INFORME TECNICO INTERNO

N°. 11

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

INFORME TECNICO INTERNO N°11.

INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONTROL.

Graciela S. GUALA

Edgardo N. GUICHAL

BAHIA BLANCA- Abril, 1988

INTRODUCCION

En estas notas hemos incluído algunos resultados estudiados en dos cursos desarrollados en el Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur, relacionados con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de control.

Nuestro objetivo es introducir aquí las nociones más importantes de la teoría de control de sistemas lineales autónomos, como punto de partida para aquellas personas que puedan estar interesadas en el estudio de estos temas.

La mayoría de los resultados que presentamos son ya conocidos y forman parte de la base de la teoría que nos ocupa. Sin embargo, queremos destacar el enfoque dado aquí, en el que se hace un uso sistemático del fundamento algebraico del problema, con la utilización del polinomio minimal de una matriz y de sistemas biortogonales a un sistema dado.

Por esta razón se hace en el primer capítulo una revisión de algunos resultados que serán aplicados luego a nuestra teoría, incluyendo la definición y algunas propiedades importantes de la exponencial de una matriz.

En el segundo capítulo recordaremos las propiedades más importantes del polinomio minimal de una matriz y lo usaremos para calcular explícitamente la matriz exponencial.

En el capítulo tercero se darán las definiciones y resultados más significativos de la teoría de control de sistemas lineales y en el cuarto y último capítulo veremos algunas definiciones y resultados sobre sistemas biortogonales, usados para la construcción de los controles.

CAPITULO 1. EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ.

En lo que sigue, consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$(1.1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j + h_i(t) \qquad i=1,2,\ldots,n$$

donde los coeficientes a_{ij} son constantes reales y $h_i(t)$ son funciones conocidas, todas ellas definidas en el mismo intervalo $I=[t_0,t_1]$.

Si $\mathbf{x}$, $\mathbf{h}$ denotan los vectores

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{tr}, \qquad \mathbf{h}=(h_1,h_2,\ldots,h_n)^{tr}$$

y $\mathbf{A}$ la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

entonces el sistema (1.1) puede escribirse de un modo más compacto de la siguiente forma:

$$(1.2) \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}$$

entendiéndose que cuando sea necesario calcular una derivada o una integral de un vector o matriz, estas operaciones se efectuarán sobre cada una de sus componentes.

Recordemos que en el caso en que $\mathbf{h}$ sea el vector nulo, $\mathbf{h}=\mathbf{o}$, el sistema (1.2) es llamado homogéneo.

Si n=1, dicho sistema se reduce a una sola ecuación diferencial muy sencilla que podrá escribirse como

$$(1.3) \qquad \frac{dx}{dt} = ax + h \qquad (a = \text{constante})$$

La ecuación homogénea correspondiente $\frac{dx}{dt} = ax$ admite como solución general:

$$x(t) = \alpha\, e^{ta}$$

donde α es una constante arbitraria cuyo valor está asociado al valor que puede tomar la función $x(t)$ en un punto particular del intervalo I (condición inicial). Por ejemplo, si se elige el extremo inicial de I, $\tau=t_0$, resulta que

$$(1.4) \qquad \alpha = e^{-\tau a}\, x(\tau)$$

y la solución general de la ecuación homogénea resulta ser

$$x(t) = e^{(t-\tau)a}\, x(\tau) \tag{1.5}$$

También se encuentra facilmente la solución general de la ecuación no homogénea (1.3) pues si restamos ax a ambos miembros y los multiplicamos luego por e^{-ta}, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-ta}x(t)\right] = e^{-ta}\, h(t) \tag{1.6}$$

de donde resulta que

$$e^{-ta}\, x(t) = e^{-\tau a}\, x(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{-\eta a}\, h(\eta)\, d\eta \qquad (\text{donde } \tau = t_0)$$

o bien

$$x(t) = e^{(t-\tau)a}\, x(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{-(t-\eta)a}\, h(\eta)\, d\eta \tag{1.7}$$

Con el fin de obtener fórmulas similares para el caso general, se buscará dar sentido a la expresión $e^{t\mathbf{A}}$ partiendo de la definición de la exponencial e^{ta} por la serie

$$1 + t\,a + \frac{t^2}{2!}\, a^2 + \frac{t^3}{3!}\, a^3 + \ldots$$

que es convergente para cualquier valor de t y de a.

Como todas las operaciones algebraicas involucradas tienen sentido si se efectúan con matrices, podemos definir las matrices

$$\mathbf{E}_m(t) = \mathbf{I} + t\,\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\,\mathbf{A}^2 + \ldots + \frac{t^m}{m!}\,\mathbf{A}^m \tag{1.8}$$

El paso siguiente es definir "convergencia de la sucesión de matrices $\mathbf{E}_m(t)$" y para ello introducimos una norma sobre el conjunto de las matrices cuadradas de orden n, por medio de la siguiente definición:

<u>DEFINICION 1.1</u> Si $\mathbf{B}=(b_{ij})$ denota a la matriz que tiene a b_{ij} como elemento en la i-ésima fila y la j-ésima columna, llamaremos <u>norma de $\mathbf{B}$</u> al número real

$$\|\mathbf{B}\| = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| \tag{1.9}$$

Queda a cargo del lector demostrar que esta expresión define realmente una norma, es decir que se verifican las siguientes propiedades:

i) $\|\mathbf{B}\| \geq 0$, $\|\mathbf{B}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

ii) $\|\alpha\mathbf{B}\| = |\alpha|\, \|\mathbf{B}\|$

iii) $\|\mathbf{B}+\mathbf{C}\| \leq \|\mathbf{B}\| + \|\mathbf{C}\|$

⋮

y que valen además las siguientes desigualdades:

a) $|b_{ij}| \leq \|\mathbf{B}\|$ para toda elección de i,j.

b) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\|$

c) $\|\mathbf{A}^k\| \leq \|\mathbf{A}\|^k$

d) $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{x}\|$ donde $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Si $\mathbf{A}(t)$ denota una matriz cuyos elementos son funciones $a_{ij}(t)$, se tiene que

e) $\left\| \int_a^b \mathbf{A}(t)\ dt \right\| \leq \int_a^b \|\mathbf{A}(t)\|\ dt$

f) $\left| \frac{d}{dt} \|\mathbf{A}(t)\| \right| \leq \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \right\|$ (donde estas derivadas existan)

<u>DEFINICION 1.2</u> Dada la sucesión de matrices $(\mathbf{B}_m) = ((b_{ij}^{(m)}))$, diremos que la misma converge a la matriz $\mathbf{B} = (b_{ij})$ y notaremos $\mathbf{B}_m \longrightarrow \mathbf{B}$, si y solo si $\|\mathbf{B}_m - \mathbf{B}\| \longrightarrow 0$, cuando $m \longrightarrow \infty$.

<u>OBSERVACION</u> Se puede verificar inmediatamente que la definición anterior es equivalente a pedir que para cada par de índices (i,j) se verifique que $b_{ij}^{(m)} \longrightarrow b_{ij}$, si $m \longrightarrow \infty$.

Consideremos ahora la sucesión de matrices $((e_{ij}^{(m)}(t)))$ de los elementos que ocupan la (i,j)-ésima posición en las matrices $\mathbf{E}_m(t)$ definidas por (1.8) y mostremos que esta sucesión es convergente para cualquier valor de t. Para ello, bastará mostrar que es una sucesión de Cauchy.

Sean entonces p y q tales que $p>q$ y busquemos estimar el valor de $\left| e_{ij}^{(p)}(t) - e_{ij}^{(q)}(t) \right|$. Usando las propiedades a) y c) dadas anteriormente, obtenemos que

$$\left| e_{ij}^{(p)}(t) - e_{ij}^{(q)}(t) \right| \leq \left\| \frac{t^{q+1}}{(q+1)!}\mathbf{A}^{q+1} + \frac{t^{q+2}}{(q+2)!}\mathbf{A}^{q+2} + \ldots + \frac{t^p}{p!}\mathbf{A}^p \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=q+1}^{p} \frac{|t|^j}{j!} \|\mathbf{A}\|^j$$

El último miembro es el resultado de efectuar las diferencias entre las sumas parciales S_p y S_q del desarrollo en serie de $e^{|t|\alpha}$ con $\alpha=\|A\|$, de modo que se puede asegurar que es tan pequeña como se quiera, si se toma q suficientemente grande. Más aún, se puede asegurar que si t varía sobre un intervalo acotado, la convergencia es uniforme.

Esto nos muestra que la sucesión $E_m(t)$ es convergente, cualquiera sea la matriz A y cualquiera sea el valor de t.

Tiene sentido entonces adoptar la siguiente definición:

DEFINICION 1.3

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}A^k + \ldots$$

Algunas propiedades importantes que se deducen rapidamente de la definición son las siguientes:

a) $e^{0} = I$

b) Si $AB=BA$, entonces $e^{(A+B)}=e^{A}e^{B}$

c) $e^{-A}=(e^{A})^{-1}$

Ya hemos visto que si $m \longrightarrow \infty$, $E_m(t)$ converge a una matriz que hemos llamado e^{tA}, uniformemente en t si $t\in[t_0,t_1]$. Por otra parte, se tiene que

$$\frac{d}{dt}E_m(t) = AE_{m-1}(t)$$

de donde se deduce que $\left(\frac{d}{dt}E_m(t)\right)$ converge a Ae^{tA}, uniformemente en t, si $t\in[t_0,t_1]$.

De estas afirmaciones se deduce, como consecuencia, que

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \tag{1.10}$$

Resulta claro ahora que si $c\in R^n$ es un vector cualquiera,

$$x(t) = e^{tA}c$$

representa la solución general de la ecuación homogénea asociada a (1.2).

En efecto:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d}{dt}e^{tA}\right)c = Ae^{tA}c = Ax$$

y nuevamente $\mathbf{c}$ está relacionado con las condiciones "iniciales" ya que

$$x(t_0) = e^{t_0\mathbf{A}}\,\mathbf{c} \qquad \text{implica que} \qquad \mathbf{c} = e^{-t_0\mathbf{A}}\,x(t_0)$$

y la solución general puede ser escrita en la siguiente forma:

$$x(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\,x(t_0) \tag{1.11}$$

Queda a cargo del lector comprobar que la expresión que se da a continuación expresa la solución <u>general</u> de la ecuación (1.2).

$$x(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\,x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\,\mathbf{h}(\tau)\,d\tau \tag{1.12}$$

CAPITULO 2. EL POLINOMIO MINIMAL DE A Y EL CALCULO DE e^{tA}.

Buscaremos ahora una forma de calcular e^{tA} y para ello haremos uso del polinomio minimal de la matriz $\mathbf{A}$.

Recordemos que se denomina polinomio minimal de la matriz $\mathbf{A}$ al único polinomio mónico (es decir que el coeficiente de la mayor potencia es 1), de grado mínimo, que anula a la matriz $\mathbf{A}$; es decir que aceptamos la siguiente definición:

DEFINICION 2.1 El polinomio

(2.1) $$P(\lambda) = \lambda^m - \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} - \dots - \alpha_1\lambda - \alpha_0$$

será llamado el polinomio minimal de $\mathbf{A}$ si satisface las siguientes condiciones:

a) $P(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$
b) Si $Q(\lambda)$ es otro polinomio mónico tal que $Q(\mathbf{A})=\mathbf{O}$, entonces el grado de Q es mayor o igual a m y en el caso en que sea igual a m, se verifica que $Q=P$.

El teorema de Cayley-Hamilton nos asegura que el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$, es decir el polinomio

(2.2) $$D(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$$

es siempre un anulador de $\mathbf{A}$, es decir que $D(\mathbf{A})=\mathbf{O}$. Este hecho garantiza la existencia del polinomio minimal.

Por otra parte, se puede ver que dicho polinomio es divisor de cualquier polinomio anulador de $\mathbf{A}$, ya que de lo contrario, el máximo común divisor de ambos, que sería un polinomio de grado menor, también sería un anulador de $\mathbf{A}$.

Como consecuencia de este hecho, se deduce que si m es el grado del polinomio minimal P, entonces es siempre $m\leq n$, ya que n es el grado de D.

¿Cómo construir el polinomio minimal?. Si $\mathbf{b}$ es un elemento de una base del espacio y consideramos los vectores

(2.3) $$\mathbf{b}_0=\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}_i=\mathbf{A}\mathbf{b}_{i-1}=\mathbf{A}^i\mathbf{b}, \quad i=1,2,\dots$$

entonces es claro que se encontrará en esta sucesión un primer vector que es combinación lineal de los anteriores, es decir que determinaremos un número r $(1\leq r\leq n)$ y coeficientes γ_0, γ_1, ..., γ_{r-1} tales que

$$\begin{aligned}\mathbf{o} &= \gamma_0\mathbf{b}_0 + \gamma_1\mathbf{b}_1 + \dots + \gamma_{r-1}\mathbf{b}_{r-1} + \mathbf{b}_r = \\ &= \gamma_0\mathbf{b} + \gamma_1\mathbf{A}\mathbf{b} + \dots + \gamma_{r-1}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}^r\mathbf{b} = \\ &= Q_{\mathbf{b}}(\mathbf{A})\mathbf{b}\end{aligned}$$

donde: $$Q_{\mathbf{b}}(\lambda) = \gamma_0 + \gamma_1\lambda + \dots + \gamma_{r-1}\lambda^{r-1} + \lambda^r$$

Si hacemos esto para cada vector $\mathbf{b}$ de la base y consideramos luego el mínimo común múltiplo $P(\lambda)$ de esos polinomios, habremos construido el polinomio minimal buscado.

Un caso particular de interés, será el de aquellas matrices cuyo polinomio minimal coincide con el característico, en cuyo caso son denominadas "cíclicas".

Si el polinomio $P(\lambda)$ dado por (2.1) es el polinomio minimal de $\mathbf{A}$, se deducen dos obvias consecuencias en forma inmediata: la primera es que las matrices $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, ... , $\mathbf{A}^{m-1}$ son linealmente independientes (como elementos del espacio vectorial $\mathcal{M}$, de las matrices cuadradas de orden n); el segundo es que podemos expresar las potencias $\mathbf{A}^k$ ($k\geq m$) como combinaciones lineales de las que recién indicamos, partiendo de

$$\mathbf{A}^m = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \ldots + \alpha_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} \tag{2.4}$$

Si reemplazamos estas potencias de $\mathbf{A}$ en la serie que define a la matriz $e^{t\mathbf{A}}$ y reagrupamos los coeficientes de las mismas potencias de $\mathbf{A}$, obtendremos la siguiente expresión:

$$e^{t\mathbf{A}} = f_0(t)\ \mathbf{I} + f_1(t)\ \mathbf{A} + \ldots + f_{m-1}(t)\ \mathbf{A}^{m-1} \tag{2.5}$$

donde las funciones $f_i(t)$ se obtienen sumando las series de potencias de t que resultan al efectuar la reagrupación de términos. Este hecho nos permite afirmar que estas funciones son analíticas y en consecuencia, que existen sus derivadas de cualquier orden.

Si derivamos (2.5) k veces usando (1.10), obtenemos la siguiente fórmula, válida para todo k:

$$\mathbf{A}^k e^{t\mathbf{A}} = f_0^{(k)}(t)\ \mathbf{I} + \ldots + f_{m-1}^{(k)}(t)\ \mathbf{A}^{m-1} \tag{2.6}$$

En particular, resulta que, si t=0:

$$\mathbf{A}^k = f_0^{(k)}(0)\ \mathbf{I} + \ldots + f_{m-1}^{(k)}(0)\ \mathbf{A}^{m-1} \tag{2.7}$$

cualquiera sea k.

De estas fórmulas se deduce que, para k=0, 1,..., m-1:

$$f_i^{(k)}(0) = \delta_{ik}, \qquad i=0,\ 1,\ldots,\ m-1 \tag{2.8}$$

ya que las matrices $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, ..., $\mathbf{A}^{m-1}$ son linealmente independientes.

Si tomamos k=1 en (2.6) obtenemos que

$$\mathbf{A}\ e^{t\mathbf{A}} = f_0'(t)\ \mathbf{I} + \ldots + f_{m-1}'(t)\ \mathbf{A}^{m-1} \tag{2.9}$$

y por otra parte, multiplicando ambos miembros de (2.5) por $\mathbf{A}$ y usando luego (2.4) resulta que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\ e^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{A}\{f_0(t)\ \mathbf{I} + \ldots + f_{m-1}(t)\ \mathbf{A}^{m-1}\} = \\ &= f_0(t)\ \mathbf{A} + \ldots + f_{m-1}(t)\ \mathbf{A}^m = \\ &= \alpha_0 f_{m-1}\ \mathbf{I} + [f_0(t) + \alpha_1 f_{m-1}(t)]\ \mathbf{A} + \ldots + \\ &\quad + [f_{m-2}(t) + \alpha_{m-1} f_{m-1}(t)]\ \mathbf{A}^{m-1}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Comparando los segundos miembros de (2.9) y (2.10) se deduce que

$$\begin{aligned} f_0'(t) &= \alpha_0 f_{m-1}(t) \\ f_1'(t) &= f_0(t) + \alpha_1 f_{m-1}(t) \\ &\vdots \\ f_{m-1}'(t) &= f_{m-2}(t) + \alpha_{m-1} f_{m-1}(t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Es decir que si llamamos $\mathbf{f}=(f_0,\ldots,f_{m-1})^{tr}$ y $\mathbf{S}$ a la matriz acompañante de P, es decir, a la matriz

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{m-1} \end{bmatrix}$$

entonces, de (2.10) y (2.11) se deduce que $\mathbf{f}$ es solución del problema

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{S}\,\mathbf{f} \qquad \mathbf{f}(0) = (1,\ 0,\ldots,\ 0)^{tr} = \mathbf{e}_1$$

Luego:

$$\mathbf{f}(t) = e^{t\mathbf{S}}\,\mathbf{e}_1 \tag{2.12}$$

Más aún, de (2.8) se desprende que su Wronskiano en $t=0$, coincide con la matriz identidad, lo que prueba que las funciones f_0, $f_1,\ldots,f_{m-1}$, son linealmente independientes.

Aunque algo hemos avanzado, llegamos a un punto en que necesitamos calcular una nueva matriz exponencial, que es el problema que nos proponíamos resolver. Aún cuando la matriz $\mathbf{S}$ tiene una estructura mucho más simple, es una matriz cíclica, cuyo polinomio minimal es el propio $P(\lambda)$.

De otro modo, podemos calcular las funciones f_j de la siguiente forma: de (2.11) se deduce que

$$\begin{aligned} f_0'(t) &= \alpha_0 f_{m-1}(t) \\ f_1''(t) &= f_0'(t) + \alpha_1 f_{m-1}'(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{m-2}^{(m-1)}(t) &= f_{m-3}^{(m-2)}() + \alpha_{m-2} f_{m-1}^{(m-2)}(t) \\ f_{m-1}^{(m)}(t) &= f_{m-2}^{(m-1)}(t) + \ldots + \alpha_{m-1} f_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{aligned} \tag{2.13}$$

es decir que $f_{m-1}(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$f_{m-1}^{(m)}(t)=\alpha_{m-1}f_{m-1}^{(m-1)}(t)+\alpha_{m-2}f_{m-1}^{(m-2)}(t)+\ldots+\alpha_1 f'_{m-1}(t)+\alpha_0 f_{m-1}(t)$$

Esto es:

$$P(D)f_{m-1}(t) = 0 \tag{2.14}$$

donde P(.) es el polinomio minimal de **A** y $D=\frac{d}{dt}$.

Verifica además las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{aligned} &f_{m-1}(0) = f'_{m-1}(0) =\ldots= f_{m-1}^{(m-2)}(0) \\ &f_{m-1}^{(m-1)}(0)=1 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Una vez conocida la función $f_{m-1}(t)$, se pueden encontrar las restantes por medio de las fórmulas

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 1 + \alpha_0 \int_0^t f_{m-1}(\tau)\, d\tau \\ f_1(t) &= \int_0^t f_0(\tau)\, d\tau + \alpha_1 \int_0^t f_{m-1}(\tau)\, d\tau \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{m-2}(t) &= \int_0^t f_{m-3}(\tau)\, d\tau + \alpha_{m-2} \int_0^t f_{m-1}(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{2.16}$$

que se obtienen integrando (2.11) y usando las condiciones iniciales (2.8).

Se verifica facilmente que a partir de (2.16) se pueden obtener las siguientes expresiones, para p=0, 1, ..., m-2 :

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \frac{t^p}{p!} + \int_0^t P_p(t-\tau)\, f_{m-1}(\tau)\, d\tau \\ \text{donde}\quad P_p(\lambda) &= \frac{\alpha_0}{p!}\lambda^p + \frac{\alpha_1}{(p-1)!}\lambda^{p-1} +\ldots+\alpha_{p-1}\lambda + \alpha_p \end{aligned} \tag{2.17}$$

Para concluir esta sección, recordaremos dos generalizaciones del concepto de polinomio minimal de una matriz y un resultado que usaremos en el próximo capítulo.

<u>DEFINICION 2.2</u> Dada la matriz cuadrada **A** y el vector **v**, se llamará polinomio minimal de **v**, respecto de **A**, al único polinomio mónico Q, de grado mínimo, tal que

$$Q(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{o}$$

<u>DEFINICION 2.3</u> Dado el subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathbf{R}^n$ y la matriz cuadrada $\mathbf{A}$, se llamará polinomio minimal de $\mathcal{S}$ respecto de $\mathbf{A}$ al único polinomio mónico R, de grado mínimo, tal que

$$R(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{o}, \qquad \text{para todo } \mathbf{v}\in\mathcal{S}$$

De esta última definición resulta claro que el polinomio minimal de una matriz $\mathbf{A}$ es simplemente el polinomio minimal de todo $\mathbf{R}^n$, respecto de $\mathbf{A}$ y según las observaciones hechas al comenzar este capítulo, es el mínimo común múltiplo de los polinomios minimales de los vectores de una base cualquiera del espacio.

Vale también el siguiente resultado:

<u>PROPOSICION 2.1</u> Sea $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Entonces existe un vector $\mathbf{v}\in\mathcal{S}$ tal que el polinomio minimal de $\mathbf{v}$ es el polinomio minimal de $\mathcal{S}$, respecto de $\mathbf{A}$.

<u>DEMOSTRACION:</u> Seleccionemos en primer lugar un vector $\mathbf{v}\in\mathcal{S}$ cuyo polinomio minimal P, respecto de $\mathbf{A}$ sea de grado máximo. Si la dimensión del espacio $\mathcal{S}$ es 1, no hay nada más que probar, de modo que supondremos que existe al menos un vector $\mathbf{v}^*\in\mathcal{S}$ linealmente independiente de $\mathbf{v}$.

Sea P^* su polinomio minimal y Q el mínimo común múltiplo de P y P^*. Entonces Q admite como divisores a los polinomios minimales de <u>todos</u> los vectores del subespacio $\mathcal{P}$ generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^*$.

Tomemos una familia infinita de vectores en $\mathcal{P}$ tales que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes. Por ejemplo, podrían tomarse los vectores de la forma $\alpha\mathbf{v}+(1-\alpha)\mathbf{v}^*$, con $0\leq\alpha\leq1$.

Si consideramos los polinomios minimales de estos vectores, resulta claro que no pueden ser todos distintos ya que Q admite un número finito de divisores. Es decir que se podrán encontrar dos vectores linealmente independientes en $\mathcal{P}$, con el mismo polinomio minimal $H(\lambda)$.

Se tiene entonces que $H(\mathbf{A})x=\mathbf{o}$ para todo $x\in\mathcal{P}$. En particular si $x=\mathbf{v}$ o si $x=\mathbf{v}^*$. En consecuencia, $gr(P)\leq gr(H)$. Pero si observamos que H es el polinomio minimal de un vector de $\mathcal{S}$ y recordamos la forma en que elegimos $\mathbf{v}$, resulta que $gr(H)\leq gr(P)$, luego P=H.

Es decir que el polinomio P es tal que $P(\mathbf{A})\mathbf{v}^*=\mathbf{o}$. Pero como $\mathbf{v}^*$ es arbitrario, llegamos a la conclusión que $P(\mathbf{A})x=\mathbf{o}$, <u>para todo</u> $x\in\mathcal{S}$. Como ningún polinomio de grado menor podría hacerlo, resulta que P es el polinomio minimal de $\mathcal{S}$, lo que concluye la demostración.

CAPITULO 3. EL PROBLEMA DE CONTROL LINEAL.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz real, n×n, $\mathbf{B}$ una matriz real n×r, $\mathbf{x}(t)$ una función vectorial continua $\mathbf{x}: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ y $\mathbf{u}(t)$ una función vectorial seccionalmente continua $\mathbf{u}: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbf{R}^r$.

De acuerdo a lo que hemos visto en el capítulo I, sabemos ya que el problema

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\, \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\, \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \qquad (\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n \text{ vector dado}) \end{aligned}$$

admite como única solución:

$$(3.2) \qquad \mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\, \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\, \mathbf{B}\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau$$

Supongamos ahora que fijamos un valor T>0 y que $\mathbf{u}$ no es una función fija sino que la podemos determinar a voluntad y utilizarla como un "control" del proceso gobernado por el sistema (3.1).

Diremos entonces que el vector

$$\mathbf{x}_{\mathbf{u},\mathbf{x}_0}(T) = e^{T\mathbf{A}}\, \mathbf{x}_0 + \int_0^T e^{(T-\tau)\mathbf{A}}\, \mathbf{B}\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau$$

es el "estado alcanzable" por el sistema en el tiempo T, cuando se utiliza el control $\mathbf{u}$, partiendo del estado inicial $\mathbf{x}_0$.

En general, un vector $\mathbf{x}_1$ será llamado un "estado alcanzable" en el tiempo T si existe un "control" $\mathbf{u}$ y un vector $\mathbf{x}_0$ tal que

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{\mathbf{u},\mathbf{x}_0}(T)$$

De la fórmula (2) se ve inmediatamente que es suficiente conocer los "estados alcanzables" a partir de $\mathbf{x}_0=\mathbf{o}$, que están definidos por

$$\mathbf{x}(T) = \int_0^T e^{(T-\tau)\mathbf{A}}\, \mathbf{B}\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau$$

ya que si el estado inicial no fuese $\mathbf{o}$, bastaría trasladar todos los vectores sumando el vector fijo

$$e^{T\mathbf{A}}\, \mathbf{x}_0$$

para obtener todos los estados alcanzables partiendo de $\mathbf{x}_0$, de modo que de aquí en adelante, el estado inicial habrá de ser siempre $\mathbf{x}_0=\mathbf{o}$.

Los estados alcanzables son entonces aquellos vectores $\mathbf{x}_1$ de $\mathbf{R}^n$ que satisfacen

$$\mathbf{x}_1 = \int_0^T e^{(T-\tau)\mathbf{A}}\, \mathbf{B}\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau$$

para algún control $\mathbf{u}$, es decir que si llamamos $\mathcal{U}_r$ al espacio vectorial de todas las funciones vectoriales $\mathbf{u}:[0,T]\longrightarrow\mathbf{R}^r$, seccionalmente continuas en $[0,T]$ y $\Phi(\mathbf{u}):\mathcal{U}_r\longrightarrow\mathbf{R}^n$ al operador que asocia a cada control $\mathbf{u}$ el vector

$$x = \int_0^T e^{(T-\tau)\mathbf{A}}\, \mathbf{B}\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau \tag{3.3}$$

entonces el espacio de todos los estados alcanzables resulta ser el rango $\mathcal{R}$ del operador Φ y es claro que es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ pues Φ es un operador lineal.

Nuestro primer objetivo consiste en caracterizar $\mathcal{R}$. En particular, si $\mathcal{R}=\mathbf{R}^n$, se dirá que el sistema es "completamente controlable" en el tiempo T.

Si escribimos (3.3) en la forma

$$x = \int_0^T e^{\tau\mathbf{A}}\, \mathbf{B}\, \mathbf{u}_T(\tau)\, d\tau \tag{3.4}$$

donde $\mathbf{u}_T(\tau)=\mathbf{u}(T-\tau)$, resulta que $\mathbf{u}_T\in\mathcal{U}_r$, de modo que $\mathcal{R}$ coincide con el rango del operador $\Phi_0:\mathcal{U}_r\longrightarrow\mathbf{R}^n$ dado por

$$\Phi_0(\mathbf{u}) = \int_0^T e^{\tau\mathbf{A}}\, \mathbf{B}\, \mathbf{u}(\tau)\, d\tau \tag{3.5}$$

Usando (2.5) obtenemos la siguiente expresión para Φ_0:

$$\Phi_0(\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^T f_j(t)\, \mathbf{A}^j\mathbf{B}\, \mathbf{u}(t)\, dt \tag{3.6}$$

Denotemos ahora con $\mathbf{C}$ la matriz

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B},\ \mathbf{AB},\ \mathbf{A}^2\mathbf{B},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{B}] \tag{3.7}$$

a la que llamaremos "matriz de controlabilidad minimal".

Sea $\mathcal{R}(\mathbf{C})$ el subespacio de $\mathbf{R}^n$ generado por las columnas de $\mathbf{C}$ y $\rho=\rho(\mathbf{C})$ su rango como matriz, es decir, la dimensión de $\mathcal{R}(\mathbf{C})$. Podemos probar entonces el siguiente resultado:

<u>TEOREMA 3.1</u> $\quad \mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbf{C})$

<u>DEMOSTRACION</u>: a) Veamos en primer lugar que $\mathcal{R}(\mathbf{C})\subseteq\mathcal{R}$. Para ello basta ver que todas las columnas de $\mathbf{C}$ son "alcanzables", es decir, que para cada columna de $\mathbf{C}$ es posible hallar un control $\mathbf{u}$ tal que $\Phi_0(\mathbf{u})$ sea exactamente dicha columna.

Sea $\mathbf{e}_q\in\mathbf{R}^r$ el vector $(0,0,\ldots,1,\ldots,0)^{tr}$, con todas sus componentes nulas, excepto un 1 en el q-ésimo lugar. Consideremos además una familia de funciones $\mu_0(t)$, $\mu_1(t),\ldots,$ $\mu_{m-1}(t)$ que verifique la siguiente propiedad:

$$(3.8) \qquad \int_0^T f_j(t)\ \mu_i(t)\ dt = \delta_{ij} = \begin{matrix} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{matrix} \qquad (i,j=0,1,\ldots,m-1)$$

Una familia tal es denominada un sistema biortogonal al sistema $\{f_0,\ldots,f_{m-1}\}$ en el intervalo $[0,T]$ y en el próximo capítulo mostraremos cómo puede ser construido. Aceptemos por el momento la existencia de estas funciones y definamos el control

$$(3.9) \qquad \mathbf{u}_{pq}(t) = \mu_p(t)\ \mathbf{e}_q \qquad p=0,1,\ldots,m-1;\ q=0,1,\ldots,r$$

Tendremos entonces que

$$\mathfrak{F}_0(\mathbf{u}_{pq}) = \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_0^T f_j(t)\mu_p(t)dt\right] \mathbf{A}^j \mathbf{B}\mathbf{e}_q =$$

$$= \mathbf{A}^p \mathbf{B}\mathbf{e}_q$$

Este vector es la q-ésima columna de la matriz $\mathbf{A}^p\mathbf{B}$ y como esto puede hacerse para $p=0,1,\ldots,m-1$, resulta que todos los vectores columnas de $\mathbf{C}$ son alcanzables, utilizando controles de la forma $\mu_p(t)\mathbf{e}_q$, lo que muestra que $\mathcal{R}(\mathbf{C})\subseteq\mathcal{R}$.

b) Veamos ahora que $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}(\mathbf{C})$.

Si $\mathcal{R}(\mathbf{C})=\mathbf{R}^n$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que es posible encontrar un vector $\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$, que sea ortogonal a $\mathcal{R}(\mathbf{C})$. En consecuencia, será ortogonal a todos los vectores columnas de $\mathbf{C}$ y en particular se tendrá que

$$(3.10) \qquad \mathbf{v}^{tr}\ \mathbf{A}^j\mathbf{B} = \mathbf{o}^{tr}$$

Luego, cualquiera sea $\mathbf{u}\in\mathcal{U}_r$, se tiene que

$$\mathbf{v}^{tr}\ \mathfrak{F}_0(\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^T f_j(t)\ \mathbf{v}^{tr}\ \mathbf{A}^j\ \mathbf{B}\ \mathbf{u}(t)\ dt = 0$$

lo que significa que $\mathbf{v}\in\mathcal{R}^\perp$. Hemos probado así que

$$(3.11) \qquad \mathcal{R}(\mathbf{C})^\perp\subseteq\mathcal{R}^\perp$$

lo que es equivalente a lo que queríamos demostrar.

Una observación que se desprende inmediatamente de este resultado es que el espacio de los estados alcanzables es independiente de T, ya que si se revisa la demostración anterior se puede ver que el valor de T no juega ningún papel particular. En adelante hablaremos de "estados alcanzables" o de "sistemas completamente controlables", sin agregar la frase "en el tiempo T", ya que vale el siguiente corolario.

<u>COROLARIO 3.1</u> El espacio de todos los estados alcanzables $\mathcal{R}$ es el mismo, cualquiera sea el valor de $T>0$.

También se deducen inmediatamente los siguientes resultados:

<u>COROLARIO 3.2</u> El sistema (3.1) es completamente controlable si y <u>solo si $\rho=n$</u>.

COROLARIO 3.3 Si $mr<n$ el sistema (3.1) no puede ser completamente controlable.

Resulta también de interés mencionar la siguiente caracterización de $\mathcal{R}$, que surge como consecuencia inmediata del teorema 3.1.

COROLARIO 3.4 $\mathcal{R}$ es el menor subespacio invariante por $\mathbf{A}$, que contiene a $\mathcal{R}(\mathbf{B})$, que es el subespacio de $\mathbf{R}^n$ generado por las columnas de $\mathbf{B}$.

Si se revisa la demostración de la parte a) del teorema 3.1 y los controles $\mathbf{u}_{pq}(t)$ definidos en (3.9), que permiten alcanzar cualquier columna de $\mathbf{C}$, se puede observar que también vale el siguiente resultado:

COROLARIO 3.5 Para llevar el sistema (3.1) a cualquier estado alcanzable es necesario determinar a lo sumo m funciones, que permiten construir los controles necesarios.

Para concluir este capítulo, veremos que, en el caso en que el sistema (3.1) sea completamente controlable y la matriz $\mathbf{A}$ sea cíclica, es posible reducir al mínimo la dimensión del espacio de controles, ya que cualquier control $\mathbf{u}$ podrá ser obtenido por medio de $\mathbf{u}(t)=\mu(t)\mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}$ es un vector fijo y $\mu(t)$ una función escalar.

Llamemos $Q(.)$ al polinomio minimal de $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ respecto de $\mathbf{A}$ y supongamos que es de grado q. Es claro que siempre se tiene que $q\leq m$, pero también vale el siguiente resultado:

LEMA 3.1 Si el sistema (3.1) es completamente controlable, entonces $q=m$ y en consecuencia $Q(\lambda)=P(\lambda)$.

DEMOSTRACION: Sea $\mathcal{N}$ el núcleo de $Q(\mathbf{A})$ y ν su dimensión. Por la definición de Q resulta que $\mathcal{N}\supseteq\mathcal{R}(\mathbf{B})$.

Pero además $\mathcal{N}$ es invariante por $\mathbf{A}$ ya que si $x\in\mathcal{N}$, $Q(\mathbf{A})x=\mathbf{o}$ y entonces $Q(\mathbf{A})\mathbf{A}x = \mathbf{A}Q(\mathbf{A})x = \mathbf{o}$; es decir que $\mathbf{A}x\in\mathcal{N}$.

Luego, según el corolario 3.4, tendremos que $\mathcal{N}\supseteq\mathcal{R}$ y en consecuencia $\nu\geq\rho$. Si el sistema (3.1) es completamente controlable se tiene que $\rho=n$, luego también $\nu=n$.

Pero esto significa que $\mathcal{N}=\mathbf{R}^n$, es decir que $Q(\mathbf{A})=\mathbf{O}$. Por ser Q un anulador de $\mathbf{A}$, será divisible por P y en consecuencia $q\geq m$, lo que concluye la demostración.

TEOREMA 3.2 Si el sistema (3.1) es completamente controlable y $\mathbf{A}$ es una matriz cíclica, entonces existe un vector $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^r$ tal que cualquier punto del espacio puede ser alcanzado usando un control $\mathbf{u}$ de la forma $\mathbf{u}(t)=\mu(t)\mathbf{b}$, donde $\mu(t)$ es una función escalar.

DEMOSTRACION: De acuerdo con las hipótesis hechas y según el lema 3.1, tendremos que q=m=n y el polinomio minimal de $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ respecto de $\mathbf{A}$ coincidirá con el polinomio característico de $\mathbf{A}$, $P(\lambda)$.

Por la proposición 2.1 existe un vector $\mathbf{v}\in\mathcal{R}(\mathbf{B})$ tal que su polinomio minimal respecto de $\mathbf{A}$ coincide con $P(\lambda)$. Pero esto significa que los vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{Av}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{v},\dots,\mathbf{A}^{m-1}\mathbf{v}$, son linealmente independientes ya que de lo contrario habría un polinomio q de grado menor que n tal que $q(\mathbf{A})\mathbf{v}=\mathbf{o}$.

Por otra parte, como $\mathbf{v}\in\mathcal{R}(\mathbf{B})$, se puede asegurar que existe un vector $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^r$ tal que $\mathbf{v}=\mathbf{Bb}$ y resulta que de acuerdo a lo anterior, los vectores $\{\mathbf{A}^j\mathbf{Bb},\ j=0,1,\dots,n-1\}$ forman una base de $\mathbf{R}^n$.

Para concluir la demostración sólo nos falta mostrar que dado $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, siempre es posible determinar una función escalar $\mu(t)$ tal que si $\mathbf{u}=\mu\mathbf{b}$, entonces $\Phi_0(\mathbf{u})=x$. Pero

$$\Phi_0(\mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\int_0^T f_j(t)\ \mu(t)\ dt\right]\mathbf{A}^j\mathbf{Bb}$$

y el vector x puede escribirse como $\mathbf{x}=\sum_{j=0}^{n-1} x_j\mathbf{A}^j\mathbf{Bb}$, de modo que lo que es necesario probar es que podemos determinar una función μ tal que, dados $x_0, x_1,\dots,x_{n-1}$, se verifica que

$$\int_0^T f_j(t)\ \mu(t)\ dt = x_j \qquad j=0,1,\dots,n-1 \tag{3.12}$$

Este último problema es conocido como "problema de momentos, finito" y es fácil hallar una solución partiendo del sistema biortogonal a $\{f_j\}$ dado en (3.8). En efecto, si tomamos

$$\mu(t) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j\ \mu_j(t) \tag{3.13}$$

resulta claro, usando (3.8), que μ satisface (3.12) pues

$$\int_0^T f_j(t)\ \mu(t)\ dt = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \left[\int_0^T f_j(t)\ \mu_i(t)\ dt\right] = \sum_{i=0}^{n-1} x_i\ \delta_{ij} = x_j$$

lo que concluye la demostración.

CAPITULO 4. SOBRE SISTEMAS BIORTOGONALES.

Empleando la terminología de los espacios de Hilbert (pensando en particular en $L^2[0,T]$) diremos que dos funciones f y g son ortogonales en el intervalo $[0,T]$ si se verifica que

$$\int_0^T f(t)\, g(t)\, dt = 0. \tag{4.1}$$

Más aún, llamaremos "norma" de la función f al número real

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2\, dt} \tag{4.2}$$

El problema que queremos resolver aquí es el siguiente:

Dado el conjunto de funciones $\mathcal{F}=\{f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}\}$, definidas en $[0,T]$, linealmente independientes, (es decir que la única forma de lograr que una combinación lineal de las mismas nos dé la función nula es tomando todos los coeficientes de la combinación lineal iguales a cero), construir una familia de funciones $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}\}$, también definidas en $[0,T]$ y tales que

$$\int_0^T f_i(t)\, \mu_j(t)\, dt = \delta_{ij}, \qquad i,j=0,1,\ldots,m-1 \tag{4.3}$$

Tal familia será llamada un sistema biortogonal a $\mathcal{F}$.

Veamos en primer lugar que es posible construir tal familia, por combinaciones lineales de los elementos de $\mathcal{F}$. Es decir, veamos que es posible determinar, para $j=0,1,\ldots,m-1$, coeficientes α_{jk}, $k=0,1,\ldots,m-1$, tales que

$$\mu_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{jk}\, f_k(t) \tag{4.4}$$

En efecto, si multiplicamos (4.4) por $f_i(t)$ $(i=0,1,\ldots,m-1)$ e integramos en $[0,T]$, resultará que para cada índice j, los coeficientes α_{jk} deberán satisfacer el sistema

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{ik}\, \alpha_{jk} = \delta_{ij}, \qquad i=0,1,\ldots,m-1 \tag{4.5}$$

donde

$$a_{ik} = \int_0^T f_i(t)\, f_k(t)\, dt$$

La matriz de este sistema de ecuaciones, es decir, la que tiene por elementos estos números a_{ik}, es conocida como matriz de Gram del sistema $\mathcal{F}$ y será denotada por $\mathbf{G}(f_0, f_1, \ldots, f_{m-1})$ mientras que su determinante, llamado el gramiano del sistema $\mathcal{F}$, será denotado por $g(f_0, f_1, \ldots, f_{m-1})$.

Si reemplazamos las funciones f_j por combinaciones lineales de la forma

$$(4.6) \qquad f^*_j(t) = d_{j,0}f_0(t) + \ldots + d_{j,m-1}f_{m-1}(t), \qquad j=0,1,\ldots,m-1$$

es fácil ver, usando las propiedades básicas del producto de matrices, que si $\mathbf{D}=(d_{ij})$:

$$(4.7) \qquad \mathbf{G}(f^*_0, f^*_1,\ldots, f^*_{m-1}) = \mathbf{D}\ \mathbf{G}(f_0, f_1,\ldots,f_{m-1})\ \mathbf{D}^{tr}$$

De (4.7) se deduce la siguiente relación:

$$(4.8) \qquad g(f^*_0, f^*_1,\ldots, f^*_{m-1}) = (\det \mathbf{D})^2\ g(f_0, f_1,\ldots,f_{m-1})$$

Como las funciones del conjunto $\mathcal{F}$ son linealmente independientes, se puede usar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt y determinar los coeficientes d_{ij} de modo que

$$(4.9) \qquad \begin{array}{l} d_{ii}>0; \qquad d_{ij} = 0 \text{ si } j>i \\ \displaystyle\int_0^T \left[f^*_i(t)\right]^2 dt = 1; \qquad \int_0^T f^*_i(t)\ f^*_j(t)\ dt = 0 \text{ si } i\neq j \end{array}$$

Para esta particular elección de las funciones f^*_i, resulta que su matriz de Gram es la matriz identidad y $\mathbf{D}$ es una matriz triangular tal que $\det \mathbf{D} = d_{0,0}d_{1,1}\cdots d_{m-1,m-1} > 0$.

Luego, de (4.8) se deduce que

$$(4.10) \qquad 1 = (\det \mathbf{D})^2\ g(f_0,f_1,\ldots,f_{m-1})$$

lo que prueba que $g(f_0,f_1,\ldots,f_{m-1}) > 0$ y como consecuencia, que el sistema (4.5) admite una única solución posible, para cada $j=0,1,\ldots,m-1$.

Esto concluye la demostración de la siguiente proposición:

<u>PROPOSICION 4.1</u> Si $\mathcal{F}=\{f_0,\ldots,f_{m-1}\}$ es un conjunto de funciones definidas en $[0,T]$, linealmente independientes; siempre es posible determinar un único sistema biortogonal $\{\mu_0,\ldots,\mu_{m-1}\}$ cuyos elementos se obtienen como combinaciones lineales de las funciones de $\mathcal{F}$.

Es claro que si se elimina la restricción de que las funciones $\{\mu_j\}$ se expresen como combinaciones lineales de las $\{f_i\}$, entonces ya no se tendrá unicidad para la solución del problema, pues si elegimos una familia de funciones $\{\nu_j\}$ tales que <u>cada una de ellas sea ortogonal a todas</u> las $\{f_j\}$, entonces el sistema $\{\mu_j+\nu_j\}$ es también biortogonal a $\mathcal{F}$.

Recíprocamente, si $\{\mu_j\}$ y $\{\mu^*_j\}$ son dos sistemas biortogonales a $\mathcal{F}$, entonces las funciones $\nu_j=\mu_j-\mu^*_j$ son ortogonales a todos los elementos de $\mathcal{F}$ y en consecuencia, a las propias funciones μ_j.

Esto permite probar el siguiente resultado:

PROPOSICION 4.2 El sistema biortogonal a $\mathcal{F}$, determinado por (4.4), está constituido por funciones que tienen la menor norma posible y en tal sentido, será designado como "sistema biortogonal minimal".

DEMOSTRACION: Si $\{\mu_j^*\}$ es otro sistema biortogonal a $\mathcal{F}$, podemos escribir $\mu_j^*=\mu_j+\nu_j$, con ν_j ortogonal a μ_j, de modo que

$$\|\mu_j^*\|^2 = \int_0^T [\mu_j^*(t)]^2\,dt = \int_0^T [\mu_j(t)+\nu_j(t)]^2\,dt =$$

$$= \int_0^T [\mu_j(t)]^2\,dt + \int_0^T [\nu_j(t)]^2\,dt \geq \|\mu_j\|^2$$

como queríamos demostrar.

Para concluir este capítulo, calcularemos las normas de las funciones del sistema biortogonal optimal.

PROPOSICION 4.3 Sea μ_j la j-ésima función del sistema biortogonal a $\mathcal{F}$, dada por (4.4) y (4.5). Se tiene entonces que

$$\|\mu_j\|^2 = \frac{g(f_0,f_1,\ldots,f_{j-1},f_{j+1},\ldots,f_{m-1})}{g(f_1,\ldots,f_{m-1})} \tag{4.11}$$

DEMOSTRACION: Llamemos $\mathcal{E}_j$ al espacio vectorial generado por $\{f_i, i\neq j\}$. Mostraremos en primer lugar que $\|\mu_j\|$ es el inverso de la "distancia" de f_j al espacio $\mathcal{E}_j$ y luego calcularemos esa "distancia".

Como los elementos de $\mathcal{F}$ son linealmente independientes, es claro que f_j no pertenece a $\mathcal{E}_j$. Podemos escribir entonces

$$f_j = \eta_j + \nu_j \tag{4.12}$$

con $\eta_j\in\mathcal{E}_j$ y ν_j ortogonal a todos los elementos de $\mathcal{E}_j$, en particular, a todos los f_i, con $i\neq j$.

Sea

$$\mu_j^* = \frac{1}{\|\nu_j\|^2}\,\nu_j \tag{4.13}$$

Entonces

$$\int_0^T \mu_j^*(t)\, f_i(t)\,dt = 0 \quad \text{si } i\neq j. \tag{4.14}$$

En consecuencia, también vale que

$$\int_0^T \mu_j^*(t)\, \eta_j(t)\,dt = 0$$

Luego:

$$(4.15) \qquad \int_0^T \mu_j^*(t)\ f_j(t)\ dt = \int_0^T \mu_j^*(t)\ \nu_j(t)\ dt =$$

$$= \frac{1}{\|\nu_j\|^2} \int_0^T [\nu_j(t)]^2\ dt = 1$$

De (4.12) y (4.13) se deduce que μ_j^* es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{F}$. Por otra parte, de (4.14) y (4.15) resulta que μ_j^* satisface el correspondiente sistema lineal (4.5).

Como éste admite una única solución, se deduce que $\mu_j^* = \mu_j$ y como consecuencia de (4.12), que

$$(4.16) \qquad \|\mu_j\| = 1/\|\nu_j\|$$

Demostraremos por fin la última afirmación hecha al comienzo, que es un hecho básico de la teoría de aproximación en espacios de Hilbert.

Para simplificar la notación, haremos la demostración para el caso j=m-1, dejando a cargo del lector la adaptación de la misma al caso general.

Como $\eta_{m-1}\in\mathcal{E}_{m-1}$, podrá escribirse en la forma

$$(4.17) \qquad \eta_{m-1}(t) = \beta_0\ f_0(t) + \ldots + \beta_{m-2}\ f_{m-2}(t)$$

Si multiplicamos por $f_i(t)$ $(i=0,1,\ldots,m-2)$, integramos en $[0,T]$ y llamamos $\beta_{m-1}=-1$, resulta que estos números β_i satisfacen las m-1 ecuaciones lineales siguientes:

$$(4.18) \quad a_{i,0}\beta_0 +\ldots+ a_{i,m-2}\beta_{m-2} + a_{i,m-1}\beta_{m-1} = 0 \qquad (i=0,1,\ldots,m-1)$$

$$\text{con} \quad a_{i,m-1} = \int_0^T f_i(t)\ \eta_{m-1}(t)\ dt$$

y donde los restantes $a_{i,k}$ son los elementos de la matriz de Gram del sistema $\{f_0,\ldots,f_{m-2}\}$.

Por otra parte, si tenemos en cuenta que

$$\int_0^T \nu_{m-1}(t)\,\eta_{m-1}(t)dt=0,$$

de (4.12) se deduce que

$$\|\nu_{m-1}\|^2 = \|f_{m-1}-\eta_{m-1}\|^2 = \int_0^T [f_{m-1}(t)-\eta_{m-1}(t)][f_{m-1}(t)-\eta_{m-1}(t)]dt =$$

$$= \int_0^T [f_{m-1}(t)-\eta_{m-1}(t)]\ f_{m-1}(t)\ dt - \int_0^T \nu_{m-1}(t)\ \eta_{m-1}(t)\ dt =$$

$\vdots$

$$= \int_0^T [f_{m-1}(t)]^2\, dt - \int_0^T \eta_{m-1}(t)\, f_{m-1}(t)\, dt$$

Es decir que, según (4.17):

$$(4.19) \qquad a_{n-1,0}\beta_0 + \dots + a_{m-1,m-2}\beta_{m-2} + (a_{m-1,m-1} - \|v_{m-1}\|^2)\beta_{m-1} = 0$$

$$\text{donde} \qquad a_{m-1,i} = \int_0^T f_{m-1}(t)\, f_i(t)\, dt, \quad i=0,1,\dots,m-1$$

Llegamos así a la conclusión que los números β_0, $\beta_1,\dots$, β_{m-1}, satisfacen el sistema lineal homogéneo de m ecuaciones dado por (4.18) y (4.19). Este sistema admite una solución no trivial, ya que $\beta_m=-1\neq 0$; luego su determinante debe ser nulo. Esto es:

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,m-2} & a_{0,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-2,0} & \dots & a_{m-2,m-2} & a_{m-2,m-1} \\ a_{m-1,0} & \dots & a_{m-1,m-2} & a_{m-1,m-1} - \|v_{m-1}\|^2 \end{vmatrix} = 0$$

Si escribimos los m-2 primeros elementos de la última columna en la siguiente forma: $a_{j,m-1} = a_{j,m-1} - 0$, podemos expresar la igualdad anterior del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,0} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,m-2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-2,0} & \dots & a_{m-2,m-2} & 0 \\ a_{m-1,0} & \dots & a_{m-1,m-2} & \|v_{m-1}\|^2 \end{vmatrix}$$

que es equivalente a:

$$g(f_0,\dots,f_{m-1}) = \|v_{m-1}\|^2\, g(f_0,\dots,f_{m-2})$$

lo que concluye la demostración.