# ANÁLISIS

## Tipo débil (1,1) con pesos para operadores fuertemente singulares

Carlos Segovia y Ricardo Testoni
*IAM, CONICET - Dpto. de Mat., FCEyN, UBA*

Se presentará una simplificación de la demostración de S. Chanillo en [1] del tipo débil (1,1) con peso $\omega \in A_1$ de operadores de convolución con núcleos fuertemente singulares de la forma

$$k_b(x) = \frac{\exp(i|x|^{-b})}{|x|}\chi_{\{t:|t|<1\}}(x),$$

donde $b > 0$.

Esta simplificación consiste en una aplicación de la versión con pesos del Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev para la integral fraccionaria ([2, 3, 4]) y permite obtener el tipo débil con peso $\omega \in A_1^+$ para el caso lateral con núcleos de la forma

$$k_b^+(x) = \frac{\exp(i|x|^{-b})}{|x|}\chi_{(-1,0)}(x).$$

**Referncias:**

[1] S. Chanillo [1984] *Weigthed norm inequalities for strongly singular convolution operators*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **281**: 77-107.

[2] E. Harboure, R. A. Macías and C. Segovia [1988] *Extrapolation results for classes of weights*, *Amer. J. Math.* **110**: 383-397.

[3] R. A. Macías and M. S. Riveros [2000] *One sided extrapolation at infinity and singular integrals*, *Proc. Royal Soc. of Edinburgh*, **130A:** 1081-1102.

[4] F. J. Martín-Reyes, L. Pick and A. de la Torre [1993] *$A_\infty^+$ condition*, *Can. J. Math.* **45**: 1231-1244.

# Desigualdades tipo Coifman para la Función Cuadrado Discreta Lateral

M. Lorente, M.S. Riveros and A. de la Torre

En este trabajo estudiamos las desigualdades tipo Coifman para la función cuadrado discreta lateral $S^+$. Esta función puede ser tratada como una integral singular a valores vectoriales. El principio de Calderón-Zygmund asegura que toda integral singular puede ser controlada en normas $L^p$, por una función maximal apropiada. Resolvemos este problema no sólo para $S^+$ sino también para el conmutador de orden $k$ de $S^+$.

# Clases de pesos para la integral fraccionaria de Weyl

L. de Rosa y A. de la Torre

La integral fraccionaria de Weyl $I_\alpha^+$ definida por:

$$I_\alpha^+(f)(x) = \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}}dy,$$

admite pesos $w$ tales que $I_\alpha^+$ resulta ser un operador acotado de $L^p(w)$ en si mismo, cuando $1 \leqslant p < \infty$. Con tal motivo, definimos las siguientes clases:

- $w \in F_{p,\alpha}^+$ (resp. $w \in F_{p,\alpha}^-$) si y sólo si $I_\alpha^+$ (resp. $I_\alpha^-$, el operador adjunto) está acotado del espacio $L^p(w)$ en si mismo.

Tenemos los siguientes resultados.

**Teorema 1:** Para $0 < \alpha < 1$, son equivalentes:

(1) $w \in F_{1,\alpha}^+$.

(2) El operador maximal fraccionario $M_\alpha^+$ está acotado del espacio $L^1(w)$ en si mismo.

(3) Existe una constante $C > 0$ tal que: $I_\alpha^-(w)(x) \leqslant Cw(x)$ *a.e.*

**Teorema 2:** Para $1 < p < \infty$ y $\alpha > 0$, son equivalentes:

(1) $w \in F_{p,\alpha}^+$.

(2) Existen dos pesos $w_0 \in F_{1,\alpha}^+$ y $w_1 \in F_{1,\alpha}^-$ tales que $w = w_0 w_1^{1-p}$.

Un resultado similar al Teorema 1, vale con pares de pesos.

# Multiwavelets y Funciones Radiales de dimensión $r$

Marcela Fabio y Eduardo Serrano
*Escuela de Ciencia y Tecnología - UNSAM.*
*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA.*

En esta comunicación presentamos resultados que relacionan las multiwavelets causales con las funciones radiales, de dimensión $r \geqslant 1$. Más precisamente, se demuestra que, bajo apropiadas hipótesis, un análisis multirresolución puede ser generado a partir de una función radial y recíprocamente, una estructura de multirresolución puede extenderse al espacio vectorial generado por esa función, preservándose la relación de escala y la invariancia por traslaciones.

Estos resultados generalizan los demostrados recientemente por Unser M. y Blu T. en [1-2] para el caso unidimensional. Son particularmente útiles en las aplicaciones numéricas, en especial en la interpolación de señales.

Una función $f = (f_1, \ldots, f_r)$ de dimensión $r$ es llamada *causal* si $f_k(x) = 0$ para $x < 0$ y $1 \leqslant k \leqslant r$.

Una función causal $\rho$ de dimensión $r$ será llamada *radial* o *autosimilar* si existe una matriz $\Lambda \in \mathcal{R}^{r\times r}$ tal que:

$$\rho(x) \;=\; \rho(x/2)\Lambda, \quad x \in Dom(\rho)$$

Asumiremos aquí que las componentes $\rho_k$ son funciones linealmente independientes y que el factor $\Lambda$ es no singular. Denotamos $\mathcal{S}(\rho)$ al espacio vectorial generado por las traslaciones de $\rho$.

Consideramos una funcion de multi-escala $\phi \in L^2(\mathcal{R})$ causal y de dimensión $r$, y denotamos $V_0(\phi)$ al sub-espacio de $L^2(\mathcal{R})$ generado por sus traslaciones. Este espacio es el espacio fundamental de un análisis multirresolución de $L^2(\mathcal{R})$. Como bién sabemos, en correlación con esta estructura, existe una base incondicional de multiwavelets de $L^2(\mathcal{R})$, generada por las dilataciones y traslaciones una única función $\psi = (\psi_1, \ldots \psi_r)$, de dimensión $r$.

Se demuestra el siguiente Teorema: *Dada la funcion de multi-escala $\phi$ causal y verificando ciertas hipótesis, existe una única función radial $\rho$, tal que:*

$$\phi(x) \;=\; \rho(x) \;\; x \in (0, 1]$$

*En tal caso:*

$$\mathcal{S}(\rho) \cap L^2(\mathcal{R}) \;=\; V_0(\phi) \;\bullet$$

Se exponen, además, los algoritmos para calcular cada una de las funciones a partir de la otra asociada y se discuten otros detalles de interés.

## Referencias

1. M. Unser, T. Blu, *'Wavelets and Radial Basis Functions: a Unifying Perspective'*, Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, M. Unser, A. Aldroubi and A. Laine Eds., vol. 3813, San Diego, 2000.

2. T. Blu, M. Unser, 'Wavelets, Fractal, and Radial Basis Funtions', IEEE Trans. on Signal Process., Vol. 50, No. 3, 2002.

# Caracterización de los espacios de Lebesgue y de Sobolev usando producto tensorial de wavelets unidimensionales

Raquel Crescimbeni y María Laura Santori
*Universidad Nacional del comahue.*

Sean $\{\psi_{jk}^{(i)}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi^{(i)}(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$ , $i = 1, 2, \ldots n$, bases ortonormales de $L^2(\mathbb{R})$ generadas por wavelets $\psi^{(i)}$ unidimensionales de tipo Littlewood-Paley. Definimos la siguiente base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\Phi_{\vec{j}\vec{k}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{j_i k_i}^{(i)}(x_i) = 2^{\frac{j_1+\cdots+j_n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \psi^{(i)}(2^{j_i}x_i - k_i) \ ,$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , $\vec{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ , $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ .

Siguiendo las ideas de Y. Meyer ([1]), se prueban los siguientes resultados

**Theorem 1** *Sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , $1 < p < \infty$ , *entonces las normas* $\|f\|_p$ *y* $\left\| \left( \sum_{\vec{j}\vec{k}} \left| \langle f, \Phi_{\vec{j}\vec{k}} \rangle \right|^2 \left| \Phi_{\vec{j}\vec{k}}(\mathbf{x}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$ *son equivalentes* .

**Theorem 2** *Sean* $1 < p < \infty$ , $s > 0$ . *Una función* $f$ *definida sobre* $\mathbb{R}^n$ *está en el espacio de Sobolev* $W^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ *sí y solo sí*

$$\left[ \sum_{\vec{j}\vec{k}} (1 + 4^{j_1} + 4^{j_2} + \cdots + 4^{j_n})^s \left| \langle f, \Phi_{\vec{j}\vec{k}} \rangle \right|^2 \left| \Phi_{\vec{j}\vec{k}}(\mathbf{x}) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

## References

[1] Meyer, Y. *Ondelets et Opérateurs I.* Herman éditeur des sciences et des arts, Paris, 1990.

# Riesz wavelets y convolución

Alfredo L. González y Ricardo A. Zalik
*Departmento de Matématica, Universidad Nacional de Mar del Plata.*
*Department of Mathematics, Auburn University, AL 36849-5310, USA.*

El objetivo de esta comunicación es mostrar un nuevo método para obtener wavelets de Riesz asociadas a un análisis de multiresolución (AMR Riesz wavelets) a partir de convolucionar las funciones de escala de dos AMR. La idea que motivó este trabajo es la de obtener AMR Riesz wavelets suaves y de soporte compacto, ya que es conocido que las wavelets que poseen esas cualidades carecen de otras propiedades deseadas. A partir de teoremas de representación de wavelets ortonormales [HW, Prop. 2.13 ] y de AMR Riesz wavelets [Z] se han obtenido los siguientes :

**Teorema 1.** *Sean $\varphi_1$ y $\varphi_2$ funciones de escala de sendos AMR (no necesariamente el mismo), con filtros pasa-bajo $p_1$ y $p_2$ respectivamente. Asumamos que $\varphi_1$ es de soporte acotado y que $\varphi_2 \in L(\mathbb{R})$. Entonces $\varphi := \varphi_1 * \varphi_2$ es una función de escala para un AMR, con filtro pasa-bajo $p_1p_2$:*

**Teorema 2.** *Sean $\psi_1, \psi_2$ AMR Riesz wavelets con funciones de escala ortonormales $\varphi_1$ y $\varphi_2$ y cotas de Riesz $0 < A_1 \leq B_1$ y $0 < A_2 \leq B_2$ respectivamente. Supongamos además que $\varphi_1$ es de soporte acotado y que $\varphi_2 \in L(\mathbb{R})$. Sean $\varphi_0 := \varphi_1 * \varphi_2$,*

$$\sigma(x) := \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi_0}(x + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}$$

*y*

$$\widehat{\psi}(x) := e^{-ix/2}\widehat{\psi_1}(x)\widehat{\psi_2}(x)\sigma(x/2 + \pi)/\sigma(x/2).$$

*Entonces*

a. *$\{\varphi_0(t - k); k \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión de Riesz.*

b. *Si $0 < A_3 \leq B_3$ son las cotas de Riesz de $\{\varphi_0(t-k); k \in \mathbb{Z}\}$, entonces $\widehat{\psi}$ es una MRA Riesz wavelet con función de escala ortonormal $\widehat{\varphi}(x) := \widehat{\varphi_1}(x)\widehat{\varphi_2}(x)/\sigma(x)$, y cotas de Riesz $A_1A_2A_3$ y $B_1B_2B_3$.*

Aplicando el Teorema 2 con $\psi_1(t) := \psi_2(t) := \psi_H(t)$, la wavelet ortonormal de Haar cuyas funciones de escala, $\varphi_1 = \varphi_2$, son la función característica del intervalo $[0, 1)$, deducimos que

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(x) &:= e^{-ix/2}\widehat{\psi_1}(x)\widehat{\psi_2}(x)\sigma(x/2 + \pi)/\sigma(x/2) \\ &= -\frac{16e^{-(3/2)xi}\left[1/3 + (2/3)\sin^2(x/4)\right]^{1/2}\sin^4(x/4)}{x^2\left[1/3 + (2/3)\cos^2(x/4)\right]^{1/2}}\end{aligned}$$

es una MRA Riesz wavelet con cotas $1/3$ y $1$. Notemos que como $\psi$ no es una función entera tampoco tiene soporte compacto. Como su función de escala fue obtenida por convolución de una función de escala consigo misma, suponemos que convolucionando dos funciones de escala *diferentes* podría obtenerse una MRA Riesz wavelet con las mismas propiedades que $\psi$ y además soporte compacto.

BIBLIOGRAFÍA

HW. E. Hernández and G. Weiss, "A First Course on Wavelets", CRC Press, Boca Raton,
FL, 1996.

Z. R. A. Zalik, On MRA Riesz wavelets, preprint (2002).

# Una ecuación del péndulo forzado n-dimensional

P. Amster, P. De Nápoli y M.C. Mariani
*Universidad de Buenos Aires.*
*FCEyN - Departamento de Matemática.*
*Ciudad Universitaria, Pabellón I.*
*(1428) Buenos Aires, Argentina.*

Estudiamos el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u + g(x,u) = p(x) & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \text{constante}, & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \end{cases}$$

en donde $g \in L^\infty\big((0,T)\times\mathbb{R}\big)$ es $T$-periódica en $u$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado de frontera $C^{1,1}$. El término de forzamiento $p$ es un elemento de $L^2(\Omega)$.

El caso $n = 1$ corresponde a la ecuación clásica del péndulo, que ha sido estudiada por diversos autores (ver [2], [3], [4]).

Por medio de métodos variacionales demostramos la existencia de una solución bajo una condición apropiada sobre el promedio de $p$.

Además, empleando métodos topológicos demostramos que para cada $p$ existe un intervalo compacto $I_p \subset \mathbb{R}$ tal que el problema tiene solución para $\tilde{p}(x) = p(x) + c$ si y sólo si $c \in I_p$. Este resultado es una extensión de los teoremas de Castro [1] y de Fournier-Mawhin [2] para el caso unidimensional.

REFERENCES

[1] A. Castro: Periodic solutions of the forced pendulum equation. Diff. Equations 1980, 149-60.

[2] Fournier G., Mawhin J.: On periodic solutions of forced pendulum-like equations. Journal of Differential Equations 60 (1985) 381-395.

[3] Mawhin J.: Periodic oscillations of forced pendulum-like equations, Lecture Notes in Math, 964, Springer, Berlin 1982, 458-476.

[4] Mawhin J.: Seventy-five years of global analysis around the forced pendulum equation, Proc. Equadiff 9, Brno 1997.

# Soluciones Periódicas para una Ecuación Resonante de Tercer Orden

P. Amster, P. De Nápoli y M.C. Mariani
*Universidad de Buenos Aires.*
*FCEyN - Departamento de Matemática.*
*Ciudad Universitaria, Pabellón I.*
*(1428) Buenos Aires, Argentina.*

Estudiamos la existencia de soluciones para un problema periódico de tercer orden

$$x''' + ax'' + \lambda x' + g(x') + cx = p(t) \tag{1}$$

en el caso resonante, es decir, cuando $\lambda = m^2$ ($m \in \mathbb{Z}$ ) y $a = m^2 c$. Este problema ha sido estudiado en el caso no resonante por F. Minhós [4].

En este trabajo, probamos la existencia de una solución periódica, bajo condiciones adecuadas sobre $p$ y $g$. Con más precisión, si consideramos los coeficientes de Fourier de $p$:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\cos(mt)\,dt$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\sin(mt)\,dt$$

y asumimos que $g \in C(\mathbb{R})$ es una función continua acotada tal que los límites

$$g(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty} g(t)$$

existen, la ecuación (1) tiene al menos una solución periódica si

$$a_m^2 + b_m^2 < \frac{4}{\pi^2}[g(+\infty) - g(-\infty)]^2.$$

Esta condición es del tipo de Landesman-Lazer. La prueba se basa en la teoría del grado de coincidencia de Mawhin [3].

Estos resultados pueden generalizarse a ecuaciones de mayor órden [2].

## References

[1] P.Amster, P. De Nápoli, M.C. Mariani. Periodic Solutions of a Resonant Third-Order Equation. Trabajo aceptado para su publicación en Nonlinear Analysis TMA.

[2] P.Amster, P. De Nápoli, M.C. Mariani. Periodic Solutions of a Resonant Higher Order Equation. Trabajo enviado para su publicación.

[3] J. Mawhin. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, NSF-CBMS Regional Conference in Mathematics no. 40, American Mathematical Society, Providence, RI, (1979).

[4] F. Minhós. Periodic solutions for a third order differential equation under conditions on the potential. Portugaliae Mathematica, Vol. 55 Fasc. 4, (1998).

# Clausura convexa de conjuntos autosemejantes, un ejemplo en $\mathbb{R}^3$

Mariano Ferrari
*Departamento de Matemática.*
*Universidad Nacional del Sur.*
*Av. Alem 1253, Bahía Blanca.*

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto autosemejante definido por similitudes sin reflección, esto es, $K = \cup_{i=1}^{q} \varphi_i(K)$, $\varphi_i(x) = r_i A_i(x) + a_i$, donde $r_i < 1$, $A_i$ es una transformación lineal ortogonal con determinante 1 y $a_i \in \mathbb{R}^2$. Notaremos con $C(K)$ a la clausura convexa de $K$. Un punto $p \in C(K)$ es un punto extremo si no existen $x, y \in C(K)$, $x, y \neq p$, tales que $p$ está contenido en el segmento $[x, y]$. Para tal punto notaremos con $\theta(p)$ al mínimo ángulo entre los vectores $x - p$, $y - p$, cuando $x$ e $y$ pertenecen a $C(K)$, y diremos que $p$ es localmente lineal si no existe una sucesión de puntos extremos distintos de $p$ que convergen a éste. El siguiente resultado fue probado por Pablo Panzone [2]:
Teorema. Si $p \in K$ es un punto extremo tal que $\theta(p) < \pi$, entonces $p$ es localmente lineal.

En esta nota se muestra, a través de un ejemplo, que este Teorema no es válido para conjuntos autosemejantes en $\mathbb{R}^3$.

## Referencias

[1] K. Falconer (1985), *The geometry of fractal sets*, Cambrige Univ. Press.

[2] Pablo Panzone (1993), *A note on the convex hull of self similar sets*, Actas del segundo Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro, Instituto de Matemática de Bahia Blanca.

# Operadores en álgebras de funciones analíticas

Daniel Carando

Estudiamos los operadores multiplicativos entre álgebras de funciones analíticas definidas en espacios de Banach. Para $U$ y $V$ abiertos contenidos en sendos espacios de Banach, consideramos ciertas álgebras de funciones analíticas $\mathcal{F}(U)$ y $\mathcal{F}(V)$. Nos preguntamos qué condiciones debe cumplir un operador continuo, lineal y multiplicativo $A : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ para que sea un operador de composición. Es decir, cuándo existe una aplicación holomorfa $g : V \to U$ tal que $Af = f \circ g$ para toda

$f \in \mathcal{F}(U)$. Para ello, estudiamos los espectros de las álgebras de funciones, así como los preduales de las mismas. Obtenemos resultados, por ejemplo, para las álgebras de funciones de tipo acotado $H_b(U)$ y las de funciones analíticas uniformemente débil-continuas en $U$-acotados $H_{wu}(U)$.

# On the n-dimensional Hankel transforms of arbitrary order

Sandra Mónica Molina and Susana Elena Trione
*Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.*
*Universidad Nacional de Mar del Plata.*
*Funes 3350, (7600) Mar del Plata.*
*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.*
*Instituto Argentino de Matemática.*
*Saavedra 15, 3⁰ Piso (1083) Buenos Aires.*

We study, on the spaces $\mathcal{H}_\mu$, the n-dimensional Hankel transformation ([6]) defined by:

$$(h_\mu \phi)(y) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \phi(x_1, ..., x_n) \prod_{i=1}^{n} \{\sqrt{x_i y_i} J_{\mu_i}(x_i y_i)\}\, dx_1 ... dx_n, \tag{2}$$

where $J_{\mu_i}$ is the Bessel function of first kind and order $\mu_i$ given by

$$J_{\mu_i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{z}{2})^{\mu_i + 2k}}{k!\Gamma(\mu_i + k + 1)}.$$

$\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$, ($\mu_i \geqslant -\frac{1}{2}$ for $i = 1, ..., n$). Zemanian define the Hankel transform of arbitrary order for one-dimension ([8]) by

$$h_{\mu,k}(\phi) = (-1)^k x^{-k} h_{\mu+k} N_{\mu+k-1} ... N_{\mu+1} N_\mu \phi,$$

and its inverse by

$$h^{-1}_{\mu,k}(\phi) = (-1)^k N^{-1}_\mu N^{-1}_{\mu+1} ... N^{-1}_{\mu+k-1} h_{\mu+k} x^k \phi.$$

Koh ([3]) give a proof for $h_{\mu,k} = h^{-1}_{\mu,k}$.
In this work, we extend the n-dimensional Hankel transform to arbitrary values of $\mu \in \mathbb{R}^n$. Moreover, we obtain that $h_{\mu,k} = h^{-1}_{\mu,k}$ for the n-dimensional case.

## References

[1] Yu. A. Brychkov, H. J. Glaeske, A.P. Prudnikov, Vu Kim Tuan: *Multidimensional Integral Transformations*, Gordon and Breach Science Publishers, (1992).

[2] E.L.Koh: *The n-dimensional distributional Hankel transformation.* Can. J. Math. , Vol. XXVII No 2, pp.423-433, (1975).

[3] E.L. Koh and C.K. Li: *On the Inverse of Hankel Transform. Integral Transforms and Special Functions*, Vol.2, No 4, pp.279-282, (1994).

[4] S. Molina:*A generalization of the spaces $\mathcal{H}_\mu$ and $\mathcal{H}'_\mu$ and the space of multipliers.* Preprint 2001.
[5] R.S. Pathak:*Integral Transforms of Generalized Functions and Their Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, (1997).
[6] S.E. Trione and S. Molina:*The n-dimensional Hankel transform and applications.* Preprint 2002.
[7] A. H. Zemanian:*A distributional Hankel transformation*, SIAM J. Appl. Math. 14, pp. 561-576, (1966).
[8] A.H. Zemanian:*Hankel transforms of arbitrary order*, Duke Math. J.,34 pp. 761-769, (1967).

# Funciones de onda Coulombianas como kernel para diferentes transformaciones integrales

G. Gasaneo
*Departamento de Física,*
*Universidad Nacional del Sur y CONICET.*
*Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca.*

En este reporte se investigan diferentes representaciones para una función arbitraria en términos funciones de Whittaker [1]. En particular se consideran las funciones de Whittaker que dan lugar a la solución de la ecuación de Schrödinger del problema de dos partículas cargadas.

Las formulas de transformaciones que resultan de lo que se conoce como representación de la energía son revisadas. Basado en una fórmula de transformación dada por Erdélyi [2], se introduce lo que se conoce en Física como la representación de los Sturmians de las cargas. Una transformación que involucra la integración respecto del primer parámetro de la funcin de Whittaker. Otro tipo de formulas de transformación que involucran la integración respecto del segundo parámetro de las funciones de Whittaker es también discutido. Estas resultan de ciertas transformaciones, dadas por Wimp [3], que involucran a las funciones de Meijer.

Puede verse que las distintas transformaciones discutidas están conectadas con el problema de dos partículas cargadas. Las diferentes formulas de transformación resultan de considerar diferentes autovalores de una misma ecuación diferencial.

## Referencias

[1] G. Gasaneo and F. D. Colavecchia, J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003) 1-20
[2] A. Erdélyi, Proc. Roy. Soc Edinburgh 61, 61 (1941)
[3] J. Wimp, Proc. Edinburgh Math. Soc. 13, 33 (1964)

# Estabilidad del estado estacionario para una ecuación tipo Schrödinger-Poisson

Mariano De Leo

La existencia de soluciones estacionarias en intervalos acotados para un problema no lineal tipo Schrödinger-Poisson, que modela el comportamiento de un semiconductor con un perfil de dopage dado, puede verse en Jüngel, *Quasi-Hydrodynamic Semiconductor Equations.* Lo que hemos encontrado es una condición sobre la solución estacionaria a efectos de garantizar su estabilidad. Para probar la estabilidad asintótica del origen en el problema linealizado mostramos que podemos dar una base de entornos que son positivamente invariantes. Tales entornos son obtenidos de la siguiente manera. Fijamos un punto cualquiera del plano y dejamos que el sistema evolucione el tiempo mínimo que necesita para dar una vuelta, donde esta cota inferior es uniforme en la región. Lo que mostramos es que, al cabo de una vuelta, la norma es estrictamente menor. Para lograr esto mostramos que el plano puede dividirse en cuatro regiones -pequeñas perturbaciones de los cuadrantes- tales que: en cada región la norma es monótona, la monotonía alterna con el cambio de región y el crecimiento en cada región no compensa el decrecimiento de la región anterior.

# Una clase de números trascendentes

Miguel Martín

Todo $a \in [0,1)$ tiene una representación binaria, única si se prohíbe la aparición de cadenas infinitas de unos:

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_i}}$$

donde $\langle a_i | i \in (\mathbb{N} - \{0\}) \rangle$ es una sucesión estrictamente creciente que no contiene ningún segmento final de $\mathbb{N}$.
Definimos, para cada $a \in [0,1)$, $v_a : (\mathbb{N} - \{0\}) \to \mathbb{N}$ por

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{v_a(i)} \frac{1}{2^{a_j^i}}$$

Partiendo la mantisa de la representación binaria en bloques consecutivos de los cuales el $k$-ésimo contiene $2^{k-1}$ dígitos, $v_a(k)$ es el número de unos en el $k$-ésimo bloque de $a$.

Llamamos **lentos** a los números cuya función $v$ está acotada por un polinomio. Probamos el siguiente

*Teorema* 1. Todo número lento no nulo es trascendente.

No todo trascendente es lento; pero

*Teorema* 2. El conjunto de los números lentos es no numerable.

# Mathematical analysis to elucidate Fermat's Principle circumstances

B. I. Niel
*Departamento de Matemática.*
*Universidad Nacional del Sur.*
*Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca*

We peered at ray optic final cause cases known as: Hero's problem, spherical mirror reflection instances and Snell's law by principles of mathematical analysis. This study provides clear evidence that rays obeying the reflection's law occasionally maximize or minimize their traveled time and that there are even valid ray paths which neither maximize nor minimize their traveled time. We find out the trajectories that attain the optimum or stationary times traveled by the light rays. By the way, we confirm that euclidean hamiltonian piecemeal line journey star-polygons shaped confirm Fermat's Principle circumstances.

## References

L. A. Santaló. "LA GEOMETRIA en la formación de profesores ". Red Olímpica 1993.

D. S. Lemons. "PERFECT FORM. Variational principles, methods, and Applications in Elementary Physics". Princenton University Press 1997.

F. A. Sherk, P. McMullen, A. C. Thompson & A. I. Weiss. "Kaleidoscopes ". Canadian Mathematical Society Series of Monographs and advanced texts. A Wiley-Interscience Publication 1995.

B. I. Niel. "The Geometry of the Euclidean Hamiltonian Trajectories on $\sqrt[n]{1}$ ". *Proceeding VI of Congreso Dr. Antonio A. R. Monteiro. (pg. 33 - 49), 06/2001.*

B. I. Niel. "Hamiltonian Path Paradigms Mirrored at the Fermat's Principle ". *Proceedings of The Fourth International Conference on modelling and simulation, 11 - 13 November, 2002. Victoria University of Technology. Melbourne, Australia. Modelling and Simulation: Keys to Technological Advances pg. 132 - 137.*