Sobre Generadores y Relaciones en Grupos Finitos

José O. Araujo y Rubén M. Gamondi

Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas - UNICEN

1 Introducción

Los grupos finitos de Coxeter son aquellos que admiten una presentación por generadores $s_1, \ldots, s_n$ y relaciones del tipo:

$$(s_i.s_j)^{m_{ij}} = 1, \ (m_{ij} \geq 2, \ m_{ii} = 1).$$

Por otra parte, si $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ denota el **grupo ortogonal real** asociado con el producto interno canónico $<,>$, los grupos de Coxeter son, esencialmente, los subgrupos finitos de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ que pueden ser generados por reflexiones.

En este trabajo se extienden algunas propiedades establecidas para grupos de Coxeter a un grupo finito representado fielmente en $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. Para grupos de Coxeter puede consultarse [1], [3], [4] y [5].

Las consideraciones siguientes sobre poliedros en general, son auxiliares para los resultados posteriores.

Un subconjunto $\mathcal{P}$ de $\mathbf{R}^n$ se dirá un **poliedro**, si $\mathcal{P}$ es la cápsula convexa de un número finito de puntos de $\mathbf{R}^n$. Dado un poliedro $\mathcal{P}$, un subconjunto no vacío $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ se dirá una **cara** de $\mathcal{P}$ si existe una funcional lineal Ψ de $\mathbf{R}^n$ tal que:

$$\mathcal{C} = \Psi^{-1}(\lambda) \cap \mathcal{P}$$

siendo λ el máximo valor alcanzado por Ψ en $\mathcal{P}$.

Una cara $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ se dirá m-**dimensional** ó m-**cara** si la variedad lineal generada por los elementos de $\mathcal{C}$ es de dimensión m.

Las caras 0-dimensionales se dirán **vértices**, las 1-dimensionales **aristas** y las 2-dimensionales se dirán **caras planas.**

Dado un vértice v en $\mathcal{P}$, para cada vértice w en $\mathcal{P}$, $w \neq v$, sea l_w, la semirecta definida por:

$$l_w = \{v + r(w - v) : r \in \mathbf{R}, \ r \geq 0\}.$$

Sea φ una funcional lineal tal que $\varphi(v) = \lambda$ y $\varphi(\mathcal{P} - \{v\}) < \lambda$, denotemos con $\mathcal{H}$ un hiperplano con ecuación $\varphi(x) = \epsilon < \lambda$.

Con $\mathcal{F}_v$ designamos la cápsula convexa de los puntos $l_w \cap \mathcal{H}$, y con $\mathcal{C}_v$ el cono dado por :

$$\mathcal{C}_v = \{v + \sum_i r_i(v_i - v) : r_i \in \mathbf{R},\ r_i \geq 0\}$$

donde los v_i son los vértices en $\mathcal{P}$ tales que los segmentos de extremos v y v_i son todas las aristas de $\mathcal{P}$ que contienen a v. Con las notaciones precedentes se tiene:

Lema 1.1 *i) Hay una correspondencia biyectiva entre las m-caras de $\mathcal{P}$ que contienen a v y las $(m-1)$-caras de $\mathcal{F}_v$, $(m \geq 1)$.*

ii) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}_v$.

iii) Si ψ es una funcional lineal, $r \in \mathbf{R}$, u y w vértices en $\mathcal{P}$ tales que $\psi(u) < r$ y $\psi(w) < r$, entonces u y w pueden ser conectados mediante una sucesión de aristas de $\mathcal{P}$ en el semiespacio $\psi(x) < r$.

Demostración

i) Sea $\mathcal{C}$ una $m-$cara de $\mathcal{P}$ que contiene a v y sea $\mathcal{V}$ la variedad lineal generada por $\mathcal{C}$. Si ψ es una forma lineal tal que:

$$\psi(\mathcal{P}) \leq \delta \text{ y } \psi(u) = \delta \text{ si y sólo si } u \in \mathcal{C}.$$

Se tiene $\psi(\mathcal{V}) = \delta$, $\psi(l_w) \leq \delta$, de donde $\psi(F_v) \leq \delta$. Por otra parte, cada punto s de $\mathcal{P}$ puede ser expresado como:

$$s = \sum_i r_i v_i, \qquad \text{con} \quad \sum_i r_i = 1,\ \ r_i \geq 0,$$

donde v_i son los vértices de $\mathcal{P}$.

La condición $\psi(s) = \delta$, impone $r_i = 0$ si $\psi(v_i) < \delta$, de modo que $\mathcal{C}$ es la cápsula convexa de los vértices de $\mathcal{P}$ que están en $\mathcal{C}$.

Puesto que $m \geq 1$, $\mathcal{C}' = \mathcal{V} \cap \mathcal{F}_v$ es no vacío. Por otra parte, poniendo:

$$u_i = l_{v_i} \cap \mathcal{H}$$

cada punto $p \in \mathcal{F}$ puede expresarse como:

$$p = \sum_i r_i u_i \text{ con } \sum_i r_i = 1, \quad r_i \geq 0.$$

Luego la condición $\psi(p) = \delta$ implica $p \in \mathcal{V}$, es decir, $p \in \mathcal{C}'$. Se tiene entonces que $\mathcal{C}'$ es una $(m-1)$-cara de $\mathcal{F}_v$.

Consideremos ahora $\mathcal{C}'$ una $(m-1)$-cara de $\mathcal{F}_v$ y una funcional ϕ tal que:

$$\phi(\mathcal{F}_v) \leq \delta \ \text{ y } \ \phi(u) = \delta \ \text{ si y sólo si } \ u \in \mathcal{C}'.$$

Definimos la forma lineal ψ como:

$$\psi = \phi + \frac{\delta - \phi(v)}{(\lambda - \epsilon)}(\varphi - \epsilon)$$

La forma ψ se comporta igual que ϕ respecto de $\mathcal{F}_v$ y además $\psi(v) = \delta$.
Sea $\mathcal{V}$ la variedad lineal generada por $\mathcal{C}' \cup \{v\}$ y $\mathcal{C} = \mathcal{V} \cap \mathcal{P}$. Para cada vértice w de $\mathcal{P}$, $w \neq v$, existe $r > 0$ tal que $v + r(w - v) \in \mathcal{F}_v$ luego $\psi(v + r(w - v)) \leq \delta$, de donde $\psi(\mathcal{P}) \leq \delta$ y vale la igualdad si y sólo si $v + r(w - v) \in \mathcal{C}'$, es decir si y sólo si $w \in \mathcal{C}$, de modo que $\mathcal{C}$ es una m-cara de $\mathcal{P}$, además $\mathcal{C}$ genera a $\mathcal{V}$.

ii) Dado un vértice w de $\mathcal{P}$, existen reales no negativos r, r_i y ϵ_i tales que:

$$v + r(w - v) = \sum_i r_i(v + \epsilon_i(v_i - v)), \quad \text{con} \quad \sum_i r_i = 1.$$

donde $r \neq 0$ si $w \neq v$ y se concluye que $\mathcal{C}_v$ contiene todos los vértices de $\mathcal{P}$, y por ser C_v convexo, contiene a $\mathcal{P}$.

iii) Sean $r_1 < r_2 < \ldots < r_k < r$ en $\mathbf{R}$ tales que existe un vértice s en $\mathcal{P}$ con $\psi(s) = r_i$. Sea $\mathcal{V}_i$ el conjunto de vértices en $\mathcal{P}$ en los cuales ψ alcanza el valor r_i. Si $\mathcal{C}$ es la cápsula convexa de $\mathcal{V}_1$, $\psi(\mathcal{C}) = r_1$ y $\mathcal{C}$ resulta una cara de $\mathcal{P}$, de modo que dos vértices en $\mathcal{V}_1$ pueden ser conectados por una sucesión de aristas de $\mathcal{C}$, que son tambien aristas de $\mathcal{P}$. Si $s \in \mathcal{V}_i$ con $i > 1$, y las aristas que contienen a s se encuentran en el semiespacio $r_i \leq \psi(x)$, por ii) resulta $\mathcal{P}$ contenido en este semiespacio, luego al menos una arista en s entra al semiespacio $\psi(x) < r_i$, es decir s se conecta con algún vértice en $\mathcal{V}_j$ con $j < i$. En conclusión, todo vértice en $\bigcup_i \mathcal{V}_i$ se conecta con algún vértice en $\mathcal{V}_1$ por aristas de $\mathcal{P}$ en el semiespacio $\psi(x) < r$.

□

Notaremos con $\mathcal{G}$ un subrupo finito de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$. G opera naturalmente en $\mathbf{R}^n$. Un vector $v \in \mathbf{R}^n$ se dirá regular para $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G}_v = \{1\}$, donde $\mathcal{G}_v$ es el grupo de isotropía de v en $\mathcal{G}$, más precisamente:

$$\mathcal{G}_v = \{\tau \in \mathcal{G} : \tau.v = v\}.$$

Para un punto regular v, notaremos con $\mathcal{P}_v$ el poliedro en $\mathbf{R}^n$ resultante de tomar la cápsula convexa de la $\mathcal{G}$-órbita de v, es decir del conjunto

$$\{\tau.v : \tau \in \mathcal{G}\}.$$

Proposición 1.1 *i) Los vértices de $\mathcal{P}_v$ son los transformados de v por los elementos de $\mathcal{G}$.*

ii) Para $\tau \in \mathcal{G}$, se tiene $\tau(\mathcal{P}_v) = \mathcal{P}_{\tau.v} = \mathcal{P}_v$.

iii) Si $\mathcal{G} \neq \{1\}$, los elementos de $\mathcal{P}_v$ generan un subespacio $\mathcal{G}$-invariante no nulo. En particular si $\mathcal{G}$ opera irreduciblemente, los elementos de $\mathcal{P}_v$ generan $\mathbf{R}^n$.

Demostración

i) Si $\|v\| = r$, $\mathcal{P}_v$ está contenido en la esfera S_r con centro en el origen de coordenadas y radio r. Para $\tau \in \mathcal{G}$, la funcional ψ definida como $\psi(w) = < w, \tau.v >$ alcanza su máximo valor en $\mathcal{S}_r$, y en consecuencia sobre $\mathcal{P}_v$, sólo en el punto $\tau.v$.

ii) Los poliedros $\tau(\mathcal{P}_v)$, $\mathcal{P}_{\tau.v}$ y $\mathcal{P}$ tienen como vértices la $\mathcal{G}$-órbita de v.

iii) Si $\mathcal{G} \neq \{1\}$, $v \neq 0$, pues v es regular. Por ii) es un subespacio generado por $\mathcal{P}_v$ es $\mathcal{G}$-invariante.

□

Definición 1.1 *Sea $\mathcal{G}$ un subgrupo finito de $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, v regular para $\mathcal{G}$. Llamaremos* **sistema fundamental de transformaciones en** *v al conjunto $\mathcal{T}_v$ formado por los elementos $\tau \in \mathcal{G}$ tales que el segmento que une v con $\tau.v$ es una arista de $\mathcal{P}_v$.*

Teorema 1.1 *Con las notaciones precedentes se tiene:*

i) $\mathcal{T}_v = \mathcal{T}_v^{-1}$ y para $\sigma \in \mathcal{G}$, $\mathcal{T}_{\sigma.v} = \sigma.\mathcal{T}_v.\sigma^{-1}$.

ii) $\mathcal{T}_v$ genera a $\mathcal{G}$.

Demostración

i) Supongamos $\tau \in \mathcal{T}_v$, es decir que hay una funcional ψ que alcanza su máximo valor λ en $\mathcal{P}_v$ exactamente en los puntos del segmento que une v con $\tau.v$.
La funcional $\psi.\sigma^{-1}$ alcanza el mismo valor máximo λ en $\mathcal{P}_v$, dado que $\sigma(\mathcal{P}_v) = \mathcal{P}_v$, y exactamente, en los puntos del segmento que une $\sigma.v$ con $\sigma.\tau.v = \sigma.\tau.\sigma^{-1}.(\sigma.v)$.
Se sigue que $\mathcal{T}_{\sigma.v} = \sigma.\mathcal{T}_v.\sigma^{-1}$. Dado que de $\tau \in \mathcal{T}_v$, $\tau^{-1} \in \mathcal{T}_{\tau.v} = \tau.\mathcal{T}_v.\tau^{-1}$, se sigue que $\tau^{-1} \in \mathcal{T}_v$, luego $\mathcal{T}_v^{-1} = \mathcal{T}_v$.

ii) Sea $\mathcal{G}_0$ el subgrupo de $\mathcal{G}$ generado por $\mathcal{T}_v$. Dado w vértice de $\mathcal{P}_v$, sea u en la $\mathcal{G}_0$-órbita de w tal que la distancia de u a v sea mínima. Pongamos :

$$\mathcal{T}_v = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}, \;\; v_i = \tau_i.v$$

se tiene:

$$d(v_i, u) = d(v, \tau_i^{-1}.u) \geq d(v, u) \;\; \forall \;\; i = 1, \ldots, m$$

donde d denota la distancia, y según el lema 1.1:

$$u - v = \sum_i r_i.(v_i - v) \qquad\qquad (r_i \geq 0).$$

Se sigue que:

$$< v_i, u > \; \leq \; < v, u > \quad \forall \;\; i = 1, \ldots, m.$$

o bien $< v_i - v, u > \; \leq 0 \quad \forall i$, de modo que $< u - v, u > \; \leq \; 0$ desigualdad que puede ponerse como:

$$0 < \|u\|.\|v\| = \; < u, u > \; \leq \; < u, v >,$$

lo que indica que $u = v$.

Se tiene que $\mathcal{G}_0$ opera transitivamente en $\mathrm{P_v}$, luego $| \mathcal{G}_0 | \; \geq \; | \mathcal{P}_v | = | \mathcal{G} |$ y así, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$.

□

Una arista a en P_v se dirá **orientada** si se ha elegido uno de sus vértices como **inicial**, que notaremos con $i(a)$, y el otro como **terminal** que notaremos con $t(a)$. Un **circuito orientado** es una sucesión de aristas $a_1, \ldots, a_k$ orientadas de modo que $t(a_i) = i(a_{i+1})$ $(i < k)$ y $t(a_k) = i(a_1)$. Para una arista orientada a notaremos con σ_a la única transformación de $\mathcal{G}$ que aplica el vértice $i(a)$ en $t(a)$. Si $a_1, \ldots, a_k$ es un circuito orientado usaremos σ_i por σ_{a_i}, en tal caso se tiene:

$$\sigma_1.\sigma_2 \ldots \sigma_k = 1.$$

Un circuito orientado $a_1, \ldots, a_k$ se dirá **simple** si sus aristas son distintas y cubren exactamente k vértices, dicho de otra manera, $a_i \neq a_j$ y $i(a_i) \neq i(a_j)$ si $i \neq j$.
En un circuito orientado, asociándole a cada arista su vértice inicial, resulta que el número de vértices cubiertos por el circuito, es menor o igual que el número de aristas.

Diremos que dos circuitos son **iguales** si uno se obtiene del otro por una permutación cíclica de sus aristas. Si dos circuitos c y c' tienen un vértice común definimos el **producto** $c.c'$ como el circuito obtenido de la sucesión de aristas de c seguido de la sucesión de aristas de c'. Resulta $c.c' = c'.c$

Lema 1.2 *Todo circuito se descompone en producto de circuitos simples.*

Demostración Sea $c = a_1, \ldots, a_k$ un circuito, si existen índices i y j tales que $i < j$ y $a_i = a_j$ o bien $i(a_i) = i(a_j)$, entonces:

$$c = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}).(a_j, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_{i-1})$$

iterando este razonamiento se obtiene el lema. □

Sea $\mathcal{T}_v = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ un sistema fundamental de transformaciones en v.
Convenimos en incluir en $\mathcal{T}_v$ con cada transformación τ su inversa τ^{-1} aún cuando $\tau = \tau^{-1}$. Sea $\mathcal{L}$ el grupo libre generado por $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_m\}$, $\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}$ y sea ψ el morfismo de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{G}$ inducido por $\psi(s_i) = \tau_i$.
Si a es una arista, existe l en $\mathcal{L}$ tal que $\sigma_a = \psi(l)$, luego cada circuito $c = a_1, \ldots, a_k$ da lugar a un elemento del núcleo de ψ, si se pone:

$$\sigma(a_i) = \psi(l_i)$$

$l = l_1 \ldots l_k \in Nu(\psi)$. Diremos que l es **inducido** por c.
Con las notaciones precedentes se tiene:

Teorema 1.2 *El núcleo de ψ está generado por los elementos inducidos por circuitos simples sobre las caras planas de $\mathcal{P}_v$ que contienen a v.*

Demostración Sea $l = s_1 \ldots s_s$ en $\mathcal{L}$ y $\psi(l) = \sigma_1 \ldots \sigma_s$ con σ_i en $\mathcal{T}_v$. Consideremos las transformaciones:

$$\mu_i = \sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}.\sigma_i.\sigma_{i-1}^{-1} \ldots \sigma_1^{-1}, \quad i = 1, \ldots, s$$

se tiene:

$$\sigma_1 \ldots \sigma_s = \mu_s \ldots \mu_1$$

Sea $l_i = s_1 \ldots s_{i-1}.s_i.s_{i-1}^{-1} \ldots s_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, s$, donde $\psi(s_j) = \sigma_j$. Se tiene:

$$l = l_s \ldots l_1.$$

En la sucesión de vértices:

$$v_0 = v, v_i = \mu_i \ldots \mu_2.\mu_1.v, \quad i = 1, \ldots, s$$

μ_i es la transformación que aplica v_{i-1} en v_i y por i) del teorema 1.1, los segmentos a_i que unen v_{i-1} con v_i son aristas en $\mathcal{P}_v$. Luego l está en $Nu(\psi)$ si y sólo si $c = a_1, \ldots, a_k$ es un circuito y en tal caso l es inducido por c.
Sea ϕ una funcional tal que $\phi(u) \neq \phi(w)$ si u y w son vértices distintos de $\mathcal{P}_v$.

Si un circuito simple cubre dos vértices, entonces se realiza sobre una arista de $\mathcal{P}$.

Sea c un circuito simple cubriendo al menos tres vértices. Sea w un vértice en c tal que $\phi(w)$ sea el máximo valor de ϕ sobre los vértices que cubre c. Sea φ la funcional dada por $\varphi(x) = < x, w >$, asociada con φ se tiene $\mathcal{F}_w$ como en el lema 1.1. Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de vértices en $\mathcal{F}_w$ en los cuales ϕ toma valores menores que $\phi(w)$, se tiene $| \mathcal{V} | \geq 2$.

Si a y b son las aristas tales que $t(a) = w = i(b)$, por el lema 1.1, a y b determinan vértices en $\mathcal{V}$ los cuales pueden ser conectados por una sucesión de aristas de $\mathcal{F}_w$ en el semiespacio $\phi(x) < \phi(w)$, de donde las aristas a y b están conectadas por una sucesión $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_t$ de caras planas que contienen a w en el semiespacio $\phi(x) \leq \phi(w)$.

Sean $a = a_1, a_2, ..., a_t, a_{t+1} = b$ aristas en $\mathcal{P}_v$ tales que a_i es común a $\mathcal{C}_{i-1}$ y $\mathcal{C}_i$. Sean $l_1, l_2, ..., l_t$ en $\mathcal{L}$ inducidos por $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_t$ iniciando en $a_2, \ldots, a_t, a_{t+1}$ respectivamente.

Si l es el elemento inducido por c , se tiene que $l.(l_1, \ldots, l_t)^{-1}$ es un elemento inducido por un circuito contenido en el semiespacio $\phi(x) < \phi(w)$.

El razonamiento precedente permite completar la demostración del teorema por inducción en el número de vértices para los cuales ϕ toma valores menores que $\phi(w)$. □

A continuación se presentan los puntos regulares para los grupos de rotaciones de los poliedros regulares clasificándolos según el sistema de generadores y relaciones que los mismos inducen en el grupo considerado. El objeto de esta presentación es ilustrar la situación general mediante casos concretos y geométricamente accesibles.

Dos puntos regulares v y w para $\mathcal{G}$ se dirán **equivalentes** si definen para $\mathcal{G}$ el mismo sistema de generadores y relaciones.

Cabe agregar que los grupos de isometrías de los poliedros regulares son casos particulares de grupos de Coxeter.

El siguiente lema posibilitará una importante reducción en los casos a estudiar de los grupos de rotaciones de los poliedros regulares.

Lema 1.3 *i) Si v es regular para $\mathcal{G}$ y λ es un real no nulo, entonces λv es regular y equivalente con v.*

ii) Sea $\mathcal{G}$ un subgrupo normal del grupo de isometrías de un conjunto $\mathcal{A}$ de puntos con centro de gravedad en el origen y τ una isometría de $\mathcal{A}$, entonces si v es regular para $\mathcal{G}$, $\tau(v)$ es regular para $\mathcal{G}$ y además, v y $\tau(v)$ son equivalentes.

Demostración

i) Es claro que λv es regular para $\mathcal{G}$, por otra parte, los poliedros $\mathcal{P}_v$ y $\mathcal{P}_{\lambda.v}$ tienen asociadas en v y λv las mismas transformaciones fundamentales y las mismas relaciones.

ii) Si para $\sigma \in \mathcal{G}$, $\sigma.\tau(v) = \tau(v)$, entonces $\tau^{-1}(v).\sigma.\tau(v) = v$, luego $\tau^{-1}.\sigma.\tau$ es la identidad en $\mathcal{G}$, luego $\sigma = 1$. Si μ_i y $\mathbf{R}_j$ son las transformaciones fundamentales y relaciones en v, entonces $\tau.\mu_i.\tau^{-1}$ y $\mathbf{R}_j$ son las transformaciones fundamentales y relaciones en $\tau(v)$, lo que establece la equivalencia de v y $\tau(v)$.

□

En lo que sigue entenderemos por el orden de una arista a el orden de la transformación σ_a.

2 Grupo de rotaciones del tetraedro

Notemos con $\mathcal{T}$ el tetraedro formado por la cápsula convexa de los puntos de $\mathbf{R}^3$:

$$(1,1,1),(-1,-1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1).$$

Se designa con $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ el grupo de rotaciones de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{P}_v$, el poliedro donde v es un punto regular para $\mathcal{G}(\mathcal{T})$.

A partir del lema 1.3, y teniendo en cuenta el grupo de isometrías del tetraedro, todo punto regular para $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ tiene un punto equivalente en la región triangular $\mathcal{T}$ dada por:

$$\mathcal{T} = \{\alpha.p + \beta.q + \gamma.r : \alpha + \beta + \gamma = 1, \;\; 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1\}$$

donde: $p = (-1,-1,1)$, $q = (0,-1,0)$, $r = (1/3,-1/3,1/3)$.
Se distinguen 4 regiones en $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= \{v \in \mathcal{T} : \;\; 0 < \alpha, \beta, \gamma\} \\
\mathcal{T}_1 &= \{v \in \mathcal{T} : \;\; \alpha = 0\} \\
\mathcal{T}_2 &= \{v \in \mathcal{T} : \;\; \beta = 0\} \\
\mathcal{T}_3 &= \{v \in \mathcal{T} : \;\; \gamma = 0\}
\end{aligned}$$

Si $v \in \mathcal{T}_0$, v tiene 4 aristas de orden 3, $\mu, \mu^{-1}, \tau, \tau^{-1}$, y una arista σ de orden 2.
Por v pasan cinco caras :
- Dos triángulos equiláteros con las relaciones: $\mu^3 = 1, \tau^3 = 1$
- Tres triángulos equivalentes con la relación: $\tau.\sigma.\mu = 1$

El sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ es:

$$\boxed{\mu^3 = \tau^3 = \sigma^2 = \tau.\sigma.\mu = 1}$$

Si $v \in \mathcal{T}_1$, v tiene 3 aristas, 2 aristas de orden 3, μ y μ^{-1}, una de orden 2, σ.
Se obtienen:
- Dos caras exagonales equivalentes con la relación: $(\sigma.\mu)^3 = 1$
- Un triángulo equilátero con la relación: $\mu^3 = 1$

Las relaciones generadoras para v en $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ son:

$$\boxed{\mu^3 = \sigma^2 = (\sigma.\mu)^3 = 1}$$

Si $v \in \mathcal{T}_2$, v tiene 3 aristas, 2 aristas de orden 3, μ y μ^{-1}, una arista σ de orden 2.
Por v pasan tres caras :
- Dos exágonos equivalentes con la relación : $(\sigma.\mu)^3 = 1$
- Un triángulo equilátero con la relación: $\mu^3 = 1$

El sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ es:

$$\boxed{\mu^3 = \sigma^2 = (\sigma.\mu)^3 = 1}$$

Si $v \in \mathcal{T}_3$, v tiene 4 aristas, μ , $\mu^{-1}, \sigma, \sigma^{-1}$ todas de orden 3.
Se obtienen las siguientes caras:
- Dos triángulos equiláteros con las relaciones : $\mu^3 = 1, \sigma^3 = 1$
- Dos rectángulos equivalentes con la relación: $(\sigma.\mu)^2 = 1$

El sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ es:

$$\boxed{\mu^3 = \sigma^3 = (\sigma.\mu)^2 = 1}$$

3 Grupo de rotaciones del cubo

Notemos con $\mathcal{O}$ el cubo formado por la cápsula convexa de los puntos de $\mathbf{R}^3$ cuyas coordenadas son 1 ó -1, con $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ designamos el grupo de rotaciones de $\mathcal{O}$ y con cada punto v regular para $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ tenemos asociado el poliedro $\mathcal{P}_v$.

A partir del lema 1.3, teniendo en cuenta el grupo de isometrías del cubo, todo punto regular para $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ tiene un punto equivalente en la región triangular $\mathcal{T}$ dada por:

$$\mathcal{T} =\{\alpha.(1,1,1)+\beta.(1,0,1)+\gamma.(1,0,0) \ : \alpha+\beta+\gamma=1, \ 0\leq\alpha,\beta,\gamma<1\}$$

Se distinguen 4 regiones en $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= \{v \in \mathcal{T} : \ 0<\alpha,\beta,\gamma\} \\
\mathcal{T}_1 &= \{v \in \mathcal{T} : \ \alpha=0\} \\
\mathcal{T}_2 &= \{v \in \mathcal{T} : \ \beta=0\} \\
\mathcal{T}_3 &= \{v \in \mathcal{T} : \ \gamma=0\}
\end{aligned}$$

Si se elige un punto v en $\mathcal{T}$, y se realizan todas las rotaciones posibles del cubo, se obtiene el poliedro $\mathcal{P}_v$.

Supongamos que v está en el interior de $\mathcal{T}$, $v \in \mathcal{T}_0$.

La cantidad de aristas para el punto v es 5, siendo τ y τ^{-1} aristas de orden 4, μ y μ^{-1} aristas de orden 3 y σ una arista de orden 2.

Las caras correspondientes a estas aristas son:

- Un cuadrado con la relación: $\tau^4=1$
- Un triángulo equilátero con la relación: $\mu^3=1$
- Tres triángulos equivalentes con la relación: $\sigma.\tau.\mu=1$

Por consiguiente el sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ es:

$$\boxed{\tau^4= \mu^3= \sigma^2=\sigma.\tau.\mu=1}$$

Supongamos que $v \in \mathcal{T}_1$, v tiene tres aristas, dos de orden 4 ,τ y τ^{-1} , y una de orden 2, σ.

Por v pasan tres caras:

- Un cuadrado con la relación: $\tau^4=1$
- Dos exágonos equivalentes con la relación: $(\sigma.\tau)^3=1$.

Se concluye que el sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ es:

$$\boxed{\tau^4= \sigma^2=(\sigma.\tau)^3=1}$$

Si ahora suponemos $v \in \mathcal{T}_2$, en este caso v tiene 4 aristas, dos de orden 4, τ y τ^{-1} y dos de orden 3, μ y μ^{-1}.

Las caras obtenidas son:

- Un cuadrado con la relación: $\tau^4=1$
- Un triángulo equilátero con la relación: $\mu^3=1$
- Un rectángulo con la relación: $(\mu.\tau)^2=1$.

El sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ es:

$$\boxed{\tau^4 = \mu^3 = (\mu\,.\tau)^2 = 1}$$

Por último sea $v \in \mathcal{T}_3$, v tiene 3 aristas, dos de orden 3, μ y μ^{-1}y la restante σ de orden 2.

Las caras son :

- Dos octógonos equivalentes con la relación: $(\sigma\,.\mu)^4 = 1$.
- Un triángulo equilátero con la relación: $\mu^3 = 1$

En definitiva el sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ es:

$$\boxed{\mu^3 = \sigma^2 = (\sigma\,.\mu)^4 = 1}$$

4 Grupo de rotaciones del icosaedro

Notemos con I el icosaedro formado por la cápsula convexa de los puntos de $\mathbf{R}^3$.

(0,-a,1), (0,a,1), (0,-a,-1), (0,a,-1)
(1,0,-a), (1,0,a), (-1,0,-a), (-1,0,a)
(-a,1,0), (a,1,0), (-a,-1,0), (a,-1,0)

con $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Designamos con $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ el grupo de rotaciones de I y $\mathcal{P}_v$ el poliedro para un punto regular v de $\mathcal{G}(\mathcal{I})$.

En forma semejante al grupo de rotaciones del cubo, todo punto regular v la región triangular $\mathcal{T}$ dada por:

$$\mathcal{T} = \{\alpha.(0,0,1) + \beta.((1/3,0,(2+a)/3) + \gamma.(0,a,1) : \alpha+\beta+\gamma = 1,\ 0 \leq \alpha,\beta,\gamma < 1\}$$

Cuyas 4 regiones a estudiar en $\mathcal{T}$ son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_0 &= \{v \in \mathcal{T} :\ 0 < \alpha,\beta,\gamma\} \\
\mathcal{T}_1 &= \{v \in \mathcal{T} :\ \alpha = 0\} \\
\mathcal{T}_2 &= \{v \in \mathcal{T} :\ \beta = 0\} \\
\mathcal{T}_3 &= \{v \in \mathcal{T} :\ \gamma = 0\}
\end{aligned}$$

Si $v \in \mathcal{T}_0$, v tiene 5 aristas, 2 de orden 3, μ y μ^{-1}, dos aristas de orden 5, τ y τ^{-1} y una de orden 2, σ.

Las caras obtenidas son:

- Un triángulo equilátero con la relación: $\mu^3 = 1$
- Un pentágono con la relación: $\tau^5 = 1$
- Tres triángulos equivalentes con la relación: $\mu.\sigma.\tau = 1$

El sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ es:

$$\boxed{\tau^5 = \mu^3 = \sigma^2 = \mu.\sigma.\tau = 1}$$

Si $v \in \mathcal{T}_1$, v tiene 3 aristas, 2 de orden 5, τ y τ^{-1} y σ de orden 2.
Se obtienen tres caras:

- Dos exágonos equivalentes con la relación: $(\sigma.\tau)^3 = 1$
- Un pentágono con la relación: $\tau^5 = 1$. El

sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ es:

$$\boxed{\tau^5 = \sigma^2 = (\sigma.\tau)^3 = 1}$$

Si $v \in \mathcal{T}_2$, v tiene 3 aristas, 2 de orden 3, μ y μ^{-1} y una arista σ de orden 2.
Por v pasan tres caras:

- Un triángulo equilátero con la relación: $\mu^3 = 1$
- Dos decágonos equivalentes con la relación: $(\sigma.\mu)^5 = 1$.

Por consiguiente el sistema de generadores y relaciones para $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ es:

$$\boxed{\mu^3 = \sigma^2 = (\sigma.\mu)^5 = 1}$$

Si $v \in \mathcal{T}_3$, v tiene 4 aristas, dos de orden 3, μ y μ^{-1}, y otras dos aristas de orden 5, τ y τ^{-1}.

Las caras son:

- Un triángulo equilátero, con la relación : $\mu^3 = 1$.
- Dos rectángulos equivalentes con la relación: $(\tau.\mu)^2 = 1$.
- Un pentágono con la relación: $\tau^5 = 1$. El

sistema de generadores y relaciones para $v \in \mathcal{G}(\mathcal{I})$ es:

$$\boxed{\tau^5 = \mu^3 = (\tau.\mu)^2 = 1}$$

Referencias:

[1] H.S.M. COXETER - *The Complete Enumeration of Finite Groups of the form* $R_i^2 = (R_iR_j)^{k_{ij}} = 1$, J. London Math. Soc. 10 (1935), 21-25.

[2] H.S.M. COXETER - W.J.O. MOSER - *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer , New York,1980.

[3] N. BOURBAKI - *Groups et Algèbres de Lie*, Ch.4-6, Termann, Paris, 1968. Mason, Paris, 1981.

[4] L.C.GROVE - C.T. BENSON - *Finite Reflection Groups*, Springer, New York, 1985.

[5] D.J.H. GARLING - D. GORENSTEIN - T. tom DIECK - P. WALTERS - *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29, Cambridge University Press, 1990.