ACTAS DEL VII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO
(2003) , Páginas 101–114

CONVERGENCIA PUNTUAL DEL SEMIGRUPO DE ORNSTEIN-UHLENBECK

L. FORZANI, R. MACÍAS Y R. SCOTTO

RESUMEN. El estudio de operadores del análisis armónico gaussiano ha tenido un gran desarrollo en los últimos veinte años. En este contexto es de interés estudiar la convergencia puntual del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck. En la presente monografía se introducen las herramientas necesarias y se muestra esa convergencia en dimensión uno.

El 1 de septiembre de 1930, Ornstein y Uhlenbeck publican en la revista Physical Review *On the Theory of Brownian Motion*(ver [9]). Allí hacen un análisis de cómo se fue gestando la fórmula que permite el cálculo de la media cuadrática del desplazamiento de una partícula en un movimiento Browniano en dimensión uno. Para lo cual, como bien ellos hacen notar, hay que centrarse en la determinación de la distribución de frecuencias de cantidades como el desplazamiento o la velocidad. El primero que resolvió este problema fue Einstein para el caso de una partícula libre y encontró que la función de distribución de frecuencias para el desplazamiento está dada por la siguiente función

$$F(x, x_0, t) = \left(\frac{1}{4\pi Dt}\right)^{1/2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}},$$

que resulta ser la solución fundamental de la ecuación de difusión

$$\frac{\partial z}{\partial t} = D\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \quad \text{con} \quad s = x - x_0 . \tag{0.1}$$

Esta conexión entre la función de distribución de frecuencias y una ecuación diferencial de tipo parabólico fue posteriormente generalizada por Smoluchowski, Fokker, Planck, Ornstein, Burger, Fürth y otros.
Cuando la partícula está sujeta a fuerzas exteriores es válida la siguiente generalización de (0.1) llamada la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{-1}{f}\frac{\partial}{\partial x}(Kz) + D\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{0.2}$$

donde f es el coeficiente de fricción y D el de difusión. Esta ecuación fue obtenida por Smoluchowski para valores de t grandes con respecto a m/f.

Mathematics Subject Classification. 42B25, 47D03, 42C10, Secondary 60H99, 42A99.
Key words and phrases. Gaussian Measure, Fourier Analysis, Fourier Analysis in several variables, Maximal Functions, Littlewood-Paley functions, Hermite expansions.

Ornstein-Uhlenbeck obtienen en su trabajo esta misma ecuación para los restantes t. Además encuentran las distribuciones de frecuencias del desplazamiento y la velocidad de una partícula libre en un movimiento Browniano.

La ecuación de Ornstein-Uhlenbeck entonces se obtiene de (0.2) tomando primeramente $K(x) = m\omega^2 x$ y luego haciendo los cambios de coordenadas $y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2Df}}x$, $\tau = \frac{m\omega^2}{2f}t$ y $w = e^{2t}z$. De esta manera (0.2) se escribe como

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{0.3}$$

cuya solución fundamental es

$$G(\tau, y, z) = \frac{e^{-\frac{|e^{-2\tau}y-z|^2}{1-e^{-4\tau}}}}{(\pi(1-e^{-4\tau}))^{1/2}} . \tag{0.4}$$

Así el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck:

$$u(y,t) = T^t f(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{|e^{-2t}y-z|^2}{1-e^{-4t}}}}{(\pi(1-e^{-4t}))^{1/2}} f(z)dz , \tag{0.5}$$

resulta ser solución del problema de difusión

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y,t) - 2y\frac{\partial u}{\partial y}(y,t) & y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(y,0) = f(y) & y \in \mathbb{R}, \quad t = 0. \end{cases} \tag{0.6}$$

Desde el punto de vista de la teoría de operadores diferenciales, la medida que hace que el operador diferencial

$$L = \frac{d^2}{dy^2} - 2y\frac{d}{dy},$$

considerado en (0.6), sea autoadjunto en $S(\mathbb{R})$, el espacio de Schwartz, es la medida de Gauss: $d\gamma = e^{-|y|^2}dy$. Se puede probar que $T^t = e^{Lt}$, es decir, L es el generador infinitesimal de la familia $\{T^t\}_{t>0}$.

Los autovalores de dicho operador L son los polinomios de Hermite.

El polinomio de Hermite de grado k en dimensión uno se puede definir como (ver [8])

$$H_k(y) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{2yt-t^2}|_{t=0}.$$

Es fácil ver que H_k es un autovector de L con autovalor -2k, efectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}H_k(y) &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} 2te^{2yt-t^2}|_{t=0}, \\ \frac{d^2}{dy^2}H_k(y) &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} 4t^2 e^{2yt-t^2}|_{t=0}, \end{aligned}$$

esto implica para el operador L,

$$\begin{aligned} LH_k(y) &= \frac{\partial^k}{\partial t^k}(4t^2-4ty)e^{2yt-t^2}|_{t=0} \\ &= -2\frac{\partial^k}{\partial t^k}(t\frac{\partial}{\partial t}e^{2yt-t^2})|_{t=0} \\ &= -2k(\frac{\partial}{\partial t}t)|_{t=0}(\frac{\partial^k}{\partial t^k}e^{2yt-t^2})|_{t=0} \\ &= -2kH_k, \end{aligned}$$

como se quería verificar.

Retornando a (0.6), para dar sentido a la expresión $u(y,0)$, esto es *u restringida al borde del semiplano superior*, es que en esta monografía estudiaremos la existencia en casi todo punto del $\lim_{t\to 0^+} u(y,t)$.

De acuerdo a [2], para la existencia de ese límite para funciones en $L^p(d\gamma)$, $1 \leq p < \infty$, es suficiente probar el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal asociado:

$$T^*f(y) = \sup_{t>0} |T^t f(y)| \tag{0.7}$$

Entendemos por tipo débil $(1,1)$ de T^* a la siguiente propiedad: Existe una constante $C>0$ tal que

$$\gamma\{x \in \mathbb{R} : T^*f(y) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f|d\gamma, \qquad \forall\, f \in\ L^1(d\gamma)\ . \tag{0.8}$$

En la Sección 1 se mostrará que teniendo la desigualdad (0.8) y la existencia de $\lim_{t\to 0^+} T^t f$ para funciones en un denso de $L^p(d\gamma)$ (como por ejemplo los polinomios en $\mathbb{R}$), se obtiene la existencia de límite puntual para toda función de $L^p(d\gamma)$.

Se puede definir este operador también en $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$ y se sabe que resulta de tipo débil $(1,1)$ para todo $n \geq 1$ (ver [3], [6], [1] y [5]).

En esta monografía demostraremos el tipo débil $(1,1)$ del mismo sólo para el caso $n=1$. Las técnicas que se usan podrían servir para cualquier otro semigrupo cuyo generador infinitesimal sea un operador diferencial autoadjunto con respecto a una medida absolutamente continua.

La demostración para este caso se debe a B. Muckenhoupt [3]. El método de demostración es el siguiente:

- El primer paso del razonamiento es acotar el núcleo del semigrupo por un núcleo de Natanson, como puede verse en la Sección 3. Los núcleos de Natanson serán definidos en la Sección 2.
- Natanson en [4] prueba que los operadores integrales con núcleos de Natanson están acotados por la maximal de Hardy-Littlewood asociada a una medida. En la Sección 2 se desarrollarán estas ideas.
- Por último en la Sección 4 se mostrará que esta maximal es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a la medida en consideración (ver [1] y [2]).

Este tipo de técnicas no pueden extrapolarse a $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, puesto que por ejemplo no se conoce un concepto de núcleo de Natanson en $\mathbb{R}^n$ y por otro lado la maximal de Hardy-Littlewood no centrada con respecto a la medida de Gauss no es de tipo débil $(1,1)$ en $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ (ver [7]).

1. Convergencia Puntual

Teorema 1.1. *Sea (X,μ) un espacio de medida finita y sea $\{T^t\}$ una familia de operadores lineales en $L^1(X,\mu)$. Definamos*

$$T^* f(x) = \sup_t |T^t f(x)|.$$

Si T^* es un operador de tipo débil $(1,1)$, entonces el conjunto

$$\mathcal{F} = \{f \in L^p(X,\mu) / \lim_{t\to t_0} T^t f(y) = f(y) \ c.t.p.\}$$

es cerrado en $L^p(X,\mu)$ con $1 \le p \le \infty$.

Prueba:
Sea $\{f_j\}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ que converge a f en $L^p(X,\mu)$, i.e.

$$\limsup_{t\to t_0} |T^t f_j(y) - f_j(y)| = 0 \ \text{ c.t.p.}$$

y

$$||f_j - f||_p \to 0 \ \text{ para } \ j \to \infty.$$

Entonces, dado $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mu(\{y \in X : \limsup_{t\to t_0} |T^t f(y) - f(y)| > \lambda\}) \\
\le\ & \mu(\{y \in X : \limsup_{t\to t_0} |T^t (f - f_j)(y) - (f - f_j)(y)| > \lambda\}) \\
\le\ & \mu(\{y \in X : T^*(f - f_j)(y) > \lambda/2\}) + \mu(\{y \in X : |(f - f_j)(y)| > \lambda/2\}) \\
\le\ & \frac{2C}{\lambda}||f_j - f||_1 + \frac{2}{\lambda}||f_j - f||_1 \\
\le\ & \frac{\tilde{C}}{\lambda}||f_j - f||_p \to 0 \text{ para } j \to \infty.
\end{aligned}$$

Es decir, $\mu(\{x \in X : \limsup_{t\to t_0} |T^t f(y) - f(y)| > \lambda\}) = 0 \ \ \forall\, \lambda > 0$, lo que implica que $\limsup_{t\to t_0} |T^t f(y) - f(y)| = 0$ c.t.p. y de esto $f \in \mathcal{F}$ □

Observación: El Teorema 1.1 es válido también para un espacio de medida arbitrario (X,μ) con la condición de que T^* sea de tipo débil $(p,1)$, ie

$$\mu(\{x \in X : T^* f(x) > \lambda\}) \le \frac{C}{\lambda}\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Demostración de la convergencia puntual.- Para ver que, supuesto el tipo débil (1,1) en la medida gaussiana para el operador T^* se tiene $\lim_{t\to 0} T^t f = f$ puntualmente $\forall\ f \in L^p(d\gamma)$ con $1 \le p < \infty$, probaremos que el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de los polinomios en $\mathbb{R}$ está contenido en $\mathcal{F}$ el conjunto definido en el Teorema 1.1 con

$X = \mathbb{R}$, μ la medida de Gauss y $t_0 = 0$. Para $k = 0, 1, 2, \cdots$, sea H_k el polinomio de Hermite de grado k. Puesto que, como se vio, los polinomios de Hermite son autofunciones del operador de Ornstein-Uhlenbeck L con autovalores $\{-2k\}_{k=0}^{\infty}$, podemos deducir que $T^t H_k = e^{-2kt} H_k$. Ahora bien, todo polinomio $P(y)$ se puede escribir como una combinación lineal finita de polinomios de Hermite, esto es,

$$P(y) = \sum_{k=0}^{m} a_k H_k(y),$$

por lo tanto

$$T^t P(y) = \sum_{k=0}^{m} a_k e^{-2kt} H_k(y) \to P(y) \quad para \quad t \to 0.$$

Es decir, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$. Puesto que el conjunto de los polinomios es denso en $L^p(d\gamma)$ para $1 \leq p < \infty$, usando el Teorema 1.1, $\mathcal{F}$ resulta denso y cerrado en $L^p(d\gamma)$ y por lo tanto $\mathcal{F} = L^p(d\gamma)$, con lo que se prueba la convergencia puntual.

2. Núcleos de Natanson

DEFINICIÓN: *Diremos que una función no negativa, $L(y,z)$, es un* **núcleo de Natanson** *asociado a una medida μ, si existe una constante B tal que*

$$\int L(y,z) d\mu(z) \leq B,$$

y además, para cada y fijo, $L(y,z)$ es monótona creciente en z cuando $y \geq z$, y monótona decreciente para $z \geq y$.

En lo siguiente μ denotará una medida de Borel positiva, definida en $\mathbb{R}$, absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue y finita sobre intervalos acotados.

DEFINICIÓN: *La función maximal de Hardy-Littlewood no centrada asociada a la medida μ se define como*

$$\mathcal{M}f(y) = \sup_{y \in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f| d\mu,$$

donde el supremo se toma sobre todos los intervalos I tales que $y \in I$.

TEOREMA **2.1.** *Sean f y g funciones en $L^1(d\mu)$. Supongamos que $g(z)$ es no negativa y que existe un punto fijo y en $\mathbb{R}$, tal que $g(z)$ es monótona creciente cuando $y \geq z$ y monótona decreciente para $z \geq y$, entonces*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f g d\mu \right| \leq ||g||_{L^1(d\mu)} \mathcal{M}f(y).$$

PRUEBA

1. Supondremos primero que g es una función simple. Entonces podemos encontrar $\{y_i\}_{i=1}^{N+1}$ tales que, salvo un número finito de puntos, se tiene

$$g(x)=\sum_{i=1}^{N} c_i \mathcal{X}_{[y_i,y_{i+1})}(x).$$

Claramente, podemos suponer que, para algún k, $y_{k+1}=y$. Luego

$$c_{i-1}\le c_i\le c_k,\quad \text{si } i\le k,$$

$$c_k\ge c_i\ge c_{i+1},\quad \text{si } i\ge k+1.$$

Afirmamos que existen $a_i\le 0$ y $b_i\le 0$ tales que

$$g(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}_{[y_i,y]}(x)+\sum_{i=k+1}^{N} b_i\mathcal{X}_{[y,y_{i+1}]}(x).$$

En efecto, tomando $c_0=0$ y $c_{N+1}=0$, se tiene

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=1}^{k} c_i\mathcal{X}_{[y_i,y_{i+1})}(x)+\sum_{i=k+1}^{N} c_i\mathcal{X}_{[y_i,y_{i+1})}(x)\\ &= \sum_{i=1}^{k}(c_i-c_{i-1})\mathcal{X}_{[y_i,y]}(x)+\sum_{i=k+1}^{N}(c_i-c_{i+1})\mathcal{X}_{[y,y_{i+1}]}(x)\\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}_{[y_i,y]}(x)+\sum_{i=k+1}^{N} b_i\mathcal{X}_{[y,y_{i+1}]}(x), \end{aligned}$$

con $a_i, b_i\ge 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \left|\int fg\,d\mu\right| &\le \sum_{i=1}^{k} a_i\int_{y_i}^{y}|f(x)|\,d\mu(x)+\sum_{i=k+1}^{N} b_i\int_{y}^{y_{i+1}}|f(x)|\,d\mu(x)\\ &\le \sum_{i=1}^{k} a_i\mu([y_i,y])\frac{1}{\mu([y_i,y])}\int_{y_i}^{y}|f(x)|\,d\mu(x)\\ &\quad+\sum_{i=k+1}^{N} b_i\mu([y,y_{i+1}])\frac{1}{\mu([y,y_{i+1}])}\int_{y}^{y_{i+1}}|f(x)|\,d\mu(x)\\ &\le \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\mu([y_i,y])+\sum_{i=k+1}^{N} b_i\mu([y,y_{i+1}])\right)\mathcal{M}f(y)\\ &= ||g||_{L^1(d\mu)}\mathcal{M}f(y). \end{aligned}$$

2. Para el caso general, elegimos una sucesión monótona de funciones simples no negativas, $\{g_n(z)\}$, que son monótonas crecientes para $z\le y$, monótonas decrecientes para $y\le z$ y que convergen a g puntualmente. Usando el resultado que

probamos en (1.) y aplicando el teorema de la convergencia monótona dos veces obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\int fg\,d\mu\right| &\leq \int |fg|\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int |f|g_n d\mu \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}f(y)\|g_n\|_1 \\ &= \mathcal{M}f(y)\lim_{n\to\infty}\|g_n\|_1 \\ &= \mathcal{M}f(y)\|g\|_1 \square \qquad (2.2)\end{aligned}$$

COROLARIO **2.3.** *Sea $L(y,z)$ una función no negativa tal que, para casi todo y, es monótona creciente en z para $z \leq y$, monótona decreciente en z para $y \leq z$ y cumple $\int L(y,z)\,d\mu(z) \leq B$, donde B es independiente de y. Sea $f \in L^1(d\mu)$ y*

$$g(y) = \int L(y,z)f(z)\,d\mu(z).$$

Entonces

$$|g(y)| \leq B\mathcal{M}f(y).$$

PRUEBA: Usando el Teorema 2.1 obtenemos

$$|g(y)| \leq \|L(y,\cdot)\|_{L^1(d\mu)}\mathcal{M}f(y) \leq B\mathcal{M}f(y)$$

□

En general, los núcleos considerados no satisfacen las propiedades de monotonía deseadas. La siguiente modificación es usualmente más útil.

COROLARIO **2.4.** *Sean μ, L, B y f satisfaciendo las hipótesis del Corolario 2.3 y sea $|K(y,z)| \leq L(y,z)$. Entonces la conclusión del Corolario 2.3 es válida para la función $h(y) = \int K(y,z)f(z)\,d\mu(z)$.*

PRUEBA: Se sigue del hecho de que $\mathcal{M}|f|(y) = \mathcal{M}f(y)$ y de que

$$\begin{aligned}|h(y)| &\leq \int |K(y,z)||f(z)|\,d\mu(z) \\ &\leq \int L(y,z)|f(z)|\,d\mu(z)\square\end{aligned}$$

3. ACOTACIÓN DEL NÚCLEO DE ORNSTEIN-UHLENBECK

Consideremos el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck:

$$T^t f(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{|e^{-2t}y-z|^2}{1-e^{-4t}}}}{(\pi(1-e^{-4t}))^{1/2}} f(z)dz\ , \qquad (3.1)$$

Si introducimos el cambio de variable $r = e^{-2t}$, llamando con $O^r f$ la expresión del semigrupo resultante con esta nueva notación y con $O(r,y,z)$ al núcleo correspondiente, se tiene,

$$\begin{aligned} O(r,y,z) &= \frac{e^{-\frac{|ry-z|^2}{1-r^2}}}{(\pi(1-r^2))^{1/2}} \\ &= e^{|y|^2}\frac{e^{-\frac{|y-rz|^2}{1-r^2}}}{(\pi(1-r^2))^{1/2}}e^{-|z|^2} = P(r,y,z)e^{-|z|^2}, \end{aligned}$$

entonces podemos escribir el semigrupo como

$$T^t f(y) = O^r f(y) = \int_{\mathbb{R}} O(r,y,z)f(z)dz = \int_{\mathbb{R}} P(r,y,z)f(z)d\gamma. \tag{3.2}$$

Probaremos ahora el tipo débil con respecto a la medida de Gauss ($d\gamma = e^{-x^2}dx$) del operador T^* definido en (0.7).

TEOREMA **3.3.** *Sea T^* el operador definido en (0.7), entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\gamma\{x \in R : T^* f(x) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda}\int_R |f(x)|d\gamma(x)\ , \quad \lambda > 0,$$

$$\|T^* f\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(d\mu)}, \quad 1 < p \leq \infty.$$

PRUEBA: Definimos

$$L(r,y,z) = \begin{cases} P(r,y,\frac{y}{r}) & \text{si } z \in [y,\frac{y}{r}], \\ P(r,y,z) & \text{si } z \notin [y,\frac{y}{r}], \end{cases} \tag{3.4}$$

para y no negativo. Puesto que

$$P(r,y,\frac{y}{r}) = \max_{z\in[y,\frac{y}{r}]} P(r,y,z)$$

entonces

$$P(r,y,z) \leq L(r,y,z).$$

En el caso en que y es negativo, en la definición de L se cambia por $[\frac{y}{r}, y]$ y se obtiene la misma desigualdad.
Si probamos que L satisface las condiciones del Corolario 2.3 entonces el Teorema es consecuencia del Corolario 2.4, puesto que entonces:

$$|T^* f(y)| \leq B\mathcal{M}f(y)$$

con esta acotación y el Teorema 4.1 obtenemos

$$\gamma\{|T^* f(y)| > \lambda\} \leq \gamma\{B\mathcal{M}f(y) > \lambda\} \leq \frac{CB}{\lambda}\int |f(y)|\, d\gamma(y).$$

El caso $p = \infty$ es inmediato y la constante que se obtiene es B. Ahora, para $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}\|T^* f\|^p_{L^p(d\gamma)} &= \int |T^* f|^p \, d\gamma \\ &\leq B^p \int |\mathcal{M} f(y)|^p \, d\gamma(y) \\ &\leq C^p B^p \int |f|^p \, d\gamma.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T^* f\|_{L^p(d\gamma)} \leq CB\|f\|_{L^p(d\gamma)}$ para $1 < p \leq \infty$. Esto concluye la demostración del Teorema, salvo la prueba de que L satisface las condiciones del Corolario 2.3. Esto se sigue del siguiente Lema:

LEMA **3.5.** *Para cada* $0 \leq r < 1$, $L(r, y, z)$ *es monótona creciente en* z *para* $z \leq y$, *monótona decreciente cuando* $y \leq z$ *y*

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(r, y, z) e^{-z^2} dz \leq B.$$

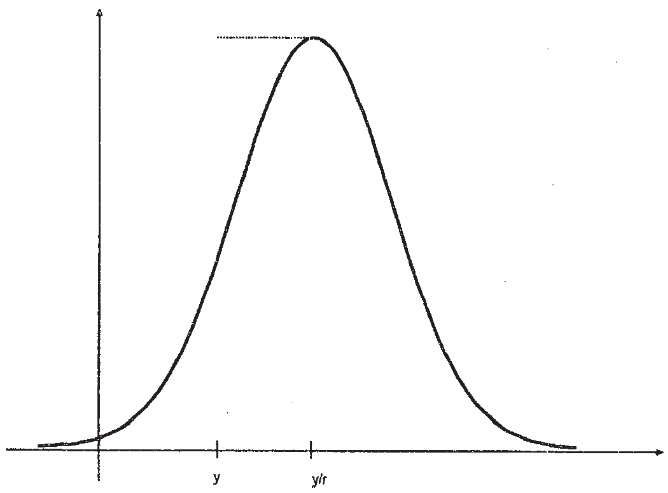
PRUEBA: El núcleo $P(r, y, z)$ como función de z alcanza su máximo en $z = \frac{y}{r}$ ya que

$$P(r, y, z) = e^{y^2} \frac{e^{-\frac{|y - rz|^2}{1 - r^2}}}{(\pi(1 - r^2))^{1/2}} \tag{3.6}$$

y e^{-t^2} alcanza su máximo en $t = 0$.
Nuevamente, dado que e^{-t^2} es creciente para $t < 0$ y decreciente para $t > 0$, $L(r, y, z)$ es creciente para $z \leq y$ y decreciente para $z \geq y$.

Probaremos ahora que

$$\int L(r, y, z) e^{-z^2} dz \leq B. \tag{3.7}$$



Reagrupando y haciendo un cambio de variables

$$\begin{aligned}
\int P(r,y,z)e^{-z^2}\,dz &= e^{y^2}\int \frac{e^{-\frac{|y-rz|^2}{1-r^2}}}{(\pi(1-r^2))^{1/2}}e^{-z^2}\,dz \\
&= \int \frac{e^{-\frac{|ry-z|^2}{1-r^2}}}{\pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2}}\,dz \\
&= \int \frac{e^{-z^2}}{\pi^{1/2}}\,dz \\
&= 1,
\end{aligned}$$

de aquí que sólo tengamos que probar que

$$\int_y^{y/r} P(r,y,\frac{y}{r})e^{-z^2}\,dz \le B, \tag{3.8}$$

donde B es una constante que no depende ni de r ni de y.
Pero $P(r,y,\frac{y}{r}) = \frac{e^{y^2}}{(\pi(1-r^2))^{1/2}}$, entonces (3.8) es equivalente a probar

$$\frac{e^{y^2}}{(\pi(1-r^2))^{1/2}}\int_y^{y/r} e^{-z^2}\,dz \le B.$$

Haciendo el cambio de variables $z^2-y^2=t^2$

$$\begin{aligned}
e^{y^2}\int_y^{y/r} e^{-z^2}\,dz &= \int_y^{y/r} e^{-z^2+y^2}\,dz \\
&= \int_0^{y\sqrt{\frac{1-r^2}{r^2}}} e^{-t^2}\frac{t}{\sqrt{t^2+y^2}}\,dt \\
&\le \int_0^{y\sqrt{\frac{1-r^2}{r^2}}} e^{-t^2}\left(1\wedge\frac{t}{y}\right)\,dt,
\end{aligned}$$

donde $a\wedge b=\min\{a,b\}$.
Si $1/2<r<1$ usamos esta última acotación y obtenemos

$$\begin{aligned}
e^{y^2}\int_y^{y/r} e^{-z^2}\,dz &\le \frac{1}{y}\int_0^{y\sqrt{\frac{1-r^2}{r^2}}} e^{-t^2}t\,dt \\
&\le C\frac{1}{y}y\sqrt{\frac{1-r^2}{r^2}} \\
&\le B\sqrt{1-r^2},
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\int_0^a e^{-t^2}t\,dt \le Ca$.

Si $0 \leq r \leq 1/2$ entonces

$$\begin{aligned} e^{y^2} \int_y^{y/r} e^{-z^2}\, dz &\leq \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &\leq B\sqrt{1-r^2}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt < \infty$ □

4. Tipo débil (1,1) de la función Maximal de Hardy-Littlewood no centrada

En esta Sección se presenta una demostración en dimensión uno del tipo débil $(1,1)$ de la maximal de Hardy-Littlewood para una medida μ absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, finita sobre intervalos, que incluye el uso de un Lema de cubrimiento para familias finitas de intervalos. Esta forma de encarar el problema se encuentra en [1]. Puesto que es una consecuencia inmediata, se demuestra asimismo el tipo fuerte (p,p).

Teorema **4.1.** *Sea f en $L^1(\mathbb{R}, d\mu)$ y sea $\lambda > 0$, entonces*

$$\mu\{x : \mathcal{M}f(x) > \lambda\} \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, d\mu(x). \tag{4.2}$$

Además, para $1 < p \leq \infty$, existe $C > 0$ tal que $\forall\ f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu)$

$$||\mathcal{M}f||_{L^p(d\mu)} \leq C||f||_{L^p(d\mu)}.$$

Prueba: Observemos que el caso $p = \infty$ es inmediato con constante $C = 1$. Una vez probado el tipo débil $(1,1)$, el caso $1 < p < \infty$ se obtiene vía el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz. Por lo tanto de ahora en más nos dedicaremos a probar el tipo débil $(1,1)$.
Dado ε, $0 < \varepsilon \leq 1$, definimos

$$\mathcal{M}^{\varepsilon} f(x) = \sup_{\varepsilon \leq |I| \leq \varepsilon^{-1}} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(y)|\, d\mu(y).$$

Es suficiente considerar a f con soporte compacto puesto que el caso general se obtiene mediante un argumento de densidad. Si f tiene soporte compacto, entonces para cada $\lambda > 0$, el conjunto

$$E_{\lambda} = \{x : \mathcal{M}^{\varepsilon} f(x) > \lambda\}$$

es acotado. En efecto, suponiendo que $\operatorname{sop} f \subset [-N, N]$, si $|x| \geq 3M = 3\max\{N, \varepsilon^{-1}\}$ entonces $\forall\ I$ intervalo tal que $x \in I$ y $|I| \leq \varepsilon^{-1}$ se verifica que, dado $y \in I$ se tiene $|y| \geq |x| - |x-y| \geq |x| - \varepsilon^{-1} \geq 2M$. Por lo tanto para casi todo $y \in I$, $f(y) = 0$; de aquí que

$$\mathcal{M}^{\varepsilon} f(x) = 0, \quad \forall\ x :\ |x| \geq 3M.$$

Para cada $x \in E_{\lambda}$ existe un intervalo I_x tal que $x \in I_x$, $\varepsilon \leq |I_x| \leq \varepsilon^{-1}$ y

$$\frac{1}{\mu(I_x)} \int_{I_x} |f(y)|\, d\mu(y) > \lambda.$$

Teniendo en cuenta la absoluta continuidad de μ y el hecho de que los intervalos tienen medida positiva, es que existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(I_x^\delta) \leq 2\mu(I_x), \quad \forall\, x \in E_\lambda, \tag{4.3}$$

donde I_x^δ es el intervalo concéntrico con I_x y radio $\frac{|I_x|}{2} + \delta$. En efecto, puesto que μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, existe una función localmente integrable, h, tal que

$$\mu(E) = \int_E |h(x)|dx, \tag{4.4}$$

para todo E medible en $\mathbb{R}$. Denotemos por $I(z,r)$ el intervalo con centro z y radio r. Sea F el conjunto compacto

$$F = \{(z,r) : |z| \leq 4M, \varepsilon \leq 2r \leq \varepsilon^{-1}\}.$$

Es fácil verificar que si $x \in E_\lambda$, entonces $(c(I_x), \frac{|I_x|}{2}) \in F$. Luego la función continua de dos variables $g(z,r) = \mu(I(z,r))$, alcanza su mínimo en F y se tiene

$$\inf_{x\in E_\lambda} \mu(I_x) \geq \inf_{(z,r)\in F} \mu(I(z,r)) = \mu(I(z_o,r_o)) = C > 0. \tag{4.5}$$

Por la absoluta continuidad de la integral existe un $\delta > 0$ tal que

$$\mu(I_x^\delta - I_x) \;=\; \int_{I_x^\delta - I_x} |h(y)|dy \leq C. \tag{4.6}$$

De (4.5) y (4.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \mu(I_x^\delta) &= \mu(I_x) + \mu(I_x^\delta - I_x) \\ &\leq \mu(I_x) + C \\ &= \mu(I_x) + \inf_{x\in E_\lambda} \mu(I_x) \\ &\leq 2\mu(I_x). \end{aligned}$$

Lo que prueba (4.3). Sea $R = \{x_1, \cdots, x_L\} \subset E_\lambda$ un conjunto maximal de puntos con la siguiente propiedad: $|x_l - x_k| > \frac{\delta}{2}$ para todo $l \neq k$. Consideremos la familia finita de intervalos $\{I_{x_j}\}_{j=1}^L$ y supongamos cierto por un momento el siguiente

LEMA **4.7.** *De cualquier familia finita de intervalos $\{I_1, \cdots, I_n\}$ en la recta real, siempre es posible seleccionar una subfamilia finita de intervalos $\{I_1, \cdots, I_k\}$ tales que $\bigcup_{i=1}^n I_i \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$ y $\sum_{i=1}^k \mathcal{X}_{I_i} \leq 2$.*

Utilizando este Lema tenemos que existe una subfamilia de $\{I_{x_j}\}_{j=1}^L$, llamémosla $\{I_1, \cdots, I_k\}$ tal que $R \subset \cup_{j=1}^k I_j$ y $\sum_{j=1}^k \mathcal{X}_{I_j} \leq 2$. Observemos ahora que $E_\lambda \subset \cup_{j=1}^k I_j^\delta$. En efecto, si $x \in E_\lambda$ entonces existe $x_l \in R$ tal que $|x_l - x| = dist(x,R) \leq \frac{\delta}{2}$, además $x_l \in I_j$ para algún $j = 1, \cdots, k$; si llamamos con $c(I_j)$ al centro de I_j, entonces

$$|x - c(I_j)| \leq |x - x_l| + |x_l - c(I_j)| < \delta + \frac{|I_j|}{2},$$

es decir $x \in I_j^\delta$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mu\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{M}^\varepsilon f(x) > \lambda\} &= \mu(E_\lambda) \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \mu(I_j^\delta) \\
&\leq 2\sum_{j=1}^{k} \mu(I_j) \\
&\leq 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda} \int_{I_j} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&= \frac{2}{\lambda} \int \sum_{j=1}^{k} \mathcal{X}_{I_j}(y)|f(y)|\, d\mu(y) \\
&\leq \frac{4}{\lambda} \int |f(y)|\, d\mu(y).
\end{aligned}$$

La desigualdad (4.2) se obtiene de esta última pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$ □

PRUEBA: [del Lema 4.7] Primero observemos que, eliminando algunos intervalos si fuera necesario, podemos suponer que la familia no contiene intervalos que están contenidos en la unión de otros. Si este es el caso, entonces los intervalos pueden escribirse así

$$J_k = [\alpha_k, \beta_k], \quad \alpha_k \leq \alpha_{k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

Luego se cumple que:

a) $\alpha_k < \alpha_{k+1}$;

b) $\beta_{2k-1} < \alpha_{2k+1}$;

c) $\beta_{2k} < \alpha_{2k+2}$.

En efecto, si para algún k, $\alpha_k = \alpha_{k+1}$, uno de los dos intervalos J_k, J_{k+1} contiene al otro. Similarmente, si $\beta_{2k-1} \geq \alpha_{2k+1}$, entonces uno de los intervalos

$$J_{2k-1}, J_{2k}, J_{2k+1}$$

está contenido en la unión de los otros dos. Una situación similar pasa si no se cumple (c). Así, los intervalos con numeración impar son disjuntos entre sí y los intervalos con numeración par son disjuntos entre sí. Por lo tanto

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup I_{2j-1} \bigcup \quad \bigcup I_{2j}$$

y

$$\sum_{j=1}^{k} \mathcal{X}_{I_j} \leq 2 \square$$

REFERENCIAS

[1] Forzani, L. *Lemas de cubrimiento de tipo Besicovitch y su aplicación al estudio del operador maximal de Ornstein-Uhlenbeck.* Tesis Doctoral. Depto. Matemáticas. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales. Universidad Nacional de San Luis, 1993.

[2] Garsia, A. M. *Topics in Almost Everywhere Convergence.* Markham Publishing Company, 1970.

[3] Muckenhoupt, B. *Poisson integrals for Hermite and Laguerre expansions.* Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 231-242. MR 40:3158.

[4] Natanson, I. P. *Theory of functions of a real variable.* Vol II. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1967.

[5] Pérez Gómez, S. *Estimaciones puntuales y en la norma para operadores relacionados con el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck.* Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid, 1996.

[6] Sjögren, P. *On the maximal function for the Mehler kernel.* Lectures Notes in Math 992. Springer-Verlag (1983) 73-82.

[7] Sjögren, P. *A remark on the maximal function for measures in* $\mathbb{R}^n$. Amer. J. Math. 105 (1983), 1231-1233. MR 86a:28003.

[8] Sjögren, P. *Operators associated with the Hermite semigroup - A survey.* The J. of Fourier Anal. and Appl. 3 (1997), 813-823.

[9] Uhlenbeck, G. E. y Ornstein, L. S. *On the Theory of the Brownian Motion* Physical Review, Vol. 36, 1930, 823-841.