INFORME TECNICO INTERNO

N°. 18

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

I.T.I. Nº 18

PREPUBLICACIÓN

ACOTACIONES VECTORIALES DE OPERADORES DE CALDERON-ZYGMUND EN ESPACIOS DE TIPO HOMOGENEO

JOSE LUIS TORREA HERNANDEZ

INMABB

UNS-CONICET

1988

PREFACIO

Estas notas corresponden a una serie de conferencias impartidas en la Universidad Nacional del Sur en Septiembre de 1986 con una ayuda de la Subdirección General de Cooperación Internacional del Ministerio de Educación y Ciencia de España.

Quiero agradecer a la Universidad Nacional del Sur el permitirme dar estas conferencias de Análisis Armónico en un ambiente tan extremadamente agradable.

Madrid
Agosto 1987.

SUMMARY

We study vector-valued Calderón-Zygmund theory on spaces of homogeneous type. This study allows us to obtain in this context the Fefferman-Stein theorem concerning with the vector-valued inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator.

Moreover, given the parabolic differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (-1)^{m/2} P(D) u = f,$$

where $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ is an homogeneous polynomial of even degree m such that $P(\xi)$ has negative real part for real ξ, we obtain that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_0^{t-\varepsilon} \int_{R^n} S(x-y,t-s)\, f_j(y,s)\, dy\, ds - D_x^\alpha u_j(x,t) \right|^q = 0$$

a.e. (x,t) for $(f_j) \in L^p_{1^q}(R^n x(0,\infty))$, $1 \leq p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m$, where $s(x,t) = D_x^\alpha \Gamma(x,t)$ and $\Gamma(x,t)$ is a fundamental solution of the equation $\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{m/2} P(D)u$.

Finally if U, V are topological spaces and α, β are positive Borel measures on the product spaces $R^n \times U$ and $R^n \times V$ respectively.

Given set functions ϕ and ψ we define the maximal operator

$$Tf(x,v) = \sup_{Q:\ (x,v) \in \Psi(Q)} \frac{1}{|Q|} \int_{\Phi(Q)} |f(y,u)|\, d\alpha(y,u)$$

some vector-valued inequalities are obtained.

INTRODUCCION

El propósito de estas notas es exponer algunas aplicaciones recientes de la teoría de los operadores de Calderón-Zygmund.

En cierto modo podría decirse que constituyen una continuación de la monografía **Integrales Singulares Vectoriales. Algunas aplicaciones de una versión actualizada de un resultado de A. Benedek, A. P. Calderón y R. Panzone.** Esta monografía lleva el número 12 de la presente colección y nos referiremos a ella a través de la abreviatura ISV.

La organización de las notas es como sigue:

En la sección 1 se describen los espacios de tipo homogéneo que será el ambiente general en el cual daremos varias aplicaciones. A continuación se establece una descomposición de Calderón-Zygmund. Esta descomposición (parte e idea esencial de la sección 1) permitirá el tratamiento con pesos de los operadores de Calderón-Zygmund. Se da un ejemplo para ver que otras descomposiciones de Calderón-Zygmund no son adecuadas para el tratamiento con pesos de los operadores de Calderón-Zygmund.

En la sección 2 se establecen algunos teoremas de acotaciones vectoriales para operadores de Calderón-Zygmund en espacios de tipo homogéneo. En las aplicaciones que vamos a hacer no tenemos acotaciones con pesos, sin embargo para la demostración de los teoremas sí que hacen falta acotaciones con peso (ver proposición 2.4) y es ahí donde juega un papel crucial la descomposición de la sección 1.

En la sección 3 se demuestra en primer lugar el teorema de acotación vectorial para el operador maximal de Hardy-Littlewood. Este teorema es debido a Fefferman y Stein en el caso de R^n y una demostración utilizando ideas de integrales singulares puede verse en ISV. A continuación se ve que el operador

$$f \to Df = D_x^{\alpha} u,$$

con u y f ligadas por la ecuación parabólica $\frac{\partial u}{\partial t} - (-1)^{m/2} P(D)u = f$, es un operador de Calderón-Zygmund en un espacio de tipo homogéneo y por tanto satisface unas buenas acotaciones, ello permite dar sentido a algunas de las derivadas de u.

Los potenciales de Riesz en espacios de tipo homogéneo son tratados en la sección 4. La consideración en espacios producto de estos potenciales junto con un resultado de A. Benedek y R. Panzone permiten una visión nueva de algunos resultados sobre ecuaciones de Navier-Stokes.

La sección 5 y última estudia un operador maximal general que incluye como casos particulares otros conocidos. Se estudian acotaciones con peso y vectoriales. Es de destacar que para el estudio de acotaciones vectoriales se hace uso de una teoría de operadores de Calderón-Zygmund que aplican funciones de una variable en funciones de varias variables, además la condición de suavidad del núcleo (condición de Hörmander) debe de ser modificada ligeramente, ver teoremea (5.20).

Todos los resultados expuestos son fruto de trabajo conjunto con mi amigo y colega Francisco Ruiz.

1. ESPACIOS DE TIPO HOMOGENEO. DESCOMPOSICION DE CALDERON-ZYGMUND.

Sea X un conjunto. Una seudométrica ρ en X es una función $\rho: X \times X \to [0,\infty)$ tal que

i) $\rho(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad y,x \in X$

iii) Existe una constante $k \geq 1$ tal que

$$\rho(x,y) \leq k(\rho(x,z) + \rho(z,y)) \quad x,y,x \in X.$$

Llamaremos **bola con centro x y radio r** al conjunto

$$B(x,r) = \{y \in X: \rho(x,y) < r\}.$$

Dado $\lambda > 0$ denotaremos por $\lambda B(x,r)$ a la bola $B(x,\lambda r)$.

(1.1) DEFINICION. *Un espacio de tipo homogéneo es un espacio topológico X dotado de una seudométrica ρ y una medida de Borel μ tales que*

i) La familia $\{B(x,r): x \in X, r > 0\}$ es una base para la topología de X.

ii) Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu(B(x,2r)) \leq C\mu(B(x,r)) \quad x \in X, r > 0.$$

Siempre que se habla de espacios de tipo homogéneo se cita como referencia básica a [7]. Sin embargo podría decirse que, dada la cantidad y calidad de los trabajos que sobre este tema han publicado distintos autores argentinos (ver la lista de referencias), nos encontramos ante algo que podría llevar el sello de "Industria Argentina".

El siguiente lema de cubrimiento puede verse en [7]

(1.2) LEMA. *Sea $\mathcal{E}$ un conjunto acotado de X y sea $\{B(x,r(x)): x \in \mathcal{E}\}$ un cubrimiento de $\mathcal{E}$. Entonces existe una sucesión de bolas disjuntas $\{B(x_i,r(x_i)): i = 1, 2, \ldots\}$ y una constante k que solo depende del espacio tal que la familia $\{B(x_i,kr(x_i)): i = 1, 2, \ldots\}$ es un cubrimiento de $\mathcal{E}$.*

Dado un conjunto Ω, denotaremos por $|\Omega|$ la medida $\mu(\Omega)$ y por $L^p_F(X)$ (donde F es un espacio de Banach) el espacio de Bochner-Lebesgue de funciones valoradas en F, fuertemente medibles y tales que $\int_X \|f(x)\|_F^p \, d\mu(x) < +\infty$. Si $A = C$ escribiremos simplemente $L^p(X)$.

(1.3) DEFINICION. *Sea $f: X \to C$ una función integrable en bolas (es decir localmente integrable). Se define el operador maximal de Hardy-Littlewood como*

$$Mf(x) = \sup\{ \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(x)| \, d\mu(y) : r > 0\} \qquad x \in X.$$

Es bien conocido, ver [ ], que el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado de $L^p(X)$ en $L^p(X)$ si $p > 1$ y de $L^1(X)$ en $L^1(X)$ - débil.

Además, si suponemos la existencia de algún adecuado conjunto denso (por ejemplo las funciones continuas con soporte acotado) entonces se verifica el teorema de diferenciación de Lebesgue. Supondremos que nuestros espacios de tipo homogéneo son tales que satisfacen esta condición.

(1.4) Ejemplos de espacios de tipo homogéneo.

(1.4.1) $X = R^n$, $d(x,y) = |x - y|$ donde $|.|$ es una norma en R^n, μ = medida de Lebesgue.

(1.4.2) $X = R^n$, $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^{\alpha_i}$, $0 < \alpha_i < \infty$, μ = medida de Lebesgue.

(1.4.3) $X = \{2^k : k \in Z\}$, $\mu(2^k) = 2^{|k|}$ y $d(2^k, 2^l) = |2^k - 2^l|$.

(1.5) NOTA. El objetivo es producir una teoría de integrales singulares paralela a la desarrollada en I.S.V. Allí la herramienta básica era la descomposición de Calderón-Zygmund, para producirla se hacía uso de los cubos diádicos. En el caso de los espacios de tipo homogéneo no existen cubos diádicos por tanto la descomposición debe de intentarse por otro camino.

Usualmente, ver [7], se hace una descomposición de Whitney del conjunto

$$E_\lambda = \{x : Mf(x) > \lambda\}.$$

Para ello dado $x \in E_\lambda$ se escoge la bola $B(x, r(x))$ donde $r(x)$ es esencialmente $\frac{1}{2}\rho(x, E_\lambda^c)$. Posteriormente se aplica el lema de cubrimiento (1.2) y así se tiene una familia de bolas que permiten llegar a una descomposición de Calderón-Zygmund útil para una teoría de integrales singulares **sin pesos**, ver[7].

Puede verse en I.S.V. que uno de los puntos claves en la teoría con pesos era que los promedios que aparecían en la descomposición clásica satisfaciesen

$$\lambda < \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f.$$

Utilizando la descomposición de Whitney, esto puede fallar en los espacios de tipo homogéneo. Para verlo basta tomar en el ejemplo (1.4.3)

$$f = \delta_8, \qquad \lambda = \frac{9}{25}$$

es fácil ver que

$$E_{\frac{9}{25}} = \{x: Mf(x) > \tfrac{9}{25}\} = \{2^2, 2^3\}$$

pero cualquier $B(2^2,r)$ con $r < \rho(2^2, E^c_{\frac{9}{25}})$ es tal que

$$\frac{1}{|B(2^2,r)|}\int_{B(2^2,r)} f = 0.$$

Por tanto, necesitamos intentar otro tipo de descomposición. La nueva descomposición cuyos antecedentes pueden verse en [10] la expondremos mediante dos lemas consecutivos. Previamente recordemos la definición de pesos A_p

(1.6) DEFINICION. *Sea w una función medible y positiva en X. Diremos que $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, si*

$$(1.6.1) \qquad \left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-p'/p}dx\right) \leq C$$

para toda bola B de X.
Diremos que $w \in A_1$ si

$$(1.6.2) \qquad Mw(x) \leqq Cw(x) \quad \text{en casi todo } x$$

A los ínfimos de las constantes en (1.6.1) y (1.6.2) los denotaremos por $C_p(w)$ *y* $C_1(w)$.

Dado un conjunto E y un peso w denotaremos por $w(E) = \int_E w(x)\,dx$.

(1.7) LEMA. *Sea* $w \in A_p$, $1 \leqq p \leqq \infty$. *Sea* f *una función positiva con soporte acotado, tal que* $f \in L^p(X,w)$. *Sea*

$$(1.7.1) \qquad \lambda > \left|\frac{C_p(w)}{w(X)}\right|^{1/p} \|f\|_{L^p(X,w)} \qquad (\lambda > 0 \text{ si } w(X) = \infty).$$

Entonces existe una sucesión de bolas disjuntas $\{B_i\}$ *en* X *tal que*

$$(a) \qquad \lambda < \frac{1}{|B_i|}\int_{B_i} f < C\lambda \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots$$

(b) Existe una constante k tal que $\{kB_i\}$ *es un cubrimiento de*

$$\mathcal{E}_\lambda = \{x\colon Mf(x) > \lambda\}.$$

(1.8) LEMA (Descomposición de Calderón-Zygmund). *Sea* $w \in A_p$, $1 \leqq p < \infty$.

Sea f *una función positiva con soporte acotado y tal que* $f \in L^p(X,w)$. *Sea* λ *verificando (1.7.1).*

Entonces existe una sucesión de conjuntos disjuntos $\{Q_i\}$ *en* X *tal que*

(a) $f(x) \leqq \lambda$ *en casi todo* $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$.

(b) Existen dos constantes c, C *tales que*

$$c\lambda < \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f \leqq C\lambda \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots$$

(c) Para todo i

$$B_i \subset Q_i \subset kB_i$$

donde k y B_i son las que aparecen en el lema (1.7).

(1.9) NOTA. Antes de pasar a la demostración de estos lemas veamos como del lema (1.8) se deduce una descomposición de Calderón-Zygmund para f y λ satisfaciendo (1.7.1). Basta descomponer f en f = g + b donde

$$g(x) = f(x) \quad \text{si } x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$$

$$g(x) = \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f \quad \text{si } x \in Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$b(x) = f(x) - g(x) = \sum_i \left(f(x) - \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f\right)\chi_{Q_i}(x) = \sum_i b_i(x)$$

los Q_i son los que aparecen en el lema (1.8) pero asociados a $\|f\|$.

(1.10) NOTA. Si se da por válido el lema (1.7) y se define la familia de conjuntos $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ como

$$Q_1 = kB_1 \setminus \bigcup_{j>1} B_j$$

$$Q_n = kB_n \setminus \left[\left(\bigcup_{j<n} Q_j\right) \cup \left(\bigcup_{j>n} B_j\right)\right]$$

es fácil comprobar que dicha familia satisface el lema (1.8). Por tanto solo falta probar (1.7).

DEMOSTRACION DE (1.7). Dado $x \in E_\lambda$ se considera el conjunto no vacío

$$F_{x,\lambda} = \{r: \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f > \lambda\}.$$

Si $B = B(x,r)$ es una bola tal que $\frac{1}{|B|}\int_B f > \lambda$ entonces teniendo en cuenta (1.7.1) se tiene:

$$\int_B w(x)\, dx \leq \frac{1}{\lambda^p} (\int_B w(x)\, dx)(\frac{1}{|B|} \int_B f)^p \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^p} (\int_B w(x)\, dx)(\frac{1}{|B|} \int_B f^p\, w)(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-p'/p})^{p/p'} \leq$$

$$\leq \frac{C_p(w)}{\lambda^p} \int_X |f|^p w < \mu(X).$$

Por tanto el conjunto está acotado superiormente. Sea $r_\lambda(x) = \sup F_{x,\lambda}$ y consideremos el cubrimiento

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in E} B(x, r_\lambda(x)).$$

Nuestro propósito es aplicar el lema (1.2) para ello es preciso que E_λ sea un conjunto acotado. Si esto es así (lo veremos a continuación) existirá una sucesión de bolas disjuntas

$$\{B_i\} = \{B(x_i, r_\lambda(x_i))\}$$

tales que kB_i cubran a E_λ y por construcción

$$\lambda < \frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} f.$$

Por último teniendo en cuenta la propiedad de duplicación de la medida y la definición de $r_\lambda(x_i)$ se tiene que

$$\frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} f \leq \frac{c}{|kB_i|} \int_{kB_i} f < c\lambda.$$

Veamos finalmente que E_λ es acotado.

Supongamos que X no es acotado y que el soporte de f está contenido en $B(x_0, r_0)$.

Sea n tal que $\frac{n}{2} + k < n$, siendo k la constante de la seudométrica del espacio. Veamos que $E_\lambda \subset B(x_0, nr_0)$.

Sea $y \notin B(x_0, nr_0)$, entonces

$$B(y, \frac{n}{2k} r_0) \cap B(x_0, r_0) = \emptyset$$

y por tanto

$$Mf(y) = \sup \frac{1}{|B(y,s)|} \int_{B(y,s)} f = \sup_{s > \frac{n}{2k} r_0} \frac{1}{|B(y,s)|} \int_{B(y,s)} f \leq$$

$$\leq \sup_{s > \frac{n}{2k} r_0} \frac{1}{|B(y,s)|} \left(\int_{B(y,s)} f^p w\right)^{1/p} \left(\int_{B(y,s)} w^{-p'/p}\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq \sup_{s > \frac{n}{2k} r_0} C_p(w)^{1/p} \|f\|_{L^p(x,w)} \, w(B(y,s))^{-1/p}$$

ahora (1.7.1) nos permite asegurar que existe $\varepsilon < 1$ con

$$\frac{C_p(w)}{w(X)} \|f\|_{L^p(X,w)} = \varepsilon^p \lambda^p$$

por tanto $Mf(y) \leq \varepsilon \lambda w(X)^{1/p} \sup\limits_{s > \frac{n}{2k} r_0} w(B(y,s))^{-1/p} \leq \varepsilon\lambda < \lambda$ e $y \notin E_\lambda$.

El lema (1.7) tiene un doble interés. En primer lugar es el paso intermedio al lema (1.8) que proporciona la descomposición de Calderón-Zygmund, en segundo lugar permite demostrar el siguiente teorema.

(1.11) TEOREMA. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces son equivalentes*

(a) $w\{x : Mf(x) > \lambda\} \leq \dfrac{c}{\lambda^p} \displaystyle\int_X |f(x)|^p \, w(x) \, dx$

(b) $w \in A_p$.

La demostración, que omitimos, consiste en traducir adecuadamente cualquiera de las demostraciones clásicas de pesos.

2. OPERADORES DE CALDERON-ZYGMUND.

Sean E y F espacios de Banach y $\mathcal{L}(E,F)$ el espacio de los operadores lineales y continuos de E, F. Sea (X, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo.

(2.1) DEFINICION. Diremos que un **operador lineal T es un operador de Calderón-Zygmund** si satisface las dos condiciones siguientes:

(2.1.1) Existe un p_0, $1 < p_0 \leqq \infty$ tal que T es acotado de $L_E^{p_0}(X)$ en $L_F^{p_0}(X)$.

(2.1.2) Existe una función K (núcleo)

$$K: X \times X \setminus \{(x,x): x \in X\} \to \mathcal{L}(E,F)$$

tal que

(i) Para todo $x \in X$ las funciones $y \to K(x,y)$ e $y \to K(y,x)$ son integrables sobre bolas que no contengan a x

(ii) Si $f \in L_E^{\infty}(X)$ y tiene soporte contenido en una bola entonces

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)\, f(y)\, dy \qquad x \notin \text{sop } f.$$

A continuación exponemos los teoremas centrales de esta sección.

(2.2) TEOREMA. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund para el que $p_0 = \infty$ y además*

(2.2.1) si $\rho(x,y') > 2\rho(y,y')$ existe una constante c tal que

$$\|K(x,y) - K(x,y')\| < \frac{c\rho(y,y')}{\rho(x,y')\,|B(y',\rho(x,y'))|}.$$

Entonces

(a) T es acotado de $L^p_{\ell^q(E)}(X)$ en $L^p_{\ell^q(F)}(X)$, $1 < p,\ q < \infty$.

(b) T es acotado de $L^1_{\ell^q(E)}(X)$ en $L^1_{\ell^q(F)}(X)$ - débil, $1 < q < \infty$.

(2.3) TEOREMA. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund con un núcleo K satisfa-*

ciendo las siguientes condiciones

(K.1) Si $\rho(x,y') > 2\rho(y,y')$

$$\|K(x,y) - K(x,y')\| + \|K(y,x) - K(y',x)\| \leq \frac{c\rho(y,y')}{\rho(x,y')|B(y',\rho(x,y'))|} .$$

(K.2) Para todo $r > 0$

$$\int \|K(x,y)\| \, dy + \int \|K(x,y)\| \, dx \leq c.$$

Entonces

(a) T *es acotado de* $L^p_{\ell^q(\mathcal{E})}(X)$ *en* $L^p_{\ell^q(\mathcal{F})}(X)$. $1 < p, q < \infty$.

(b) T *es acotado de* $L^1_{\ell^q(\mathcal{E})}(X)$ *en* $L^1_{\ell^q(\mathcal{F})}(X)$ *- débil,* $1 < q < \infty$.

Además si definimos el operador maximal

$$T^*f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left\| \int_{\rho(x,y)>\varepsilon} K(x,y) \, f(y) \, dy \right\|_{\mathcal{F}}$$

Entonces

(c) T^* *es acotado de* $L^p_{\ell^q(\mathcal{E})}(X)$ *en* $L^p_{\ell^q}(X)$, $1 < p, q < \infty$.

(d) T^* *es acotado de* $L^1_{\ell^q(\mathcal{E})}(X)$ *en* $L^1_{\ell^q}(X)$ *- débil,* $1 < q < \infty$.

La demostración del teorema (2.3) puede hacerse paralela a la correspondiente al caso $X = R^n$, para este caso la demostración puede verse en [23] (aunque las ideas se remontan a [18] y [22]). El teorema (2.3) tendrá importancia en las aplicaciones.

Para hacer más comprensible la demostración del teorema (2.2) enunciamos la siguiente

(2.4) PROPOSICION. *En las hipótesis del teorema (2.2) el operador* T *es acotado de* $L^1_{\mathcal{E}}(X,w)$ *en* $L^1_{\mathcal{F}}(X,u)$ *- débil para todo par de pesos* (u,w) *tal que* $Mu(x) \leq Cw(x)$ *en casi todo* x.

Si esta proposición es cierta, entonces por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz T es acotado de $L^p_E(x,w)$ en $L^p_F(X,u)$ para todo par (u,w) satisfaciendo las condiciones de la proposición y para todo $1 < p < \infty$. A partir de aquí todas las técnicas desarrolladas en I.S.V. pueden repetirse y se obtiene la conclusión del teorema. Nos queda únicamente exponer la prueba de la proposición (2.4) que además es el punto donde interviene la descomposición de Calderón-Zygmund de la sección 1.

DEMOSTRACION DE (2.4). Lo que queremos es

$$u\{x: \|Tf(x)\|_F > \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda}\int_X \|f(x)\|_F \; w(x)\, dx \tag{2.5}$$

Observemos primero que si denotamos por $C_1(w,u)$ la mínima constante C tal que $Mu(x) \leq Cw(x)$ entonces el lema (1.7) puede repetirse tomando como hipótesis

$$\lambda > \frac{C_1(w,u)}{u(X)} \|f\|_{L^1(X,w)} \tag{1.7.1)'}$$

ó

$$\lambda > 0 \text{ si } u(X) = \infty.$$

Ahora bien si λ no satisface (1.7.1)' entonces (2.5) es obvio. En otro caso descomponemos $f = g + b$ según la nota (1.9).

Sea $D_\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} 2kB_i$. Las propiedades de Q_i permiten deducir fácilmente que

$$g(x) \leq C\lambda \quad \text{en casi todo } x$$

y

$$\|g\|_{L^1_E(X,w)} \leq \|f\|_{L^1_E(X,w)}.$$

Por tanto la hipótesis $p_0 = \infty$ dice que

$$\|Tg\|_{L^\infty_F(X,u)} \leq C\|g\|_{L^\infty_E(X,w)} \leq C\lambda.$$

Entonces

$$u\{x: \|Tf(x)\|_F > 2C\lambda\} \leqq u\{x: \|Tb(x)\|_F > C\lambda\}.$$

Por tanto basta probar

$$u\{x: \|Tb(x)\|_F > \lambda\} \leqq \frac{C}{\lambda}\int_X \|f(x)\|_E\, w(x)\, dx.$$

Es claro que

$$u\{x: \|Tb(x)\|_F > \lambda\} \leqq u(D_\lambda) + u\{x \notin D_\lambda: \|Tb(x)\|_F > \lambda\}.$$

Pasamos a continuación a estimar estas dos medidas

$$u(D_\lambda) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u(2kB_i)}{\lambda} \frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} \|f(x)\|_E\, dx \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u(2kB_i)}{\lambda} \frac{C}{|2kB_i|} \int_{B_i} \|f(x)\|_E \frac{w(x)}{w(x)}\, dx \leqq$$

$$\leqq \frac{C}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} \|f(x)\|_E\, w(x)\, dx \leqq \frac{C}{\lambda}\int_X \|f(x)\|_E\, w(x)\, dx.$$

Hemos usado en la segunda desigualdad que la medida μ es duplicadora y en la tercera la definición del par (u,w). Por otro lado

$$u\{x \notin D_\lambda: \|Tb(x)\|_F > \lambda\} \leqq \frac{1}{\lambda}\int_{D_\lambda^C} \|Tb(x)\|\, u(x)\, dx \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\lambda}\sum_i \int_{D_\lambda^C} \|Tb_i(x)\|_F\, u(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_i \int_{D_\lambda^C} \left\|\int_{Q_i} K(x,y)\, b_i(y)\, dy\right\|\, u(x)\, dx$$

donde se ha aplicado (2.1.2). Teniendo en cuenta que

$$\int_{Q_i} b_i(y)\, dy = 0$$

lo anterior es menor o igual que

$$\frac{1}{\lambda}\sum_i \int_{D_\lambda^C}\int_{Q_i} \|K(x,y) - K(x,y_i)\|\|b_i(y)\|_E \, dy \, u(x) \, dx$$

donde y_i es el centro de $B_i = B(y_i, r(y_i))$. En esta situación $\rho(x,y_i) > 2kr(y_i) > 2\rho(y,y_i)$. Entonces la hipótesis de suavidad del núcleo se puede aplicar y llamando

$$M_i = \sup_{Y \in Q_i} \text{ess} \int_{D_\lambda^C} \frac{\rho(y,y_i) \, u(x) \, dx}{\rho(x,y_i) \, |B(y_i \, , \rho(x,y_i))|}$$

la última expresión es menor o igual que

$$\frac{C}{\lambda}\sum_i \left(\int_{Q_i} \|b_i(y)\|_E \, dy\right) M_i \leq \frac{2C}{\lambda}\sum_i \left(\int_{Q_i} \|f(y)\|_E \, dy\right) M_i.$$

A continuación probaremos que en casi todo $x \in Q_i$, $M_i \leq C \, w(x)$ con lo cual

$$u\{x \notin D_\lambda : \|Tb(x)\|_F > \lambda\} \leq \frac{2C}{\lambda}\sum_i \int_{Q_i} \| f(y)\|_E \, w(y) \, dy \leq$$

$$\leq \frac{2C}{\lambda}\int_{Q_i} \|f(y)\|_E \, w(y) \, dy.$$

Veamos que $M_i \leq C$. Sea, para $n = 1, 2, \ldots$

$$A_n^i = \{x \in X \, ; \, 2^n kr(y_i) < \rho(x,y_i) \leq 2^{n+1} kr(y_i)\}.$$

Entonces

$$\int_{(D_\lambda)^C} \frac{\rho(x,y_i)}{\rho(x,y_i)|B(y_i,\rho(x,y_i))|} \, dx \leq$$

$$\leq kr(y_i) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n^i} \frac{u(x)\, dx}{\rho(x,y_i)\, |B(y_i,\rho(x,y_i))|} \leq$$

$$\leq kr(y_i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n kr(y_i)} \frac{u(B(y_i\ ,\ 2^{n+1}kr(y_i)))}{|B(y_i\ ,\ 2^n kr(y_i))|} \leq$$

$$\leq k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} w(y).$$

En la tercera desigualdad hemos utilizado que $A_n^i \subset B(y_i,2^{n+1}kr(y_i))$ y en la última la definición de (u,w).

(2.6) NOTA. El teorema (2.2) admite una versión para operadores del tipo

$$Tf(x,t) = \int_X k(x,y,t)\, f(y)\, dy.$$

En este caso aparecen de modo natural las medidas de Carleson y los resultados sobre acotaciones de operadores con pesos distintos, ver [21] y [22].

(2.7) NOTA. Con ciertas condiciones sobre la medida μ puede probarse una acotación L^2 para operadores satifaciendo las hipótesis (K.1) y (K.2) del teorema (2.3), ver [1] y [16].

3. APLICACIONES A FUNCIONES MAXIMALES Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

Nuestra primera aplicación es una versión del teorema de Fefferman y Stein para el operador maximal de Hardy-Littlewood.

(3.1) TEOREMA. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo donde d es una métrica. Entonces para $1 < q < \infty$, las siguientes desigualdades son ciertas.*

$$(3.1.1) \qquad \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Mf_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(X)} \leq C_{pq} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(X)} \quad si\ 1 < p < \infty .$$

$$(3.1.2) \qquad \left| \{x : \sum_{j=1}^{\infty} |Mf_j(x)|^q > \lambda^q\} \right| \leq C_q \int_X \left(\sum |f_j(x)|^q\right)^{1/q} dx .$$

(3.2) OBSERVACION. *Si se trata de un espacio de tipo homogéneo general (X,ρ,μ) con ρ seudométrica el teorema también es cierto.*

Ello es debido a que gracias a los trabajos de R. Macías y C. Segovia, ver [13], puede asegurarse que existe una métrica d y un exponente $0 < \alpha \leq 1$ tal que ρ es uniformemente equivalente a d^α (es decir existen constantes k y K tales que $k\rho(x,y) \leq d^\alpha(x,y) \leq K\rho(x,y)$). Por tanto operadores de Hardy-Littlewood tomando d o ρ son esencialmente el mismo.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA (3.1). Al igual que se hace en I.S.V. la idea consiste en considerar al operador de Hardy-Littlewood como un operador de Calderón-Zygmund acotado de $L^\infty(X)$ en $L^\infty_{1^\infty}(X)$ pero con núcleo no suave y posteriormente mayorarlo por un operador suave.

Para ello consideramos la función $\phi : R \to R$ tal que $\chi_{[0,1]} \leq \phi \leq \chi_{[-1,2]}$ y $|\phi'(t)| \leq \frac{c}{t}$, $t \in R$.

Definimos el operador

$$\Phi f(x) = \sup_{r>0} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_X \phi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right) f(y)\, dy \right| .$$

Utilizando las propiedades de ϕ puede comprobarse fácilmente que el operador

$$Sf(x) = \left\{ \frac{1}{|B(x,r)|} \int_X \phi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right) f(y)\, dy \right\}_{r > 0}$$

considerando como operador lineal de $L^\infty(X)$ en $L^\infty_{l^\infty}(X)$ satisface las hipótesis del teorema (2.2) y por tanto sus conclusiones. El teorema (3.1) queda demostrado al observar que para funciones positivas

$$Mf(x) \leq \Phi f(x) = \|Sf(x)\|_{l^\infty}.$$

A continuación pasamos a tratar el siguiente problema de ecuaciones en derivadas parciales.

Sea la ecuación parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (-1)^{m/2} P(D)u = f \tag{3.3}$$

donde $D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ y $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es un polinomio homogéneo de grado par m y tal que cuando ξ es real $P(\xi)$ tiene parte real negativa.

Si f es una función suficientemente buena (Hölderiana y con soporte compacto) es conocido que una solución particular de (3.3) es

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{R^n} \Gamma(x - y\,,\, t - s)\, f(y,s)\, dy\, ds.$$

$$\Gamma(x,t) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \exp(ix.\xi + tP(\xi))\, d\xi, \quad t > 0.$$

Si α es un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m$ entonces

$$D_X^\alpha \Gamma(x,t) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} (i\xi)^\alpha \exp(ix.\xi + tP(\xi))\, d\xi .$$

Si llamamos $S(x,t) = D_X^\alpha \Gamma(x,t)$ es fácil comprobar que

$$S(x,t) = t^{-1-n/m} s(t^{-1/m}x, 1), \quad t > 0.$$

Además $S(x,t)$ no es integrable en $R^n(0,\infty)$ por tanto la integral

$$(3.4) \qquad \int_0^t \int_{R^n} S(x - y\ ,\ t - s)\ f(y,s)\ dy\ ds$$

que sería la candidata a $D_x^\alpha u(x,t)$ presenta problemas de definición.

Es sencillo comprobar que $S(x,t)X_{\{t > \varepsilon\}}$ sí que es integrable, por lo tanto podría pensarse en definir $D_x^\alpha u(x,t)$ como

$$(3.5) \qquad D_X^\alpha u(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t-\varepsilon} \int_{R^n} S(x - y\ ,\ t - s)\ f(y,s)\ dy\ ds$$

donde el sentido del límite se debe precisar.

Veamos a continuación como podemos hacer intervenir el teorema (2.3).

Consideramos el espacio homogéneo $X = R^n x[0,\infty)$ con la medida de Lebesgue y la distancia

$$d(\overline{x},\overline{y}) = ((x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2)^{1/2} + |t - s|^{1/m}$$

donde $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n, t)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n, s)$.

Para funciones Hölderianas con soporte compacto la integral (3.4) existe en el sentido usual y el límite (3.5) existe para todo punto $x \in X$, ver [11].

Por tanto si hacemos $S(x,t) = 0$ para $t \leq 0$ el operador

$$Df(\overline{x}) = \int_0 \int_{R^n} S(x - y\ ,\ t - s)\ f(y,s)\ dy\ ds = f * s(\overline{x}), \qquad \overline{x} \in X$$

está bien definido, al menos para funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto.

Queremos que D sea un operador de Calderón-Zygmund.

Para ello observemos en primer lugar que la transformada de Fourier de S en R^{n+1} es, ver [11]:

$$\hat{S}(\xi,\tau) = \frac{-(i\xi)^\alpha}{i\tau + P(\xi)}$$

Por tanto $\hat{S}$ es acotada y una aplicación inmediata del teorema de Plancherel dice que

$$\|Df\|_{L^2(X)} \leq C\|f\|_{L^2(X)}, \qquad f \in C_0^\infty(X).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\mu(B(\overline{x},r)) \sim r^{n+m}$, para verificar que

$$S(\overline{x},\overline{y}) = S(x - y \ , \ t - s)$$

satisface (K.1) y (K.2) del teorema (2.3) basta verificar en es caso

(K.1)' $\quad$ si $|x| + t^{1/m} > 2(|y| + s^{1/m})$ entonces

$$|S(x - y \ , \ t - s) - S(x,t)| \leq C \frac{|y| + s^{1/m}}{(|x| + t^{1/m})^{n+m+1}}$$

y

(K.2)' Para todo $a > 0$

$$\int_{a < |x| + t^{1/m} < 2a} |S(x,t)| \ dx \ dt \leq C.$$

Pero esto es una consecuencia del siguiente lema cuya demostración (que omitimos) es un ejercicio de cálculo avanzado.

(3.6) LEMA. *Sea $S(x,t)$ una función tal que*

(i) $S(x,t) = 0$ *si* $t \leq 0$

(ii) $S(x,t) = t^{-1-n/m} S(t^{-1/m}x,1), \quad t > 0, \ x \in R^n$

(iii) $|S(x,1)| \leq C(1 + |x|)^{-n-m-1}$

$$\left|\frac{\partial S}{\partial x_i}(x,1)\right| \leq C(1 + |x|)^{-n-m-2} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Entonces S satisface (K.1)' y (K.2)'.

Todo lo anterior nos permite asegurar la siguiente

(3.7) PROPOSICION. *D satisface todas las conclusiones del teorema 2.3.*

Esta proposición nos dice entre otras cosas que el operador

$$(3.8) \qquad D^*f(x,t) = \sup_{\varepsilon > 0} |f * S\chi_{A(\varepsilon)}(x,t)|$$

con $A(\varepsilon) = \{(x,t): |x| + t^{1/m} > \varepsilon\}$ es acotado de $L^p_{l^q}(X)$ en $L^p_{l^q}(X)$, $1 < p, q < \infty$ y de $L^1_{l^q}(X)$ en $L^1_{l^q}(X)$ - débil, $1 < q < \infty$.

Ahora bien, nosotros queríamos dar sentido al límite (3.5) y el operador asociado a este límite es

$$(3.9) \qquad f^*(x,t) = \sup_{\varepsilon > 0} |f * S\chi_{H(\varepsilon)}(x,t)|$$

donde $H(\varepsilon) = \{(x,t): t > \varepsilon\}$.

Una modificación de los argumentos empleados en la demostración de (2.3) permite estudiar el operador diferencia

$$uf(x,t) = \sup_{\varepsilon} |f * S\chi_{A(\varepsilon)\,\Delta\, H(\varepsilon)}(x,t)|$$

donde Δ la operación cojuntista diferencia simétrica.

Este operador diferencia resulta ser acotado de $L^p_{l^q}(X)$ en $L^p_{l^q}(X)$ y de $L^1_{l^q}(X)$ en $L^1_{l^q}(X)$ - débil por tanto lo mismo le ocurre al operador (3.9).

Los razonamientos anteriores pueden resumirse en el siguiente

(3.10) TEOREMA. *Las aplicaciones $f \to D^\alpha_X u$ y $f \to f^*$, definidas en principio para funciones Hölder con soporte compacto, pueden extenderse acotadamente de $L^p(X)$ en $L^p(X)$ y de $L^1(X)$ en $L^1(X)$ - débil.*

Más aún si $Tf = D^\alpha_X u$ ó $Tf = f^*$ entonces las siguientes desigualdades vectoriales son ciertas.

$$(3.10.1) \qquad \left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |Tf_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(X)} \leq C_{p,q} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(X)}, \quad 1 < p,q < \infty.$$

$$(3.10.2) \qquad \left|\left\{(x,t) \in X: \sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x,t)|^q > \lambda^q\right\}\right| \leq$$

$$\leq \frac{C_q}{\lambda} \int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x,t)|^q \right)^{1/q} dx\,dt, \qquad \lambda > 0,\ 1 < q < \infty.$$

Puede verse, [11], que para funciones continuamente diferenciables con soporte compacto, el límite

$$D^{\alpha}_{X} u = \lim_{\varepsilon \to 0} f * S\chi_{H(\varepsilon)}$$

existe en casi todo punto. Por tanto técnicas habituales de convergencia en casi todo punto y el teorema (3.10) permiten asegurar que el siguiente teorema es cierto

(3.11) TEOREMA. *Si $f \in L^{p}(X)$, $1 \leq p < \infty$ entonces en casi todo punto $(x,t) \in X$ existe*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * S\chi_{H(\varepsilon)}(x,t).$$

Más aún si a este límite le llamamos $D^{\alpha}_{X} u(x,t)$, entonces para $(f_j) \in L^{p}_{\ell^{q}}$, $1 \leq p < \infty$, $1 < q < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \{ f_j * S\chi_{H(\varepsilon)}(x,t) - D^{\alpha}_{X} u_j(x,t) \}_j \right\|_{\ell^{q}} = 0$$

en casi todo (x,t).

(3.12) NOTA. El problema de dar sentido al límite 3.5 se debe a B.F. Jones [11]. Jones demostró que el límite puede tomarse en el sentido de L^{p}, $1 < p < \infty$. Posteriormente Fabes y Sadosky [9] demostraron que el límite existe en casi todo punto para funciones de $L^{p}(X)$, $1 < p < \infty$.

La técnica desarrollada por Fabes y Sadosky se basa muy esencialmente en las propiedades de acotación del operador maximal fuerte de Hardy y Littlewood y por tanto no sirve para el caso (1,1) - débil.

Sin embargo el resultado de Fabes y Sadosky, para $p > 1$, puede utilizarse para obtener, a través de la teoría de los operadores de Calderón-Zygmund vectoriales, el resultado para $p = 1$, ver [22].

4. ACOTACIONES VECTORIALES DE LOS POTENCIALES DE RIESZ EN ESPACIOS DE TIPO HOMOGENEO. APLICACIONES.

(4.1) DEFINICION. *Sea (X,ρ,μ) un espacio de tipo homogéneo y sea α, $0 < \alpha < 1$. Llamaremos operador maximal fraccionario de orden α al operador*

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x,r)|^\alpha} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy, \qquad x \in X.$$

Por la desigualdad de Hölder es claro que M_α es acotado de $L^{1/1-\alpha}(X)$ en $L^\infty(X)$. Utilizando el lema (1.2) es bastante sencillo ver que M_α es acotado de $L^1(X)$ en $L^{1/\alpha}(X)$ - débil y por tanto por interpolación M_α es acotado en los valores intermedios, es decir el siguiente lema es cierto

(4.2) LEMA.

(4.2.1) M_α es acotado de $L^1(X)$ en $L^{1/\alpha}$- débil.

(4.2.2) M_α es acotado de $L^p(X)$ en $L^q(X)$ con $\frac{1}{p} = 1 - \alpha + \frac{1}{q}$, $\frac{1}{\alpha} < q \leqq \infty$.

(4.3) DEFINICION. *Dado β, $0 < \beta$, definimos el operador fraccionario*

$$I_\beta f(x) = \int_X \frac{f(y)}{d(x,y)^\beta}\, d\mu(y).$$

Si el espacio de tipo homogéneo (X,ρ,μ) es tal que : X es un grupo, ρ y μ son invariantes por traslaciones y además existe un $\lambda > 0$ tal que $\mu(B(0,r)) \sim r^\lambda$ entonces se tiene la siguiente

(4.4) PROPOSICION. *Sea α, $0 < \alpha < 1$. Entonces $I_{\lambda\alpha}$ es acotado de $L^p(X)$ en $L^q(X)$ si $\frac{1}{p} = 1 - \alpha + \frac{1}{q}$, $\frac{1}{\alpha} < q < \infty$.*

La razón de que esta proposición sea cierta radica en el hecho de que al igual que en el caso de R^n, ver [21] y las referencias allí, $I_{\lambda\alpha}$ está controlada por M_α en el siguiente sentido:

Sea α' tal que $1 - \frac{\alpha'}{\lambda} = \alpha$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ con $0 < \alpha' - \varepsilon < \alpha' + \varepsilon < \lambda$

existe una constante C_ε tal que

$$|I_{\lambda\alpha}f(x)| \leq C_\varepsilon\{M_{1-(\alpha'-\varepsilon)/\lambda}f(x).M_{1-(\alpha'+\varepsilon)/\lambda}f(x)\}^{1/2}, \qquad x \in X.$$

El siguiente resultado sobre normas mixtas es una consecuencia de la proposición anterior. Una prueba en el caso clásico, que se traslada perfectamente al nuestro, puede verse en [4].

(4.5) PROPOSICION. *Sea* (X_i, ρ_i, μ_i), $i = 1, \dots, n$ *una familia de espacios de tipo homogéneo tal que:* X_i *son grupos aditivos,* ρ_i, μ_i *son invariantes por traslaciones y existe* $\lambda_i > 0$ *tales que* $\mu_i(B_i(0,r)) \sim r^{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$. *Supongamos además que* $0 < \alpha_i < 1$ *y* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\alpha_i = \beta$. *Entonces:*

$$\|I_\beta f\|_{L^{q_1,\dots,q_n}(X_1 \times \dots \times X_n)} \leq C\|f\|_{L^{p_1,\dots,p_n}(X_1 \times \dots \times X_n)}$$

con $\frac{1}{p_i} = 1 - \alpha_i + \frac{1}{q_i}$, $\frac{1}{\alpha_i} < q < \infty$, $i = 1, \dots, n$.

A continuación vamos a hacer una aplicación al problema de valores iniciales para las ecuaciones de Navier-Stokes en el cilindro infinito $S_T = R^n \times [0,T)$, ver [8].

Precisando, sea $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ satisfaciendo

$$\operatorname{div}(g)(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) g_j(x) = 0 \qquad x \in R^n$$

y una presión $P(x,t)$; se estudia el vector solución $u(x,t) = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t))$, $x \in R^n$, $t \in (0,T)$ tal que

$$(4.6) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \dots,$$

(4.7) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

(4.8) $$u(x,0) = g(x)$$

En [21] se encuentran condiciones que aseguran la existencia, regularidad y unicidad para soluciones débiles $u(x,t) \in L^{p,q}(S_T)$, donde los exponentes siempre satisfacen la relación $\frac{n}{p} + \frac{2}{q} \leq 1$, $n < p \leq \infty$ y $L^{p,q}(S_T)$ es el espacio de funciones $f(x,t)$ tales que

$$\int_0^T \left(\int_{R^n} |f(x,t)|^p \, dx\right)^{q/p} dt < +\infty.$$

La técnica en [8] consiste en demostrar que $u \in L^{p,q}(S_T)$, $p, q \geq 2$, $p < \infty$ es una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes si y sólo si u es una solución de una cierta ecuación integral $u + B(u,u) = f$ donde

(4.9) $$|B(u,v)(x,t)| \leq C\int_0^t \int_{R^n} \frac{|u(y,s)| \, |v(y,s)| \, dy \, ds}{(|x - y| + (t - s)^{1/2})^{n+1}} .$$

El paso calculista para encontrar soluciones de la ecuación integral es el siguiente

(4.10) TEOREMA, [8]. *Dada* $u, v \in L^{p,q}(S_T)$

(4.10.1) *si* $\frac{n}{p} + \frac{2}{q} = 1$ *con* $n < p < \infty$ *entonces*

$$\|B(u,v)\|_{L^{p,q}(S_T)} \leq C(n,p,q) \, \|u\|_{L^{p,q}(S_T)} \, \|v\|_{L^{p,q}(S_T)}.$$

(4.10.2) *si* $\frac{n}{p} + \frac{2}{q} < 1$ *con* $n < p < \infty$ *entonces*

$$\|B(u,v)\|_{L^{p,q}(S_T)} \leq$$

$$\leq C(n,p,q) T^{(1/2)(1-(n/p)-(2/q))} \, \|u\|_{L^{p,q}(S_T)} \, \|v\|_{L^{p,q}(S_T)} .$$

Nuestro propósito es mostrar que este teorema y su demostración pueden tratarse de un modo claro y elegante mediante la proposición (4.5).

Así si en (4.5) tomamos $X_1 = R^n$, $\rho_1(x,y) = |x - y|$, $\mu_1 \equiv$ medida de Lebesgue en R^n, $X_2 = R$, $\rho_2(t,s) = |t - s|^{1/2}$, $\mu_2 \equiv$ medida de Lebesgue en R, tenemos $\lambda_1 = n$ y $\lambda_2 = 2$; por tanto el siguiente resultado es cierto

(4.11) *Sean* $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ *tales que* $n\alpha_1 + 2\alpha_2 = n + 1$. *Entonces el operador*

$$I_{n+1}f(x,t) = \int_{R^{n+1}} \frac{f(y,s)}{(|x - y| + |t - s|^{1/2})^{n+1}}\, dy\, ds$$

es acotado de $L^{p_1,p_2}(R^{n+1})$ *en* $L^{q_1,q_2}(R^{n+1})$ *para* $\frac{1}{p_i} = 1 - \alpha_i + \frac{1}{q_i}$, $\frac{1}{\alpha_i} < q < +\infty$, $i = 1, 2$.

(4.12) NOTA. Para ver que los rangos anteriores son los mejores posibles basta utilizar el típico argumento de dilataciones con $A_\sigma(x,t) = (\sigma x, \sigma^2 t)$.

(4.13) NOTA. El uso combinado de (4.11), (4.9) y la desigualdad de Hölder prueban que B es continuo de $L^{p_1,p_2}(S_T) \times L^{p_1,p_2}(S_T)$ en $L^{q_1,q_2}(S_T)$ (uniformemente en T) para el siguiente rango de p's y q's

$$\frac{2}{p_1} = 1 - \alpha_1 + \frac{1}{q_1}, \quad \frac{1}{\alpha_1} < q_1 < \infty,$$

$$\frac{2}{p_2} = 1 - \alpha_2 + \frac{1}{q_2}, \quad \frac{1}{\alpha_1} < q_2 < \infty,$$

con α_1, α_2 tales que $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ y $\alpha_1 n + 2\alpha_2 = n + 1$.

A continuación pasamos a la **demostración del teorema (4.10).**

DEMOSTRACION DE (4.10.1). Tomamos en (4.13) $p = p_1 = q_1$ y $q = p_2 = q_2$ entonces $\alpha_1 = \frac{1}{p'}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{q'}$ satisfacen $\alpha_1 n + 2\alpha_2 = n + 1$ puesto que $\frac{n}{p} + \frac{2}{q} = 1$.

DEMOSTRACION DE (4.10.2). Dado p, $n < p < \infty$ y q tal que $\frac{n}{p} + \frac{2}{q} < 1$. Tomamos en (4.13) $p_1 = q_1 = p$ entonces $\alpha_1 = 1/p'$ y por tanto $\alpha_2 = \frac{1}{2} + \frac{n}{2p}$. Como $\frac{n}{p} + \frac{2}{q} < 1$ entonces $q > \frac{1}{\alpha_2}$ y por tanto puede tomarse $q_2 = q$ en (4.13). Si p_2 es tal que $\frac{2}{p_2} = 1 - \alpha_2 + \frac{1}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2p}$ entonces tenemos

$$\| B(u,v)\|_{L^{p,q}(S_T)} \leq C\|u\|_{L^{p_1,p_2}(S_T)} \|v\|_{L^{p_1,p_2}(S_T)}$$

y por la desigualdad de Hölder esto es menor que

$$CT^{2(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q})} \|u\|_{L^{p,q}(S_T)} \|v\|_{L^{p,q}(S_T)}$$

para acabar la demostración basta observar que

$$2(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q}) = 1 - \alpha_2 - \frac{1}{q} = \frac{1}{2}(1 - \frac{n}{p} - \frac{2}{q}) .$$

5. OPERADORES MAXIMALES GENERALES.

En la presente sección estudiaremos un operador maximal que incluye como casos particulares operadores maximales de gran interés. Expondremos algunas de las propiedades de acotación de dicho operador.

Sean U y V dos conjuntos arbitrarios. Supondremos que existe una cierta estructura topológica en los productos cartesianos $R^n \times U$, $R^n \times V$ y supondremos asimismo la existencia de medidas de Borel positivas $d\alpha(x,u)$ en $R^n \times U$ y $d\beta(x,v)$ en $R^n \times V$.

Denotaremos $L^p(R^n \times U, d\alpha)$ al conjunto de funciones medibles en $R^n \times U$ tales que $\int_{R^n \times U} |f(x,u)|^p \, d\alpha(x,u) < +\infty$.

La medida α de un conjunto $\Omega \subset R^n \times U$ la denotamos por $\alpha(\Omega)$. Si $\Omega \subset R^n$ su medida de Lebesgue se denotará por $|\Omega|$.

A lo largo de esta sección la letra Φ, respectivamente Ψ, será una función

$$\Phi : \{\text{cubos de } R^n\} \to \{\text{Borelianos de } R^n \times U\}$$

respectivamente

$$\Psi : \{\text{cubos en } R^n\} \to \{\text{Borelianos en } R^n \times V\},$$

tales que:

(5.1) Si Q_1, Q_2 son cubos en R^n con $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ entonces $\Phi(Q_1) \cap \Phi(Q_2) = \emptyset$ y $\Psi(Q_1) \cap \Psi(Q_2) = \emptyset$.

(5.2) Si $Q_1 \subset Q_2$ entonces $\Phi(Q_1) \subset \Phi(Q_2)$ y $\Psi(Q_1) \subset \Psi(Q_2)$.

(5.3) Si $Q(x,r)$ es el cubo con centro x y arista r entonces para todo $x \in R^n$

$$\bigcup_{r>0} \Phi(Q(x,r)) = R^n \times U \text{ y } \bigcup_{r>0} \Psi(Q(x,r)) = R^n \times V.$$

Diremos que α es una Φ-medida de Carleson si existe una constante C tal que para todo cubo $Q \subset R^n$, $\alpha(\Phi(Q)) \leq C|Q|$.

Dadas Φ y Ψ definimos el siguiente operador maximal

$$(5.4) \qquad Tf(x,v) = \sup \{\frac{1}{|Q|}\int_{\Phi(Q)} |f(y,u)|\, d\alpha(y,u) : (x,v) \in \Psi(Q)\}$$

es decir el supremo se toma sobre todos los cubos Q tales que $(x,v) \in \Psi(Q)$.

(5.5) EJEMPLO. Si $R^n \times U = R^n \times V = R^n$, $d\alpha(x,u) = dx$, donde dx denota la medida de Lebesgue en R^n y $\Phi(Q) = \Psi(Q) = Q$, entonces T es el operador maximal de Hardy-Littlewood.

(5.6) EJEMPLO. Si $R^n \times U = R^n$, $V = [0,\infty)$, $d\alpha(x,u) = dx$, $\Phi(Q) = Q$ y $\Psi(Q) = \tilde{Q} = \{(x,t): x \in Q, 0 \leq t \leq \text{arista de } Q\}$, entonces T es el operador

$$Mf(x,t) = \sup \{\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\, dy : x \in Q,\ 0 \leq t \leq \text{arista de } Q\}$$

introducido por Fefferman y Stein y estudiado en [21].

(5.7) EJEMPLO. Si $U = [0,\infty)$, $R^n \times V = R^n$, $\Phi(Q) = \tilde{Q}$, $\Psi(Q) = Q$ entonces T es el operador maximal

$$Cf(x) = \sup \{\frac{1}{|Q|}\int_{\tilde{Q}} |f(y,t)|\, d\alpha(y,t) : x \in Q\}$$

relacionado con los espacios tienda, ver [26].

A continuación exponemos algunos de los resultados interesantes.

(5.8) TEOREMA. *Sea $w(x,u)$ una función positiva en $R^n \times U$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

(5.8.1) T es acotado de $L^p(R^n \times U, w\,d\alpha)$ en $L^p(R^n \times V, d\beta)$ - débil, $1 \leq p < \infty$.

(5.8.2) Para todo cubo Q, existe una constante C tal que

$$\frac{\beta(\Psi(Q))}{|Q|}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\Phi(Q)} w(x,u)^{1-p'}\, d\alpha(x,u)\right)^{p-1} \leq C$$

si $1 < p < \infty$.

En el caso $p = 1$ la condición es que para todo cubo Q

$$\frac{\beta(\Psi(Q))}{|Q|} \leq C w(x,u) \quad \alpha\text{-casi por todo } (x,u) \in \Phi(Q).$$

(5.9) TEOREMA. *Sea $1 < p < \infty$ y $w(x,u)$ una función positiva en $R^n \times U$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(5.9.1) T es acotado de $L^p(R^n \times U, wd\alpha)$ en $L^p(R^n \times V, d\beta)$.

(5.9.2) Existe una constante C tal que para todo cubo Q

$$\int_{\Psi(Q)} [T(\chi_{\Phi(Q)}\, w^{1-p'})(y,v)]^p\, d\beta(y,v) \leq C \int_{\Phi(Q)} w(x,u)^{1-p'}\, d\alpha(x,u) < +\infty.$$

(5.10) NOTA. En el caso del ejemplo (5.5) los dos teoremas anteriores son muy conocidos y se deben a Muckenhoupt [17] y Sawyer [25].

En el caso del ejemplo (5.6) los teoremas anteriores pueden verse en [19] y [20]. Creemos que el lector podrá demostrar los dos teoremas anteriores tomando las ideas de [21], [22].

(5.11) NOTA. Fijada la medida $d\alpha$ definimos la clase $W_\alpha^p(T)$ (respectivamente $S_\alpha^p(T)$) como el conjunto de pares $(d\beta, w)$ tales que satisfacen (5.8.2) (respectivamente 5.9.2).

En general no es cierto que si $p < q$ entonces $W_\alpha^p(T) \subset W_\alpha^q(T)$ como puede verse con el siguiente ejemplo:

Sea $R^n \times V = R^n$, $d\beta(x,v) = dx$, $\Psi(Q) = Q$ y sea μ una Φ-medida de Carleson en $R^n \times U$. Sea $w(x,u)$ una función tal que para algún cubo Q y algún $p < q$

$$\int_{\Phi(Q)} w(x,u)^{p'-q'}\, d\mu(x,u) = \infty.$$

Si tomamos $d\alpha = w^{p'-1} d\mu$ entonces es claro que $(dx, wd\alpha) \in W_\alpha^p(T)$ pero $(dx, wd\alpha) \notin W_\alpha^q(T)$.

Ahora bien, si α es una Φ-medida de Carleson en $R^n \times U$ entonces T es acotado de $L^\infty(R^n \times U, wd\alpha)$ en $L^\infty(R^n \times V, d\beta)$ y por tanto utilizando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz y los teoremas (5.8) y (5.9) se tiene

$$W_\alpha^1(T) \subset \ldots \subset S_\alpha^p(T) \subset W_\alpha^p(T) \subset \ldots \subset S_\alpha^q(T) \subset W_\alpha^q(T) \subset \ldots$$

$1 < p < q < \infty$.

(5.12) TEOREMA. *Sean $1 < q < \infty$ y β una Ψ-medida de Carleson. Entonces para β-casi todo $(x,v) \in R^n \times V$*

$$\sup \{ \frac{1}{|Q|} \int_{\Psi(Q)} (T f^q)(y,w))^{1/q} \, d\beta(y,w) : (x,v) \in \Psi(Q)\} \leq C(T(f^q)(x,v))^{1/q}.$$

(5.13) NOTA. Si definimos en $R^n \times V$ el operador maximal

$$Ng(x,v) = \sup \{ \frac{1}{|Q|} \int_{\Psi(Q)} |g(y,w)| \, d\beta(y,w) : (x,v) \in \Psi(Q)\}$$

entonces el teorema (5.12) asegura que la función $h(x,v) = (T(f^q)(x,v))^{1/q}$ satisface

(5.14) $$Nh(x,v) \leq Ch(x,v)$$

En el caso de Ejemplo (5.5) la desigualdad anterior dice que $h(x)$ es un peso A_1, ver I.S.V.

En el caso del Ejemplo (5.6) la desigualdad (5.14) es debida a Deng, ver [27].

DEMOSTRACION DE (5.12). Sea $1 < q < \infty$ y $g(x,u) = |f(x,u)|^q$. Fijado un cubo Q descomponemos

$$g(x,u) = g_1(x,u) + g_2(x,u)$$

donde

$$g_1(x,u) = g(x,u)\chi_{\Phi(3Q)}(x,u).$$

Como β es una Ψ-medida de Carleson, el teorema (5.8) (con $w \equiv 1$) asegura que T es de tipo débil(1,1) y por tanto por la desigualdad de Kolmogorov tenemos que para cualquier δ, con $0 < \delta < 1$

(5.15) $$\int_{\Psi(Q)} (Tg_1)^\delta \, d\beta \leq C\beta(\Psi(Q))^{1-\delta}\left(\int_{R^n \times U} |g_1(x,u)| \, d\alpha(x,u)\right)^\delta \leq$$

$$\leq C|Q|^{1-\delta}\left(\int_{R^n \times U} |g_1(x,u)| \, d\alpha(x,u)\right)^\delta.$$

En particular,

$$\frac{1}{|Q|}\int_{\Psi(Q)} (Tg_1)^\delta \, d\beta \leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\Phi(Q)} |g| \, d\alpha\right)^\delta \leq C(Tg(z,t))^\delta$$

para cualquier $(z,t) \in \Psi(Q)$.

Sea $(y,v) \in \Psi(Q)$. Para cualquier cubo P tal que $(y,v) \in \Psi(P)$ y $\frac{1}{|P|}\int_{\Phi(P)} |g_2| \, d\alpha \neq 0$, tenemos $\Psi(P) \cap \Psi(Q) \neq \emptyset$, $\Phi(P) \cap \Phi(3Q)^C \neq \emptyset$, por tanto (5.1) y (5.2) implican que $P \cap Q \neq \emptyset$ y $P \cap (3Q)^C \neq \emptyset$. Es decir $Q \subset 3P$, por tanto para cualquier $(z,t) \in \Psi(Q)$

$$Tg_2(y,v) \leq 3^n Tg_2(z,t).$$

Luego

$$(5.16) \qquad \frac{1}{|Q|}\int_{\Psi(Q)} (Tg_2)^\delta \, d\beta \leq C\,\frac{\beta(\Psi(Q))}{|Q|} \inf_{(z,t)\in\Psi(Q)} (Tg_2(z,t))^\delta \leq$$

$$\leq C \inf_{(z,t)\in\Psi(Q)} (Tg_2(z,t))^\delta.$$

Es claro que (5.15) y (5.16) dan el resultado deseado.

A continuación damos un teorema de acotación vectorial, interesante tanto por sí mismo como por la demostración que requerirá un modelo nuevo de operador de Calderón-Zygmund.

(5.17) TEOREMA. *Supongamos que* $R^n \times U = R^n$, $\Phi(Q) = Q$, $d\alpha(x,u) = dx$ *y* β *es una* Ψ-*medida de Carleson en* $R^n \times V$. *Entonces, las siguientes desigualdades vectoriales son ciertas:*

(5.17.1) Para $1 < p,q < \infty$

$$\int_{R^n\times V} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x,v)|^q\right)^{p/q} d\beta(x,v) \leq C\int_{R^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^q\right)^{p/q} dx.$$

(5.17.2) Para $1 < q < \infty$

$$\beta\left(\{(x,v) \in R^n \times V: \sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x,v)|^q > \lambda^q\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{R^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^q\right)^{1/q} dx.$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA (5.17). Veamos primero la parte (5.17.1) con $p > q$. Sea $r = p/q$, entonces existe una $h \in L^{r'}(R^n \times V, d\beta)$ nonegativa con $\|h\|_{L^{r'}(R^n \times V, d\beta)} = 1$ y tal que

$$(5.18) \qquad \int_{R^n \times V} \Big(\sum_j |Tf_j(x,v)|^q\Big)^{p/q} d\beta(x,v) =$$

$$= \Big\{\int_{R^n \times V} \sum_j |Tf_j(x,v)|^q \, h(x,v) \, d\beta(x,v)\Big\}^r.$$

Si definimos

$$T^*h(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_{\Psi(Q)} |h(y,v)| \, d\beta(y,v)$$

es claro que el par $(hd\beta, T^*h) \in W_\alpha^1(T)$ (con $d\alpha = dx$) y por tanto (5.11) permite asegurar que el segundo miembro de (5.18) es menor que

$$(5.19) \qquad \Big(\int_{R^n} \sum_j |f_j(x)|^q \, T^*h(x) \, dx\Big)^r.$$

Ahora bien, el operador $h \to T^*h$ es acotado de $L^\infty(R^n \times V, d\beta)$ en $L^\infty(R^n, dx)$ (puesto que β es de Carleson) y además el teorema (5.8) permite asegurar que dicho operador es de tipo (1,1)-débil. Por interpolación el operador $h \to T^*h$ es acotado de $L^p(R^n \times V, d\beta)$ en $L^p(R^n, dx)$. Por tanto la desigualdad de Hölder dice que (5.19) es menor que

$$\int_{R^n} \Big(\sum_j |f_j(x)|^q\Big)^r dx . \|T^*h\|^{r/r'}_{L^{r'}(R^n,dx)} \leq C \int_{R^n} \Big(\sum_j |f_j(x)|^q\Big)^{p/q} dx$$

que era el resultado buscado.

Para probar el resto del teorema necesitamos el siguiente resultado.

(5.20) TEOREMA. *Sean R^n, V, α y β como en (5.17). Sean $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ espacios de Banach y S un operador lineal acotado de $L_{\mathcal{E}}^{p_0}(R^n, dx)$ en $L_{\mathcal{F}}^{p_0}(R^n \times V, d\beta)$ para un cierto p_0, $1 < p_0 \leq \infty$. Supongamos que existe una función*

$$K: R^n \times R^n \times V \to L(\mathcal{E}, \mathcal{F})$$

tal que:

(K.1) Si $f \in L^{\infty}_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}^n, dx)$ *con soporte contenido en un cubo Q, entonces*

$$Sf(x,\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,\nu)\, f(y)\, dy, \qquad (x,\nu) \notin \Psi(Q).$$

(K.2) Existe un número natural N y una constante C tal que para todo cubo Q y $k \in \mathbb{N}$

$$\| K(x,y,\nu) - K(x,y',\nu)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})} \leq \frac{C}{N^k |N^k Q|}$$

siempre que $(x,\nu) \notin \Psi(N^k Q)$, $y, y' \in Q$.

Entonces

(5.20.1) Si $1 < p \leq q \leq p_0$

$$\int_{\mathbb{R}^n \times V} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \|Sf_j(x,\nu)\|^q_{\mathcal{F}}\Big)^{p/q} d\beta(x,\nu) \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(x)\|^q_{\mathcal{E}}\Big)^{p/q} dx.$$

(5.20.2) Si $1 < q \leq p_0$

$$\beta\Big(\Big\{(x,\nu) \in \mathbb{R}^n \times V: \sum_{j=1}^{\infty} \|Sf_j(x,\nu)\|^q_{\mathcal{F}} > \lambda^q\Big\}\Big) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j(x)\|^q_{\mathcal{E}}\Big)^{1/q} dx.$$

IDEA SOBRE LA DEMOSTRACION DE 5.20. Sea T_d el operador definido como (5.4) pe pero considerando únicamente cubos diádicos y consideremos el conjunto

$$\Omega_\lambda = \{(x,\nu) \in \mathbb{R}^n \times V: T_d(\|f\|_E)(x,\nu) > \lambda\}.$$

Puede verse que existe una familia de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}$ tales que $\Omega_\lambda = \bigcup_j \Psi(Q_j)$, $\|f(x)\|_E \leq \lambda$ para casi todo $x \notin \bigcup_j Q_j$ y $\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} \|f(x)\|_E\, dx \leq 2^n \lambda$.

Descomponemos la función $f = g + b = g + \sum_j b_j$ donde

$$b_j(x) = \Big(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f\Big)\, \chi_{Q_j}(x).$$

Teniendo en cuenta que $\|g(x)\|_E \leq C\lambda$ y que S es acotado en L^{p_0}, puede verse que

$$(5.21) \qquad \beta(\{(x,v): \|Sg(x,v)\|_F > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{R^n} \|g(x)\|_E \, dx \leq \frac{C}{\lambda}\int_{R^n} \|f(x)\|_E \, dx$$

Por otro lado, si hacemos $\Omega^*_\lambda = \bigcup_j \Psi(NQ_j)$ es un cálculo estándar ver que

$$(5.22) \qquad \beta(\Omega^*_\lambda) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{R^n} \|f(x)\|_E \, dx.$$

Las hipótesis (K.1) y (K.2) permiten probar

$$(5.23) \qquad \beta(\{(x,v) \notin \Omega^*_\lambda: \|Sb(x,v)\|_F > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{R^n} \|f(x)\|_E \, dx.$$

Las desigualdades (5.21), (5.22) y (5.23) junto con el hecho

$$\beta(\{(x,v): \|Sf(x,v)\|_F > \lambda\}) \leq$$

$$\leq \beta(\{(x,v): \|Sg(x,v)\|_F > \lambda\}) + \beta(\Omega^*_\lambda) + \beta(\{(x,v) \notin \Omega^*_\lambda: \|Sb(x,v)\|_F > \lambda\}).$$

aseguran que S es de tipo débil (1,1). La técnica habitual de extensión vectorial (ver I.S.V) puede aplicarse en este momento y obtener (5.20.2), el resto sale por interpolación.

FINALICEMOS AHORA LA DEMOSTRACION DE (5.17). Es claro que en la definición de (5.4) puede tomarse una familia numerable, llamémosla I, de cubos. Además si consideramos una sucesión $\{I_n\}_{n \in N}$ de familias finitas tales que $I_n \nearrow I$ y definimos

$$S^n f(x,v) = \{\int_{R^n} \frac{1}{|Q|} \chi_{\Psi(Q)}(x,v)\, \chi_Q(y)\, f(y)\, dy\}_{Q \in I_n}$$

entonces es claro

$$(5.24) \qquad \|S^n f(x,v)\|_{l^\infty(I_n)} \nearrow Tf(x,v), \quad (n \to \infty).$$

En particular $\|S^n f(x,v)\|_{l^\infty(I_n)} \leq Tf(x,v)$ y entonces el teorema (5.8) asegura que S^n es acotado de $L^p(R^n,dx)$ en $L^p_{l^\infty(I_n)}(R^n \times V,d\beta)$, $1 < p < \infty$, con norma independiente de n.

Por otra parte, el núcleo (en el sentido de (5.20)) del operador S^n es la función valorada en $\mathcal{L}(C,l^\infty(I_n)) \cong l^\infty(I_n)$ dada por

$$K^n(x,y,v) = \{\frac{1}{|P|}\chi_{\Psi(P)}(x,v)\,\chi_P(v)\}_{P\,\varepsilon\, I_n}.$$

Puede verse que para todo cubo Q y todo $k \in N$

$$\|K^n(x,y,v) - K^n(x,y',v)\|_{l^\infty(I_n)} \leq \frac{C}{|3^kQ|}$$

siempre que $(x,v) \not\in \Psi(3^kQ)$ e y, $y' \in Q$, esta condición (que es ajustada para K^n) es estrictamente más débil que K.2 de (5.20).

Para poder aplicar (5.20) hacemos el siguiente argumento de suavización: Tomamos una función ϕ: $R \to R$, $\phi \in C^1(R)$ tal que $\chi_{[0,1]} \leq \phi \leq \chi_{[-1,2]}$ y $|\phi'(t)| \leq \frac{C}{t}$.

Denotamos por y_P, $r(P)$ el centro y el radio de P y definimos

$$\tilde{S}^n f(x,v) = \left\{\int_{R^n} \frac{1}{|P|}\chi_{\Psi(P)}(x,v)\,\phi\left(\frac{|y-y_P|}{r(P)}\right) f(y)\,dy\right\}_{P\,\varepsilon\, I_n}$$

es claro que

$$\|S^n f(x,v)\|_{l^\infty(I_n)} \leq \|\tilde{S}^n f(x,v)\|_{l^\infty(I_n)} \leq CTf(x,v) \tag{5.25}$$

y utilizando el teorema del valor medio puede verse que para todo cubo Q y todo $k \in N$

$$\left\|\left\{\frac{1}{|P|}\chi_{\Psi(P)}(x,v)\left|\phi\left(\frac{|y-y_P|}{r(P)}\right) - \phi\left(\frac{|y'-y_P|}{r(P)}\right)\right|\right\}\right\|_{l^\infty(I_n)} \leq \frac{C}{3^k|3^kQ|} \tag{5.26}$$

siempre que $(x,v) \notin \Psi(3^k Q)$ e y, $y' \in Q$.

En otras palabras, el teorema (5.20) puede aplicarse a $\tilde{S}^n$ y las constantes que aparecen no dependen de n. Luego teniendo en cuenta (5.24) y (5.25) obtenemos el resultado deseado para T.

(5.27) NOTA. La condición (K.2) en (5.20) parece especialmente adecuada para el tratamiento de núcleos $K(x,y,v)$ donde las variables x e (y,v) están separadas, por ejemplo para el caso del maximal

$$K(x,y,v) = \{\chi_I(x)\chi_{\Psi(P)}(y,v)\}.$$

Una modificación de esta condición permite un tratamiento muy general de operadores de Calderón-Zygmund en espacios de tipo homogéneo, ver [16].

(5.28) APLICACION. Consideramos el caso $R^n \times V = R^n$, $U = R^d$, $\Psi(Q) = Q$, $\Phi(Q) = Q \times Q$ (donde Q' es el cubo en R^d con centro 0 y radio Q' = radio Q) y $d\alpha(x,u) = dx\, du = dz$ (medida de Lebesgue en $R^{n+d} = R^n \times R^d$), entonces el operador

$$Tf(x) = \sup_{x \in Q \subset R^n} \frac{1}{|Q|} \int_{Q \times Q'} |f(z)|\, dz$$

es la traza en el hiperplano R^n del operador maximal fraccionario en R^{n+d}

$$M_p f(y) = \sup_{y \in Q \subset R^{n+d}} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{d}{n+d}}} \int_Q |f(z)|\, dz$$

es decir, $Tf(x) = M_d f(x,0)$ (observar que si $Q \subset R^n$, $|Q \times Q'|^{1-\frac{d}{n+d}} = Q$.

Entonces el teorema (5.9) tiene la siguiente consecuencia

RESULTADO. *Sea $1 < p < \infty$*

$$\int_{R^n} |M_d f(x,0)|^p\, v(x)\, dx \leq C \int_{R^{n+d}} |f(z)|^p\, w(z)\, dz$$

si y sólo si para todo cubo Q en R^n

$$\int_Q (M_d(\chi_{Q \times Q'}\, w^{1-p'})(x,0))^p\, v(x)\, dx \leq C \int_{Q \times Q'} w(z)^{1-p'}\, dz < +\infty.$$

REFERENCIAS.

[1] H. AIMAR, *Singular integrals and approximate identities on spaces of homogeneous type,* Trans. Amer. Math. Soc. 292 (1985), 135 - 153.

[2] H. AIMAR, R. MACIAS, *Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator on spaces of homogeneous type,* Proc. Amer. Math. Soc. 91 (1984), 213 - 216.

[3] A. BENEDEK, A.P. CALDERON, R. PANZONE, *Convolution operators on Banach space valued functions,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1962), 356 - 365.

[4] A. BENEDEK, R. PANZONE, *The spaces L^P with mixed norm,* Duke Math. J. 28 (1961), 301 - 324.

[5] A.P. CALDERON, *Inequalities for the maximal function relative to a metric,* Studia Mat. 57 (1976), 297 - 306.

[6] R. COIFMAN, M. de GUZMAN, *Singular integrals and multipliers on homogeneous spaces,* Rev. Un. Mat. Argentina 25 (1970), 137 - 144.

[7] R. COIFMAN, G. WEISS, *Analyse Harmonique non-conmutative sur certains espaces homogènes,* Lecture Notes in Math. 242, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[8] E. FABES, B. JONES, N. RIVIERE, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^P,* Arch. Rational Mech. Anal. 45 (1972), 222 - 240.

[9] E. FABES, C. SADOSKY, *Pointwise convergence for parabolic singular integrals,* Studia Math. 20 (1965), 15 - 22.

[10] A. KORANYI, S. VAGI, *Singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis,* Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa 25 (1971), 575 - 647.

[11] B.F. JONES, *A class of singular integrals,* Amer. J. Math. 86 (1964), 441 - 462.

[12] R. MACIAS, *Interpolation theorems on generalized Hardy spaces,* Ph.D Thesis, Washington University, Missouri (1974).

[13] R. MACIAS, C. SEGOVIA, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. 33 (1979), 257 - 270.

[14] ____________________, *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. 33 (1979), 271 - 309.

[15] ____________________, *A well-behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type*, Trabajos de Matemática, 32 I.A.M. (1981), 1 - 18.

[16] R. MACIAS, J.L. TORREA, Manuscrito.

[17] B. MUCKENHOUPT, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207 - 226.

[18] J.L. RUBIO DE FRANCIA, F.J. RUIZ, J.L. TORREA, *Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels*, Adv. in Math. 62 (1986), 7 - 48.

[19] F.J. RUIZ, *A unified approach to Carleson measures an Ap weights*, Pacific J. Math. 117 (1985), 397 - 404.

[20] F.J. RUIZ, J.L. TORREA, *A unified approach to Carleson measures and Ap weights*, Pacific J. Math. 120 (1985), 189 - 197.

[21] ____________________, *Weighted and vector-valued inequalities for potencial operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), 213 - 232.

[22] ____________________, *Vector-valued Calderón-Zygmund theory and Carleson measures on spaces of homogeneous nature*, Sudia Math. (por aparecer).

[23] ____________________, *Parabolic differential equations and vector-valued Fourier Analysis*, Preprint.

[24] ____________________, *Weighted norm inequalities for a general maximal operator*, Arkir for Math. (por aparecer).

[25] E. SAWYER, *A characterization of a two-weitht norm inequality for maximal operators*, Studia Math. 75 (1982), 1 - 11.

[26] R. COIFMAN, Y. MEYER and E. STEIN, *Un nouvel espace fonctionnel adapté a l'étude des opérateurs définis par des intégrales singulières*, Lecture Notes in Math. 992, Springer-Verlag 1983, 1 - 15.

[27] D.G. DENG, *On a generalized Carleson inequality*, Studia Math. 78 (1984), 245 - 251.