Polinomios de Kashdan-Lusztig y sus Aplicaciones al Cálculo de Multiplicidades en Series de Jordan-Hölder

Dr. Jorge Vargas
Universidad Nacional de Córdoba, FaMAF

III CONGRESO "Dr. A.R. MONTEIRO"

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

BAHÍA BLANCA, ABRIL DE 1995

Multiplicidades para módulos de Verma

Jorge Vargas [1]

Resúmen

En estas notas describimos, en forma sucinta, los trabajos que culminaron con la determinación de algoritmos para el cálculo de las multiplicidades de los subcocientes irreducibles en la sucesión de Jordan-Hölder de los módulos de Verma de las álgebras de Lie semisimples complejas. La exposición sólo presupone conocimientos de álgebra básicos.

Concepto de álgebra de Lie

Sea g un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Una estructura de álgebra de Lie en g es una función

$$[\ ,\ ] : g \times g \longrightarrow g$$

de modo que se satisface:
i) $[\ ,\ ]$ es $K-$bilineal
ii) Para toda terna de elementos x, y, z de g se satisface la identidad de Jacobi, a saber:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

y además es antisimetríca, esto es, $[y,z] = -[z,y]$

Ejemplo: Sea A un álgebra asociativa, definamos una nueva estructura de álgebra en A por la regla, $[\ ,\ ] g \times g \longrightarrow g$ por $[a\ ,b] = ab - ba$, $\forall a, b \in A$. Un simple cálculo que lo justifica la asociativad muestra que se satisfacen la identidad de Jacobi y la antisimetría.
Un caso particular e importante es el caso de que A es el álgebra de operadores lineales de un $K-$espacio vectorial V. En este caso, es comun denotar el álgebra de Lie resultante por $gl(V)$, si $V = K^n$ se la denota por $gl(n, K)$.

El concepto de subálgebra o ideal de Lieson los de la teoría de álgebras. Notar que debido a la antisimetría, los conceptos de ideal izquierdo, ideal derecho o ideal bilátero coinciden en un álgebra de Lie. Los conceptos de morfismo entre álgebras de Lie y el de cociente de un álgebra por un ideal son los usuales. Un álgebra de Lie es simple si es no abeliana y sus únicos ideales son los triviales. Un álgebra de Lie es semisimple si es suma directa de ideales simples

Ejemplos:
1)Para un espacio vectorial de dimensión finita V, sea $sl(V)$ el subconjunto de todos los operadores lineales en V de traza nula. Como traza(ab)=traza(ba) para cualquier par de operadores

[1]Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por CONICOR, CONICET, SecytUNC, TWAS, ICTP

lineales, se tiene que $sl(V)$ es una subálgebra de Lie de $gl(V)$. En el caso $V = K^n$ se denota $sl(V)$ por $sl(n,K)$ ó sl_n. $sl(V)$ es un álgebra de Lie simple si $dim\, V \geq 2$
2)Sea b es una forma bilineal simétrica o alternante nodegenerada,

$$\{T \in gl(V) : b(Tv, w) + b(v, Tw) = 0,\ \forall\, v\,,\ w \in V\}$$

es una subálgebra de Lie semisimple de $gl(V)$.
3) Sean b = totalidad de matrices en $gl(n,K)$ triangulares superiores, n^+ = totalidad de matrices en $gl(n,K)$ triangulares superiores estrictas, h = totalidad de matrices diagonales en $gl(n,K)$. Un cálculo directo justifica que los tres ejemplos son subálgebras de $gl(n,K)$, además n^+ es un ideal en b.

Representaciones de Algebras de Lie

Sea g un álgebra de Lie sobre un cuerpo K y V un $K-$espacio vectorial. Una transformación lineal $\pi : g \longrightarrow End_K(V) = gl(V)$ es una *representación* de g en V si $\pi([X\,,Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X)\ \forall\, X, Y \in g$. Esto es, si $\pi([X,Y]) = [\pi(X), \pi(Y)]\ \forall\, X, Y \in g$.
Usualmente, denotaremos por (π, V) una representación π de g en V. A veces, imitando la teoría de módulos sobre un anillo, llamaremos un $g-$módulo a una representación π de g en V
Ejemplo: 1) La representación trivial g en K, la cual esta definida por $\pi(X) = 0\ \forall\, X \in g$.
2) Sea $g = gl(n,K)$ y V^r =el espacio vectorial de polinomios a coeficientes en K en las variables $X_1, \cdots, X_n$ de grado menor o igual a r.
Sea $\pi : gl(n,K) \longrightarrow End_K(V^r)$ definida por $(A \in gl(n,K), p \in V^r)$

$$(\pi(A)p)(X_1, \cdots, X_n) = -\sum_{i=1}^{i=n} (AX)_i \frac{\partial p}{\partial X_i}$$

Aquí $(AX)_i$ denota la i-sima componente del vector que se obtiene al multiplicar A por el vector columna $X = (X_1, \cdots, X_n)$.

Denotemos por $V(d)$ $(d = 0, 1, ...)$ el espacio de polinomios homogéneos de grado d las variables $X_1, \cdots, X_n$. Como las primeras derivadas parciales de un polinomio homogéneo de grado d, resultan polinomios homogéneos de grado $d-1$ y debido a que $(AX)_i$ es un polinomio homogéneo de grado uno, se tiene que $\pi(A)p \in V(d)$, sí $p \in V(d)$.
Esto es un ejemplo de:
Definición: Sea (π, V) una representación de un álgebra de Lie g. Un subespacio W de V se dice $g-$invariante si $\pi(X)w \in W$para cada $w \in W$ y para cada $X \in g$.
De esto, $\{0\}$ y V son subespacios $g-$invariantes para cualquier representación.
En el ejemplo hemos verificado que $V(d)$ es un subespacio $gl(n,K)-$invariante de V^r por la representación π definida mas arriba. Notemos que $V^r = V(0) \oplus V(1) \oplus \cdots \oplus V(r)$, siendo la suma directa una suma $gl(n,K)-$módulos.
Estudiemos en mayor detalle los $V(r)$.
Definición: Diremos que una representación (π, V) es irreducible, si los únicos subespacios $g-$invariantes son los triviales. De lo contrario, diremos que es reducible.
De esto, $V^r, (r \geq 1)$ es una representación reducible de $gl(n,K)$.
Proposición 1: La representación $(\pi, V(d))$ de $gl(n,K)$ es irreducible.

Demostración: Sólo para n=2. Por definición, $V(d)$ consiste de los polinomios en las variables x, y, homogéneos de grado d. Recordemos que la acción de $sl(2, K)$ esta definida por $(\pi(A)p(x; y) = -[(ax+by)\frac{\partial p}{\partial x} + (cx+dy)\frac{\partial p}{\partial y}]$
Una base de $sl(2, K)$ es:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

las relaciones de conmutación son:

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H \tag{2}$$

Recordemos que $dim\, V(d) = d + 1$ y que una base ordenada de $V(d)$ es

$$\{y^d, y^{d-1}x, \cdots, yx^{d-1}, x^d\}$$

Calculemos la matríz de $\pi(H)$,$\pi(E)$ y $\pi(F)$ en esta base.
$\pi(H)(x^iy^{d-i}) = -(ixx^{i-1}y^{d-i} - (d-i)yx^iy^{d-i-1} = -(d-2i)x^iy^{d-i}$. Por tanto, la matriz de $\pi(H)$ es diagonal.

Como $\pi(E)(x^iy^{d-i}) = -(yix^{i-1}y^{d-i} = -ix^{i-1}y^{d-i+1}$, se tiene que la matríz de $\pi(E)$ es triangular superior. Los únicos coeficientes no nulos de la matríz de $\pi(E)$ son los de la diagonal principal superior.
Notar que $\pi(E)(y^d) = 0$.
Como $\pi(F)(x^iy^{d-i}) = -(x(d-i)x^iy^{d-i-1} = -(d-i)x^{i+1}y^{d-i-1}$, se tiene que la matríz de $\pi(F)$ es triangular inferior, las únicas entradas matriciales no nulas de $\pi(F)$ son los de la diagonal principal inferior.
Notar que $\pi(F)(x^d) = 0$.
Sea $v_r = \pi(F)^r(y^d)$, para $r = 0, 1, \cdots, d$, sea $v_{d+1} = 0$.
Calculemos las matrices de $\pi(H)$,$\pi(E)$ y $\pi(F)$ en la base $\{v_0, \cdots, v_d\}$.
Para $\pi(H)$, es la misma que antes, ya que por inducción en r se tiene que: $\pi(H)(v_0) = d$, $\pi(H)v_r = \pi(H)\pi(F)v_{r-1} == [\pi(H), \pi(F)](v_{r-1}) +$
$+\pi(F)(\pi(H)(v_{r-1}) = -2\pi(F)v_{r-1} + (d-2(r-1))\pi(F)v_{r-1} = (d-2r)v_r$
Fijemos $v_{-1} = 0$, entonces se tiene que $\pi(E)(v_r) = r(d-r+1)v_{r-1}$, en efecto, para $r = 0$, $\pi(E)(v_0) = 0$. $\pi(E)(v_{r+1}) =$
$= \pi(E)\pi(F)v_r = [\pi(E), \pi(F)](v_r) + \pi(F)\pi(E)v_r =$
$= \pi(H)v_r + \pi(F)(r(d-r+1))v_{r-1} = ((d-2r) + r(d-r+1))v_r = (r+1)(d-r)v_r$.
Por consiguiente, $\pi(E)(v_r) = b_rv_{r-1}$ donde $b_r = r(d-r+1)$. Notar que $b_o = 0, b_r \neq 0, \forall\, r = 1, \cdots, d$.
Probemos ahora que $V(d)$ es una representación irreducible de sl_2. Sea W un subespacio sl_2-invariante, como $\pi(H)$ es diagonalizable y $\pi(H)W \subset W$ se tiene que $\pi(H)$ contiene un autovector v en W. Como los autovectores de $\pi(H)$ son $\{v_0, \cdots, v_d\}$, se tiene que $v = v_r$ para algun r. Debido a que $\pi(F)W \subset W$, entonces $v_{r+1}. \cdots, v_d$ pertenecen a W. Como $\pi(E)W \subset W$ y $\pi(E)(v_r) = b_rv_{r-1}$ con $b_o = 0, b_r \neq 0, \forall\, r = 1, \cdots, d$ se tiene que $v_{r-1}, \cdots v_0 \in W$. De esto, $W = V(d)$. Lo que concluye la proposición.

Notemos que para cada dimensión d, hemos construído una representación irreducible de

Probemos ahora que estas son "todas", para esto es necesario definir "todas"

Definición: Dos representaciones $(\pi, W), (\sigma, V)$ de un álgebra de Lie g son equivalentes si existe una transformación lineal, biyectiva, $T : W \longrightarrow V$ que entrelaza las representaciones, esto es, si $T \circ \pi(X) = \sigma(X) \circ T \ \forall X \in g$.

Por razones de dimensión se tiene que $(\pi, V(d))$ no es equivalente a $(\pi, V(k))$ para $k \neq d$. A manera de ejercicio proponemos probar al lector: Si $X_1, \cdots, X_n$ es una base de g, $\{v_0, \cdots, v_d\}$ es una base de V, $\{w_0, \cdots, w_d\}$ una base de W de modo que para cada j la matríz de $\pi(X_j)$ en la base w es igual a la matríz de $\sigma(X_j)$ en la base v , entonces las representaciones $(\pi, W), (\sigma, V)$ son equivalentes.
Usaremos este simple hecho para probar:
Proposición 2: Sea (π, V) una representación irreducible de sl_2 de dimensión $d+1$. Entonces (π, V) es equivalente a $(\pi, V(d))$.
Demostración: Probemos que existe una base ordenada de V de modo que la matriz de $\pi(H)$, $\pi(E)$ y $\pi(F)$ en dicha base coincide con las calculadas para $V(d)$ al final de la prueba de que $(\pi, V(d))$ es irreducible. Por ser K algebraicamente cerrado y V de dimensión finita, $\pi(H)$ tiene autovalores. Denotemos por V_c el autoespacio de $\pi(H)$de autovalor c. Se tiene que:

$$\pi(F)V_c \subset V_{c-2}, \quad \pi(E)V_c \subset V_{c+2}$$

En efecto, si $v \in V_c, \pi(H)\pi(F)v = [\pi(H), \pi(F)](v) + \pi(F)(\pi(H)v = -2\pi(F)v + c\pi(F)v = (c-2)v$, De esto, $\pi(F)v \in V_{c-2}$. De manera análoga se prueba la otra inclusión.
Sea c un autovalor de πH y v un autovector de autovalor c. Los vectores $\pi(E)^r(v)$ $r = 0, \cdots$ pertenecen a distintos autoespacios de $\pi(H)$. Por consiguiente, son linealmene independientes. Como $dimV$ es finita, existe r de modo que $\pi(E)^r(v) \neq 0$ y $\pi(E)^{r+1}(v) = 0$. Sea $w = \pi(E)^r(v)$. Tenemos que $w \neq 0$, $\pi(H)(w) = mw$ (m =número complejo y $\pi(E)(w) = 0$. Veamos que el subespacio Z :=generado por los vectores $\{\pi(F)^k(w)\ k = 0, \cdots\}$ es sl_2−invariante.
Como $\pi(H)(\pi(F)^k(w)) = (c-2k)\pi(F)^k(w)$ tenemos que $\pi(H)Z \subset Z$. Por construcción $\pi(F)Z \subset Z$. Por inducción probemos que $\pi(E)(\pi(F)^k(w)) = c_k\pi(F)^{k-1}(w)$, donde $c_k = k(m-k+1)$. Para $k = 0$ como $\pi Ew = 0\, y\, c_0 = 0$ vamos bien. $\pi(E)\pi(F)^k w = [\pi(E), \pi(F)](\pi(F)^{k-1}w) + \pi(F)\pi(E)\pi(F)^{k-1}w = \pi(H)\pi(F)^{k-1}w + \pi(F)(k-1)(m-k))\pi(F)^{k-2}w = ((m-2(k-1)) + (k-1)(m-2k))\pi(F)^{k-1}w = c_k\pi(F)^{k-1}w$. Por lo tanto, hemos comprobado que Z es sl_2−invariante y a la vez, hemos calculado la matríz de $\pi(H)$,$\pi(E)$ y $\pi(F)$ en la base $\pi(F)^k w$, $k = 0, \cdots, d$. Por la irreducibilidad y como $Z \neq 0$ se tiene que $Z = V$. Para concluir que las matrices calculadas son iguales a las calculadas en $V(d)$ nos falta verificar que $m = d$. Para comprobarlo notemos que la matríz de $\pi(H)$ en la base recien calculada es:

$$[\pi(H)] = \begin{pmatrix} m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m-2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m-2d \end{pmatrix}$$

Ahora $H = [E, F]$ Por lo tanto, $tra\pi(H) = 0$. Por otra parte, $0 = tra\pi(H) = (d+1)m - (2 + 4 + \cdots + 2d) = (d+1)m - 2d(d+1)/2 = (d+1)(m-d) = 0$. Como K tiene característica cero,

se tiene que $m = d$. Lo que concluye la prueba de la equivalencia.
Notar: toda representación irreduciblede $sl(2, K)$, K algebraicamente cerrado y de característica cero tiene un vector no nulo anulado por E y que es autovector de H con autovalor $dim V - 1$.

Algebra Universal Envolvente de un álgebra de Lie,

Informalmente, el álgebra universal de un álgebra de Lie es el álgebra asociativa generada por una base $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de g sujeta a las relaciones $X_iX_j - X_jX_i = [X_i, X_j]$

Formalmente, un modo de construirla es el siguiente: Sea $T(g)$ el álgebra de tensores contravariantes de g. Esto es, como espacio vectorial,

$$T(g) = K \oplus g \oplus (g \otimes g) \oplus (g \otimes g \otimes g) \oplus (g \otimes g \otimes g \otimes g) \oplus \cdots$$

La estructura de álgebra es la que origina la multiplicación de tensores. Ahora consideramos el ideal I en $T(g)$ generado por los tensores $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ con X, Y variando en g. El álgebra cociente la denotamos por $U(g)$ y la denominamos el *Algebra Universal de g*". Fijemos $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ una base de g. Por consiguiente, en principio el álgebra universal de g está generada por los monomios desornados en los elementos que corresponden a $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sin embargo, usando las relacione entre estos elementos y algún trabajo, se tiene:

Teorema (Poincaré, Birkhoff, Witt)(PBW). Los monomios ordenados asociados a la base $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ constituyen una base del espacio vectorial $U(g)$. Más precsisamente, denotemos nuevamente por $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ los elementos correspondientes en $U(g)$ a la base de g antes seleccionada. Entonces, el conjunto

$$X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} : (k_1, \ldots, k_n) \text{ es una } n - \text{ upla de enteros no negativos arbitraria}$$

es una base del espacio vectorial $U(g)$.
Para una demostración consultar [H].

El álgebra universal tiene la siguiente propiedad universal. Si $\pi : g \to g_1$ es un morfismo de álgebras de Lie, entonces π origina un único morfismo de álgebras asociativas $\pi : U(g) \to U(g_1)$ que hace conmutativo el diagrama:

La demostración consiste en recordar que cualquier transformación lineal de un espacio vectorial en un álgebra asociativa se extiende a un morfismo de álgebras desde el álgebra tensorial del espacio vectorial en el álgebra asociativa. Como en nuestro caso comenzamos con un morfismo de álgebras de Lie, la extensión es cero en el ideal utilizado para construir el álgebra universal de g, por tanto la extensión cae a un morfismo de álgebras asociativas desde $U(g)$ en $U(g_1)$.

Con la misma demostración se verifica que cualquier morfismo de un álgebra de Lie en el álgebra de Lie subyacente en un álgebra asociativa se extiende a un morfismo de álgebras asociativas desde el álgebra universal del álgebra de Lie en el álgebra asociativa. En particular toda representación (π, V) de g origina un morfismo de álgebras de asociativas desde $U(g)$ en $End(V)$. Refinando lo afirmado se prueba que la categoría de representaciones de un álgebra de Lie g es equivalente a la categoría de $U(g)-$módulos. Por consiguiente, por un lado podemos aplicar todo lo conocido para módulos sobre un anillo a las representaciones de álgebras de Lie y por otro podemos usar las representaciones de álgebras de Lie para verificar conjeturas sobre módulos sobre un anillo en una categoría muy particular.

Una consecuencia del teorema de PBW es que para cualquier subálgebra s de un álgebra de Lie g, la inclusión de s en g determina una inclusiin del álgebra $U(s)$ en $U(g)$. Si ahora pensamos $U(g)$ como $U(s)$-módulo por multiplicación a izquierda entonces $U(g)$ es libre como $U(s)-$módulo. Puesto que si m es cualquier subespacio vectorial suplementario de s en g, entonces, por PBW, los monomios ordenados en una base de m constituyen una base de $U(g)$ como $U(s)-$módulo.

Otra consecuencia es que $U(g)$ no posee divisores de cero.

Representaciones Inducidas.

Sea $U(g) \otimes V$ el producto tensorial de los $K-$espacios vectoriales $U(g)$ y V. Consideremos el subespacio Y generado por

$$\{dp \otimes v - d \otimes \sigma(p)(v),\ d \in U(g), p \in U(b), v \in V\}$$

Convengamos en denotar el espacio cociente $(U(g) \otimes_K V)/Y$ por $U(g) \otimes_\sigma V$.
La coclase de $d \in U(g) \otimes_K V$ la denotaremos por $c(d)$.
$U(g)$ se representa en el espacio vectorial $(U(g) \otimes_\sigma V)$ del modo siguiente, sea $\pi\ :\ U(g) \longrightarrow End_K(U(g) \otimes_\sigma V)$ definida por

$$\pi(d)\, c(q \otimes v) = c(dq \otimes v) \text{ para } d, q \in U(g),\ v \in V$$

y extendida por linealidad al espacio $(U(g) \otimes_\sigma V)$.
π está bien definida puesto que $c(q \otimes v) = c(t \otimes w)$ implica $(q \otimes v) - (t \otimes w) = \sum(d_i p_i \otimes v_i - d_i \otimes \sigma(p_i)(v_i))$, donde $d_i \in U(g), p_i \in U(b), v_i \in V$, de esto, $(dq \otimes v) - (dt \otimes w) = [\sum(dd_i p_i \otimes v_i - dd_i \otimes \sigma(p_i)(v_i))]$ =a un elemento de Y. Probemos que π es un morfismo de álgebras asociativas, si $d, t \in U(g)$, $\pi(d) \circ \pi(t)(c(q \otimes v)) = \pi(d)c(tq \otimes v) = c(dtq \otimes v) = \pi(dt)c(q \otimes v)$. Por consiguiente $\pi\ :\ U(g) \longrightarrow End_K(U(g) \otimes_\sigma V)$ define una representación de $U(g)$.

Definición: Convengamos en denominar la representación $(\pi, U(g) \otimes_\sigma V)$ de $U(g)$, la representación inducida por (σ, V) a g.

Las preguntas que surgen son: ¿Cuando la representación inducida es irreducible?, ¿si calculamos los subcocientes irreducibles de la serie de Jordan-Hölder de todas las representaciones inducidas, obtenemos todas las representaciones irreducibles de g?, o en su defecto, que propiedades tienen estas irreducibles, ¿Cuando una representación inducida tiene una serie de composición finita?
Como ejemplo estudiemos en detalle el caso $g = sl(2, K)$ y tomemos como b la subálgebra de

matrices triangulares superiores.
Esto es

$$b = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad a, b \in K \}$$

Sea, para cada $\lambda \in K$,

$$\sigma_\lambda : b \longrightarrow K$$

definida por

$$\sigma_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = (\lambda - 1)a$$

es fácil verificar que (σ_λ, K) define una representación de b en K.
Convengamos en denotar por (π, M_λ) la representación inducida a $sl(2)$ por (σ_λ, K). De esto, $M_\lambda = U(sl(2, K)) \otimes_{\sigma_\lambda} K$. Para cada número natural λ, denotamos por L_λ la representación irreducible de sl_2 de dimensión λ. De esto, $L_\lambda = V(\lambda - 1)$
Se tiene:
Proposición 3:
i) Si $\lambda \notin \{1, 2, \ldots\}$, entonces M_λ es irreducible.
ii) Si $\lambda \in \{1, 2, \ldots\}$, entonces,

$$0 \longrightarrow M_{-\lambda} \longrightarrow M_\lambda \longrightarrow L_\lambda \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. (Notar que $M_{-\lambda}$ y L_λ son irreducibles por la hipótesis de ii)
iii) M_λ es un sl_2 módulo primario.
Demostración:
Recordemos la base E, F, H de sl_2 definida en (1).
Una base de M_λ es $\{c(F^n \otimes 1), \quad n \geq 0\}$.
En efecto, una familia de generadores de M_λ es $c(F^n H^s E^r \otimes 1)$, n, r, s, números enteros nonegativos, sujetos a las relaciones, $(F^n H^s E^r \otimes 1) = (F^n \otimes \sigma_\lambda(H^s E^r)(1))$. Como $\sigma_\lambda(H^s E^r) = (\lambda - 1)^s \delta_{r0}$, se tiene que $c(F^n H^s E^r \otimes 1) = c(F^n \otimes (\lambda - 1)^s \delta_{r0})$, por lo tanto, $\{c(F^n \otimes 1), \quad n \geq 0\}$ generan M_λ. La independencia lineal es consecuencia del teorema de PBW, los detalles los haremos cuando estudiemos el caso $g = sl(n, K)$.
Por comodidad convengamos en escribir $(F^n \otimes 1) := c(F^n \otimes 1)$ y tambien $d.(F^n \otimes 1) := \pi(d)(F^n \otimes 1)$, $\forall\, d \in U(g)$.
Un cálculo inductivo conduce a:

$$F.(F^n \otimes 1) = F^{n+1} \otimes 1$$
$$E.(F^n \otimes 1) = n(\lambda - n)(F^{n-1} \otimes 1)$$
$$H.(F^n \otimes 1) = (\lambda - 1 - 2n)(F^n \otimes 1)$$

El primero es obvio, el segundo y tercero lo hicimos al probar que toda representación irreducible de dimensión finita de sl_2 es equivalente a $V(d)$
Notar que si $\lambda \notin \{1, 2, \ldots\}$ entonces $n(\lambda - n) \neq 0$ para $n \geq 1$.
Probemos que si $\lambda \notin \{1, 2, \ldots\}$ entonces M_λ es irreducible. Sea $V \subset M_\lambda$ un subespacio $sl_2(K)$ - invariante. Como H actúa en forma semisimple, existe N tal que $F^N \otimes 1$ pertenece a V. La primera fórmula dice que $F^n \otimes 1 \in V$ para $n \geq N$ y como $n((\lambda - n) \neq 0$ para $n \geq 1$ se tiene que $F^n \otimes 1 \in V$ para $n < N$. En consecuencia $V = M_\lambda$ y hemos probado i).
Para $\lambda \in \{1, 2, \ldots\}$, sea $v = F^\lambda \otimes 1$. De esto, $H.v = ((\lambda - 1) - 2\lambda)v =$
$= (-\lambda - 1)v$. Como λ es natural, $E.(F^\lambda \otimes 1) = \lambda(\lambda - \lambda)v = 0$ Por lo tanto, el subespacio Z_λ generado por $(F^n \otimes 1)$, $n \geq \lambda$ es un subespacio sl_2−invariante. Veamos que la acción sl_2 en Z_λ es

irreducible, en efecto, nuevamente H en Z_λ es diagonalizable , $E.(F^n \otimes 1) = n(\lambda - n)(F^{n-1} \otimes 1)$ implican que $E.(F^n \otimes 1) \neq 0$ $\forall n > \lambda$, un argumento similar al hecho en párrafos anteriores fuerzan a que Z_λ es irreducible. Posteriormente probaremos que $M_{-\lambda}$ es isomorfo como sl_2 módulo a Z_λ, una manera de convencerse de este hecho es notando que en bases convenientes de $M_{-\lambda}$ y Z_λ los operadores E, F, H tienen la misma matríz. El cociente de M_λ por Z_λ tiene por base las coclases de $\{F^n \otimes 1, \quad n = 0, 1, \dots \lambda - 1\}$ en consecuencia $dim M_\lambda / Z_\lambda = \lambda$. Un razonamiento análogo permite concluir la irreducibilidad de este cociente. Esto concluye ii).
Para probar iii) Sea M_λ que admite un submódulo no trivial V, deseamos probar que V no admite un módulo complementario. Por tanto, M_λ es reducible (lo cual equivale a que λ es natural no nulo), veamos que $V = Z_\lambda$. En efecto, $V \cap Z_\lambda$ es un sl_2-submódulo de Z_λ, como Z_λ es irreducible se tiene que $V \cap Z_\lambda$ es igual a $\{0\}$ o a Z_λ, si la intersección es cero, entonces la proyección de V en M_λ / Z_λ es un sl_2 submódulo notrivial, como M_λ / Z_λ es irreducible, se tiene que la proyeccón de V es igual a M_λ / Z_λ, por consiguiente, existe un vector v en Z_λ de modo que $F^0 \otimes 1 + v$ pertenece a V. Por lo tanto, $E.(F^0 \otimes 1 + v) \in V$, pero, $E.(F^0 \otimes 1 + v) = E.v \in Z_\lambda$, por consiguiente, $E.v \in V \cap Z_\lambda = \{0\}$ cómo el único vector de Z_λ anulado por E es $F^\lambda \otimes 1$, se tiene que $(F^0 \otimes 1) + (F^\lambda \otimes 1) \in V$. De esto, $H.[(F^0 \otimes 1) + (F^\lambda \otimes 1)] = (\lambda - 1)(F^0 \otimes 1) + (\lambda - 1 - 2\lambda)(F^\lambda \otimes 1) = (\lambda - 1)(F^0 \otimes 1) + (-1 - \lambda)(F^\lambda \otimes 1) \in V$, lo cual implica que $2\lambda(F^0 \otimes 1) \in V$, como $\lambda \geq 1$, se tiene que $(F^0 \otimes 1) \in V$,de esto $V = M_\lambda$, absurdo, por consi guiente $V \cap Z_\lambda = Z_\lambda$, de esto, $V \supset Z_\lambda$, consideremos nuevamente la proyección de V al cociente M_λ / Z_λ por irreducibilidad es todo o el trivial, si es todo el V original coincide con M_λ, absurdo, por tanto $V = Z_\lambda$. Lo que concluye la demostración de iii).

Representaciones inducidas (Módulos de Verma)

A continuación presentamos resultados debidos esencialmente a Harish-Chandra (1951), Verma (1965) y Bernstein-Gelfand (1970), si bien los resultados sobre representaciones inducidas que describiremos son válidos para cualquier álgebra de Lie semisimple, por simplicidad en el lenguaje nos restringiremos a estudiar el caso particular del álgebra $sl_n := sl(n, K)$. En concreto, comenzaremos a estudiar las representaciones de sl_n que se obtienen al inducir representaciones unidimensionales de la subálgebra de matrices triangulares inferiores, hoy en día estas representaciones se las denomina módulos de Verma. Análogamente a lo verificado para el caso $n = 2$, para los módulos de Verma, probaremos que admiten una serie de composición finita y describiremos sus subcocientes irreducibles, en este caso se requiere herramientas matemáticas de mayor complejidad, las cuales las describiremos a medida de su necesidad. Sistemáticamente se evidenciará como un mayor conocimiento de la estructura interna del álgebra universal nos proporciona mayor información sobre sus representaciones.
De ahora en más, K indica un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, si bien esta hipótesis no es siempre necesaria, simplifica algunas demostraciones.
Para comenzar probaremos:
Proposición 4: Sí g es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces $U(g)$ es un anillo noetheriano.
Sea $U_r(g)$ el subespacio de $U(g)$ generado por los elementos de orden menor o igual a r, i.e por los monomios que son producto de a lo sumo de r elementos de g. Si $x_1, \cdots, x_n$ es una base de $U(g)$ por el teorema de PBW se tiene que los monomios

$$x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, \quad \sum k_j \leq r$$

forman una base de $U_r(g)$. Por consiguiente el espacio cociente $U_r(g)/U_{r-1}(g)$ admite como base $\bar{x}_1^{k_1}\cdots,\bar{x}_n^{k_n}$, $\sum k_j = r$ (aqui, $\bar{a}$ denota la clase de a en $U_r(g)/U_{r-1}(g)$), de esto, el álgebra graduada de $U(g)$, que por definición es $gradU(g) = \oplus_{r=1}^{\infty}(U_r(g)/U_{r-1}(g))$, resulta el álgebra de polinomios en las variables $\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n$. Por un teorema de Hilbert, el álgebra de polinomios a coeficientes en un cuerpo es un anillo noetheriano. Sea, $I_1 \subset \cdots I_n \cdots$ una sucesión creciente de ideales izquierdos en $U(g)$, se tiene que la suceción $J_n := \oplus_{r=1}^{\infty}(U_r(g)\cap I_n)/(U_{r-1}(g)\cap I_n)$ es una sucesión creciente de ideales en $gradU(g)$, como este último es noetheriano, se tiene que $J_m = J_{m+1} = \cdots$, de esto, $I_m = I_{m+1}\cdots$, lo que concluye la prueba de $U(g)$ noetheriano.
Una consecuencia de esta proposición es que todo ideal de $U(g)$ es finitamente generado, otra es que toda representación finitamente generada, de $U(g)$ admite submódulos maximales, en particular, admite un cociente irreducible.

A partir de esto, estamos en condiciones de comenzar a estudiar los módulos de Verma. Lo haremos para el caso $g = sl(n,K)$
Sea b = suálgebra de matrices triangulare superiores en sl_n. De esto,

$$b = \{(a_{ij}) \text{ tal que } a_{ij} = 0 \ \forall\ i \leq j\}$$

b contiene la subálgebra de matrices diagonales h y la subálgebra n^+ de matrices estrictamente triangulares superiores. Es claro que $b = h \oplus n^+$. Además, $[h,n^+] \subset n^+$, $[b,b] \subset n^+$. Sea n^- la subálgebra de matrices triangulares inferiores estrictas. Se tiene que $sl_n = n^- \oplus b$ puesto que toda matríz es suma de una triangular superior y una estrictamente triangular inferior.
Por definición, los *módulos de Verma* de sl_n son las representaciones de sl_n que se obtienen al inducir representaciones unidimensionales de b.

Para $\lambda \in h^*$ sea σ_λ ; $b \longrightarrow K = End_K(K)$ definida por

$$\sigma_\lambda \begin{pmatrix} h_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & h_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{in} \\ 0 & 0 & \dots & h_n \end{pmatrix} = \lambda(h_1,\cdots,h_n)$$

Como, $[b,b] \subset n^+$ y $\sigma_\lambda(n^+) = 0$, se tiene que σ_λ es un morfismo de álgebras de Lie, esto es, σ_λ es una representación de b.
Consideremos la representación $(\pi,(U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$ de $U(sl_n)$.
Se tiene:
Proposición 5: El espacio vectorial $(U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$ es isomorfo al espacio vectorial $U(n^-)$.
Prueba: Sea $\phi : U(n^-) - (U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$ por la fórmula, $\phi(q) = c(q\otimes 1)$.
ϕ es una transformación lineal suryectiva pués un elemento típico de $(U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$ es de la forma $c(d\otimes 1)$ (recordar que estamos calculando un producto tensorial del tipo $W\otimes K$), se tiene, escribiendo $d = \sum_i f_i p_i \otimes 1$ $f_i \in U(n^-)$, $p_i \in U(b)$, que $c\ (d\otimes 1) = c(\sum_i \sigma_\lambda(p_i)f_i \otimes 1) = \phi(\sum_i \sigma_\lambda(p_i)f_i)$.
Para probar que es inyectiva acudimos al teorema de PBW, si $\phi(q) = 0$, entonces $c(q\otimes 1) = 0$ en $(U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$, lo cual implica que $(q\otimes 1) = \sum_i(d_ip_i \otimes 1 - d_i \otimes \sigma_\lambda(p_i))$, $d_i \in U(g)$, $p_i \in U(b)$, por consiguiente, $q = \sum_i(d_ip_i - (\sigma_\lambda(p_i))d_i)$, escribamos $d_i = \sum_j q_{ij}p_{ij}$ donde $q_{ij} \in U(n^-)$ $p_{ij} \in U(b)$, reemplazando en la igualdad para q resulta, $q = \sum_i(\sum_j q_{ij}p_{ij}p_i - (\sigma_\lambda(p_i))\sum_j q_{ij}p_{ij}$, el miembro izquierdo de la igualdad pertenece a $U(n^-)$, mientras que el miembro derecho es suma

de productos de elementos en $U(n^-)$ por elementos de $U(b)$, por la independencia lineal en el teorema de PBW esto sólo es posible si cada uno de los factores en $U(b)$ de grado mayor o igual a uno que estan acompañados de factores en $U(n^-)$ son nulos, por lo tanto, $q = \sum q_{ij} - (\sigma_\lambda(1))\sum q_{ij} = 0$, aquí, el 1 escrito es la identidad de $U(b)$ y recordemos que un morfismo de anillos lleva 1 en 1, por consiguiente el igual a cero es correcto. Esto concluye la prueba de proposición 5.
Una consecuencia importante de esta proposición es:
Proposición 6: $\pi(H) : (U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K) \to (U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$ es un operador diagonalizable.
De la prueba surge una expresión explícita de sus autovalores y autovectores.
Verificiación: si e_{ij} indica la matríz con un uno en el lugar i,j y cero en los otros lugares y $H = (h_1,\cdots,h_n)$,un cálculo muestra que $[H,e_{ij}] = (h_i - h_j)e_{ij}$
Sabemos que las matrices $e_{21}, e_{31}, e_{32}, \cdots, e_{nn-1}$ forman una base ordenada de n^-. Por PBW los monomios en estas matrices constituyen una base de $U(n^-)$. Via ϕ estos monomios se transforman en una base de $(U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$. Calculemos, $\pi(H)$ en uno de estos monomios Para cada $r > s$ definimos $\alpha_{rs} : h \to K$ por la fórmula:

$$\alpha_{rs}(h_1,\cdots h_n) = h_r - h_s$$

$$[H,e_{rs}] = \alpha_{rs}(H)e_{rs} \qquad (5)$$

Por inducción en k probemos que $U(sl_n)$ vale la identidad

$$He_{rs}^k = e_{rs}^k H + k\alpha_{rs}(H)e_{rs}^k$$

En efecto, para $k = 1$ el miembro izquierdo es $He_{rs} = He_{rs} + [H,e_{rs}]$ =miembro derecho $He_{rs}^k = He_{rs}e_{rs}^{k-1} = [H,e_{rs}]e_{rs}^{k-1} + e_{rs}He_{rs}^{k-1} = \alpha_{rs}(H)e_{rs}e_{rs}^{k-1} + e_{rs}(e_{rs}^{k-1}H + (k-1)\alpha_{rs}(H)e_{rs}^{k-1}) =$ lado derecho.
Ahora,

$$\begin{aligned}
&\pi(H)c(e_{21}^{k_{21}}e_{31}^{k_{31}}e_{32}^{k_{32}}\cdots,e_{nn-1}^{k_{nn-1}}\otimes 1) = \\
&\quad (\sum k_{ij}\alpha_{ij}(H))c[(e_{21}^{k_{21}}e_{31}^{k_{31}}e_{32}^{k_{32}}\cdots,e_{nn-1}^{k_{nn-1}})\otimes 1] \\
&\quad +c[(e_{21}^{k_{21}}e_{31}^{k_{31}}e_{32}^{k_{32}}\cdots,e_{nn-1}^{k_{nn-1}})H\otimes 1] = \\
&\quad (\lambda(H) + (\sum k_{ij}\alpha_{ij}(H)))c[(e_{21}^{k_{21}}e_{31}^{k_{31}}e_{32}^{k_{32}}\cdots,e_{nn-1}^{k_{nn-1}})\otimes 1]
\end{aligned}$$

Por consiguiente los monomios $(e_{21}^{k_{21}}e_{31}^{k_{31}}e_{32}^{k_{32}}\cdots,e_{nn-1}^{k_{nn-1}}\otimes 1)$ son autovectores de $\pi(H)$. Sabemos que estos monomios constituyen un generador de $U(g)\otimes_\sigma K$, por ende $\pi(H)$ es diagonalizable. Lo que concluye la proposición.

Por ser $U(n^-)$ un álgebra resulta un $U(n^-)-$módulo por multiplicación a izquierda. De ahora en mas, cuando pensemos a $U(n^-)$ como $U(n^-)-$módulo es con esta acción.
Para proseguir necesitamos:
Definición: Sean (π,V), (σ,W) dos representaciones de un álgebra de Lie g, un operador de entrelazamiento de (π,V) a (σ,W) es una transformación lineal $T : V \to W$ de modo que $T\circ\pi(X) = \sigma(X)\circ T \;\forall\; X \in g$.
A manera de ejemplo, sea ϕ como en la demostración de proposición 5, entonces

Proposición 7: ϕ es un operador de entrelazamiento entre las representaciones de n^- en $U(n^-)$ y $(U(sl_n) \otimes_{\sigma_\lambda} K)$.
Verificación: Recordemos que $\phi(q) = c(q \otimes 1)q \in U(n^-)$. Si $x \in n^-$, entonces, $\phi(xq) = c(xq \otimes 1) = \pi(x)c(q \otimes 1) = \pi(x)\phi(q)$, lo cual prueba que ϕ entrelaza.

Notemos que para cada
$x \in n^+$ se tiene que $\pi(x)(c(1 \otimes 1)) = 0$,
puesto que $\pi(x)(c(1 \otimes 1)) = c(x \otimes 1) = c(1 \otimes \sigma_\lambda(x)) = c(1 \otimes 0) = 0$, la penúltima igualdad se justifica porque $\sigma_\lambda(x) = 0$ para $x \in n^+$. En resúmen tenemos que $(\pi, U(g) \otimes_{\sigma_\lambda} K)$ goza de las propiedades siguientes:
Si $v = c(1 \otimes 1)$, entonces $U(g) \otimes_{\sigma_\lambda} K = U(sl_n).v$,
$x.v = 0 \ \forall \ x \in n^+$ y $H.v = \lambda(H)v, \ \forall \ H \in h$
Esto es un ejemplo de:

Definición: Fijemos $\lambda \in h^*$. Una representacón (π, V) de $sl(n, K)$ diremos que pertenece a la categoría $\mathcal{O}_\lambda$ si:
i) Existe $v \in V$ de modo que $V = U(sl_n).v$
ii) $x.v = 0 \ \forall \ x \in n^+$ y $H.v = \lambda(H)v, \ \forall \ H \in h$
Ejemplos:
1) $(\pi, U(sl_n) \otimes_{\sigma_\lambda} K) \ \in \mathcal{O}_\lambda$
2) Sea (π, V) una representación irreducible de dimensión finita de $sl(n, K)$, se tiene que $(\pi, V) \ \in \mathcal{O}_\lambda$ para λ conveniente. Para una demostración, consultar [H]

Destaquemos que todo elemento en la categoría $\mathcal{O}_\lambda$ admite submódulos maximales puesto que son módulos finitamente generados sobre un anillo noetheriano. Un teorema de Gelfand y otros prueba en realidad que son módulos de tipo finito.

Lema 8: Sea $(\pi, V) \ \in \mathcal{O}_\lambda$, entonces
a) $V = \pi(U(n^-))(v)$
b) Para $H \in h$, $\pi(H)$ actúa como un operador semisimple de V.
Prueba: Sea $q = n(n-1)/2 = dim\, n^+ = dim\, n^-$.
Por el teorema de PBW, si $F_1, \cdots, F_q, H_1, \cdots, H_{n-1}, E_1, \cdots, E_q$ es una base ordenada de sl_n elegida de modo que $F_j \in n^-$, $H_j \in h$, $E_j \in n^+$, sabemos que los monomios

$$F_1^{s_1} \cdots F_q^{s_q} H_1^{k_1} \cdots H_{n-1}^{k_{n-1}} E_1^{p_1} \cdots E_q^{p_q}$$

constituyen una base de $U(sl_n)$ como $K-$espacio vectorial. Ahora,
si $\sum p_j > 0$ entonces por ii) se tiene que $\pi(E_1^{p_1} \cdots E_q^{p_q})v = 0$, además por ii) se tiene tambien que $\pi(H_1^{k_1} \cdots H_{n-1}^{k_{n-1}})v = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda(H_j)^{k_j}(v)$, por consiguiente, es válido que:

$$\pi(F_1^{s_1} \cdots F_q^{s_q} H_1^{k_1} \cdots H_{n-1}^{k_{n-1}} E_1^{p_1} \cdots E_q^{p_q})(v) = 0 \ \text{si} \ \sum p_j > 0$$

$$\pi(F_1^{s_1} \cdots F_q^{s_q} H_1^{k_1} \cdots H_{n-1}^{k_{n-1}} E_1^{p_1} \cdots E_q^{p_q})(v) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda(H_j)^{k_j} \pi(F_1^{s_1} \cdots F_q^{s_q})(v) \ \text{si} \ \sum p_j = 0$$

De esto, $\pi(U(n^-))v = V$ lo cual verifica a).
Para la parte b) elejimos mejor la base de n^-, esto es, elejimos

$$\{F_1, \cdots, F_q\} = \{e_{21}, e_{31}, e_{32}, \cdots, e_{nn-1}\}$$

Por a) los vectores,

$$\pi[(e_{21}^{k_{21}} e_{31}^{k_{31}} e_{32}^{k_{32}} \cdots, e_{nn-1}^{k_{nn-1}})]v \text{ tal que } k_{ij} \in \text{Naturales}$$

generan V, un cálculo similar al realizado en la prueba de proposición 7 tiene como consecuencia que $\pi(H)$ es diagonalizable, lo que concluye b)
Notar que en realidad hemos probado que los operadores $\pi(H)$ son simultáneamente diagonalizables al variar $H \in h$, puesto que la base de autovectores construída no depende de H. Esto motiva la siguiente
Definición: Sea (π, V) un sl_nmódulo y $\mu \in h^*$, el $\mu-$ autoespacio de μ en V es:

$$V_\mu = \{w \in V \text{ tal que } \pi(H)w = \mu(H)w, \ \forall \ H \in h\}$$

Por parte b) del lema anterior, se tiene que para cada $(\pi, V) \ \in \mathcal{O}_\lambda$ vale que

$$V = \sum_{\mu \in h^*} V_\mu$$

Notar además que para $(\pi, V) \ \in \mathcal{O}_\lambda$ se tiene:
j) Sí $V_\mu \neq 0$, entonces $\mu = \lambda + \sum k_{rs}\alpha_{rs}$ con k_{rs} enteros nonegativos y $r > s$.
jj) $dim\, V_\mu < \infty$. En efecto un generador de V_μ es

$$\pi[(e_{21}^{k_{21}} e_{31}^{k_{31}} e_{32}^{k_{32}} \cdots, e_{nn-1}^{k_{nn-1}})]v \text{ tal que } k_{ij} \in \text{Naturales}$$

de modo que $\mu = \lambda + \sum k_{rs}\alpha_{rs}$ con k_{rs} enteros nonegativos y $r > s$.
Por tanto $dim\, V_\mu \leq$ cardinal$(k_{rs}) \cdots$
Ahora,$\{\alpha_{21}, \alpha_{32}, \alpha_{43}, \cdots, \alpha_{nn-1}\}$ es una base h^* y vale, para $r > s$ que $\alpha_{rs} = \alpha_{rr-1} + \alpha_{r-1r-2} + \cdots + \alpha_{s+1s}$, por lo tanto, $\mu - \lambda = \sum_{r>s} k_{rs}\alpha_{rs}$ =combinación lineal con coeficientes enteros no negativos de $\{\alpha_{21}, \alpha_{32}, \alpha_{43}, \cdots, \alpha_{nn-1}\}$, por tanto el número de familias de enteros no negativos k_{rs} que contribuyen (posiblemente) a V_μ es finito, por consiguiente $dim\, V_\mu < \infty$.
jjj) $V_\lambda = Kv$ =múltiplos de v
En efecto, si $\pi[(e_{21}^{k_{21}} e_{31}^{k_{31}} e_{32}^{k_{32}} \cdots, e_{nn-1}^{k_{nn-1}})]v \ \in V_\lambda$, entonces se tiene que $\lambda - \lambda = \sum_{r>s} k_{rs}\alpha_{rs} = 0$. como $\alpha_{rs} = \alpha_{rr-1} + \alpha_{r-1r-2} + \cdots + \alpha_{s+1s}$ y $k_{rs} \geq 0$ se tiene que $k_{rs} = 0 \,\forall\ r > s$.
Definición: Para (π, V) un sl_n-módulo y $\mu \in h^*$ decimos que μ es un peso de V si $dim\, V_\mu > 0$. el número $dim\, V_\mu$ lo denomimos la multiplicidad del peso μ.
Definición: Si $V \ \in \mathcal{O}_\lambda$ diremos que V tiene peso máximo λ.
Ejemplos: Para el caso sl_2, los pesos de $U(sl_2) \oslash_{\sigma_\lambda} K)$ son

$$\{\lambda + n\alpha_{12}, n = 0, 1, \cdots,$$

y cada uno tiene multiplicidad uno, puesto que una base de $U(sl_n) \oslash_{\sigma_\lambda} K)$ es $F^n \oslash 1, n = 0, 1, \cdots,$.
Nuevamente para el caso sl_2 y las representaciones de dimensión finita $V(d)$, aquí los pesos son las funcionales lineales que en H valen $d - 1 - 2n, n = 0, 1, \cdots, (d-1)$ como lo hemos verificado

la unidad anterior, de esto, los pesos de $V(d)$ tienen multiplicidad uno.
Para el caso sl_n y la representación $(\pi, U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$, debido a que una base de $U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$ es $(e_{21}^{k_{21}}e_{31}^{k_{31}}e_{32}^{k_{32}}\cdots, e_{nn-1}^{k_{nn-1}})\otimes 1$, tal que k_{ij} son enteros no negativos arbitrarios, se tiene que $(U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K))_\mu$ = al subespacio de base $(e_{21}^{k_{21}}e_{31}^{k_{31}}e_{32}^{k_{32}}\cdots, e_{nn-1}^{k_{nn-1}})\otimes 1$, tal que $\mu - \lambda = \sum_{r>s} k_{rs}\alpha_{rs}$ El lector puede reescribir esta última igualdad en el lenguaje de la teoría de particiones y de allí deducir una fórmula para $dim\, V_\mu$.
Probemos ahora que $(\pi, U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K)$ es un objeto universal en la categoría $\mathcal{O}_\lambda$. Esto es:
Proposición 9: Sí $(\pi, V)\in\mathcal{O}_\lambda$ entonces existe $T : U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K \to V$, K−lineal, suryectiva y sl_n−morfismo.
Prueba: Puesto $V\in\mathcal{O}_\lambda$ se tiene que existe $v\in V$ de modo que $V = U(sl_n)v, H.v = \lambda(H)v$ $(H\in h), x.v = 0$ $(x\in n^+)$. Por otro lado,$U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K = (U(sl_n)\otimes_K K)/Y$ donde Y =subespacio generado por$\{dp\otimes 1 - d\otimes\sigma_\lambda(p)1, d\in U(sl_n),\ p\in U(b)\}$. Sea $T : (U(sl_n)\otimes_K K)\to V$ definida por $T(d\otimes 1) = \pi(d)(v)$. Por definción T es lineal, veamos que $T(Y) = 0$, en efecto, $T(dp\otimes 1 - d\otimes 1) = \pi(dp)v - \pi(d)(\sigma_\lambda(p)v) = \pi(d)(\lambda(p)v - \lambda(p)v) = 0$. Por consiguiene, T define una aplicación lineal $T : U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K\to V$ por la fórmula $T(c(d\otimes 1) = \pi(d)(v)$. $V = U(sl_n)v$ implica que T es suryectiva. T entrelaza las representaciones puesto que $T(d.(q\otimes 1)) = T(dq\otimes 1) = \pi(dq)(v) = \pi(d)\pi(q)(v) = \pi(d)T(q\otimes 1)$, lo que concluye la proposición.

Aplicación, para $n = 2$, hemos probado $M_\lambda\supset Z_\lambda = U(sl_2)(F^\lambda\otimes 1)$, debido a que un álgebra universal no tiene divisores de cero, resulta en este caso T inyectiva, de esto, $Z_\lambda\simeq M_{-\lambda}$.

Ahora continuamos indagando en la estructura interna de los elementos de la categoría $\mathcal{O}_\lambda$
Proposición 10: Para todo $(\pi, V)\in\mathcal{O}_\lambda$ se tiene que admite un único submódulo maximal. Además, el módulo cociente que se obtiene es irreducible y pertenece a la categoría $\mathcal{O}_\lambda$
Verificación: Recordemos que por jjj) sabemos que $V_\lambda = Kv$. Sea $V_+ = \sum_{\mu\neq\lambda} V_\mu$, por tanto, el subespacio V_+ es propio. Afirmamos que para todo submódulo propio Z de V esta contenido en V_+, en efecto, por ser submódulo y debido a que $\pi(H)$ es diagonalizable para $H\in h$, podemos escribir $Z = \sum_\mu(V_\mu\cap Z)$, como $dim\, V_\lambda = 1$, $V_\lambda\cap Z$ es el subespacio trivial o unidimensional, si fuera unidimensional tendríamos que $V_\lambda\subset Z$ y por consiguiente, Z sería igual a V, contradicción, por lo tanto, $Z\subset V_+$. Sea Z la suma de todos los sl_n−submódulos propios de V, por la afirmación anterior $Z\subset V_+$ y en consecuencia es propio, tambien es claro que es maximal por consiguiente el cociente V/Z es sl_n−irreducible. (Denotemos la clase de equivalencia de $w\in V$ en V/Z por $\bar{w}$), debido a que la proyección de V en V/Z es un $U(sl_n)$−morfismo, se tiene que: $x.\bar{v} = \bar{x v} = \bar{0}\ \forall\ x\in n^+$; $H.\bar{v} = \bar{H.v} = \lambda(\bar{H})v = \lambda(H)\bar{v}\ \forall\ H\in h$; $U(sl_n).\bar{v} = U(\bar{sl_n}).v = \bar{V} = V/Z$. Por consiguiente, V/Z está en $\mathcal{O}_\lambda$.
Corolario: La categoría $\mathcal{O}_\lambda$ contiene (salvo equivalencia) un único sl_n irreducible, una realización concreta del irreducible en $\mathcal{O}_\lambda$ es el cociente de $U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K$ por su único submódulo maximal.
Prueba: Sean V y W dos irreducibles en $\mathcal{O}_\lambda$, por la proposición anterior, ambos resultan imágen de $U(sl_n)\otimes_{\sigma_\lambda} K$, los núcleos resultantes son (por la irreducibilidad) $U(sl_n)$−invariantes y maximales, por la proposición son iguales, por el teorema de isomorfismo los cocientes resultan isomorfos.
Notar que para el caso sl_2 hemos probado que para ciertos λ la categoría $\mathcal{O}_\lambda$ contiene al menos dos elementos, un irreducible de dimensión finita y un primario de dimensión infinita. En este caso observamos que el maximal del primario pertenece a $\mathcal{O}_{-\lambda}$. Para el caso sl_2 cada categoría

$\mathcal{O}_\lambda$ es finita, para el caso sl_3 es posible encontrar M_λ con un número infinitos de submódulos.

Estructura de la sucesión de Jordan - Hölder para módulos de Verma Conjeturas de Kashdan-Lusztig

En esta subsección presentamos las ideas y conjeturas de Kashdan-Lusztig para calcular la multiplicidad de cada subcociente irreducible de un módulo de Verma. Tambien indicamos cual es el estado actual de estas conjeturas.

Com antes, sl_n es le álgebra de matrices de traza nula a coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado K. Escribamos, $b = h + n$ para las matrices triangulares superiores (diagonales, triangulares superiores estrictas).
Sea $\rho = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\alpha_{ij}$. Para cada $\lambda \in h^*$ sea $\sigma_{\lambda-\rho} : b \to K$ la representación de b en K definida por

$$\sigma_{\lambda-\rho}(H+Y) = (\lambda-\rho)(H), \quad H \in h, \quad Y \in n.$$

Sea M_λ el sl_n - módulo inducido por $\sigma_{\lambda-\rho}$. De esto

$$M_\lambda = U(sl_n) \otimes_{\sigma_{\lambda-\rho}} K.$$

Recordemos que la subsección anterior hemos comprobado que M_λ tiene un único submódulo maximal.
Sea L_λ el único cociente irreducible de M_λ. Por tanto L_λ y M_λ tienen peso máximo $\lambda-\rho$, esto es, pertenecen a $\mathcal{O}_{\lambda-\rho}$.
Sea S_n el grupo de permutaciones pensado actuando en h como los operadores lineales que permutan las componentes de cada vector en h. Por dualidad, S_n opera en h^*. En [D] se encuentra una prueba de:
Teorema: (Gelfand-Bernstein) M_λ tiene una sucesión de Jordan-Hölder finita.
Sus subcocientes irreducibles pertenecen a la familia finita $\{L_{w\lambda},\ w \in S_n\}$.

Fijemos una sucesión de Jordan-Hölder $0 \subseteq V_p \subset V_{p-1} \subset \ldots \subset V_0 = M_\lambda$
Para cada w en S_n sea:

$$a(w,\lambda) = \text{número de índices } i \text{ tal que } V_i/V_{i-1} \simeq L_{w\lambda}$$

Problema: Calcular $a(w,\lambda)$.

En el grupo de Grothendieck de la categoría de $U(sl_n)$ - módulos que admiten una sucesión de Jordan - Hölder finita, podemos escribir:

$$M_\lambda = \sum_{w\in S_n} a_w L_{w\lambda} \quad a_w \text{ enteros .}$$

Por consiguiente, para cada $y \in S_n$, tenemos que

$$M_{y\lambda} = \sum_{w\in S_n} a(y,w) L_{w\lambda} \ .$$

A pesar de que $a(y,w)$ depende de λ no lo destacamos.

Idea de Kashdan-Lusztig en lugar de calcular, para cada y, por separado los vectores $(a(y,w))_{w\in S_n}$, Calculemos la $|S_n| \times |S_n|$ - matriz $a(y,w)$.

Caso $g = sl_2(K)$. Por proposición 3, se tiene que:
a) Si $\lambda \notin \{1,2,\ldots\}$, entonces M_λ es irreducible.

b) Si $\lambda \in \{1,2,\ldots\}$, entonces se tiene:

$$0 \longrightarrow M_{-\lambda} \longrightarrow M_\lambda \longrightarrow L_\lambda \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta, además L_λ tiene dimensión λ y $M_{-\lambda}$ es irreducible.
Como, $S_2 = \{id, -id\}$, En el anillo de Grothendieck se tiene que $M_\lambda = L_\lambda$ si $\lambda \notin \{1,2,\ldots\}$
$M_\lambda = M_{-\lambda} + L_\lambda$ si $\lambda \in \{1,2,\ldots\}$
En consecuencia, la matriz es:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a(1,1) & a(1,-1) \\ a(-1,1) & a(-1,-1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad si\, \lambda \notin \{\pm 1, \pm 2, \ldots\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad si\, \lambda \in \{1,2,\ldots\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad si\, \lambda \in \{-1,-2,\ldots\}\end{aligned}$$

Notar que la matriz $a(y,w)$ es triangular e invertible.
Este es un hecho general, más precisamente:
En S_n definimos un orden (llamado de Bruhat), para esto, expresamos cada elemento de S_n como producto de transposiciones elementales, i.e. los 2-ciclos $(i, i+1)$. C omo Bruhat definimos:

$$w \leq y$$

si una expresión reducida de w se la obtiene eliminando algunas transposiciones de una expresión reducida de y.
Esto es, si $y = S_1 \ldots S_k$, $S_j = (s_j, s_j + 1)$, $w \leq y$ sii $w = S_{i_1} \ldots S_{i_t}$ $\quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_t \leq k$.
Para sl_2, $\;id < -id$. Para S_3 el orden no es lineal.
Para el próximo teorema necesitamos:
Definición: $\lambda \in h^*$ es antidominante e integral si $\lambda(0,\cdots,0,1,-1,0,\cdots,0)$ es un entero no positivo para todos los vectores $(0,\ldots,0,1,-1,0,\cdots,0)$.

Teorema (Bernstein - Geltand - Gelfand)
a) Supongamos que λ es antidominante e integral, entonces $a(y,w) \neq 0$ implica $y \leq w$. En otras palabras, la matriz $a(y,w)$ es triangular.
b) $a(w,w) = 1$

La demostración de a) se encuentra en [D].
Para b) como $L_{w\lambda}$ es el único cociente irreducible de $M_{w\lambda}$ y por el teorema de Gelfand-Bernstein, en el anillo de Grothendieck se tiene que

$$M_{w\lambda} = L_{w\lambda} + \sum_{y<w} a(y,w) L_{yw\lambda}$$

Por lo tanto, $a(w,w) = 1$.
En consecuencia, la matríz $a(y,w)$ es triangular con todos los elementos de la diagonal igual a uno. Por consiguiente, se tiene:
Corolario: La matriz $a(y,w)$ es invertible.

Idea de Kashdan-Lusztig: calculemos la inversa de la matríz $a(y,w)$.

Denotemos por $A(y,w)$ la inversa de $a(y,w)$

Conjetura de Kashdan - Lusztig(1977).
Para λ antidominante, integral, tal que $\lambda(0,\ldots,0,1,-1,0,\cdots,0) \neq 0$ para todo vector del tipo $(0,\ldots,0,1,-1,0,\cdots,0)$, existe una familia $P_{y,w}(q)$ de polinomios que se pueden calcular por inducción en (y,w) tal que $A(y,w) = P_{y,w}(-1)$.

Un resultado de Bernstein-Gelfand-Gelfand-Jantzen dice que bajo las hipótesis de las conjeturas de Kashdan-Lusztig, la matriz $a(w,y)$ no depende de λ.
Ahora describimos el algoritmo de Kashdan - Lusztig.
Convengamos en denotar los números enteros por $\mathcal{Z}$ Sea $\mathcal{Z}[q,q^{-1}]$ la localización de $\mathcal{Z}[q]$ en el primo q. De esto $\mathcal{Z}[q,q^{-1}]$ es el anillo de series de Laurent finitas a coeficientes enteros.
Sea $\mathcal{H}$ el $\mathcal{Z}[q,q^{-1}]$−módulo libre generado por S_n. Para $w \in S_n$ denotemos por δ_w el elemento de la base que corresponde a w.
Para cada $i = 1,\ldots,n-1$ sea S_i la reflexión en h determinada por la transposición $(i,i+1)$ y sea T_i el $\mathcal{Z}[q,q^{-1}]$− endomorfismo de $\mathcal{H}$ definido por:

$$T_i(\delta_w) = \begin{cases} q\delta_w + \delta_{wS_i} & si\ l(wS_i) = l(w)+1 \\ q^{-1}\delta_w + \delta_{wS_i} & si\ l(wS_i) = l(w)-1 \end{cases}$$

Aquí l denota la función longitud en S_n.
Se tiene:
Teorema (Kashdan - Lusztig, 1977) Existe una única función $\varphi : S_n \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que:

1- $\varphi(w) = \delta_w + \sum_{v<w} P_{vw}\delta_v \quad con\ P_{v,w} \in q\mathcal{Z}[q]$.

2- Si $l(wS_i) = l(w) - 1$, entonces
$T_i(\varphi(wS_i)) = \sum_{v\leq w} c_v\varphi(v)$ con c_v enteros que, en principio, dependen de v, i y w.

Aproximadamente en 1980 (Beilinson - Bernstein - Brylinski - Kashiwara) demostraron para el cuerpo de los números complejos que

$$A(y,w) = P_{y,w}(-1).$$

Probemos el teorema de Kashdan- Lusztig.
Unicidad: Sean φ, ψ que satisfacen (1) y (2).
Por (1) $\quad \varphi(e) = \psi(e) = \delta_e$.
Probemos: $\varphi(w) = \psi(w)$ por inducción en la longitud de w. Si longitud de w es mayor que uno, sea S_i la reflexión tal que $l(wS_i) = l(w) - 1$. Para por la segunda hipótesis se tiene que

$$T_i(\varphi(wS_i)) = c_w\varphi(w) + \sum_{v<w} c_v\varphi((v)$$

Entonces $c_w = 1, c_v = 0$ si $l((vS_i) = l(v) + 1$, y c_v es igual al coeficiente de q en P_{v,wS_i} si $l(vS_i) = l(v) - 1$.
En efecto

$$\varphi(wS_i) = \delta_{wS_i} + \sum_{y<wS_i} P_{y,wS_i}\delta_y$$

$$T_i(\varphi(wS_i)) = q\delta_{wS_i} + \delta_w + \sum_{y<wS_i} P_{y,wS_i} T_i(\delta_y)$$

Evaluando en $q = 0$ y como la primera hipóteis implica $\varphi(v)(0) = \delta_v$, se obtiene:

$$\delta_w + \sum_{y<wS_i} P_{y,wS_i}(0) \quad (0 \pm 1\delta_y + \delta_{yS_i})$$

$$= \sum_{v\leq w} c_v \varphi(v)(0) = \sum_{v\leq w} c_v \delta_v$$

De esto $c_w = 1, c_v = 0$ si $l(vS_i) = l(v) + 1$; $c_v = P_{v,wS_i}(0)0^{-1}$ si $l(vS_i) = l(v) - 1$, o sea, $c_v =$ coeficiente de q en P_{v,wS_i}. Por ende, despejando $\varphi(w)$, se obtiene

$$\varphi(w) = T_i(\varphi(wS_i)) - \sum_{v<w} c_v \varphi(v)$$

si $l(wS_i) = l(w) - 1$.

Por consiguiente, evaluando en $q = 0$, se obtiene en $\mathcal{Z}[W]$ la identidad:
$T_i(\varphi(wS_i))(0) = \delta_w + \sum_{v<w} c_v \delta_v$
ya que $\varphi(v)(0) = \delta_v$ por la primera hipótesis. También, se obtienen identidades similares para ψ. Esto es,

$$\psi(w) = T_i(\psi(wS_i)) - \sum_{v<w} \bar{c}_v \psi(v)$$

si $l(wS_i) = l(w) - 1$. y $T_i(\psi(wS_i))(0) = \delta_w + \sum_{v<w} c_v \delta_v$

Por la hipótesis inductiva, $\varphi(v) = \psi(v)$ para $v < w$, en consecuencia $c_v = \bar{c}_v = 1$ para $v < w$, en conjunto tenemos que $\varphi(w) = \psi(w)$.
Una expresión explícita de $P_{y,w}$ en función de los anteriores se calcula a partir de la identidad

$$T_i(\varphi(wS_i)) = \varphi(w) + \sum_{v<w} c_v \varphi((v)$$

Construcción de φ:
Para esto recordemos de la prueba de la unicidad que :

$$T_i(\varphi(wS_i)) = c_w \varphi(w) + \sum_{v<w} c_v \varphi((v),$$

donde $c_w = 1, c_v = 0$ si $l((vS_i) = l(v) + 1$, y c_v es igual al coeficiente de q en P_{v,wS_i} si $l(vS_i) = l(v) - 1$.
La verificación de que $T_j(\varphi(wS_j)) = \sum_{v\leq w} c_v \varphi(v)$ para cada j es un ejercicio para el lector. QED

Es claro del enunciado de la conjetura de Kashdan-Lusztig que su enunciado no requiere ninguna modificación para λ arbitrario, un problema que se presenta es el teorema de unicidad de φ, este se puede modificar considerando en lugar de S_n un subgrupo asociado naturalmente a λ, a saber el subgrupo generado por las reflexiones integrales de λ, lo que hoy en día no se ha escrito es una prueba, en este caso general, del teorema de los cuatro autores, tampoco ahy una demostración para el caso λ singular, esto es, algunos de los valores que se supusieron de λ no nulos pueden ser cero. Otro problema que requiere atención es la estructura de la sucesión de Jordan-Hölder en el caso de cuerpos K de característica cero o positiva. Para el caso de cuerpos de característica cero de cardinal igual al contínuo, en principio, la validéz de las conjeturas de Kashdan-Lusztig son consecuencia del caso complejo por el principio de Lesfchetz. Para más detalles sobre la prueba del teorema de Beilison-Bernstein-Brilinsky-Kashiwara y sobre otros problemas relativos a esta área consultar las dos monografias de [V].

Bibliografía

Beilinson-Bernstein Comptes Rendus, 1980.

Brylinski-Kashiwara Inv. Math. 1981.

[D] Dixmier J. Algèbres Enveloppantes, Cahiers Scientifiques, XXXVII, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[H] Humprheys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer Verlag, GTM, New York, 1972.

Kashdan-Lusztig, Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras, Inv. Math.53 (1979), 165-184

[V] Vargas J., Trabajos de Lusztig en representaciones, Trabajos de matemática, FAMAF, Serie B, 22/92.

[V] Vargas J. D-módulos y sus aplicaciones a las conjeturas de Kashdan-Lusztig, Trabajos de Matemática, FAMAF, Serie B, 22/94.

Vogan D. Representations of Real reductive Groups, Progress in Mathematics, Birkhauser, 1981.

Vogan D., Irreducible characters of semisimple Lie groups II: The Kasdan-Lusztig conjectures, Duke Math. J. 46 (1979), 805-859.

Jorge Vargas
FAMAF
Ciudad Universitaria
5000 Córdoba, Argentina
e-mail vargas@famaf.edu.ar