Interpolación en Lógica Modal Intuicionista

Sergio A. Celani*
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática.
Universidad Nacional del Centro
Pinto 399,
7000 Tandil, Argentina.
e-mail: scelani@exa.unicen.edu.ar

Abstract

In this paper we prove that any canonical extension of the intuitionistic modal logic $\mathbf{IK}_\Box$, such that its class of frames is closed under bisimulation-products, has the Interpolation Property

1 Introducción

La noción de bisimulación es una importante herramienta en el estudio de la teoría de modelos de la lógica modal clásica, y tiene un papel similar al que juega la noción de isomorfismo parcial en la teoría de modelos de la lógica de primer orden. Recientes resultados muestran que las bisimulaciones también son importantes en el estudio de la propiedad de interpolación en algunas lógicas modales clásicas [6]. En este sentido, un resultado probado en [6] afirma que si $\mathbf{K}$ es una clase de marcos cerrado bajo ciertos productos de marcos y si la lógica modal $Th(\mathbf{K})$ generada por la clase $\mathbf{K}$ es canónica, entonces tiene la propiedad de interpolación.

En esta nota nos proponemos probar que algunas extensiones de la lógica modal intuicionista $\mathbf{IK}_\Box$ (es decir, la lógica intuicionista con un operador de necesidad $\Box$) también tiene la propiedad de interpolación.

Motivados por la definición de bisimulación directa para el lenguaje intuicionista dada en [4], introducimos una noción de bisimulación apropiada para el lenguaje intuicionista con un conectivo modal $\Box$. Aplicamos esta noción para dar una prueba del teorema de interpolación para cualquier lógica intuicionista modal canónica tal que su clase de marcos sea cerrada bajo lo que llamamos B-productos.

*Deseo agradecer al Dr. Ramón Jansana por sus acertadas sugerencias y comentarios sobre el contenido de este artículo.

2 Preliminares

Sea $\mathcal{L}$ el lguaje modal proposicional que tiene como conectivos a los elementos del conjunto $\{\wedge, \vee, \Box, \rightarrow\}$ y además una constante proposicional $\bot$. El conjunto de variables proposicionales será denotado por Var. La negación $\neg$ y la constante $\top$ son definidas por $\neg p = p \rightarrow \bot$ y $\top = \neg\bot$, respectivamente. Fm simbolizará el conjunto de todas las fórmulas.

La lógica intuicionista modal $\mathbf{IK}_{\Box}$ que trataremos en esta nota está generada por el siguiente conjunto de axiomas y reglas de inferencia:

1. Cualquier conjunto adecuado de axiomas para la lógica intuicionista **Int**
2. $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
3. $\Box\top$
4. $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi, \quad \varphi}{\psi}$
5. $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi}{\Box\varphi \rightarrow \Box\psi}$

Definición 2.1 *[1]Un* $\mathbf{IK}_{\Box}$ *-marco, o marco, es una estructura relacional* $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R\rangle$ *donde* X *es un conjunto,* $\leq$ *es una relación reflexiva y transitiva definida sobre* X*, y* R *es una relación binaria definida sobre* X *tal que se verifica la condición:* $\leq \circ R \subseteq R$.

Sea $\mathcal{F} = \langle X, \leq, R\rangle$ un marco. Para $Y \subseteq X$, los conjuntos $[Y) = \{x \in X : y \leq x,$ para algún $y \in Y\}$ y $(Y] = \{x \in X : x \leq y,$ para algún $y \in Y\}$ simbolizan el conjunto creciente y el conjunto decreciente generado por Y, respectivamente. Un subconjunto Y de X es *creciente si* $Y = [Y)$ y es *decreciente* si $Y = (Y]$. El conjunto de todos los subconjuntos crecientes de X será denotado por $\mathcal{P}_c(X)$.

Una *valuación sobre un marco* $\mathcal{F}$ es una función $V : Var \rightarrow \mathcal{P}_c(X)$. Toda valuación V se extiende recursivamente al conjunto Fm por medio de las siguientes clausulas:

1. $V(\bot) = \emptyset$,
2. $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$,
3. $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$,
4. $V(\varphi \rightarrow \psi) = \{x \in X : [x) \cap V(\varphi) \subseteq V(\psi)\}$.
5. $V(\Box\varphi) = \subseteq V(\varphi)$

Un *modelo* es un par $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V\rangle$ donde $\mathcal{F}$ es un marco y V es una valuación definida sobre $\mathcal{F}$.

Definimos ahora la noción de validez en un modelo y en un marco.

Sea $\langle \mathcal{F}, V\rangle$ un modelo y $x \in X$. Diremos que la fórmula φ es válida en x en el modelo $\langle \mathcal{F}, V\rangle$, en símbolos $\langle \mathcal{F}, V\rangle \vDash_x \varphi$, si $x \in V(\varphi)$. Una fórmula φ es *válida en un modelo* $\langle \mathcal{F}, V\rangle$, en símbolos $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models \varphi$, si es válida en todo elemento de X. Una fórmula φ es válida en un marco $\mathcal{F}$, en símbolos $\mathcal{F} \models \varphi$, si para toda valuación V sobre $\mathcal{F}$, φ es válida en el modelo $\langle \mathcal{F}, V\rangle$.

Sea $\mathcal{I}$ una extensión de $\mathbf{IK}_\Box$. Escribiremos $\vdash_{\mathcal{I}} \varphi$ por $\varphi \in \mathcal{I}$. Denotaremos por $\mathrm{Fr}(\mathcal{I})$ la clase de todos lomarcos donde toda fórmula de $\mathcal{I}$ es válida. Sea F una clase de marcos. $Th(\mathsf{F})$ simbolizará la clase de todas las fórmulas válidas en todo marco de F. Una lógica $\mathcal{I}$ es *caracterizada* por una clase de marcos F, o es completa relativa a la clase de marcos F , o F-*completa*, si $Th(\mathsf{F}) = \mathcal{I}$.

La siguiente definición es una adaptación de la definición de bisimulación directa introducida en [4].

Definición 2.2 *Sean $\mathcal{F}_1 = \langle X_1, \leq_1, R_1\rangle$ y $\mathcal{F}_2 = \langle X_2, \leq_2, R_2\rangle$ dos marcos. Una bisimulación entre los marcos es un par de subconjuntos B_0 y B_1 de $X_1 \times X_2$, en símbolos $B = (B_0, B_1)$, tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

B1 *Si $(a,b) \in B_0$ y $b \leq_2 y$, entonces existe $x \in X_1$ tal que $a \leq_1 x$ y $(x,y) \in B_0 \cap B_1$.*

B2 *If $(a,b) \in B_1$ y $a \leq_1 x$, entonces existe $y \in X_2$ tal que $b \leq_2 y$ e $(x,y) \in B_0 \cap B_1$,*

B3 *If $(a,b) \in B_0$ y $(b,y) \in R_2$, entonces existe $x \in X_1$ tal que $(a,x) \in R_1$ y $(x,y) \in B_0 \cap B_1$.*

B4 *If $(a,b) \in B_0$ y $(a,x) \in R_1$, entonces existe $y \in X_2$ tal que $(b,y) \in R_2$ y $(x,y) \in B_0 \cap B_1$.*

Sea $B = (B_0, B_1)$ una bisimulación entre los marcos $\mathcal{F}_1 = \langle X_1, \leq_1, R_1\rangle$ y $\mathcal{F}_2 = \langle X_2, \leq_2, R_2\rangle$. Diremos que $B = (B_0, B_1)$ es *total* si $dom\,(B_0 \cap B_1) = X_1$ y $rang\,(B_0 \cap B_1) = X_2$.

Definición 2.3 *Una bisimulación entre los modelos $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{F}_1, V_1\rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{F}_2, V_2\rangle$ es una bisimulación $B = (B_0, B_1)$ entre los marcos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tal que:*

V1 *Si $(a,b) \in B_0$ y $a \in V_1(p)$, entonces $b \in V_2(p)$, para cualquier $p \in Var$.*

V2 *If $(a,b) \in B_1$ and $b \in V_2(p)$, then $a \in V_1(p)$, para cualquier $p \in Var$.*

Lema 2.4 *Sea $B = (B_0, B_1)$ una bisimulación entre los modelos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$. Para todo par $(a,b) \in X_1 \times X_2$, y para toda $\varphi \in Fm$:*

1. *Si $(a,b) \in B_0$ y $a \in V_1(\varphi)$, entonces $b \in V_2(\varphi)$.*
2. *Si $(a,b) \in B_1$ y $b \in V_2(\varphi)$, entonces $a \in V_1(\varphi)$.*

Demostración. La prueba es por inducción sobre la complejidad de las fórmulas. El caso de los conectivos proposicionales está probado en [4]. Analizamos el caso $\varphi = \Box\alpha$.

1. Supongamos que $(a, b) \in B_0$ y $a \in V_1(\Box\alpha)$. Sea $y \in X_2$ tal que $(b, y) \in R_2$. Por la condición **B3** existe $x \in X_1$ tal que $(a, x) \in R_1$ y $(x, y) \in B_0 \cap B_1$. Como $a \in V_1(\Box\alpha)$, obtenemos que $x \in V_1(\alpha)$, y como $(x, y) \in B_0 \cap B_1$, concluimos, por la hipótesis inductiva que $y \in V_2(\alpha)$. Por lo tanto, $b \in V_2(\Box\alpha)$.

La prueba del apartado 2, es similar y se deja al lector. ■

Definición 2.5 *Sean $\mathcal{F}_1 = \langle X_1, \leq_1, R_1 \rangle$ y $\mathcal{F}_2 = \langle X_2, \leq_2, R_2 \rangle$ dos marcos. Sea $B = (B_0, B_1)$ una bisimulación total entre los marcos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$. La estructura $\mathcal{F}_B = \langle X_B, \leq_B, R_B \rangle$, donde*

$$X_B = \{(x, y) \in X_1 \times X_2 : (x, y) \in B_0 \cap B_1\}$$

y $\leq_2, R_2$ son relaciones binarias sobre X_B definidas por

$$(x, y)\, R_B\, (x', y') \Leftrightarrow xR_1x' \quad e \quad yR_2y',$$

$$(x, y) \leq_B (x', y') \Leftrightarrow x \leq_1 x' \quad e\, y \leq_2 y'$$

*se llama un **B-producto** de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$.*

Es sencillo probar que todo B-producto de marcos es un marco, es decir, $\leq_B$ es una relación reflexiva y transitiva, y se cumple la inclusión $\leq_B \circ R_B \subseteq R_B$. Observemos que $\mathcal{F}_B$ es una subestructura del producto directo de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$. Además, al ser B una bisimulación total es un producto subdirecto.

Definición 2.6 *Sea **K** una clase de marcos. Diremos que **K** es cerrada bajo B-productos si para todo par de marcos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathbf{K}$ y toda bisimulación total $B = (B_0, B_1)$ entre $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_B = \langle X_B, \leq_B, R_B \rangle \in \mathbf{K}$.*

Es claro que la clase $Fr\,(\mathbf{IK}_\Box)$ de todos los $\mathbf{IK}_\Box$-marcos es cerrada bajo B-productos.

3 Interpolación en $\mathbf{IK}_\Box$

En esta sección vamos a probar la propiedad de Interpolación para una gran variedad de extensiones de la lógica $\mathbf{IK}_\Box$. Sea $\mathcal{I}$ una extensión de $\mathbf{IK}_\Box$. Diremos que $\mathcal{I}$ tiene la Propiedad de Interpolación si para todo par de fórmulas φ y ψ tal que $\vdash_\mathcal{I} \varphi \to \psi$ existe una fórmula $\alpha \in Fm$ tal que $\vdash_\mathcal{I} \varphi \to \alpha$, $\vdash_\mathcal{I} \alpha \to \psi$, y $Var(\alpha) \subseteq Var(\varphi) \cap Var(\psi)$.

Un conjunto de fórmulas es una *teoría* de $\mathcal{I}$, o una $\mathcal{I}$-teoría, si y sólo si es cerrado bajo la relación de deducibilidad $\vdash_\mathcal{I}$. Una teoría es consistente si no es el conjunto de todas las fórmulas. Una teoría Γ de $\mathcal{I}$ es *prima* si es consistente y para cada par de fórmulas φ, ψ si $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, entonces $\varphi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.

Recordemos que el *marco canónico* de $\mathcal{I}$ es la estructura $\mathcal{F}_c = \langle X_c, \subseteq, R_c \rangle$ donde X_c es el conjunto de todas las teorías primas, $\subseteq$ es la relación de inclusión, y R_c es la relación definida por

$$(P, Q) \in R_c \Leftrightarrow \Box^{-1}(P) \subseteq Q,$$

donde $\Box^{-1}(P) = \{\varphi \in Fm : \Box\varphi \in P\}$ (ver [1], [2], [7] o [8]). El *modelo canónico* es el par $\mathcal{M}_c = \langle \mathcal{F}_c, V_c \rangle$ donde V_c es la valuación definida por:

$$V_c(p) = \{\Gamma \in X_c : p \in \Gamma\}.$$

Recordemos que una lógica $\mathcal{I}$ es *canónica* si el marco canónico de $\mathcal{I}$ es un marco de la lógica, es decir si $\mathcal{F}_c \vDash \mathcal{I}$. En [1] y [2] se prueba que la lógica $\mathbf{IK}_\Box$ como algunas extensiones $\mathbf{IK}_\Box$ son canónicas.

Sea $\varphi, \psi \in Fm$. Denotaremos con $Fm(\varphi)$ $(Fm(\varphi, \psi))$ la restricción de Fm al conjunto de variables $Var(\varphi)$ $(Var(\varphi) \cap Var(\psi))$. Simbolizaremos $\mathcal{F}_\varphi = \langle X_\varphi, \leq_\varphi, R_\varphi \rangle$ y $\mathcal{M}_\varphi = \langle \mathcal{F}_\varphi, V_\varphi \rangle$ el marco canónico y el modelo canónico sobre $Fm(\varphi)$, respectivamente.

Proposición 3.1 *Sea Γ una teoría consistente y sea Δ un conjunto de fórmulas cerrado bajo disyunciones (es decir: si $\varphi, \psi \in \Delta$ entonces $\varphi \vee \psi \in \Delta$) y tal que $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. Entonces existe una teoría prima P tal que $\Gamma \subseteq P$ y $P \cap \Delta = \emptyset$.*

Desmostración. Ver, por ejemplo, [1]. ■

El siguiente teorema es fundamental en la prueba del próximo teorema de interpolación.

Teorema 3.2 *Sean $\varphi, \psi \in Fm$ y sean $\mathcal{M}_\varphi$ y $\mathcal{M}_\psi$ los modelos canónicos sobre $Fm(\varphi)$ y $Fm(\psi)$, respectivamente. Entonces el par $B = (B_0, B_1)$ donde*

$$B_0 = \{(P, Q) \in X_\varphi \times X_\psi : P \cap Fm(\varphi, \psi) \subseteq Q\},$$

y

$$B_1 = \{(P, Q) \in X_\varphi \times X_\psi : Q \cap Fm(\varphi, \psi) \subseteq P\},$$

es una bisimulación total entre los modelos $\mathcal{M}_\varphi$ y $\mathcal{M}_\psi$.

Demostración. Probemos primero que B es total. Sea $Q \in X_\psi$ y consideremos el conjunto $Q \cap Fm(\varphi, \psi)$. En $Fm(\varphi)$ consideremos la teoría T generada por $Q \cap Fm(\varphi, \psi)$, y el conjunto $D = \{\alpha \in Fm(\varphi, \psi) : \alpha \notin Q\}$. Como Q es una teoría prima, entonces D es cerrado bajo disyunciones. Como, $T \cap D = \emptyset$, entonces por la Proposición 3.1, existe $P \in X_\varphi$ tal que

$$Q \cap Fm(\varphi, \psi) \subseteq P \text{ y } D \cap P = \emptyset.$$

Esto implica que $(P, Q) \in B_0 \cap B_1$. Un argumento similar muestra que si $P \in X_\varphi$ entonces existe $Q \in X_\psi$ tal que $(P, Q) \in B_0 \cap B_1$. Por lo tanto, $B = (B_0, B_1)$ es total.

Probaremos que B verifica la condición **B1** de la Definición 2.2. Sean $P \in X_\varphi$ y $Q, D \in X_\psi$ tales que $P \cap Fm(\varphi, \psi) \subseteq Q$ y $Q \subseteq D$. En $Fm(\varphi)$ consideremos la teoría T generada por $P \cup (D \cap Fm(\varphi, \psi))$, y sea I la clausura bajo disyunciones del conjunto $\Delta = \{\alpha \in Fm(\varphi, \psi) : \alpha \notin D\}$. Entonces,

$$T \cap I = \emptyset,$$

pues en caso contrario existen fórmulas $\beta \in P$, $\omega \in D \cap Fm(\varphi, \psi)$, y $\alpha \in \Delta$ tales que $\vdash_{\mathcal{I}} \beta \wedge \omega \rightarrow \alpha$. Luego, por argumentos proposicionales, tenemos que $\vdash_{\mathcal{I}} \beta \rightarrow (\omega \rightarrow \alpha)$. Como $\beta \rightarrow (\omega \rightarrow \alpha) \in P$, y P es cerrada bajo Modus Ponens, entonces $\omega \rightarrow \alpha \in P \cap Fm(\varphi, \psi) \subseteq Q \subseteq D$. Nuevamente, por Modus Ponens, α es una contradicción. Por lo tanto, $T \cap I = \emptyset$. Por la Proposición 3.1, existe $Z \in X_\varphi$ tal que

$$P \subseteq Z \ \text{ y } \ D \cap Fm(\varphi, \psi) = Z \cap Fm(\varphi, \psi),$$

es decir, $P \subseteq Z$ y $(Z, D) \in B_0 \cap B_1$.

Probemos ahora la condición **B3.** Sean $P \in X_\varphi$, $Q, Z \in X_\psi$ tales que

$$P \cap Fm(\varphi, \psi) \subseteq Q \ \text{ y } \ \Box^{-1}(Q) \subseteq Z.$$

Consideremos la teoría K generada por el conjunto $\Box^{-1}(P) \cup Z \cap Fm(\varphi, \psi)$ en $Fm(\varphi)$. Sea H la clausura bajo disyunciones del conjunto $\Delta = \{\varepsilon \in Fm(\varphi, \psi) : \varepsilon \notin Z\}$ en $Fm(\varphi)$. Probemos que

$$K \cap H = \emptyset.$$

Si suponemos lo contrario, existen fórmulas $\alpha \in \Box^{-1}(P)$, $\beta \in Z \cap Fm(\varphi, \psi)$, y $\varepsilon \in \Delta$ tales que $\alpha \wedge \beta \vdash_{\mathcal{I}} \varepsilon$. Entonces, $\alpha \vdash_{\mathcal{I}} \beta \rightarrow \varepsilon$. Luego, $\Box\alpha \vdash_{\mathcal{I}} \Box(\beta \rightarrow \varepsilon)$. Como P es una teoría, $\Box(\beta \rightarrow \varepsilon) \in P$, y puesto que $\beta, \varepsilon \in Fm(\varphi, \psi)$, $\Box(\beta \rightarrow \varepsilon) \in Fm(\varphi, \psi)$. Se sigue que $\Box(\beta \rightarrow \varepsilon) \in Q$. Como $\Box^{-1}(Q) \subseteq Z$, entonces por Modus Ponens concluimos que $\varepsilon \in Z$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, por la Proposición 3.1, existe $D \in X_\varphi$ tal que

$$\Box^{-1}(P) \subseteq D \ \text{ y } \ D \cap Fm(\varphi, \psi) = Z \cap Fm(\varphi, \psi).$$

La prueba de la condición **B2** es similar a la prueba de **B1**, y la prueba de la condición **B4** es similar a la prueba de **B3**. ■

Teorema 3.3 (de Interpolación) *Sea $\mathcal{I}$ una lógica canónica tal que $\mathcal{I} \supseteq \mathbf{IK}_\Box$. Si la clase $\mathbf{K} = \mathrm{Fr}(\mathcal{I})$ es cerrada bajo B-productos, entonces $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de Interpolación*

Demostración. Supongamos que existen $\varphi, \psi \in Fm$ tal que para toda $\alpha \in Fm$ con $Var(\alpha) \subseteq Var(\varphi) \cap Var(\psi)$, $\nvDash_{\mathbf{K}} \varphi \rightarrow \alpha$ o $\nvDash_{\mathbf{K}} \alpha \rightarrow \psi$. Consideremos los conjuntos $Fm(\varphi)$, $Fm(\psi)$ y $Fm(\varphi, \psi)$, y sean $\mathcal{M}_\varphi$ y $\mathcal{M}_\psi$ los modelos canónicos sobre $Fm(\varphi)$ y $Fm(\psi)$, respectivamente. Consideremos los siguientes conjuntos

$$\Gamma = \{\alpha \in Fm(\varphi) : \vDash_{\mathbf{K}} \varphi \rightarrow \alpha\} \ \text{ y } \ \Delta = \{\beta \in Fm(\psi) : \vDash_{\mathbf{K}} \beta \rightarrow \psi\}.$$

Sea T la teoría generada por $\Gamma \cap Fm(\varphi, \psi)$ en $Fm(\psi)$, y sean I la clausura bajo disyunciones de Δ en $Fm(\psi)$. Entonces $T \cap I = \emptyset$, pues en caso contrario existen fórmulas $\alpha \in T \cap I$, $\alpha_1 \in \Gamma \cap Fm(\varphi, \psi)$, $\alpha_2 \in \Delta$ tales que $\vDash_{\mathbf{K}} \alpha_1 \rightarrow \alpha$, $\vDash_{\mathbf{K}} \alpha \rightarrow \alpha_2$, $\vDash_{\mathbf{K}} \varphi \rightarrow \alpha_1$ y $\vDash_{\mathbf{K}} \alpha_2 \rightarrow \psi$. Por argumentos proposicionales se deduce que $\vDash_{\mathbf{K}} \varphi \rightarrow \alpha_1$ y $\vDash_{\mathbf{K}} \alpha_1 \rightarrow \psi$, lo que es una contradicción, pues $\alpha_1 \in Fm(\varphi, \psi)$. Luego, existe $Q \in X_\psi$ tal que

$$\Gamma \cap Fm(\varphi, \psi) \subseteq Q \;\text{ y }\; Q \cap I = \emptyset.$$

Esto último implica que $\psi \notin Q$, pues $\psi \in \Delta$. Sea T_1 la teoría generada por $\{\varphi\} \cup (Q \cap Fm(\varphi, \psi))$ en $Fm(\varphi)$, y sea I_1 la clausura bajo disyunciones del conjunto

$$\{\theta \in Fm(\varphi, \psi) : \theta \notin Q\}$$

en $Fm(\varphi)$. Entonces

$$T_1 \cap I_1 = \emptyset,$$

pues en caso contrario existen fórmulas $\gamma \in Q \cap Fm(\varphi, \psi)$, $\theta \in \Delta$ tales que $\varphi \wedge \gamma \vDash_{\mathbf{K}} \theta$. Esto implica que $\varphi \vDash_{\mathbf{K}} \gamma \rightarrow \theta$. Luego, $\gamma \rightarrow \theta \in \Gamma \subseteq Q$, y como Q es cerrado bajo Modus Ponens, $\theta \in Q$, lo que es una contradicción. Por la Proposición 3.1, existe $P \in X_\varphi$ tal que

$$\varphi \in P \text{ y } P \cap Fm(\varphi, \psi) = Q \cap Fm(\varphi, \psi). \tag{1}$$

Sea B la bisimulación entre los modelos $\mathcal{M}_\varphi$ y $\mathcal{M}_\psi$ definida en el Teorema 3.2. Consideremos el marco $\mathcal{F}_B = \langle X_B, \leq_B, R_B \rangle$ y el modelo $\mathcal{M}_B = \langle \mathcal{F}_B, V_B \rangle$ donde

$$X_B = \{(P, Q) \in X_\varphi \times X_\psi : P \cap Fm(\varphi, \psi) = Q \cap Fm(\varphi, \psi)\},$$

y

$$V_B : Var(\varphi) \cup Var(\psi) \rightarrow \mathcal{P}_c(X_B)$$

se define por

$$V_B(p) = \{(P, Q) \in X_B : P \in V_\varphi(p) \;\text{ o }\; Q \in V_\psi(Q)\}.$$

Notemos que por (1) $X_B = \emptyset$. Es claro que V_B es bien definida pues si $(P, Q) \in V_B(p)$ y $p \in Fm(\varphi) \cap Fm(\psi)$, entonces

$$P \in V_\varphi(p) \Leftrightarrow Q \in V_\psi(p). \tag{2}$$

Notemos que V_B es realmente una valuación pues por el Teorema 3.2 $B = (B_0, B_1)$ es un bisimulación entre los modelos $\mathcal{M}_\varphi$ y $\mathcal{M}_\psi$ y en consecuencia (2) vale para todas las fórmulas.

Como $\mathcal{I}$ es canónica, entonces $\mathcal{F}_\varphi$, $\mathcal{F}_\psi \in \mathbf{K}$, y como $\mathbf{K}$ es cerrada bajo B-productos, $\mathcal{F}_B = \langle X_B, \leq_B, R_B \rangle \in \mathbf{K}$. Por (1), en el modelo $\langle \mathcal{F}_B, V_B \rangle$ existe un par $(P, Q) \in X_B$ tal que

$$\langle \mathcal{F}_B, V_B \rangle \vDash_{(P,Q)} \varphi \;\text{ y }\; \langle \mathcal{F}_B, V_B \rangle \nvDash_{(P,Q)} \psi,$$

es decir,

$$\langle \mathcal{F}_B, V_B \rangle \nvDash_{(P,Q)} \varphi \rightarrow \psi.$$

Por lo tanto, $\nvDash_{\mathbf{K}} \varphi \rightarrow \psi$. ∎

4 Observaciones finales

Consideremos la siguiente lista de extensiones normales de la lógica $\mathbf{IK}_\Box$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{ID}_\Box &= \mathbf{IK}_\Box \cup \{\neg\Box\neg\top\} \\
\mathbf{IT}_\Box &= \mathbf{IK}_\Box \cup \{\Box\varphi \rightarrow \varphi\} \\
\mathbf{IS4}_\Box &= \mathbf{IT}_\Box \cup \{\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi\} \\
\mathbf{IS5.1}_\Box &= \mathbf{IS4} \cup \{\neg\Box\varphi \rightarrow \Box\neg\Box\varphi\} \\
\mathbf{IS5}_\Box &= \mathbf{IS4} \cup \{\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \rightarrow \Box\,(\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)\}
\end{aligned}$$

En [2], (ver también [7]) se prueba que todas estas lógicas son canónicas y la clase de marcos de cada una de ellas tiene una propiedad de primer orden que la caracteriza. Por ejemplo, la clase de marcos de la lógica $\mathbf{IS5.1}_\Box$ es la clase de todos los marcos tal que la relación $R_\Box = R \circ \leq$ es reflexiva y transitiva, y se verifica la condición $R_\Box \subseteq \left(\leq \circ R_\Box^{-1}\right)$. Las condiciones que caracterizan a las clases de marcos de cada una de estas lógicas son condiciones de primer orden en un lenguaje de primer orden con los símbolos de relación R y $\leq$. Estas condiciones corresponden a sentencias universales de Horn.

Por otra parte, cualquier bisimulación total entre dos marcos es un producto subdirecto, y todo producto subdirecto preserva sentencias universales de Horn. Teniendo en cuenta estas observaciones, podemos enunciar el siguiente corolario

Corolario 4.1 *Sea $\mathcal{I}$ una lógica canónica tal que $\mathbf{IK}_\Box \subseteq \mathcal{I}$. Si la clase* $\mathrm{Fr}\,(\mathcal{I})$ *está definida por sentencias universales de Horn, entonces $\mathcal{I}$ tiene la propiedad de interpolación.*

Por este corolario se deduce que las las lógicas $\mathbf{ID}_\Box$, $\mathbf{IT}_\Box$, $\mathbf{IS4}_\Box$, $\mathbf{IS5.1}_\Box$, y $\mathbf{IS5}_\Box$ tienen la propiedad de interpolación.

La propiedad de interpolación para la lógica $\mathbf{IS4}_\Box$ también fue probada por C. Luppi en [5], pero aplicando métodos algebraicos.

Referencias

[1] M. Božić, K. Doženć, *Models for Normal Intuitionistic Modal Logics*, Studia Logica, vol. 43 (1984), pp. 217-245.

[2] K. Doženć, *Models for Stronger Normal Intuitionistic Modal Logics*, Studia Logica, vol. 44 (1985), pp. 39-70.

[3] G. E. Hugues - M. J. Cresswell, **A New Introduction to Modal Logic**, Routledge, Londres 1996.

[4] N. Kurtonina, M. de Rijke, *Simulating without Negation*, Journal of Logic and Computation, 7 (1997), pp. 501-522.

[5] C. Luppi, *On the interpolation property of some intuitionistic modal logics*, Archive for Math. Logic. 35 (1996), pp. 173-189.

[6] M. Marx and Y. Venema, **Multi-dimensional Modal Logic**. Applied Logic Series, Kluwer Academic Publishers, 1997.

[7] H. Ono, *On Some Intuitionistic Modal Logics*, Publication of The Research Institute for Math. Sc. 13 (1977), pp. 687-722.

[8] F. Wolter and M. Zakharyaschev, *The relation between intuitionistic and classical modal logics*. Algebra i Logica, vol.36, No. 2 (1997), pp. 121-155 (and also Algebra and Logica, vol. 36, No. 2 (1997), pp. 73-92.)