ITI-1



# INFORME TECNICO INTERNO

## N°. 1

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

I.T.I. N° 1

PREPUBLICACION

# SOBRE ALGUNOS PROBLEMAS INVERSOS Y UN TEOREMA DE EULER CONCERNIENTE A LA CUERDA VIBRANTE

por R.Panzone



Por aparecer en los

Anales de la

Academia Nacional de Ciencias Exactas,

Físicas y Naturales

1983

SOBRE ALGUNOS PROBLEMAS INVERSOS Y UN TEOREMA DE EULER

CONCERNIENTE A LA CUERDA VIBRANTE

por R.Panzone

1 . En el estudio de ecuaciones diferenciales se presentan, hablando vagamente, dos tipos de problemas: el directo, en el que se da una ecuación diferencial, condiciones iniciales, o de borde, etc., y se buscan propiedades de las soluciones, autovalores, modos normales,... , y el inverso, en el que se trata de determinar los coeficientes de la ecuación a partir de propiedades de las soluciones, espectros, etc. .

Veamos un ejemplo elemental. Dada la ecuación

$$(1) \qquad y'' + q(x)y = 0 \quad en \quad I = [a,b] \;, \quad -\infty<a<b<+\infty \;,$$

sabemos que si $q(x)$ es una constante positiva hay dos soluciones linealmente independientes, $y_1(x), y_2(x)$, tales que $y_1^2(x)+ +y_2^2(x)$ es igual a una constante no nula. El siguiente teorema resuelve un problema inverso.

Teorema 1. *Supongamos $q(x)$ real y continua, y sean $A,B$ y $C$ números reales e $y_1, y_2$, soluciones de (1) tales que $Ay_1^2+By_1y_2+ +Cy_2^2 = J =$ constante no nula. Entonces $q(x) =-(B^2-4AC)(W/2J)^2=$ $=$ constante, donde $W=W(y_1,y_2)$ es el wronskiano de $y_1$ e $y_2$ (D.E. Seminar, [1]). En particular, si $B=0$, $A=C=1$, entonces $q(x)=(W/J)^2$*

*(L.Lorch y P.Szego, (1963)).*

2 . El profesor R.G.Newton al presentar el reciente libro de Chadan y Sabatier [2] sobre problemas inversos en la teoría cuántica de dispersión (scattering) dice: "El asunto del cual normalmente se ocupan los físicos es, esquemáticamente, la predicción del movimiento de partículas sobre la base del conocimiento de las fuerzas actuantes, o la propagación de radiación supuesta conocida la constitución de la materia. El problema inverso consiste en deducir cuáles son las fuerzas, o cuál es la constitución de la materia, sobre la base de los movimientos observados. Una gran parte de nuestro contacto sensorial con el mundo que nos rodea depende de una resolución intuitiva de un problema inverso: inferimos la forma, el tamaño y la textura de objetos externos de las propiedades de scattering y absorción de la luz detectada por nuestros ojos. Cuando usamos los experimentos de scattering para reconocer el tamaño o forma de partículas o las fuerzas que ejercen unas sobre otras, la naturaleza del problema es semejante. La cinemática, las ecuaciones de movimiento, usualmente se suponen conocidas. Las fuerzas son las incógnitas, y cómo ellas varían de punto a punto.

Así como con otras muchas ideas físicas, el primero del cual sabemos que ha tocado problemas inversos como los de este libro fue Lord Rayleigh, [3]. Tratando de describir las vibraciones de cuerdas de densidad variable, él brevemente discute la posibilidad de inferir la densidad partiendo de las frecuencias de vibración. Este pasaje puede ser considerado como un precursor del estudio matemático del problema espectral inverso planteado unos setenta años después. Su análogo moderno y generalización fue dado en una famosa conferencia de M.Kac (1966) titulada "¿Puede uno oír la forma de un tambor?"

3 . El problema directo del tambor puede formularse de la siguiente manera. Dada una membrana plana que ocupa la región acotada Z de $R^2$, simplemente conexa y de contorno Y, es natural preguntarse por los modos normales de vibración que corresponden a los tonos puros que la misma es capaz de producir. Aquellos son las soluciones de la ecuación de ondas:

$$c^2 \Delta F - \partial^2 F/\partial t^2 = 0 \quad , \quad F = F(x;t) = F(x_1,x_2;t) \quad ,$$

que se anulan en Y y son de la forma $F(x;t)= U(x).exp\ i\omega t$. Separando variables y suponiendo $c^2= 1/2$, el problema se reduce a encontrar los autovalores y autofunciones de la ecuación de Helmholtz: $(1/2)\Delta u+ +E.U = 0$ sujeta a la condición de contorno $U=0$ en Y. Para una amplia clase de recintos Z los autovalores $E_j= \omega_j^2$, $j=1,2,...$, que definen el espectro & satisfacen las desigualdades $0<E_1 \leqslant E_2 \leqslant E_3 \leqslant ...$ y están asociados a un sistema ortonormal completo de autofunciones.

H.A.Lorentz en 1910 conjeturó que & determina el área $|Z|$ de la región Z. Esto fue probado en 1913 por H.Weyl quien demostró que $E_j.|Z| \sim 2\pi j$. En 1954 A.Pleijel mostró que si la región es suficientemente regular & determina el perímetro de Z; por ejemplo, cuando Z es convexa e $Y=(x_1(t),x_2(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ , $x_i(t) \in C^2, i=1,2$ y $\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2>0$ para todo $t$.

El problema inverso plantea la cuestión de si & determina Z completamente. Bajo ciertas hipótesis se puede "oír" el grado de conexión de la membrana ([4]), es decir, el número de agujeros en caso de ser múltiplemente conexa.

4 . Sigue diciendo el profesor Newton en su presentación:"Con el invento de la ecuación de Schroedinger el ámbito de aplicaciones físicas de las nociones matemáticas conectadas con el espectro de ecuaciones diferenciales con condiciones de borde prescriptas creció enormemente. El tipo de ecuación que previamente sólo tenía aplicaciones a vibraciones mecánicas comenzó a ser usado para la descripción de átomos y moléculas. Se necesitaron solamente tres años para que el mismo tipo de problema que Lord Rayleigh planteó medio siglo antes se propusiera en el nuevo contexto. En 1929 el problema inverso de Schroedinger estimuló a Ambarzumian a estudiar un problema de unicidad para autovalores de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden ...

El problema específico de reconstruir las funciones, o las condiciones de borde, de un sistema de Sturm-Liouville a partir de datos espectrales fue atacado seriamente por primera vez por Borg (1946). Luego fue continuado en detalle y profundidad por Levinson (1949), y los matemáticos rusos Chudov (1949,1956), Marchenko (1950, 52, 53, 55), Krein (1951, 53, 54, 55), Gelfand y Levitan (1951), Levitan (1949, 56, 63, 64), Berezanskii (1955, 58), y Levitan y Gasimov (1964) ... ".

Me permito agregar a esta lista muy incompleta a H.Hochstadt (1965, 66, 67, ...) quien ha trabajado mucho en este tipo de problemas.

La secretaría de la Recherche Coopérative sur Programme N°264, Univ. de Montpellier, "Études interdisciplinaires des problèmes inverses" contaba en 1975 con una bibliografía de aproximadamente 1200 títulos. La lista de referencias de la tesis [6] menciona bastante más de 400 trabajos sobre problemas inversos solamente para ecuaciones diferenciales ordinarias, y el libro de Chadan y Sabatier cita 430 títulos aproximadamente donde la mayor parte versa sobre problemas inversos.

El teorema de Ambarzumian ([7]) mencionado dice así:

<u>Teorema 2.</u> *Sea $q(x)\in C([0,\pi])$, real. Consideremos el problema de autovalores:*

$$(*) \qquad -y''+q(x)y = \lambda y \ , \ y'(0)=y'(\pi)=0 \ , \ 0\leqslant x\leqslant\pi \ ,$$

*y supongamos que los autovalores son de la forma $\lambda_n=kn^2$, $n=0,1,2,\ldots$, $k$ una constante. Entonces, $q(x)$ suficientemente pequeña implica $k=1$ y $q=0$.*

De la hipótesis se deduce que $\int_0^\pi q(x)dx = 0$ por lo que el siguiente resultado debido a Borg ([8]) mejora notablemente el resultado precedente.

<u>Teorema 3.</u> *Si en el problema de autovalores $(*)$ del T.2 se suponen $q\in L^1$, $\int_0^\pi q\, dx = 0$ y $\lambda_0=0$ entonces $q\equiv 0$ (y por lo tanto $k=1$).*

5 . Definición de problema inverso (según P.Sabatier). Una ley física tiene, en general, una expresión matemática la cual es una regla que define una aplicación M que va de un conjunto $\mathcal{C}$ de elementos, que llamaremos los parámetros, en un conjunto de resultados $\&$. Como el fenómeno físico se traduce por un cierto número de mediciones, uno de los trabajos del físico es construir el modelo M que permite reencontrar esos resultados y prever otros. Resolver el problema directo es, dado $C \in \mathcal{C}$ , hallar $M(C) \in \&$. Resolver el problema inverso es, dado $E \in \&$ (ó un subconjunto $\&'$ de $\&$), hallar $M^{-1}(E)$ $(M^{-1}(\&'))$. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de Schrödinger

$$(2) \qquad \Delta F + (E-V(x))F = 0$$

el parámetro es el potencial $V$ y el resultado experimental podría ser el espectro de un operador diferencial definido por medio de $\Delta - V$.

Como bien afirma Sabatier en su tercera conferencia en [9], los problemas inversos son, en gran medida, de naturaleza interdisciplinaria, por lo que no es fácil indicar con toda generalidad qué deberá entenderse por "solución" en cada caso. Pero desde el aséptico punto de vista del matemático uno puede investigar: 1) la existencia de solución (¿existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $M(C)=E=$dato?); 2) la unicidad (si C existe ¿es única?); 3) la estabilidad (si E' es "próxima" a E y existen C y C' tales que $M(C')=E'$, $M(C)=E$ ¿es C' próxima a C?).

Si agregamos a estas preguntas otras relativas a la constructibilidad de la solución, esencial para el problema físico, o a la aproximación de la misma, el cuestionario se hace interesante y difícil. Es de destacar la importancia de la cuestión de la estabilidad pues un resultado experimental sólo en rarísimas ocasiones puede se exacto. Observemos finalmente que en el estudio de la existencia y estabilidad de soluciones de un problema inverso real, interrogantes muy serios plantea el procedimiento para definir & de manera que satisfaga las necesidades del científico.

6 . Uno de los problemas más estudiados por los matemáticos es el de la unicidad cuando & es una o más sucesiones de autovalores. De él nos ocuparemos a continuación y en el marco de referencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Si no se dice nada en contrario, en todo lo que sigue los coeficientes y las constantes datos se suponen reales.

Un resultado básico de G.Borg, [8], fue parcialmente mejorado por Levinson, [10], y Chudov, [11], de tal suerte que puede enunciarse así (cf. también [13]) :

<u>Teorema 4.</u> *Sea la ecuación de autovalores*

$$(3) \qquad -y'' + q(x)y = \lambda y \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \quad , \quad q(x) \in L^1(0,\pi) \, ,$$

*con las condiciones de contorno*

$$(\alpha,\beta) \begin{cases} y(0)\cos\alpha + y'(0)\operatorname{sen}\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\operatorname{sen}\beta = 0 \end{cases} ; \quad (\alpha,\gamma) \begin{cases} y(0)\cos\alpha + y'(0)\operatorname{sen}\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\gamma + y'(\pi)\operatorname{sen}\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\text{donde} \quad 0 \leq \beta, \gamma < \pi \quad , \quad \beta \neq \gamma .$$

*Sean* $\&_1 = \&_1(\alpha,\beta)$ *y* $\&_2 = \&_2(\alpha,\gamma)$ *las sucesiones de autovalores correspondientes. Entonces* $q(x)$ *es la única función en* $L^1(0,\pi)$ *que posee esos espectros para las condiciones de borde indicadas.*

Borg muestra que un espectro no es suficiente para determinar el potencial $q$. Más precisamente, un resultado de Gelfand y Levitan ([12]) implica que *(3)* con las condiciones de contorno: $y'(0) = 0 = y'(\pi) + b.y(\pi)$ , $b$ *una cierta constante no nula*, admite dos potenciales distintos que tienen el mismo conjunto de autovalores $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} = \{ \lambda_n = n^2 : n=0,1,2,\ldots\}$, (cf. T.2 y prop.2).

Sin embargo valen los siguientes resultados que complementan al T.4 .

*Teorema 5. Si* $q(x) = q(\pi-x)$ *y* $\alpha=\pi-\beta$ *entonces* $\mathcal{E}_1$ *determina* $q$, *([13])*.

*Teorema 6. Si* $q(x) = q(\pi-x)$ *y* $\alpha=\beta=\pi/2$ *entonces* $\mathcal{E}_1\setminus\{\lambda_0\}$ *determina* $q$, *([8])*.

Este último teorema muestra que el primer autovalor es, en esta situación, función de los siguientes.

7 . Wilma Mothwurf en 1932 llamó la atención sobre el hecho que Leonardo Euler (1707-1783) ya había observado que la propiedad de que cada sección de longitud $\ell$ de la cuerda vibrante tenga infinitos sobretonos armónicos no sólo es poseída por las de sección transversal constante -con tensión y densidad constantes y extremos fijos- sino también por aquellas cuya sección transversal varía según la ley:

$$(4) \qquad (b+ax)^{-4} \quad , \quad a \text{ y } b \text{ constantes,}$$

y cita dos trabajos del ilustre Euler: [15] y [16]. Del primero de ellos titulado "Sobre el movimiento vibratorio de cuerdas de diferente sección", que es bastante extenso, extraemos los siguientes sugestivos párrafos: "...Pienso que se evitará sobreestimar los resultados de los fenómenos que sólo son propios de cuerdas de sección uniforme si examino, cuanto me lo permiten los límites del Análisis, el movimiento de cuerdas de diferente sección y emprendo una investigación completa del mismo ... Por lo tanto no debe buscarse aquí tanto la utilidad de esta investigación, como admito que debería ser estudiada, sino más bien una ocasión oportuna para sopesar algunos acontecimientos notables que prometen un fecundo fruto para la totalidad del Análisis, y que quizás traiga a luz no pocas nuevas sobre la vibración de las cuerdas ...".

De todo esto se desprende que Euler ya en ese entonces, ca.1770, había estudiado la cuestión de unicidad de un problema de autovalores inverso relacionado con la cuerda vibrante de sección cualquiera.

8 . Utilizando las ideas y métodos de Mothwurf demostramos a continuación el siguiente teorema que es esencialmente el citado resultado de Euler.

Teorema 7. i) *Consideremos una cuerda de longitud $\ell$ con extremos fijos en $x=0$ y $x=\ell$ tal que su masa por unidad de longitud se rija por la ley*

(5) $$\sigma.Q = P/(ax+b)^4$$

*donde* $\sigma.Q$ *es la densidad lineal,* $Q$ *la sección transversal de la cuerda y* $P$ *la tensión constante que la extiende. Si* $b$ *y* $a\ell+b$ *son positivos entonces esta cuerda tiene todos sus sobretonos armónicos y los autovalores de la ecuación diferencial del perfil de onda son :* $(b(a\ell+b)\pi/\ell)^2.n^2$ , $n=1,2,...$

**ii)** *Si además* $\ell=\pi$ *y* $b(a\pi+b)=1$, *los autovalores de la ecuación del perfil de onda son* $\lambda_n= n^2$, $n=1,2,...$ .

En el curso de la demostración aparecerá la siguiente ecuación :

$$\xi^3 . \frac{d^2\xi}{dx^2} + f(x).\xi^4 - 1 = 0 \tag{6}$$

La proposición que sigue, y que no demostraremos, describe el comportamiento de las soluciones de esta ecuación diferencial no lineal.

<u>*Proposición 1*</u>. *Sea* $0\leqslant x<\infty$ *y* $f(x)$ *continua y positiva. Si* $J>0$ *entonces toda solución* $\xi(x)$ *de (6) tal que* $\xi(0)=J$ *existe y es positiva en* $[0,\infty)$.

<u>Demostración del T.7 .</u> Nos limitaremos a probar el caso particular ii). La misma demostración sirve para el caso general. Sea $\Phi(x)= =\sigma Q/P = (ax+b)^{-4}$. Esta es una función positiva en $[0,\pi]$. Separando variables en la ecuación del movimiento: $\Phi.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, obtenemos las ecuaciones : $T''(t)+\lambda T(t) = 0$ ,

$$g''(x)+\lambda\Phi(x)g(x) = 0 \quad , \quad g(0)=0 \quad , \quad g(\pi)=0 \tag{7}$$

donde $y=g.T$. Los autovalores del problema de Sturm-Liouville *(7)* son positivos. Sea $\lambda$ uno de ellos y denotemos con $f$ a $\lambda\Phi$. Sean $B$ y $\beta$ constantes, $B\neq 0$, y definamos

$$(8) \qquad g(x) = B.\xi(x).sen\left( \int_{x_1}^{x} \xi^{-2} dt + \beta \right) ,$$

donde $\xi(x)$ es una solución positiva cualquiera de $(6)$. Diferenciando $(8)$ se ve que $g(x)$ resuelve la ecuación en $(7)$, y la $g$ así escrita se dice que se encuentra en la forma de Madelung.

Pongamos $x_1=\beta=0$ para que valga $g(0)=0$. Luego, $g(x)$ satisface $(7)$ si y sólo si

$$(9) \qquad \int_0^{\pi} \xi^{-2}\, dt = m\pi \qquad con \quad m\in\{1,2,3,...\} .$$

La función $\xi(x) = (ax+b)\lambda^{-1/4}$ es una solución de $(6)$ en $[0,\pi]$. Reemplazando en $(9)$ y recordando que $b(a\pi+b)=1$ resulta:

$$(10) \qquad \int_0^{\pi} \xi^{-2}\, dt = \pi\sqrt{\lambda} \mp m\pi.$$

Eligiendo $\lambda=m^2$ vemos de $(8)$ y $(9)$ que $g(x)$ tiene $m-1$ ceros en $(0,\pi)$. Sigue entonces del teorema de oscilación de Sturm que $\lambda_n = n^2$, $n=1,2,...$, es el conjunto completo de autovalores del sistema $(7)$. QED.

De la demostración precedente puede extraerse todavía el siguiente complemento al T.7.

<u>Proposición 2.</u> *Consideremos el problema de contorno (7) pero con la segunda condición de borde reemplazada por:*

$$(11) \qquad g(\pi) - \pi.g'(\pi) = 0 \quad .$$

*Entonces, los problemas de Sturm-Liouville con $\Phi\equiv 1$ y $\Phi=(ax+b)^{-4}$, $b>0$, $a\neq 0$, $b(a\pi+b)=1$, poseen los mismos autovalores. Estos son los cuadrados de los ceros de la ecuación trascendente :*

$$\operatorname{sen} s\pi = \pi . s . \cos s\pi .$$

Demostración. Ambos problemas tienen a $\lambda=0$ por autovalor y los autovalores son reales no negativos. Si $\lambda>0$ podemos definir $\xi(x) = = (ax+b)\lambda^{-1/4}$ y usar *(8)*, *(11)* y la primera igualdad de *(10)* para hallar la ecuación característica. QED.

9 . Hemos visto que el estudio del movimiento ondulatorio producido por cuerdas vibrantes se reduce finalmente al de un operador diferencial del tipo ,

$$(12) \qquad Lu = (-1/k(x))u'' \quad , \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \quad ,$$

sujeto a condiciones de contorno de la forma:

$$(13) \qquad u(0)\cos\alpha + u'(0)\operatorname{sen}\alpha = 0 \ , \ u(1)\cos\beta + u'(1)\operatorname{sen}\beta = 0 \ ,$$

con $k(x)$ positiva y continua en $[0,1]$. Denotaremos al problema *(12)*, *(13)* con $(L;\alpha,\beta)$ y a su espectro con $\mathcal{E}=\mathcal{E}(\alpha,\beta)$. Supongamos definido un segundo operador

$$(14) \qquad Mu = (-1/r(x))u'' \ ,$$

con $r(x)$ positiva y continua, y espectro $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\alpha,\beta)$ respecto a las condiciones de contorno *(13)*. Nosotros nos limitaremos aquí a considerar operadores como $L$ y $M$ donde $k$ y $r$ son absolutamente continuas lo mismo que sus derivadas primeras.

Hochstadt en [17] (cf. también [18]) enuncia los siguientes resultados:

<u>*Teorema 8.*</u> *Sea* $sen(\beta-\gamma) \neq 0$. *Supongamos* $\mathcal{E}(\alpha,\beta) = \mathcal{F}(\alpha,\beta)$, $\mathcal{E}(\alpha,\gamma) = \mathcal{F}(\alpha,\gamma)$, *y que vale:*

$$k(0)/k(1) = r(0)/r(1). \tag{15}$$

*Entonces* $k(x) = r(x)$.

<u>*Teorema 9.*</u> *Si* $k(x)=k(1-x)$, $r(x)=r(1-x)$ *y* $\mathcal{E}(\alpha;-\alpha) = \mathcal{F}(\alpha;-\alpha)$ *entonces* $k(x)=r(x)$.

El teorema 4 sugiere que sólo un espectro no bastaría para demostrar la tesis del teorema 8. Veamos ahora que la condición *(15)* no puede omitirse. El teorema 7 y la proposición 2 exhiben infinitos operadores diferenciales distintos del tipo $(L;\alpha,\beta)$ con espectros coincidentes para dos sistemas de condiciones de borde no equivalentes que no satisfacen esa relación. Tenemos entonces la

<u>*Proposición 3.*</u> *La hipótesis (15) del T.8 no es superflua.*

10 . Suponiendo $r(x)$ como en el párrafo precedente obtenemos la siguiente:

<u>*Proposición 4.*</u> *Consideremos la ecuación diferencial*

(16) $$y'' + \lambda r(x) y = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \ ,$$

*y supongamos que bajo las condiciones de contorno*

(17) $$y(0) = y(\pi) = 0$$

*ella tenga por autovalores los cuadrados de los ceros de*

(18) $$(\operatorname{tg} s\pi)/s\pi = 0 \ ;$$

*y sujeta a las condiciones de contorno*

(19) $$y(0) = 0 = y(\pi) - \pi . y'(\pi)$$

*tenga por autovalores los cuadrados de los ceros de*

(20) $$(\operatorname{tg} s\pi)/s\pi = 1 \ .$$

*Entonces $r(x)$ es igual a exactamente una función de la forma:*

(21) $$k(x) = (ax+b)^{-4} \quad \text{con } b>0 \text{ y } \quad b(a\pi+b)=1$$

*la cual queda determinada por el cociente $r(0)/r(\pi)$.*

Demostración. Definamos $b := \sqrt[8]{r(\pi)/r(0)}$ y $a = (b^{-1} - b)/\pi$. Entonces $k(0)/k(\pi) = b^{-8} = r(0)/r(\pi)$. La tesis sigue de los teoremas 7 y 8, y la proposición 2. QED.

11 . Como se desprende de los resultados ya mencionados hay situaciones en que el problema inverso espectral de unicidad es resuelto con un único espectro como dato y otras en las que necesariamente se debe recurrir a dos. El siguiente enunciado contiene un par de teoremas debidos a Y.Li en los que un solo espectro basta, (cf. [19]).

*Teorema 10.* *Supongamos que $q(x) \in L^1(0,\pi)$ y que $a$ es una constante no nula (real):*

*i) El espectro del problema de contorno*

(22) $$y'' + [\lambda - q(x)]y = 0 \ , \ \lambda = s^2 \ , \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \ ,$$

(23) $$y(0) = 0 \quad , \quad a.y'(\pi) + s.y(\pi) = 0 \ ,$$

*determina unívocamente a $q(x)$ (c.d.).*

*ii) El espectro de (22) sujeta a las condiciones de borde*

(24) $$y(0) = 0 \ , \ y'(\pi) - i.s.y(\pi) = 0 \quad ,$$

*determina unívocamente a $q(x)$.*

La hipótesis $a \neq 0$ es esencial. Este téorema puede generalizarse reemplazando la condición en $\pi$ por una de la forma

(25) $$R(s).y(\pi) + S(s).y'(\pi) = 0$$

donde $R$ y $S$ son polinomios primos entre sí, no simultáneamente pares (cf. [20]).

12 . El objetivo de esta sección es demostrar la siguiente proposición 5 que no es otra cosa que un nuevo enunciado del teorema de Euler.

Sea

$$(26) \qquad u'' + \lambda r u = 0 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \quad , \quad u(0) = u(\ell) = 0$$

con $r$ y $r'$ absolutamente continuas en ese intervalo, $r$ positiva e $\int_0^\ell \sqrt{r}\, dx = \pi$. La última hipótesis no restringe la generalidad, y como veremos enseguida, normaliza la familia de autovalores. Sea

$$(27) \qquad \xi = \int_0^x \sqrt{r(t)}\, dt \quad , \quad z(\xi) = \sqrt[4]{r(x(\xi))}.$$

La transformación $x \to \xi$ lleva el intervalo $[0,\ell]$ en $[0,\pi]$. Definamos $y(\xi) = z(\xi).u(x(\xi))$. Esos cambios de las variables dependiente e independiente dan lugar a la llamada transformación de Liouville que reduce el problema (26) a otro equivalente:

$$y''(\xi) + [\lambda - z^{-1}(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} z(\xi)]\, y(\xi) = 0 \quad , \quad y(0) = y(\pi) = 0 \, .$$

<u>*Proposición 5.*</u> i) *Las funciones numéricas $r(x)$ definidas en $[0,\ell]$ de la forma:*

$$(28) \qquad r(x) = \frac{1}{(ax+b)^4} \quad , \quad b(a\ell+b) = \ell/\pi$$

*son exactamente aquellas para las cuales $\xi$ varía entre $0$ y $\pi$ y $z''(\xi)=0$ en ese intervalo.*

ii) *Para ellas el problema de contorno (26) tiene por autovalores a:*

$$(29) \qquad \lambda_n = (n+1)^2 \quad , \quad n=0,1,2,\ldots \, .$$

Demostración. Es suficiente demostrar i). Supongamos $r$ tal que $\int_0^{\ell} \sqrt{r}\, dx = \pi$ y $z''(\xi)=0$. Entonces $z = A\xi + B$ y $B>0$. De *(27)* sigue que $d\xi = \sqrt{r(x)}\, dx = z^2(\xi)dx$. O sea, en este caso

$$(30) \qquad \int_0^{\xi} \frac{dt}{(At+B)^2} = \int_0^{x} dt = x \ , \qquad 0\leqslant x\leqslant \ell .$$

Llamemos $a = -A$ , $b = 1/B$. Si $A=0$, la tesis se verifica con $r(x) = b^{-4}$. Si $A\neq 0$, *(30)* equivale a

$$(31) \qquad (ax+b)(A\xi+B) = 1.$$

Luego $r(x) = z^4(\xi) = (ax+b)^{-4}$. Del hecho que $\xi$ recorre $[0,\pi]$ cuando x recorre $[0,\ell]$ y de *(31)* resulta

$$(32) \qquad b(a\ell+b) = \ell/\pi .$$

Recíprocamente, sea $r(x)$ como en *(28)*. Entonces cuando $x$ recorre $[0,\ell]$, $\xi$ recorre $[0,\pi]$ y además vale *(31)*. Luego $z''(\xi) = 0$. QED.

**13** . Esta sección y la siguiente contienen resultados que fueron elaborados con la colaboración de A.Benedek. El primero de ellos muestra que las funciones de la forma *(28)* no agotan la familia de las $r$ para las cuales el problema de contorno *(26)* tiene al conjunto *(29)* por espectro puntual.

*Proposición 6.* *Dado $\ell>0$ existe una función $r(x)$ positiva en $[0,\ell]$ e indefinidamente diferenciable que no es de la forma (28) y para la cual la familia de autovalores del problema (26) es el conjunto (29).*

Demostración. Y.Li en su trabajo citado anteriormente demostró que el espectro puntual del problema de contorno:

$$(33) \qquad y'' + (\lambda - L(x))y = 0 \quad , \quad y(0) = y(\pi) = 0 \quad ,$$

coincide con (29) si

$$(34) \qquad L(x) = \frac{2\,\mathrm{sen}^4 x}{\left(1 + \int_0^x \mathrm{sen}^2 t\,dt\right)^2} - \frac{4\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{1 + \int_0^x \mathrm{sen}^2 t\,dt} \,.$$

Veamos que existe $z>0$ en $[0,\pi]$, $z\in C^\infty$, tal que

$$(35) \qquad z'' = L.z \,.$$

La solución $z(\xi)$ de (35) tal que $z(0)=0$, $z'(0)=1$, no se anula en $(0,\pi]$. En efecto, esto sigue del hecho que los autovalores de (33) son todos positivos, por lo cual ninguna solución de (35) tiene más de un cero en $[0,\pi]$. Recurriendo a la dependencia continua de las soluciones de las condiciones iniciales encontramos una $z(\xi)$ que resuelve (35) tal que $z(0)>0$, $z(\pi)>0$. Por lo dicho arriba resulta $z(\xi)>0$ en $[0,\pi]$.

Definamos ahora $\ell_0$ y la transformación $x\to\xi$ de la siguiente manera:

$$(36) \qquad x = (\ell/\ell_0)\int_0^\xi z^{-2}dt \quad , \quad \ell_0 = \int_0^\pi z^{-2}dt.$$

La función $r$ buscada es entonces $r(x) = (\sqrt{(\ell_0/\ell)}.z(\xi(x)))^4$.QED.

*Nota.* Obsérvese que $\min L(x) \simeq -1,569 \simeq L(0,591)$. También que dado $\ell$, el número de funciones $r(x)$ que satisfacen la proposición 6 es infinito, (cf. §16).

14 . A continuación demostramos dos teoremas, el primero de los cuales es debido a W.Mothwurf, [14], y el segundo a G.Borg, [8]. En este último caso seguimos la demostración de su autor.

*Teorema 11.* *Sea $r(x)$ positiva en $[0,\infty)$, absolutamente continua en todo intervalo finito lo mismo que su derivada primera. Si para todo $\ell>0$ el problema de contorno*

$$u'' + \lambda r u = 0 \quad , \quad u(0)=u(\ell)=0 \quad , \tag{37}$$

*tiene infinitos sobretonos armónicos, i.e. dado $\ell$ existe $c_0=c_0(\ell)$ tal que para infinitos enteros no negativos $n$ vale $\lambda_n=c_0(\ell).(n+1)^2$, entonces $r$ es de la forma*

$$r(x) = (ax+b)^{-4} \quad , \quad (b>0). \tag{38}$$

Demostración. Pongamos $L = \int_0^\ell \sqrt{r}\, dx$. Cuando $\ell$ crece de 0 a $\infty$, $L$ lo hace de 0 a $\Lambda$. La transformación de Liouville utilizada en la sección 12 reemplaza el problema *(37)* por el problema:

$$y''(\xi) + (\lambda - q(\xi))y(\xi) = 0 \quad , \quad y(0) = y(L) = 0 \quad , \tag{39}$$

$$q(\xi) = z^{-1}(\xi).z''(\xi) \quad , \quad z(\xi) = r(x(\xi))^{1/4}. \tag{40}$$

Por hipótesis, para cada $L\in(0,\Lambda)$ hay infinitos $n$ tales que:

$$(41)\qquad \lambda_n = c(L).(n+1)^2 \quad , \quad c(L) = c_0(\ell).$$

De [8], p.11, se deduce que

$$(42)\qquad \lambda_n(\tfrac{L}{\pi})^2 = (\tfrac{L}{\pi})^2 . \tfrac{1}{L}\int_0^L q(\xi)\, d\xi + (n+1)^2 + o(1).$$

De *(41)* y *(42)* sigue entonces que $c(L) = (\pi/L)^2$ y luego que $\int_0^L q(\xi)\, d\xi = 0$ para todo $L$. En consecuencia $q=0$ c.d.. El argumento de la demostración de la proposición 5 se aplica ahora para demostrar que $r$ es de la forma buscada. QED.

Teorema 12. *Sea $r(x)$ positiva en $[0,\ell]$ y absolutamente continua allí lo mismo que sus dos primeras derivadas. Supongamos que $L$ y $q$ estén definidas como en el teorema precedente y que valga*

$$(43)\qquad q'(0) = q'(L).$$

*Si para infinitos valores de $n$ : $\lambda_n = c.(n+1)^2$, $c$ una constante positiva, entonces $r(x)$ es una función como en (28).*

Demostración. De la demostración del teorema 11 obtenemos: $c=(\pi/L)^2$, $\int_0^L q(\xi)\, d\xi = 0$. Como $\frac{dx}{d\xi} = z^{-2}$ resulta de la definición de $z$ que $\frac{dz}{d\xi} = r'(x)/4z^5$. De esto sigue que $z''$ y $z'''$ son absolutamente continuas. Es decir, $q$ y $q'$ son absolutamente continuas en $[0,L]$. En esta situación puede demostrarse la siguiente fórmula asintótica para los autovalores del problema *(39)*, (cf.[8],p.11):

$$(44)\qquad \lambda_n(\tfrac{L}{\pi})^2=(n+1)^2+\frac{1}{4(n+1)^2}(\tfrac{L}{\pi})^4[\tfrac{1}{L}\int_0^L q^2 d\xi - \frac{q'(L)-q'(0)}{L}]+o(\tfrac{1}{n^2}).$$

En consecuencia, el corchete de *(44)* se anula, y usando *(43)* obtenemos $\int_0^L q^2 d\xi = 0$. O sea, $q=0$, y la tesis sigue como antes. QED.

Borg compara en la página 86 de su trabajo [8] el teorema de Mothwurf (T.11) con su resultado (T.12) y dice: " ... Es kann im allgemeinen auch nicht ein so einfaches Ergebnis mehr gelten, wenn wir im obigen Satz die Voraussetzung 'jede beliebige Länge' durch 'konstante Länge' ersetzen. Wenn wir aber Regularitäsbedingungen hinzufügen, können wir ein analoges Ergebnis auch in diesem letzten Fall erhalten. ..." La proposición 6 confirma aquella sospecha, y podemos leerla de la siguiente manera:

*Proposición 7.* *La hipótesis (43) del T.12 no es superflua.*

15 . Elijamos $\ell=\pi$. Las funciones *(28)* del párrafo 12 quedan determinadas unívocamente por el parámetro positivo $b$ pues en esta situación $a = (1/b - b)/\pi$. Entonces, para $r(x) = (ax+b)^{-4}$ la autofunción $n$-ésima -salvo por un factor constante no nulo- es igual a

$$(45) \qquad u_n(x) = (ax+b)sen[(n+1)x/b(ax+b)] \quad , \quad n=0,1,2,...$$

Comparando los resultados obtenidos, por ejemplo con $b=0.5$ y $b=0.8$, se vé la tendencia de los ceros y extremos a acercarse más a 0 junto con $b$, y la de estos últimos a crecer en valor absoluto -en una misma autofunción- cuando $x$ pasa de 0 a $\pi$.

16 . Para obtener los resultados numéricos que permitan graficar una función $r(x)$ del párrafo 13 y algunas autofunciones del problema (26) con esa $r$ y $\ell=\pi$, es conveniente preparar el cálculo de la siguiente manera. La solución de la ecuación diferencial en (33) con $\lambda=s^2\neq 0$ y tal que $y(0)=0$, $y'(0)=1$ es (cf. [19]):

$$(46)\quad y(x,s) = \frac{1}{s}\{sen\ sx - \frac{sen\ x}{1+\int_0^x sen^2 t\ dt}\int_0^x sen\ t\ sen\ st\ dt\}.$$

Por lo tanto, la solución con esos valores iniciales cuando $\lambda=0$ es

$$(47)\qquad f(x) = x - \frac{sen\ x}{1+\int_0^x sen^2 t\ dt}\int_0^x t.sen\ t\ dt\ .$$

La función $f(x)$ es positiva en $(0,\pi]$ y resuelve la ecuación $f''-L.f=0$, la cual admite la siguiente solución linealmente independiente de $f(x)$ y nula en $x=\pi$ : $g(x) = f(x)\int_x^\pi f^{-2}(t),dt$. Como $f(x)\approx x$ en $x=0$, resulta $g(0+) = 1$, y por lo tanto $g$ es positiva en $[0,\pi)$. Definamos para $\varepsilon>0$ :

$$(48)\qquad z(x) = \varepsilon.f(x) + g(x) = f(x).F(x)\quad ,\quad F(x) = \varepsilon + \int_x^\pi f^{-2}(t)dt\ .$$

Cualquiera de estas funciones $z$ es positiva en todo el intervalo y sirve para efectuar el cambio de variables (36). Recordemos que $\ell_0 = \int_0^\pi z^{-2}dt$. De (36) y (48), para $\ell=\pi$ y $0<\eta<\xi\leq\pi$, obtenemos :

$$x(\xi) - x(\eta) = (-\pi/\ell_0)\int_\eta^\xi F^{-2}(t)\ dF(t) = \pi[F^{-1}(\xi) - F^{-1}(\eta)]/\ell_0.$$

Haciendo tender $\eta$ a $0$ resulta :

$$(49)\qquad x(\xi) = (\pi/\ell_0)F^{-1}(\xi).$$

Para esta transformación : $r(x) = (\ell_0/\pi)^2(z(\xi))^4$, y la $n$-ésima autofunción es (cf. (27)) :

$$(50) \qquad u_n(x) = r(x)^{-1/4}.y(\xi,n+1) \quad , \quad n=0,1,2,\ldots .$$

Si $\varepsilon= 1/\pi$ entonces $\ell_0=\pi$ y $F$ puede escribirse así: $F(\xi)=\xi^{-1}+\int_\xi^\pi (f^{-2}-t^{-2})dt$

La función $r(x)$ correspondiente es igual a $1$ en $x=0$ y $x=\pi$, presenta una joroba entre $x=0$ y $x=1$ con máximo en $0.44$ igual a $4.38$, es menor que $1$ en el intervalo $(1.02,3.14)$ y alcanza su mínimo igual a $0.4$ en $x=2.0$ .

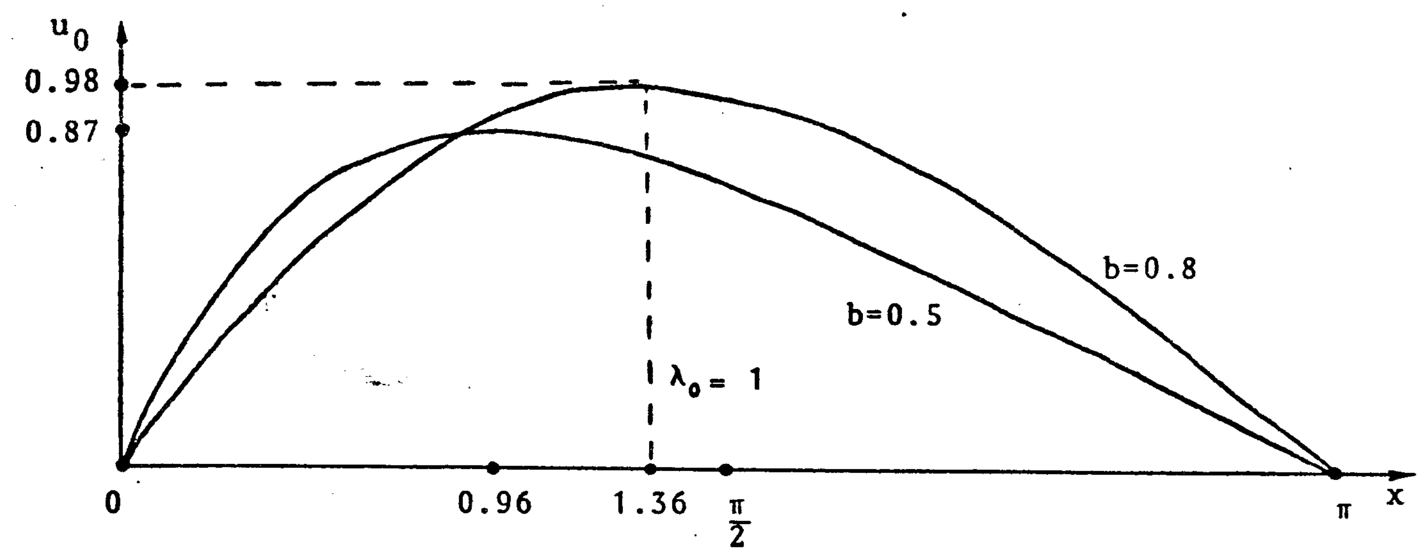


Fig. 1 (§ 15)

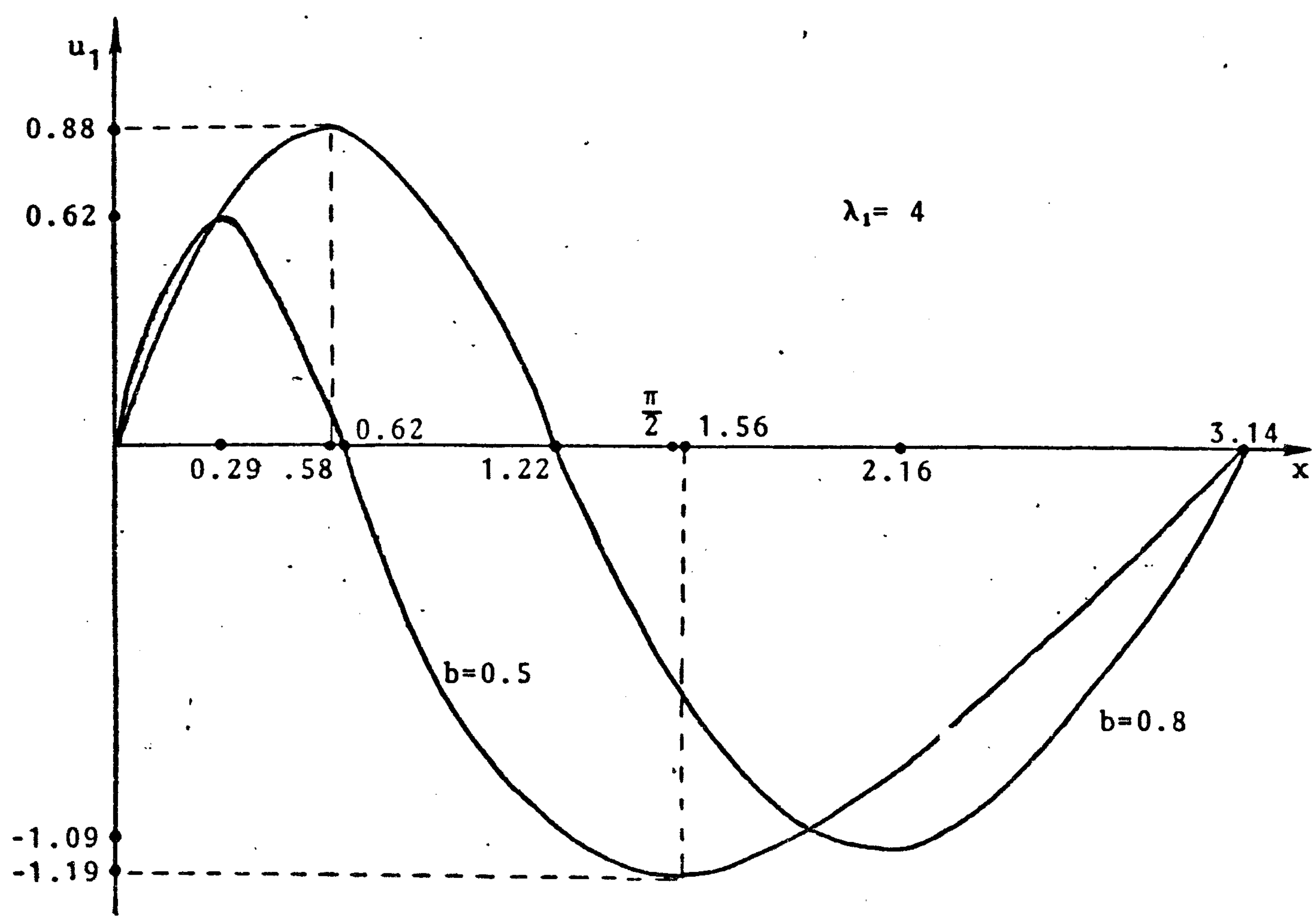


Fig. 2 (§ 15)

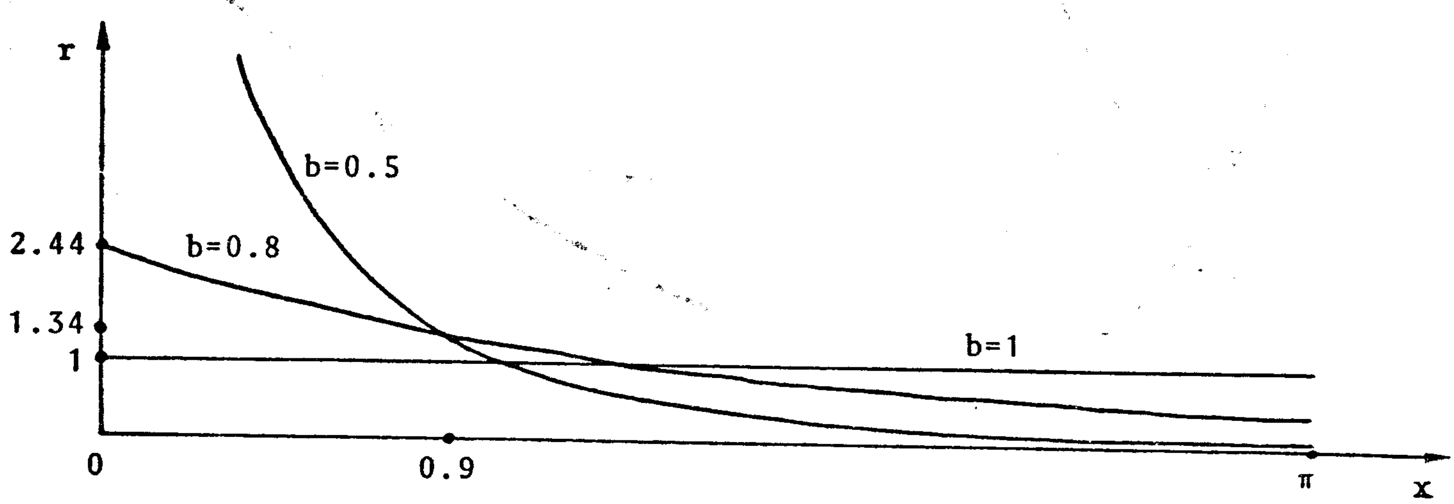


Fig. 3 (§15)

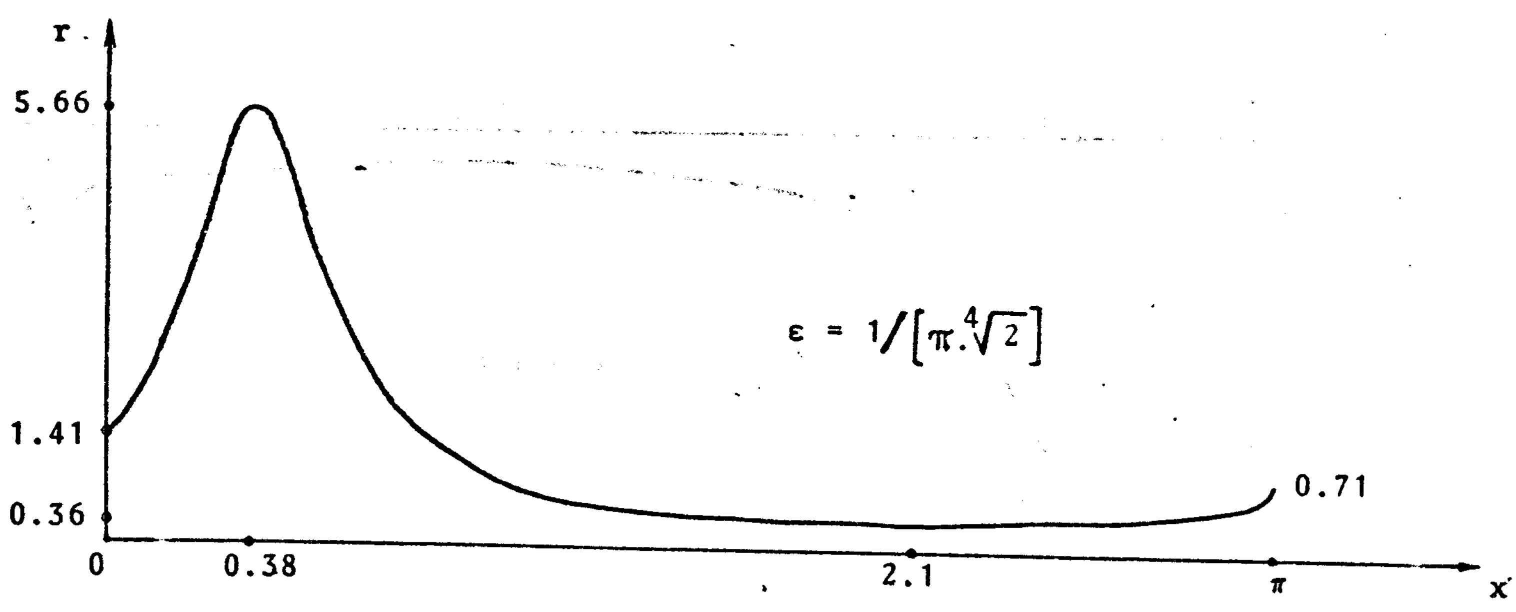


Fig. 4 (§ 16)

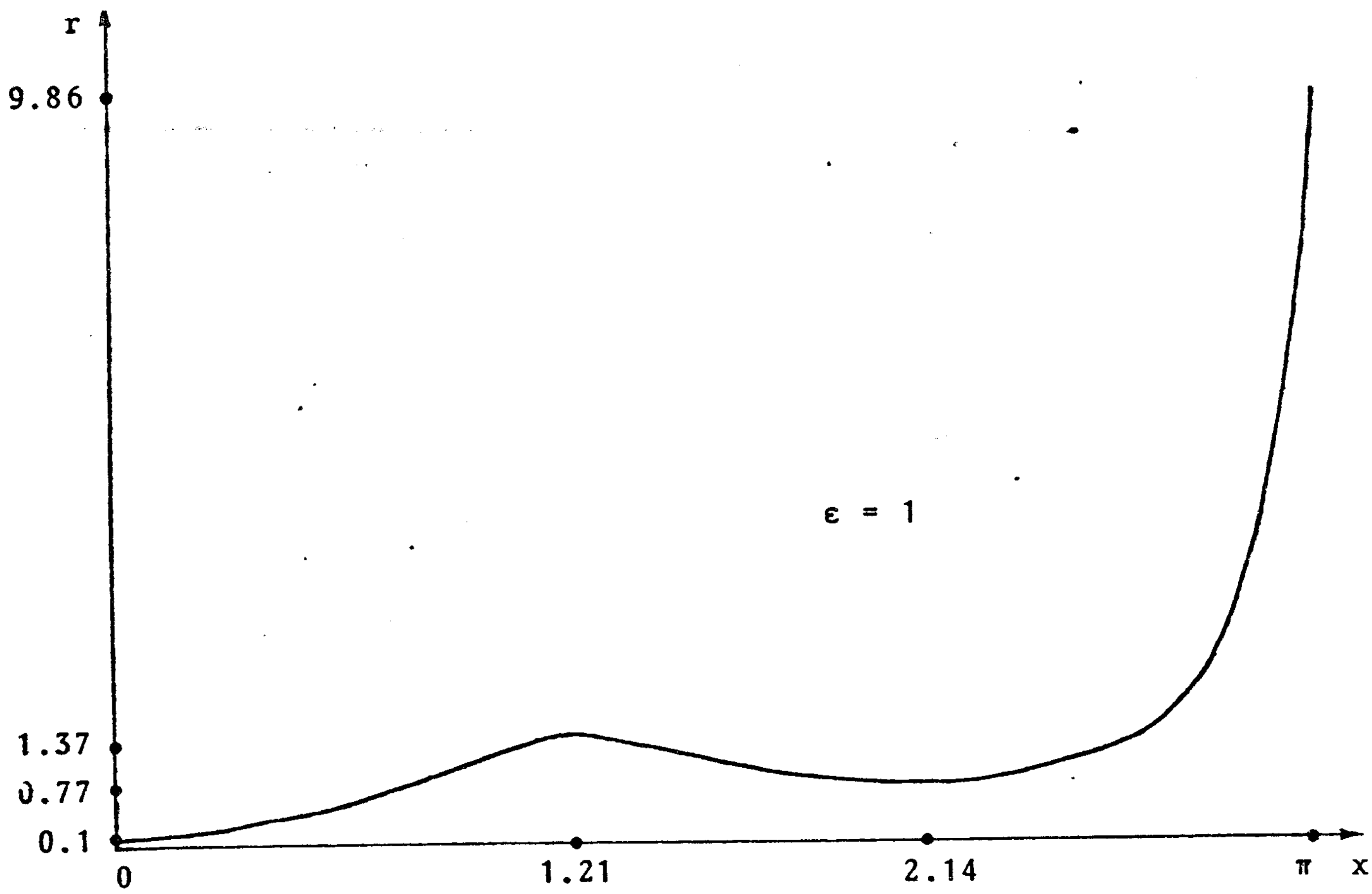


Fig 7 (§ 16)

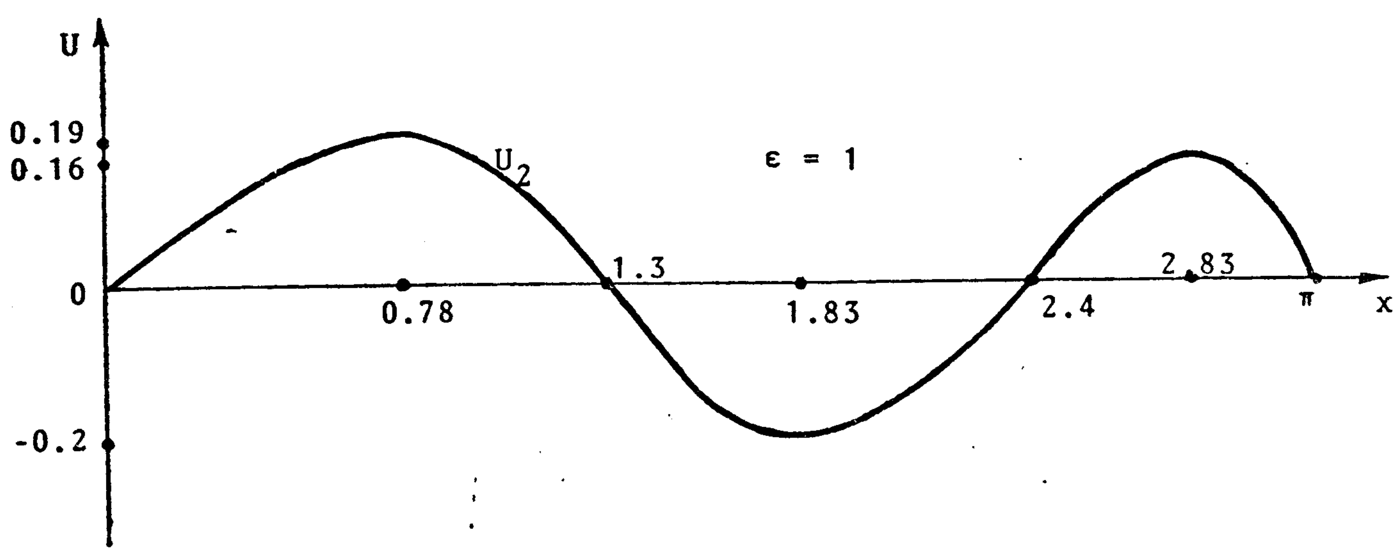


Fig 8 (§ 16)

## REFERENCIAS


[1] Seminar, D.E. *Some elementary converse problems in ordinary differential equations*, Can.Math.Bull., Vol. 11, N°5, (1968).

[2] Chadan, K. and P.C.Sabatier *Inverse problems in Quantum Scattering Theory*, Springer-Verlag, (1977).

[3] Lord Rayleigh, J.W.S. *The theory of sound*, (1877), Dover Pub., (1945), (Vol.I, pp.216-17).

[4] Kac, M. *Can one hear the shape of a drum?*, The American Math. Monthly, 73 N°4, (1966), 1-23.

[5] Milnor, J. *Eigenvalues of the Laplace Operator on certain Manifolds*, Proc.Nat.Acad.Sc. 51, (1964), p.542.

[6] Castro, L.R. *Sistemas biortogonales que surgen del estudio de problemas inversos*, Tesis para optar al grado de Magister en Matem., Univ.Nac. del Sur, (1983).

[7] Ambarzumian, V. *Über eine Frage der Eigenwertheorie*, Z.Physik, 53, (1929), 690-695.

[8] Borg, G. *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe*, Acta Math., 78, (1946), 1-96.

[9] Sabatier, P.C. *Conférences sur les problèmes inverses*, Cahiers Mathématiques, #5, Montpellier, (1975).

[10] Levinson, N. *The inverse Sturm-Liouville problems*, Mat. Tidsskr. B (1949), 25-30.

[11] Chudov, L. *The inverse Sturm-Liouville problem*, Mat. Sbornik N.S. 25, (1949), 451-456, (en ruso).

[12] Gelfand, I.M. and B.M.Levitan *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Amer. Math.Soc.Transl.Series Z, 1, (1955), 253-304.

[13] Hochstadt, H. *The inverse Sturm-Liouville problem*, Comm. on Pure and App.Math., Vol. XXVI (1973), 715-729.

[14] Mothwurf, W. *Über Saiten mit nur harmonischen Obertönen*, Monatshefte f.Math., 40 (1933), 93-96.

[15] Euler, L. *De motu vibratorio cordarum inaequaliter crassarum*, Novi Comm. Petrop., T IX, 246-304.

[16] Euler, L. *Sobre el movimiento vibratorio de la cuerda dotada de sección cualquiera variable*, Novi Comm. Petrop., T XVII, (1772), 432-448, (en latín).

[17] Hochstadt, H. *On the determination of the density of a vibrating string from spectral data*, J. of Math. An. and App., 55, N°3, (1976), 673-685.

[18] Hochstadt, H. *On inverse problems associated with second-order differential operators*, Acta Math., 119, (1967), 173-192.

[19] Li, Yi-Shen *On an inverse eigenvalue problem for a second-order differential equation with boundary dependence on the parameter*, Acta Math. Sinica, 15, (1965), 375-381.

[20] Benedek, A. and R.Panzone *On inverse problems for second-order differential operators with boundary dependence on the eigenvalue parameter*, Rev. U.M.A., 30,(1982-83), 167-173.

---