Equilibri di Nash per giochi non-cooperativi[1]

Achille Basile

Università Federico II, Napoli

Questo è il testo di una conferenza tenuta nelle Università argentine di Bahia Blanca e Cordoba, oltre che in alcune Università italiane tra la fine del 1994 e la primavera del 1995. All' origine vi è la richiesta di alcuni colleghi desiderosi di conoscere, e di far conoscere a studenti di Matematica e di Economia, le ragioni per le quali il matematico John Nash è stato insignito del premio Nobel per l'Economia.

Nell'opinione (e ... nella speranza) dell' autore, il contenuto, che punta diritto alla idea di equilibrio di Nash, senza voler fornire una panoramica sulla Teoria dei Giochi, dovrebbe essere accessibile a chiunque abbia una buona cultura matematica di tipo universitario e sufficiente curiosità.

Un ringraziamento, particolarmente sentito, va al Prof. Rafael Panzone, e a tutti gli amici della Universidad Nacional del Sur, per la fraterna accoglienza.

This is the text of a talk given at the Universities of Bahia Blanca and Cordoba (Argentine) and in some italian Universities from the end of 1994 to spring 1995. It originates in the request of explaining, to an auditory made of students (either in Mathematics or in Economics) and professional mathematicians, the ideas that effected the conferment of the Nobel Prize in Economics to the american mathematician John Nash.

It is the author's opinion (and ... hope) that the content, which goes straightly to the core of the topic without pretending to overview Game Theory, should be accessible to people with a mathematical knowledge of university level and with sufficient inquisitiveness.

Special thanks to Prof. Rafael Panzone, and all friends of Universidad Nacional del Sur, for the warm hospitality.

[1]Presented at III Congreso "Dr. Antonio A.R. Monteiro" April 26-28, 1995 - Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca - Republica Argentina.

1. Introduzione

Lo scorso autunno, come di consueto, sono stati indicati i nomi dei vincitori dei vari Premi Nobel. Per l'economia, il riconoscimento è andato a tre studiosi, in virtù del loro contributo alla Teoria dei Giochi e per il fondamentale apporto che questa Teoria fornisce allo studio dell'Economia sia teorica che applicata. Gli studiosi sono J. C. Harsanyi (Los Angeles), J. F. Jr. Nash (Princeton) e R. Selten (Bonn).

Da molti è stato notato che il Premio viene proprio in un anno particolare per la TdG. Infatti, il 1994 è riconosciuto come l'anno nel quale la TdG ha compiuto 50 anni. Per la verità, si nascondono un pò di anni. Ad esempio, il famoso teorema di von Neumann[2] sui punti di sella è del 1928. Tuttavia, in una sorte di convenzione generalmente accettata, si fa risalire la nascita della TdG al 1944, l'anno in cui apparve a Princeton il volume *Theory of Games and Economic Behavior* frutto della collaborazione dell' economista O. Morgenstern con von Neumannn.

Dal nostro punto di vista, di matematici di professione, di aspiranti tali o di simpatizzanti, spicca nella triade dei vincitori il nome di John Nash. Esso ci indica, una volta di più, la possibilità che anche i matematici vincano il Premio Nobel. In barba al fatto che non ve ne è uno esclusivamente dedicato a loro. Quello conferito a Nash non è il primo Nobel per l'Economia conferito ad un matematico. Il russo L. V. Kantorovič, senz'altro fra i Maestri dell' Analisi Funzionale e, in particolare, iniziatore, con F. Riesz, dello studio dei reticoli vettoriali e degli operatori lineari positivi, fu insignito del Premio Nobel per l'Economia nel 1975 per aver sviluppato ed applicato la teoria della Programmazione Lineare. Inoltre, come non annoverare tra i matematici G. Debreu, premio Nobel nel 1983, la cui "analisi assiomatica dell'equilibrio economico"[3],

[2] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen 100(1928) 295-320.

[3] G. Debreu, *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Cowles Foundation Monograph No. 17 (1959).

ha in modo così determinante contribuito all'abbattimento del muro che tante volte ha separato la ricerca economica dal rigore scientifico. Sebbene l'intera T-dG sia riguardabile come una disciplina matematica, fra i tre Nobel, Harsanyi, Nash e Selten, solo Nash è quello che comunemente si direbbe essere "semplicemente un matematico". Anche trascurando il suo lavoro in TdG, la comunità matematica mondiale ne riconosce la grandezza. Ad esempio, per l'importanza del suo apporto alla teoria delle Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali, sintetizzato nel cosiddetto Teorema di De Giorgi[4] e Nash. Inoltre, il suo contributo ai fondamenti della TdG, e che poi è la ragione del suo Nobel, è puramente matematico e nel senso della migliore tradizione. Semplificando, potremmo dire che consiste nell' avere ideato il concetto "giusto" (cioè aver dato una definizione) e poi fornito un opportuno teorema di esistenza[5]. È per questa peculiarità, oltre che, forse, per la mia personale simpatia verso un personaggio dalla vita che i più definirebbero sfortunata, che sono contento che mi sia stato chiesto di parlare del concetto di *Equilibrio di Nash.*

2. Giochi in forma normale

Quelli che prendiamo in considerazione sono i cosiddetti *giochi non-cooperativi ad informazione completa.* Si definiscono in tal modo le situazioni rappresentabili come competizioni in cui un certo numero di agenti, o giocatori, in seguito a scelte individuali, simultanee ed indipendenti, ricevono, secondo un meccanismo prestabilito, noto a tutti e che vede coinvolte interattivamente le scelte di tutti, un' utilità che ciascuno egoisticamente vorrebbe massimizzare.

[4] E. De Giorgi, della Scuola Normale Superiore di Pisa, è uno dei matematici italiani più importanti della sua generazione. Il teorema in questione, che ha fortemente influenzato l'opera successiva di molti ben noti matematici, aprendo la strada allo studio delle equazioni quasi lineari, stabilisce la regolarità delle soluzioni di equazioni del secondo ordine in più di due variabili. Esso risale alla fine degli anni cinquanta, cioè ad un'epoca che segue quella in cui Nash si era occupato di TdG. Per maggiori dettagli si può fare riferimento all' ottavo capitolo di D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag 1977.

[5] J. F. Nash, *Non-cooperative games*, Annals of Mathematics 54(1951) 286-295.

Con un pò di formalismo tutto diventa più chiaro. I giochi di cui ci occupiamo sono le funzioni del tipo

$$\mathbf{V} : S_1 \times \ldots \times S_n \rightarrow R^n$$

ove

- il numero naturale n indica quanti sono gli agenti attivi, ciascuno individuato dall'indice i che può assumere valori in $\{1, ..., n\}$;
- gli insiemi $S_1, S_2, ..., S_n$, in linea di principio di natura arbitraria, rappresentano ognuno la globalità delle opzioni disponibili ai singoli giocatori di medesimo indice; il significato, dunque, di $t \in S_i$ è che il giocatore i ha a sua disposizione la *strategia*[6] t;
- le varie determinazioni possibili per il vettore $\mathbf{V}$ rappresentano le varie possibili distribuzioni di utilità fra i giocatori, la componente V_i di $\mathbf{V}$ è l'utilità assegnata ad i.

Il gioco consiste nella scelta, da parte di ciascun agente i, di una strategia $s_i \in S_i$ col solo fine di rendere $V_i(s_1, ..., s_n)$ il più grande possibile. Inoltre, la formazione del vettore $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_n)$, che può essere considerato il risultato del gioco, avviene senza possibilità di accordi fra i giocatori: *la scelta della strategia s_i da parte dell'agente i avviene senza che egli conosca le scelte delle strategie s_j dei giocatori $j \neq i$.* Tuttavia, e perciò si parla di informazione completa oltre che di non cooperazione, *le scelte avvengono tutte alla luce del fatto che ogni giocatore conosce il meccanismo di distribuzione delle vincite e cioè la funzione $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{s})$.*

Naturalmente, la questione di base che si pone riguarda la possibilità o meno di prevedere il comportamento dei giocatori, ossia di predire $\mathbf{s}$. È chiaro che in qualche caso può essere banale individuare $\mathbf{s}$, ma dovrebbe essere altret-

[6] Una strategia non corrisponde ad una singola azione elementare intrapresa dal giocatore, anzi più spesso si identifica con una sequenza di mosse. Giacchè più rilevante per i nostri scopi, ci stiamo riferendo alla rappresentazione *normale* di un gioco. Diversamente, è possibile quella in *forma estesa* che prevede la descrizione delle regole del gioco, delle mosse, il loro inquadramento nelle regole, la loro sintesi in una strategia etc...

tanto chiaro che tali casi sono un'eccezione, almeno ideologica. Alcuni semplici esempi di giochi a due giocatori, basteranno a guidarci verso l'obiettivo che, principalmente, è quello di illustrare la problematica a cui il concetto di equilibrio di Nash fornisce una soluzione. Non si tratta di una soluzione esente da punti deboli, ma è un dato di fatto che il concetto di equilibrio di Nash si è rivelato essere il più fecondo di applicazioni nella TdG. Non si contano, poi, gli utilizzi nelle soluzioni proposte per problemi di Economia (oligopoli, contrattazione, equilibri di mercato, beni pubblici, aste, assicurazioni, ...), Politica (controllo degli armamenti, elezioni, istruzione superiore) o, anche, Biologia (teorie evolutive).

3. Esempi

Supponiamo che per il giocatore 1 le strategie siano $\{a, b\}$ (nel gioco C vi è una terza strategia c), mentre siano $\{s, d\}$ per il giocatore 2. Il gioco, ovvero la funzione $\mathbf{V}$, può essere espresso convenientemente in notazione matriciale. Il fatto, per fissare le idee, che nel primo gioco il posto individuato dalla seconda riga e dalla terza colonna contenga i numeri 3 ed 1 è da interpretarsi come segue: $\mathbf{V}(a, d) = (3, 1)$.

gioco A	s	d
a	1,2	3,1
b	2,0	4,6

gioco B	s	d
a	1,2	0,1
b	2,1	1,0

gioco C	s	d
a	2,1	0,0
b	0,0	1,1
c	1,2	2,0

gioco D	s	d
a	1,1	1,0
b	2,1	0,4

Riscontriamo immediatamente una profonda differenza tra il gioco A e i giochi

B e C. Quasi ci viene voglia di dire che A non è un vero gioco.
Il punto è che in A non esiste una situazione di conflitto tra i giocatori. Se assumiamo il loro comportamento razionale (e lo stiamo facendo), il risultato di A non può che essere $(b, d) \rightarrow \mathbf{V}(b, d) = (4, 6)$, ossia in A è possibile che ogni giocatore raggiunga la massima utilità disponibile per lui.
Sia in B che in C i due giocatori possono avere una vincita al più pari a 2. Tuttavia, il vettore dei guadagni non è mai pari a $(2, 2)$ il che determina la presenza di un conflitto tra i giocatori sia in B che in C. Va da sè che i giochi non conflittuali sono di nessun interesse. Anche tra B e C vi è una differenza che rende ai nostri occhi B molto meno interessante di C. Infatti, sebbene in B il risultato non sia così banale come in A, con solo un pò più di attenzione, scopriamo che neanche in B c'è un reale conflitto e il gioco non può che risolversi in $(b, s) \rightarrow \mathbf{V}(b, s) = (2, 1)$.
Il punto è che l'agente 1 non può che scegliere la strategia b in quanto questa gli garantisce comunque una vincita maggiore, indipendentemente da ciò che sceglie l'agente 2. Analogamente, quest'ultimo, per la stessa ragione, non può che optare per la strategia s. Nel caso di B, il folclore vuole si dica che *il gioco si risolve per dominanza*, esistendo per 1 la *strategia dominante* b e per 2 la *strategia dominante* s.
Decisamente, il gioco C è più interessante. Semplicemente perchè non siamo in grado di prevedere il comportamento nè del giocatore 1 nè di 2.

Effettivamente, quale che sia la scelta dell'agente 1 (lo stesso discorso vale per 2), egli ne sarà soddisfatto o meno esclusivamente in funzione del comportamento dell'avversario. Dunque, egli non ha alcuna ragione per preferire a priori una o un'altra delle alternative disponibili. Questa incapacità di previsione suggerisce che la nostra analisi deve diventare più fine; d'altra parte, finora essa si era basata su considerazioni effettivamente molto ingenue. Si intuisce che sono due le direzioni da esplorare più attentamente quando, come in C, ci si trova di fronte a giocatori che non hanno strategie preferibili a priori. Primo, ci si deve chiedere quale può essere, in questo caso, la "ratio" che guiderà le scelte dei giocatori; secondo, quale può essere il senso da attribuire all'espressione "giocata soddisfacente". Rispondendo alla prima domanda perveniamo al concetto di *strategia mista.* Come stabilito dal già citato teorema di Von Neumann, è l'uso delle strategie miste che permette di risolvere i giochi cosiddetti a somma nulla[7]. Tuttavia, nei casi più generali, il solo ricorso alle strategie miste non basta. Infatti, solo dopo un'adeguata risposta, appunto dovuta a Nash, alla seconda domanda, è possibile, col teorema di Nash, estendere la soluzione di von Neumann.

4. Estensione mista di un gioco

Continuiamo a far riferimento al gioco C e, indifferentemente, al giocatore 1 oppure 2. All'agente che non ha ragioni per preferire a priori alcuna delle alternative disponibili, non resta che operare una scelta casuale. Ma anche questa può essere "razionalizzata", e allora, forse, egli scoprirà che esistono scelte casuali più vantaggiose di altre. Verosimilmente, immaginando una scelta casuale, egli, in prima istanza, penserà ad una ingenua equiprobabilità delle alternative. Tuttavia, questo non è l'unico modo di procedere che è concepibile.

Simuliamo con dei sorteggi il meccanismo di scelta a caso. Possiamo immaginare che 1 scelga a, b oppure c a seguito dell'estrazione di una biglia da un'urna che contiene solo biglie dei tre "tipi" a, b oppure c, in una data proporzione. Ad esempio, le percentuali di biglie dei tre tipi siano rispettivamente p_1, p_2 e $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Evidentemente, agendo sul vettore $p = (p_1, p_2)$, il giocatore 1 potrà stabilire di propendere di più o di meno per una delle alternative (ovviamente, per attuare il caso naif della equiprobabilità, sceglierà $p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$).

[7] Si tratta di giochi nei quali per $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ vale la relazione $V_1 = -V_2$. Le strategie risolutive, che corrispondono a dei punti di sella, sono quelle di *minimax*. Per altro, i giochi a somma nulla equivalgono a quelli a somma costante.

Analogamente, per il giocatore 2 sia q la proporzione di biglie di tipo s nella pro ria urna.
Razionalità vuole che i giocatori operino, prima dell'effettiva estrazione della strategia da giocare, delle scelte di p e q mirate, egoisticamente, ad accrescere le aspettative di vincita individuale. I valori attesi delle utilità sono

$$\varepsilon[V_1] = \varepsilon[V_1](p, q) = 2 - q - p_2 - 2p_1 + 3p_1 q$$

per il primo giocatore e

$$\varepsilon[V_2] = \varepsilon[V_2](p, q) = 2q + p_2 - p_1 q - 3p_2 q$$

per il secondo. Dal momento che le funzioni $\varepsilon[V_1]$ e $\varepsilon[V_2]$ sono note ai due giocatori i quali continuano a non cooperare, tutto si traduce nel fatto che essi giocheranno un nuovo gioco $\varepsilon[C]$. Rispetto all'originale C, il nuovo gioco $\varepsilon[C]$ vede i due insiemi di strategie $\{a, b, c\}$ e $\{s, d\}$ mutare rispettivamente in $\{p = (p_1, p_2) : p_1, p_2 \geq 0,\ p_1 + p_2 \leq 1\}$ e $[0, 1]$; inoltre, sostituisce all'originaria funzione delle vincite $\mathbf{V}$, la funzione delle vincite attese $\varepsilon\mathbf{V} = (\varepsilon V_1, \varepsilon V_2)$.
Diciamo che il nuovo gioco εC è la cosiddetta *estensione mista* di C; le nuove strategie p e q vengono distinte da quelle originarie, dette *pure*, tramite l'agettivo *miste*. Non sfuggirà ad alcuno che il passaggio all'estensione mista può avvenire, mutatis mutandis, a partire da un qualsiasi gioco con insiemi di strategie finiti.
Ritornando ad εC, è forse possibile inferire il risultato del nuovo gioco ? Un pò di calcolo ci consegna per εC gli stessi problemi di C: c'è conflitto (ossia non esiste un punto (p, q) che sia di massimo assoluto simultaneamente per εV_1 ed εV_2) e non esistono strategie dominanti nè per il giocatore 1 (il vettore $p_\star$ rappresenterebbe una strategia dominante per l'agente 1 se si avesse $\varepsilon V_1(p_\star, q) \geq \varepsilon V_1(p, q)\ \forall p, q$), nè per il giocatore 2. Dunque, la nostra speranza di dire qualcosa di intelligente e di conclusivo su C mediante l'analisi del meccanismo di scelta casuale, ossia passando ad εC, è sfumata. Proseguiamo i nostri sforzi, attaccando la questione su un altro fronte.

5. Equilibrio di Nash

Quello che distingue i giochi A e B dal gioco C è che, mentre nei primi due siamo in grado di isolare (secondo semplici criteri di razionalità) un comportamento privilegiato dei giocatori, nel terzo questo non ci pare possibile. Di fronte a ciò, se non vogliamo rinunciare ad investigare, non resta che provare ad usare criteri di razionalità meno semplici e meno vincolanti di quelli usati finora.
A questo scopo notiamo che le soluzioni, rispettivamente (b, d) e (b, s), prospettate per i giochi A e B hanno in comune l'ovvio fatto che se i due giocatori fossero chiamati a ripetere il gioco, entrambi non modificherebbero il loro modo di giocare in quanto *ciascuno non avrebbe potuto giocare meglio dato il gioco avversario.* L'idea, semplice e geniale al contempo, di Nash è quella di isolare proprio questa circostanza come un possibile criterio di gioco razionale.

Definizione. *Il risultato* $\mathbf{s} \in S_1 \times \ldots \times S_n$ *è di Nash se,* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, *il giocatore i non cambierebbe il proprio modo di giocare anche se gli fosse offerta la possibilità di cambiare la sua strategia, ferme restando le strategie degli altri.*

È chiaro che di fronte all'effettivo presentarsi di un risultato di Nash, ogni partecipante al gioco non potrà pentirsi della scelta effettuata (di meglio non avrebbe potuto fare, visto il gioco avversario) e sarà così indotto a ripetersi qualora il gioco si ripetesse. Questa circostanza chiarisce il fatto che spesso si parli di *equilibrio di Nash* anzichè semplicemente di risultato di Nash. Se usiamo la notazione $\mathbf{s}[t_i]$ per rappresentare un vettore che coincide con $\mathbf{s}$ in tutte le coordinate meno la i-ma dove al posto di s_i c'è t_i, allora la definizione di risultato di Nash si riscrive come: $\mathbf{s}$ *è di Nash quando,* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, *si* *ha*

$$V_i(\mathrm{s}) \geq V_i(\mathrm{s}[t_i]), \;\; \forall t_i \in S_i.$$

Nel gioco C selezioniamo immediatamente $(a,s) \to \mathbf{V}(a,s) = (2,1)$ come equilibrio di Nash. Il gioco D, invece, è privo di risultati di Nash ... Ci risiamo, le cose non sono così semplici, gli equilibri di Nash possono anche non esistere. Tuttavia, se per D passiamo all'estensione mista εD, in essa scopriamo che un equilibrio di Nash esiste e, inoltre, che ciò non accade eccezionalmente, bensì come conseguenza del *Teorema di Nash.* Prima di enunciare quest'ultimo, è interessante rilevare una diversa formulazione del concetto di equilibrio di Nash.

Consideriamo il giocatore i. La proiezione del risultato s sul prodotto cartesiano di tutti gli insiemi $S_1, \ldots, S_n$ meno l'insieme S_i, sia denotata con $\mathrm{s}^{[i]}$. Senza formalizzarci troppo, scriviamo, all'occorrenza, $\mathrm{s} = (s_i, \mathrm{s}^{[i]})$ e $\mathrm{s}[t_i] = (t_i, \mathrm{s}^{[i]})$ e poniamo poi

$$(\star) \qquad \Phi_i(\mathrm{s}^{[i]}) = \{t_i \in S_i : V_i(t_i, \mathrm{s}^{[i]}) \geq V_i(u_i, \mathrm{s}^{[i]}) \; \forall u_i \in S_i\}.$$

È chiaro che l'insieme $\Phi_i(\mathrm{s}^{[i]})$ costituisce quello delle migliori strategie che l'agente i può opporre ad una giocata degli avversari che sia pari a $\mathrm{s}^{[i]}$. Consideriamo, infine, la corrispondenza $\mathrm{s} \mapsto \Phi(\mathrm{s})$ dello spazio $S_1 \times \ldots \times S_n$ in sè definita da

$$\Phi(\mathrm{s}) = \Phi_1(\mathrm{s}^{[1]}) \times \Phi_2(\mathrm{s}^{[2]}) \times \ldots \Phi_n(\mathrm{s}^{[n]}).$$

È evidente che una caratterizzazione del concetto di risultato di Nash può semplicemente essere la seguente: *il risultato* s *è di Nash se e solo se* $\mathrm{s} \in \Phi(\mathrm{s})$ ovvero s *è un punto fisso della corrispondenza* Φ. Questo aspetto degli equilibri di Nash permette subito di dare uno sguardo ad un'impostazione un pò più generale e, come indicheremo, svolge anche un ruolo nella dimostrazione dell'esitenza degli equilibri.

Ripetiamo la filosofia che conduce verso il concetto di equilibrio di Nash. Nell'effettivo svolgimento del gioco, di fronte ad un dato risultato s, può darsi

che qualche giocatore si penta. Per esempio, i potrebbe trovarsi a pensare: "peccato, se avessi saputo che il gioco degli altri era $\mathbf{s}^{[i]}$, avrei potuto scegliere un' alternativa t_i migliore di s_i". Il concetto di risultato di Nash risponde all'esigenza di non avere giocatori pentiti. La ragione per la quale eventualmente i sceglierebbe t_i anzichè s_i (assunto $\mathbf{s}^{[i]}$) è tanto ovvia (utilità personale maggiore, senza considerare le conseguenze sui guadagni altrui) quanto indicativa di un atteggiamento in qualche modo canonico; non possiamo però escludere che i tenga atteggiamenti diversi, sia per ragioni oggettive (ad esempio, potrebbe essere più importante controllare la vincita avversaria piuttosto che rendere massima la propria), sia (perchè no?) per motivi soggettivi del giocatore. Anche questi casi possono essere descritti con formalismo analogo a quello usato per gli equilibri di Nash.
Un modo semplice per rappresentare approcci non canonici, consiste nel caratterizzare ciascun giocatore i attraverso una corrispondenza $\Phi_i(\mathbf{s}^{[i]})$ non data necessariamente dalla formula $(\star)$. Il significato degli elementi $t_i \in \Phi_i(\mathbf{s}^{[i]})$ sarebbe comunque quello di migliore reazione alla giocata $\mathbf{s}^{[i]}$, solo che "migliore" sarebbe nel senso di un criterio carratteristico del giocatore i non per forza coincidente con la canonica massimizzazione egoistica della vincita. Seguendo questa impostazione, i punti uniti della corrispondenza $\Phi(\mathbf{s})$ costituirebbero ancora delle soluzioni di equilibrio del gioco.

Ritornando agli equilibri di Nash, la loro esistenza può dimostrarsi mediante l'applicazione del teorema di punto fisso di Kakutani.

Teorema di Nash. *Consideriamo il gioco (non-cooperativo ad informazione completa)* $\mathbf{V} : S_1 \times \ldots \times S_n \to R^n$. *Se, per ogni* $i = 1, \ldots, n$, *l'insieme delle strategie* S_i *è una parte compatta e convessa di uno spazio euclideo finito-dimensionale, se la funzione* V_i *è continua e le funzioni parziali*

$$t_i \in S_i \mapsto V_i(t_i, \mathbf{s}^{[i]})$$

sono concave, allora il gioco ha almeno un equilibrio di Nash.

Non credo sia questa la sede per esporre la dimostrazione: da un lato la tecnica ci alienerebbe i simpatizzanti, dall'altro, per i matematici di professione o aspiranti tali, si tratta di una verifica routinaria e priva di sorprese delle ipotesi del teorema di Kakutani. Per concludere notiamo che, ovviamente, il teorema di Nash non è applicabile ai semplici esempi di gioco che abbiamo considerato, mentre lo è alle loro estensioni miste.

Corollario. *Ogni gioco* $\mathbf{V} : S_1 \times \ldots \times S_n \to R^n$ *con insiemi finiti di strategie ha almeno un equilibrio di Nash nella sua estensione mista.*

Sotto opportune ipotesi si possono dimostrare teoremi, più o meno soddisfacenti, di unicità per gli equilibri di Nash. D'altra parte il seguente gioco E

gioco E	s	d
a	2,1	0,0
b	0,0	1,2

ha due risultati di Nash in (a, s) e (b, d). In questo caso il tentativo di giocare cercando di produrre un equilibrio di Nash, può essere inefficace. Infatti entrambi i giocatori si trovano a dover scegliere tra tutte le opzioni rispettivamente disponibili e, allora, se entrambi puntassero all'equilibrio di Nash più vantaggioso, il risultato sarebbe (b, d) che di Nash non è ...

Author Address:
Dipartimento di Matematica e Applicazioni *Renato Caccioppoli*
via Cintia, Monte S. Angelo
80128 Napoli, Italia
email: basile@matna2.dma.unina.it fax (39)(81) 7662106