)$ no contiene como subcarcaj pleno ninguno de los siguientes carcajes o sus duales*

a)




b)




*donde 1 y 2 estan en el circuito.*

c)


*donde 0,1 y 2 estan en el circuito.*

d)

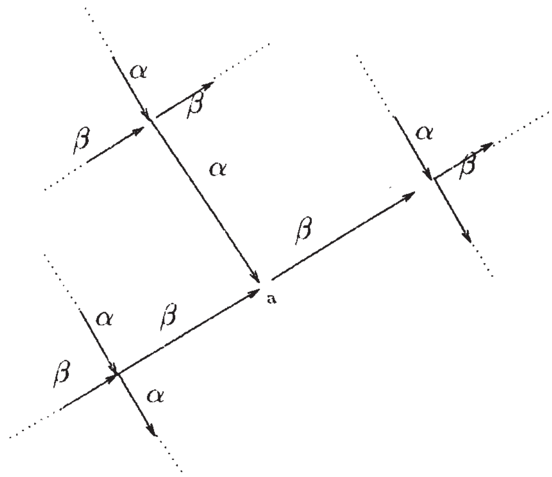

*donde todos los vértices de 1 hasta t estan en el circuito.*

# 2 Demostración del resultado

Vamos ahora a demostrar que la conjetura de Roldán se satisface en el caso $\tilde{A}_n$

**Teorema 2.1** *Sea $A$ un álgebra inclinada iterada de tipo $\tilde{A}_n$ de tipo de representación finito, entonces $A$ es un álgebra inclinada iterada de un álgebra $B$ inclinada de tipo $\tilde{A}_n$ de tipo de representación finito.*

**Dem.** De **1.2** sigue que el carcaj $Q_A$ satisface la propiedad (R), y de **1.4** sigue que el carcaj $Q_A$ consiste de un solo circuito no orientado ligado por lo menos una relación junto con algunos ramos, cada uno de los quales es el carcaj de un álgebra inclinada iterada de tipo $A_r$, ver [3], esto es un subcarcaj pleno y conexo del siguiente arbol infinito com todas las relaciones $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$.




Cada ramo esta ligado al circuito en un único punto que llamaremos la raiz del ramo.

La demostración será realizada en ocho pasos.

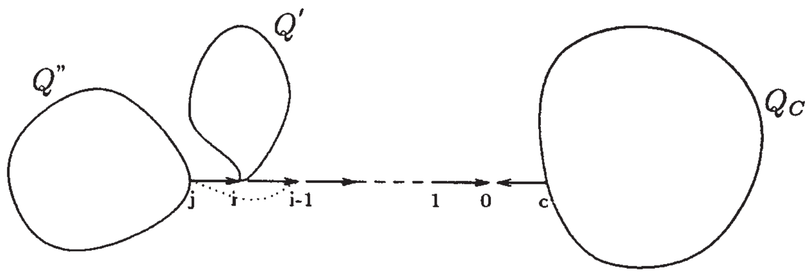
Los pasos de 1 hasta 4 aparecen en [4] en la demostración del teorema 1, los recordamos aqui para mayor claridad.

1) En este paso vamos a invertir todas las flechas de manera que todas ellas apunten para el circuito. En cada ramo haremos inducción sobre la distancia de cada pozo al circuito. En el caso que el pozo es una punta solo tiene un vecino entonces el APR inclinante

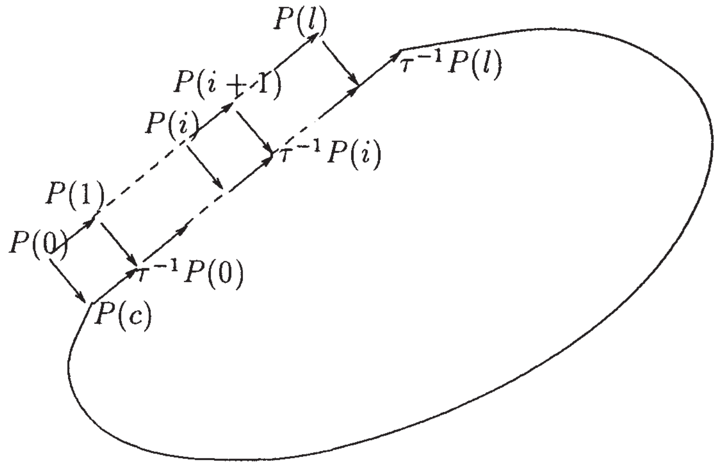
$$T^0 = \tau^{-1} e_0 A \oplus (1 - e_0) A$$

es tal que su anillo de endomorfismos $EndT^0$ todavia satisface la propiedad (R) ,ver **1.7** y $0^*$ no es un pozo en $EndT^0$.

Inductivamente podemos suponer que el pozo está en el medio del ramo y que $Q_A$ tiene la siguiente forma:



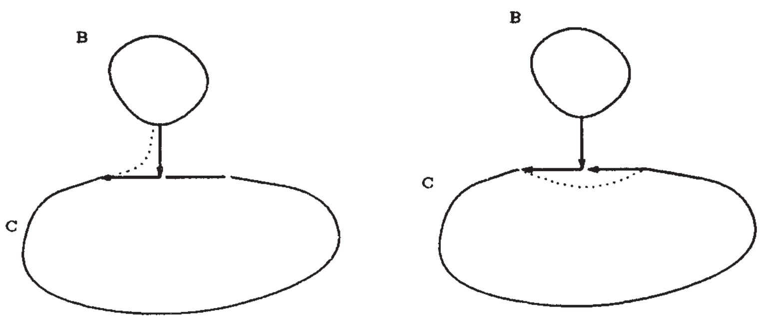

donde $Q_C$ contiene el circuito y todas las flechas de $Q'$,$Q$" apuntan para el pozo 0 por la hipotesis inductiva. Aqui $Q'$ e $Q$" pueden ser vacios. Observe que $Q'$ contiene un subcarcaj pleno conexo $l \to ... \to i+1 \to i$ maximal con la propiedad de no contener una relación cero. En ese caso el carcaj de Auslander-Reiten de $\Gamma_A$ de A tiene la siguiente forma:




Sea $e = \sum_{i=0}^{l} e_i$ y sea

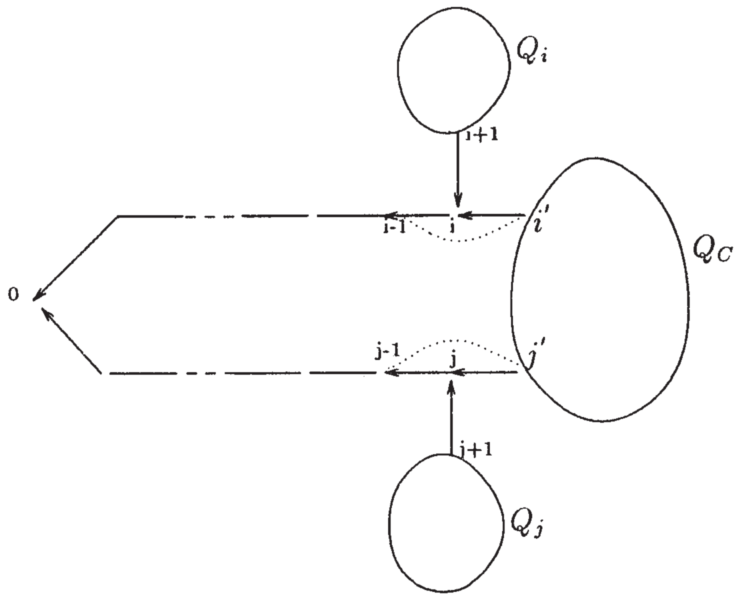
$$T_A = \tau^{-1}eA \oplus (1-e)A$$

entonces por **1.9** $T_A$ es un módulo inclinante separante y es una composición de APR inclinantes. Por lo tanto por **1.10** $End_AT$ satisface la propiedad (R) y no hay un pozo $S^*$ en el ramo conteniendo $0^*$ cuya distancia al circuito sea mayor que la distancia de $c^*$ al circuito. Observe que el efecto de aplicar $T_A$ fue invertir todas las flechas de 0 hasta $l$. Observe que despues de aplicar este proceso en cada ramo todas las flechas apuntan hacia el circuito. Observe que los ramos estan pegados al circuito de alguna de las siguientes maneras:




por la propiedad (R). En el primer caso decimos que B está pegado exteriormente y en el segundo que B está pegado interiormente en C.

2) En este paso vamos a eliminar todos los ramos pegados exteriormente entre dos relaciones consecutivas y en direcciones opuestas en el circuito. El carcaj de A tiene la siguiente forma:



donde hemos supuesto que no hay relaciones cero en el circuito entre los puntos medios $i$ y $j$ , $Q_i$,$Q_j$ pueden ser vacios y pueden haber ramos pegados exteriormente en vértices en el camino

$$w : i \to i-1 ............ j-1 \leftarrow j$$

Observe que $w$ debe contener por lo menos un pozo 0 que no es raiz de un ramo por la propiedad (R)(($R_1$)) Por otro lado $Q_i$ y $Q_j$ contienen respectivamente subcarcajes plenos conexos

$$l_i \to ...... \to i+1 \to i$$

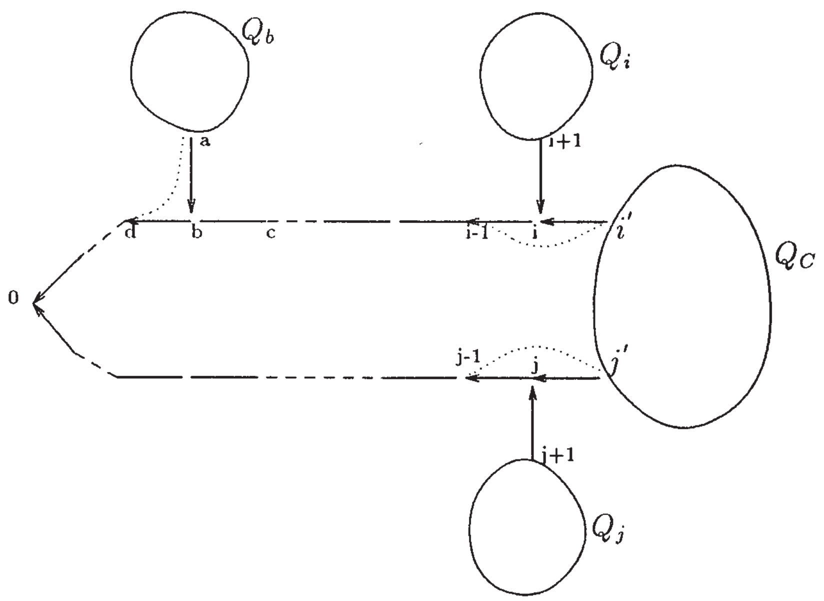
y

$$l_j \to ...... \to j+1 \to j$$

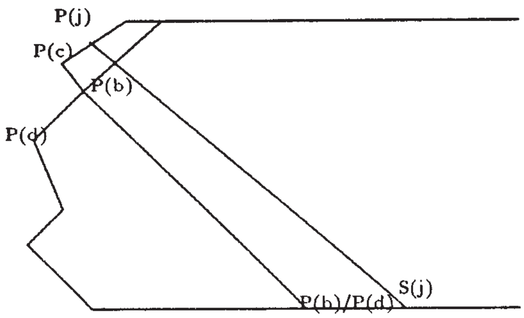
maximales con la propiedad de no contener relaciones cero. Sea H el álgebra hereditaria de tipo $A_m$ dada por el siguiente carcaj de $Q_A$:

$$l_i \to ..... \to i \to i-1 ...... \to 0 \leftarrow ..... j-1 \leftarrow j \leftarrow ...... \leftarrow l_j$$

Supongamos ahora que existe un ramo $Q_B$ pegado exteriormente al circuito en $w$, podemos suponer sin perdida de generalidad que ningun otro ramo está pegado en w entre la raiz do $Q_B$ y el pozo 0. $Q_A$ tiene la siguiente forma:




Sea $R = radP(a)$ entonces $R = S(b)$ si $c \to b$ ó $R = P(b)/P(d)$ si $b \to c$, en ambos casos el soporte de R está contenido en $Q_H$. Entonces por una propiedad de las álgebras hereditarias de tipo $A_m$, ver [6],[8], R pertenece a uno de los bordes em $\Gamma_H$, esto es para todo módulo de la forma $\tau^z R$, $z$ perteneciente a los enteros, tenemos que $\alpha'(\tau^z R) \leq 1$.




Entonces por Lema 3.1 de [1] existe una sección completa en $\Gamma_H$ conteniendo ambos R e un módulo proyectivo en el borde opuesto de $\Gamma_H$.

Sea $T'_A$ el módulo de esta sección completa considerado como A-módulo e sea

$$T_A = T'_A \oplus \oplus_{l \notin H} P(l)$$

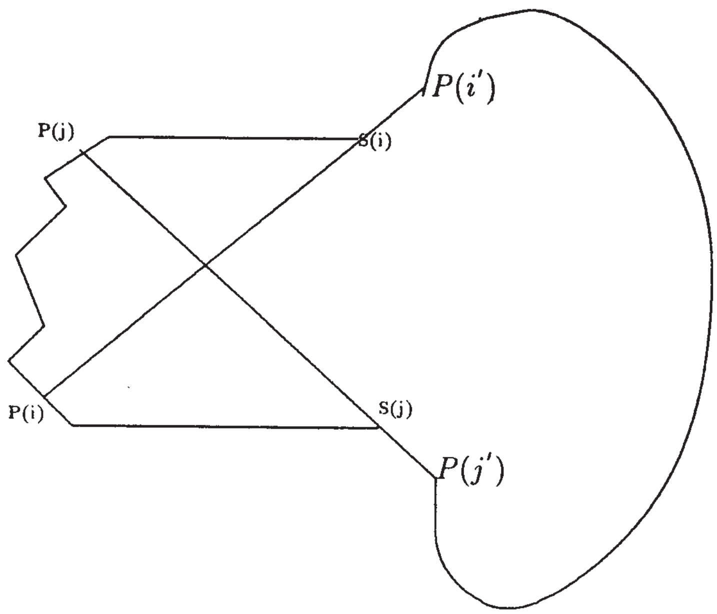
Entonces $T_A$ por **1.10** es un módulo inclinante separante que es composición de APR inclinantes entonces $EndT_A$ satisface la propiedad (R) y hemos borrado la relación cero de punto medio $b$. Observe que el ramo $Q_B$ se transforma en otro ramo que debe ser pegado en alguna otra parte de $Q_H$, esto es en el $t$ tal que $R = \tau^{-s}P(t)$, entonces $t = l_i$ ó $t = l_j$, por lo tanto el ramo fue pegado en el ramo $Q_i$ ó en el ramo $Q_j$, de esta manera eliminamos todos los ramos pegados exteriormente entre los puntos medios $i$ y $j$.

3) En este paso vamos a eliminar todos los pares de relaciones en el circuito menos una, para garantizar que el álgebra continue de tipo de representación finito.

Volviendo a la situación donde no hay ramos pegados exteriormente en $w$ entre $i$ y $j$. Nuestro próximo objectivo es borrar simultáneamente las relaciones cero con punto medio $i$ y $j$ respectivamente. Consideremos de nuevo el álgebra hereditaria $H$ dada por $Q_H$

$$l_i \to \ldots\ldots \to i \to i-1 \ldots\ldots\ldots\ldots j-1 \leftarrow j \ldots\ldots\ldots \leftarrow l_j$$

Observamos que los módulos $S(i)$ y $S(j)$ son sumandos de los radicales de $P(i')$ y $P(j')$ respectivamente, pero como anteriormente $S(i)$ y $S(j)$ considerados como $H$ módulos pertenecen a bordes opuestos en $\Gamma_H$ entonces $\Gamma_A$ tiene la siguiente forma:




Sea $T'_A$ el módulo de la sección completa de $\Gamma_H$ conteniendo ambos $S(i)$ e $S(j)$, ver **[1]**, considerado como A módulo y sea

$$T_A = T'_A \oplus \oplus_{l \notin H} P(l)$$

Entonces $T_A$ es un módulo inclinante separante que es compuesta de APR inclinantes por bf1.10 $EndT_A$ tambien satisface la propiedad (R). Ya que $S(i)$ y $S(j)$ son respectivamente sumandos del radical de $P(i')$ y $P(j')$ hemos borrado las dos relaciones cero con puntos medios $i$ y $j$, y incorporamos los subcarcajes plenos y conexos

$$l_i \to ....... \to i+1$$

y

$$l_j \to ...... \to j+1$$

dentro del circuito, ya que $S(l)$ $l = i, j$ pertenece a la órbita de $P(l_t)$ $t = i, j$.

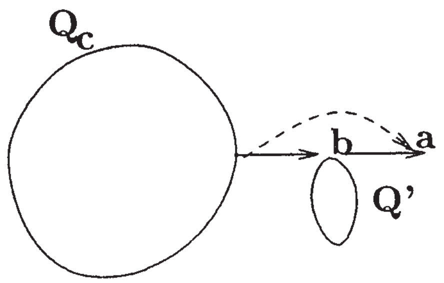
4)En este paso eliminamos todos los ramos pegados exteriormente que restaron despues de el proceso usando las mismas técnicas que en 2).

5)Solo quedan ahora como máximo dos ramos pegados interiormente. Colocar todas las flechas apuntando hacia el circuito como en 1) Si fuera el caso de haber aparecido un nuevo pozo en algún ramo. Invertir todas las flechas; ahora todas las flechas estan apuntando para afuera del circuito.

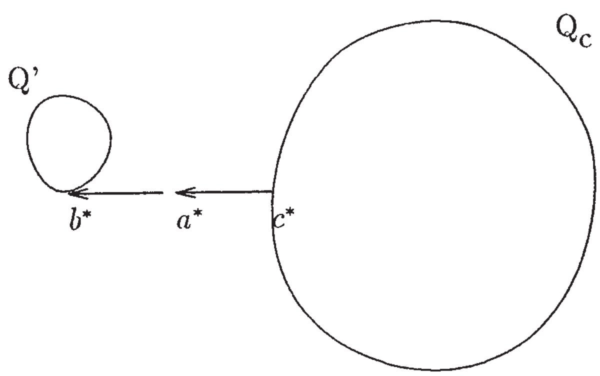
6)Trabajaremos en cada ramo. Detectar todos los pozos del ramo. Observe que si $a$ es un pozo de un ramo, entonces es una punta, no podemos tener la siguiente situación:

$$\longrightarrow .a \longleftarrow$$

Ya que todas las flechas apuntan para afuera del circuito. Se $a$ es un pozo ligado, entonces tenemos:



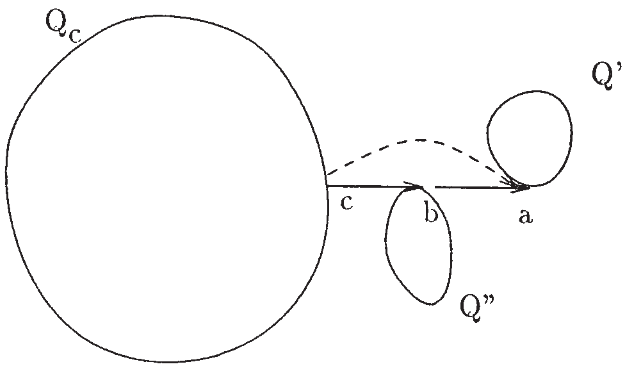

Tomamos $T = T[a] = \tau^{-1}P(a) \oplus \oplus_{j \neq a} P(j)$ Entonces $B = End_A T$ es de la siguiente forma:




donde no hay relación $c^* \to a^* \to b^*$ Ya que hay un camino en $Q_A$ de $c$ para $b$.

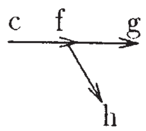
Si hay una flecha incidente en $b$ ,tiene que estar saliendo de $b$,ya que todas las flechas apuntan para afuera del circuito. En este caso $b^*$ no es ahora un pozo pues hay una flecha de $b^* \to d^*$. Se no hay flecha incidente en $b$ entonces $b^*$ es un pozo libre, pues si hubiese una relación acabando en $b^*$ deberia haber otra relación acabando en $a$, ya que deberia haber otra flecha llegando a $a^*$, esto es $d \to e \to a$ una relación cero en $Q_A$, pero eso es imposible pues $a$ es una punta y solo hay una flecha llegando a $a$. Observe que todas las flechas en $Q'$ estaban apuntando hacia el circuito y continuan de esa manera; entonces en $Q_B$ todas las flechas continuan apuntando hacia el circuito.Observe que de **1.7** $B$ todavia satisface la propiedad (R). Repetir el proceso con todos los pozos ligados.

7)Ya no hay pozos ligados en el carcaj $Q_A$, todas las flechas continuan apuntando hacia afuera de circuito. Ahora si hay una relación en el ramo no es extremal.




Observe que en $Q$" las flechas salen de $b$.

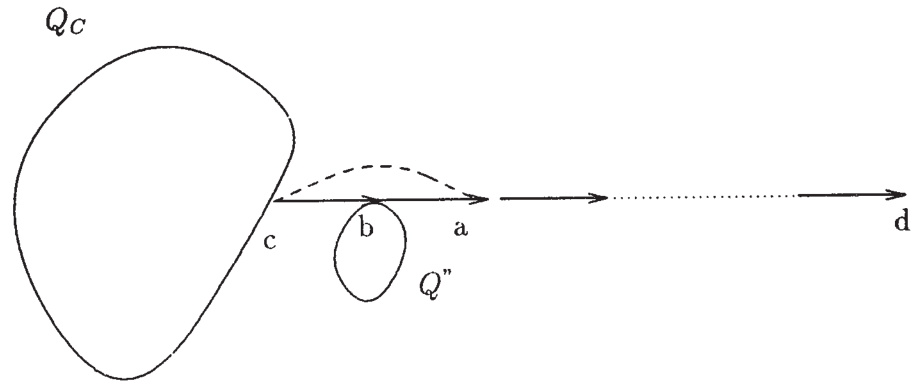
Podemos suponer que $Q'$ no tiene relaciones, ya que podemos tomar la primera relação comenzando de un pozo. Ahora todas las flechas estan apuntando hacia afuera del circuito, entonces no podemos tener en $Q'$ la siguiente situación:




Por la propiedad (R) deberia haber una relación, entonces $Q'$ es un $A_n$ linealmente ordenado.

$$a \to . \to . \to \ldots.. \to d$$

Entonces tenemos

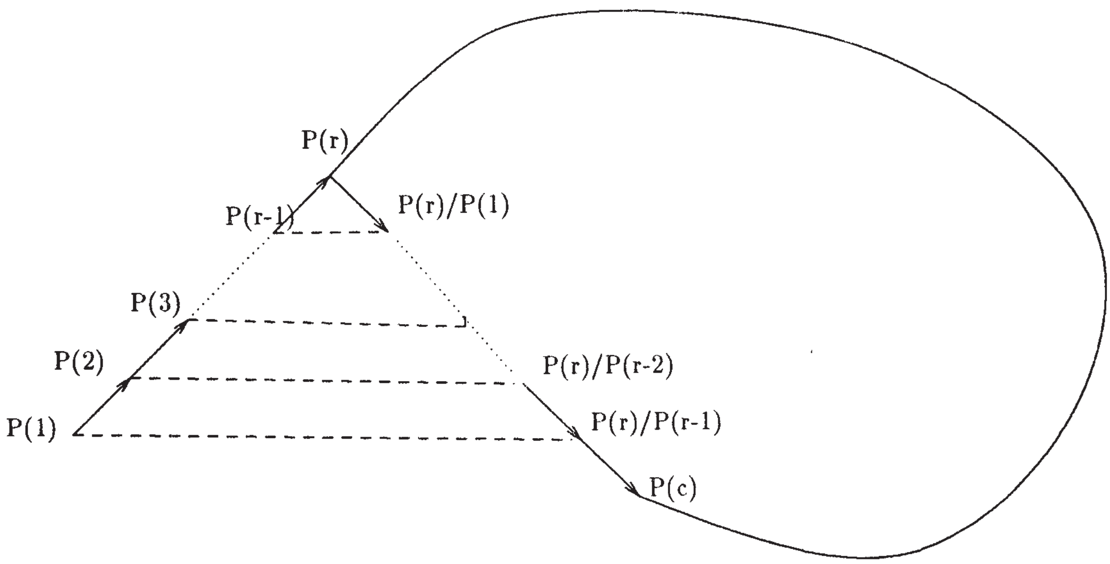



Sea d = 1, b = r y H el álgebra hereditaria de tipo $A_n$

$$r \to .r-1 \to \ldots\ldots.. \to 1$$

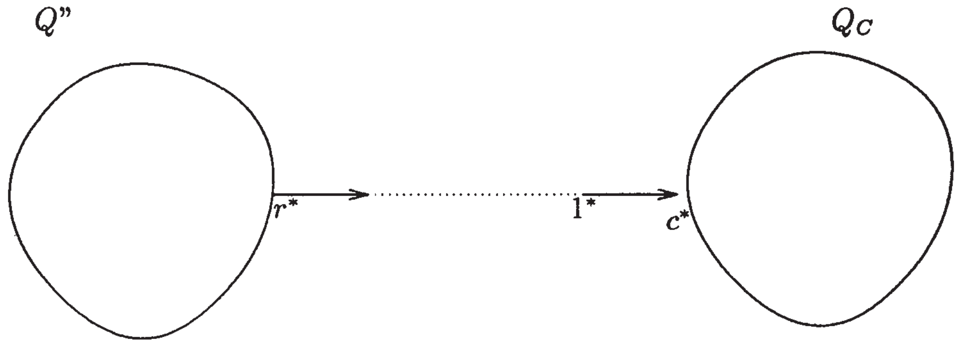
Sea $T_i = P(r)/P(i)$

$$T = \oplus_{i=1}^{r-1} T(i) \oplus \oplus_{j \neq \{1,\ldots,r-1\}} P(j)$$

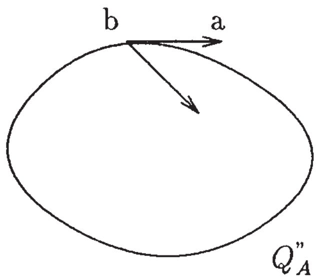


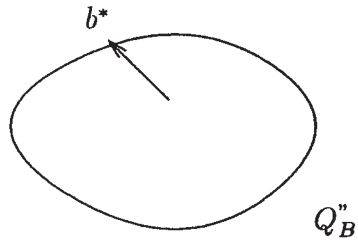

Observe que rad P(c) = P(b)/P(a) = P(r)/P(r-1)

Entonces $Q_B$ es de la siguiente forma:




Donde las flechas de $Q_C$ e $Q$" fueron invertidas. Entonces ahora todas las flechas apuntan hacia el circuito.



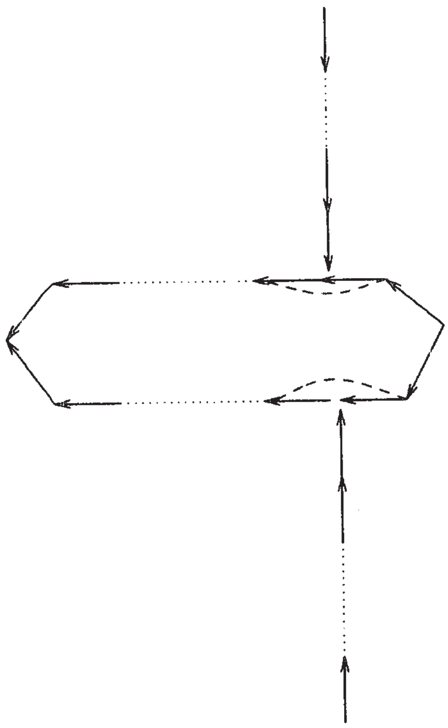




Observemos que el módulo inclinante T borro una relación y $Q_B$ todavia satisface la propiedad (R), veamos ahora que acontece con las relaciones, las relaciones en $Q_C$ y $Q''$ permanecen las mismas. Supongamos que habia una relación cero acabando en $r = b$ y comenzando en $Q''$ en algún punto s, por la propiedad (R) debia tener longitud dos,teniamos $s \longrightarrow j \longrightarrow r$ en $Q_A$ entonces tenemos una relación cero $s^* \longrightarrow j^* \longrightarrow r^*$ en $Q_B$. Si teniamos una relación cero comenzando en $t$ en $Q_C$ y acabando en $r$, $t \longrightarrow c \longrightarrow r$ en $Q_A$ obtenemos una relación cero $1^* \longrightarrow c^* \longrightarrow t^*$ en $Q_B$. Afirmamos que no hay nuevas relaciones. Una nueva relación cero deberia comenzar en $Q''$ e acabar en algún punto $i^*$ entre $1^*$ y $r - 1^*$ ó comenzar en $i^*$ entre $1^*$ y $r - 1^*$ y acabar en $Q_C$ Supongamos que $s \in Q''$ es tal que $Hom_A(P(s), P(r)/P(i)) = 0$ mas $Hom_A(P(s), P(r)) \neq 0$ tenemos la sucesión de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow P(i) \longrightarrow P(r) \longrightarrow P(r)/P(i) \longrightarrow 0$$

Sea $f : P(s) \longrightarrow P(r)$ $f \neq 0$ ya que $Hom_A(P(s), P(r)/P(i)) = 0$ tenemos por la propiedad del núcleo que existe una aplicación no nula $g : P(s) \rightarrow P(i)$ por lo tanto un camino no nulo de $i$ hasta $s$ en $Q_A$ lo que contradice la propiedad (R) porque tendriamos un circuito pasando por $s$ y por $i$ y $Q_A$ posee un único circuito que está contenido en $Q_C$, por lo tanto no hay relaciones comenzando en $Q$" y acabando en algún $i^*$ entre $1^*$ y $r-1^*$. Si $t$ es un punto en $Q_C$ tal que $Hom_A(P(r)/P(i), P(t)) = 0$ para algún $i$ entre 1 y $r-1$ pero $Hom_A(P(r), P(t)) \neq 0$ tenemos que $Hom_A(P(r), P(t)) = 0$ (ver $\Gamma_A$) y eso da la relación cero considerada anteriormente. Por lo tanto no hay nuevas relaciones en $Q_B$ y hay por lo menos una relación cero menos. Observe que de **1.11** $B$ todavia satisface (R).

8)Repetir el paso 5, esto es invertir todas las flechas y inductivamente aplicar el paso 7), hasta no tener ninguna relación en el ramo, entonces el ramo resulta un $A_n$ linealmente ordenado con todas las flechas apuntando hacia el circuito. Simetricamente en el otro ramo. Entonces finalmente obtenemos:



Que claramente es una algebra inclinada de tipo $\tilde{A}_n$ de tipo de representación finito ,ya que no contiene ninguno de los subcarcajes exhibidos en **1.12** es inclinada, y como el circuito está ligado por un par de relaciones es de tipo finito. Por lo tanto tenemos que la conjetura se satisface en el caso $\tilde{A}_n$. □

**Observación 2.2** *Note que la sucesión de álgebras que aparecen en la demostración del teorema anterior son todas de tipo finito, ya que siempre el circuito está ligado por lo* *menos una relación, por lo tanto en el proceso solo intervienen álgebras de tipo finito.*

**Agradecimientos** Al profesor Ibrahim Assem por haberme llamado la atención sobre este problema asi como por su disposición para responder a mis inquietudes, a mi Director el profesor Flavio Ulhoa Coelho por útiles discusiones y comentarios interesantes. Este trabajo fué realizado con el financiamiento de la Universidad Nacional de Mar del Plata y de organizaciones de apoyo a la investigación de la república de Brasil, CNPQ y CAPES en la Universidade de São Paulo.

# Referencias


[1] I. Assem. Algebras given by labelled quivers. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(29):41–48, 1984.

[2] I. Assem. Torsion theories induced by tilting modules. *Canadian Journal of Mathematics*, 36(5):899–913, 1984.

[3] I. Assem and D. Happel. Generalized tilted algebras of type $A_n$. *Communications of algebra*, 9(20):2101–2125, 1981.

[4] I. Assem and A. Skowronski. Iterated tilted algebras of type $\tilde{A}_n$. *Math. Z.*, 195:269–290, 1987.

[5] M. Auslander, M.I. Platzeck, and I. Reiten. Coxeter functors without diagrams. *Trans.Amer. Math.Soc.*, 250:1–46, 1979.

[6] M. Auslander, M.I. Platzeck, I. Reiten, and S.O. *Smal∅*. Almost split sequences whose middle term has at most two indecomposable summands. *Canadian Journal of Mathematics*, 31:942–960, 1979.

[7] K. Bongartz. *Tilted algebras,Proc. ICRA III(Puebla)*, volume 903 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1980.

[8] P. Gabriel. *Auslander-Reiten sequences and representation finite algebras, Proc. ICRA II(Otawa)*, volume 831 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1979.

[9] D. Happel and C.M. Ringel. Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2):399–443, 1982.

[10] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*, volume 1099 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1984.

[11] O. Rold n. Tilted algebras of types $\tilde{A}_n$,$\tilde{B}_n$, $\tilde{C}_n$ and $\tilde{BC}_n$. *Ph. D, Thesis, Carleton University*, 1983.