INFORME TECNICO INTERNO

N°. I.T.I.19

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

I.T.I. Nº 19

PREPUBLICACION

LECCIONES SOBRE LA TEORIA DE ESPACIOS DE SOBOLEV

por E. Fernández Stacco y R. Panzone

INMABB

(UNS - CONICET)

1989

Estas notas constituyen la primera parte de un curso introductorio a la teoría de espacios de Sobolev, y son una versión fiel aunque abreviada de las lecciones dictadas por el segundo autor en el segundo semestre de 1987.

Los primeros cuatro capítulos representan un intento del expositor de presentar los elementos básicos de la teoría. Para ello utilizó el libro de R. Adams [1] eliminando los detalles que pueden obviarse en una primera presentación del tema.

R.P.

INDICE GENERAL.

Capítulo I. Los espacios $W^{m,p}$ y $W_o^{m,p}$.

Capítulo II. Espacios de Sobolev en dominios especiales.

Capítulo III. Teoremas de inmersión.

Capítulo IV. Dualidad.

Capítulo V. Los espacios $H^s(R^n)$, $s \in R$.

I. LOS ESPACIOS $W^{m,p}$ y $W_0^{m,p}$.

1. INTRODUCCION. Sea Ω un abierto de R^n, y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, m entero no negativo, como la familia de funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$, si $0 \leq |\alpha| \leq m$. Las derivadas se entienden en el sentido de las distribuciones de L. Schwartz. (Aquí $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $|\alpha| = \sum \alpha_i$, $\alpha_i \geq 0$.) Es decir $\partial^\alpha u$ es la α-ésima derivada débil de u. Si $p < \infty$ introducimos en ese espacio vectorial (complejo) la norma:

$$(1) \qquad \|u\|_{m,p} := \Big(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p^p\Big)^{1/p},$$

o bien, $\|u\|_{m,\infty} = \sup_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty$ si $p = \infty$.

Obviamente, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, y $W^{m,p}(\Omega) \supset C_0^\infty(\Omega)$. Designaremos con $W_0^{m,p}(\Omega)$ a la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$. Evidentemente, $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$, y vale:

$$W_0^{m,p} \hookrightarrow W^{m,p} \hookrightarrow L^p.$$

El símbolo $X \hookrightarrow Y$ indica que el espacio normado X está sumergido en el espacio normado Y, es decir, X es un subespacio de Y -o identificable por una inyección a un subespacio- y el operador identidad es continuo: $\|x;Y\| \leq M\|x;X\|$. Así por ejemplo, $C([a,b]) \hookrightarrow L^1([a,b])$. El símbolo $\hookrightarrow\hookrightarrow$ indicará que la inmersión es compacta. La inmersión precedente no lo es.

TEOREMA 1. $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach, lo mismo que* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

DEMOSTRACION. Para todo α, $0 \leq |\alpha| \leq m$, si $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$, existe $u_\alpha \in L^p$ tal que $\partial^\alpha u_n \to u_\alpha (L^p)$. Luego $u_\alpha = \partial^\alpha u_0 (\mathcal{D}')$ y $\|u_n - u_0\|_{m,p} \to 0$ para $n \to \infty$, qed..

TEOREMA 2. *i) Si* $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *es separable,* *ii) Si* $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *es reflexivo y uniformemente convexo,*

iii) Si $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert:*

$$(2) \qquad (u,v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v) = \sum_\alpha \int_\Omega \partial^\alpha u . \overline{\partial^\alpha v}\, dx.$$

DEMOSTRACION. Para demostrarlo recurriremos al siguiente resultado del análisis funcional:

TEOREMA 3. *Sea N entero positivo, y* $L^p_N(\Omega) = \prod_{i=1}^N L^p(\Omega)$; $\|u\|_{L^p_N} = \|(u_1,\ldots,u_N);L^p_N\| =$

$= (\sum_1^N \|u_j\|_p^p)^{1/p}$ *si* $1 \leq p < \infty$, $= \sup_j \|u_j\|_\infty$, *si* $p = \infty$.

Entonces L^p_N *es un espacio de Banach y separable si* $1 \leq p < \infty$. *Si* $1 < p < \infty$, L^p_N *es reflexivo y uniformemente convexo.*

Sea ahora $N = \sum \{1: 0 \leq |\alpha| \leq m\}$. Ordenemos los N índices α y definamos:

$$P: W^{m,p}(\Omega) \ni u \to (\partial^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in L^p_N.$$

Entonces $\|u\|_{m,p} = \|(\partial^\alpha u);L^p_N\|$ y P define una isometría entre $W^{m,p}$ y un subespacio $P(W^{m,p})$ de L^p_N.

Como las propiedades mencionadas en el teorema son hereditarias sigue que las mismas valen para nuestro espacio $W^{m,p}$, qed..

2. COMENTARIOS SOBRE LOS REQUISITOS. Recordemos algunas propiedades:

a) Los espacios vectoriales considerados lo serán sobre el cuerpo de los complejos. Para un espacio normado X valen las siguientes propiedades:

i) X es reflexivo si y sólo si su dual X' lo es; ii) es separable si X' es separable; iii) X es separable y reflexivo si y sólo si X' es separable y reflexivo; iv) Si X es un espacio de Banach, X es reflexivo si y sólo si la esfera unitaria $B_1(0) = \{x \in X: \|x\| \leq 1$ es débilmente secuencialmente ocmpacta, (ver [3,8]).

b) Un espacio normado X se dice uniformemente convexo si admite una norma equivalente $\|.\|$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon \leq 2$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ para el cual si $x,y \in X$, $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ y $\|x-y\| \geqq \varepsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqq 1 - \delta(\varepsilon)$. (Pueden reemplazarse los = por $\leqq$). Esto equivale a decir que si dos sucesiones cualesquiera $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, verifican $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ para todo n entonces

$\left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \to 1 \Rightarrow \|x_n - y_n\| \to 0$.

Todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo (ley del paralelogramo).

c) Si X es un espacio de Banach y M un subespacio (cerrado) entonces M hereda las propiedades de separablidad, reflexividad o uniforme convexidad si X las posee.

Estas propiedades pasan de los factores al producto: sea X_j un espacio de Banach, $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $X = \{(x_1, \ldots, x_n): x_j \in X_j\}$ es un espacio de Banach con cualquiera de las siguientes normas equivalentes:

$$|||x|||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_j^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqq p < \infty, \qquad |||x|||_\infty = \max_{1 \leqq j \leqq n} \|x_j\|_j.$$

X es separable, reflexivo o uniformemente convexo si respectivamente, lo es cada X_j. En el caso $1 < p < \infty$ ya la norma $|||\cdot|||_p$ es uniformemente convexa, ([1]).

d) Si $\{x_n\} \subseteq X \in$ Banach es una sucesión de Cauchy débil entonces es uniformemente acotada y la norma de su límite débil, si existe, no supera a $\underline{\lim} \|x_n\|$.

Recordemos también que los conjuntos convexos en X, son débilmente cerrados si y sólo si son fuertemente cerrados.

e) La medida de Lebesgue en R^n es regular: sea E medible acotado, dado $\varepsilon > 0$ existe K compacto, $K \subset E$, tal que $m(E \setminus K) < \varepsilon$.

f) T. DE RADON Y NIKODYM. Sea λ una medida compleja sobre los conjuntos medibles Lebesgue tal que $m(A) = 0$ implica $\lambda(A) = 0$. Entonces, existe $f \in L^1(R^n)$ tal que sobre todo conjunto E medible vale (cf. [3, 9, 10])

$$\lambda(E) = \int_E f \, dx.$$

g) T. DE HAHN. Sea λ una medida real con signo sobre una σ-álgebra Σ de conjuntos medibles de un espacio de medida X. Entonces, existen $B, C \in \Sigma$, $B \cap C = \emptyset$, $C \cup B = X$, tales que B es un conjunto positivo para λ ($A \subset B$, $A \in \Sigma \Rightarrow \lambda(A) \geqq 0$) y C es un conjunto negativo para λ (cf. [3, 9, 10]).

h) $L^p(R^n)$ es la familia de clases de funciones medibles equivalentes tales que

$\|f\|_p = (\int_{R^n} |f(x)|^p\, dx)^{1/p} < \infty$, $1 \leq p < \infty$, o bien, si $p = \infty$, $\|f\|_\infty = \sup \text{es} |f| < \infty$.

$L^p(\Omega)$, Ω abierto de R^n, se define análogamente y es un espacio de

Banach. Si $m(\Omega) < \infty$ se tiene $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, $1 \leq p < q \leq \infty$, como se ve aplicando la desigualdad de Hölder, y en este caso $\|u\|_p \to \|u\|_\infty$ si $p \to \infty$. Luego, cualquiera sea p se tiene $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ ($f \in L^1_{loc}(\Omega)$ sii $\int_K |f|\, dx < \infty$ para todo compacto $K \subset \Omega$).

Obsérvese que no hay inclusiones si $\Omega = R^n$, vg. $L^1(R^n) \not\supset L^2 \not\supset L^1$.

i) $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$. En este caso L^p es un espacio separable. $L^\infty(\Omega)$ no lo es.

j) Sea $1 < p < \infty$. $L^p(\Omega)$ con la norma definida es uniformemente convexo. Un teorema debido a D.P. Milman (ver [8]) asegura que todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo. O sea, cada $L^p(\Omega)$ es reflexivo si $1 < p < \infty$, pero esto no es cierto para $p = 1$ y $p = \infty$. Además si $1 \leq p < \infty$, $(L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega)$ con $1/p + 1/p' = 1$. Si $F(f)$ es una funcional lineal continua sobre $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, existe exactamente una $g \in L^{p'}$ tal que $F(f) = \int_\Omega f.g\, dx$, (F. Riesz), ([3,9]). Además, $\|F\| = \|g\|_{p'}$.

k) Toda sucesión de Cauchy en L^p tiene una subsucesión convergente en casi todo punto a su límite en norma.

l) $C_0^\infty(\Omega)$ es un conjunto **determinante** para $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, en el sentido que $\|f\|_p = \sup \{\int fg\, dx : \|g\|_{p'} \leq 1,\ g \in C_0^\infty\}$.

m) La uniforme convexidad de $\|.\|_p$, $1 < p < \infty$, se demuestra por ejemplo usando las siguientes desigualdades debidas a Clarkson: sean $u,v \in L^p(\Omega)$,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_p^p, \quad 2 \leq p < \infty,$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^{p'} \leq (\frac{1}{2}\|u\|_p^p + \frac{1}{2}\|v\|_p^p)^{p'-1}, \quad 1 < p \leq 2,$$

con $1/p + 1/p' = 1$, es decir, $p' = p/(p-1)$, ([1,11]).

3. LA FORMULA DE LEIBNITZ. Si α y β son n-multiíndices designaremos con $\binom{\alpha}{\beta}$ al número combinatorio:

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{\beta_1! \cdots \beta_n! \, (\alpha_1 - \beta_1)! \cdots (\alpha_n - \beta_n)!} = \frac{\alpha!}{\beta! \, (\alpha - \beta)!} \, .$$

También convendremos en escribir $D_j = i^{-1} \partial_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$. Sean $a(x)$, $u(x)$ ε $C^m(\Omega)$, Ω abierto de R^n. Vale entonces la fórmula

$$\partial^\alpha(au) = \sum_{\beta \leqq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta a(x) \, \partial^{\alpha-\beta} u(x),$$

donde $\beta \leqq \alpha$ significa $\beta_i \leqq \alpha_i$ para todo i. Esta fórmula sigue siendo válida si $a \,\varepsilon\, C^\infty$ y $u \,\varepsilon\, \mathcal{D}(\Omega)$. Si $M(x)$ designa el monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ denotaremos con $M(D)$ al operador diferencial $D^\alpha = (1/i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$. Para $a \,\varepsilon\, C^\infty$, $u \,\varepsilon\, \mathcal{D}$ y $P(x)$ un polinomio vale entonces que

$$P(D)(au) = \sum_\beta D^\beta a \, (P^{(\beta)}(D)u/\beta!)$$

donde $P^{(\beta)}(x) = \partial^\beta P(x)$, ([5, 6]).

4. REGULARIZADORES. Sea $J(x) \geqq 0$, ε $C_0^\infty(R^n)$, $J(x) = 0$ si $|x| \geqq 1$ tal que $\int J(x)\,dx = 1$. Si $\varepsilon \,\varepsilon\, (0,1]$ definimos: $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon)$. La familia $\{J_\varepsilon\}$ define un regularizador por convolución: $u \to J_\varepsilon * u$.

TEOREMA 4. *i)* $u \,\varepsilon\, L^1_{loc}(R^n) \Rightarrow J_\varepsilon * u \,\varepsilon\, C^\infty(R^n)$ *y*

$$D^\alpha(J_\varepsilon * u) = (D^\alpha J_\varepsilon) * u \qquad \textit{para todo } \alpha,$$

ii) $u \in L^1_{loc}(R^n)$, sop $u \subset\subset \Omega$ *(*) y* $\varepsilon <$ dist (sop $u, \partial\Omega) \Rightarrow J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$,

iii) $u \in L^p(R^n)$, $1 \leq p < \infty \Rightarrow \|J_\varepsilon * u\|_p \leq \|u\|_p$, $\|J_\varepsilon * u - u\| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$,

iv) Si $\phi \in C(\Omega)$ *y* $K = \overline{K} \subset\subset \Omega$ *entonces* $J_\varepsilon\phi \xrightarrow{\cdot} \phi$ *sobre* K.

DEMOSTRACION. Veamos iii). Como $\int J_\varepsilon(x - y)\, dy = 1$, de una aplicación de la desigualdad de Hölder se obtiene

$$|(J_\varepsilon * u)(x)| \leq \left(\int J_\varepsilon(x - y)\, |u(y)|^p\, dy\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Luego, $\int |(J_\varepsilon * u)(x)|^p\, dx \leq \int |u(y)|^p\, dy$. Sea ahora $\phi \in C_0^\infty$ tal que $\|u - \phi\|_p < \varepsilon$. Entonces $\|J_\varepsilon * u - J_\varepsilon * \phi\|_p \leq \|u - \phi\|_p < \varepsilon$. Además

$$(3) \qquad |J_\varepsilon * \phi(x) - \phi(x)| \leq \int J_\varepsilon(x - y)\, |\phi(y) - \phi(x)|\, dy \leq$$

$$\leq \sup_{|y - x| < \varepsilon} |\phi(y) - \phi(x)| \to 0 \quad \text{para} \quad \varepsilon \to 0.$$

O sea $\|J_\varepsilon * \phi - \phi\|_p < \varepsilon$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$, y por tanto, $\|J_\varepsilon * u - u\| < 3\varepsilon$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$.
iv) sigue de (3) tomando $\varepsilon <$ dist $(K, \partial\Omega)$, qed..

5. ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS. $C^m(\Omega)$, $C^\infty(\Omega) = \bigcap_m C^m(\Omega)$, $C_0(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ denotan espacios de Banach ya familiares, (ver la lista de símbolos). Definimos

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{\phi \in C^m(\Omega) \colon \partial^\alpha\phi \text{ es acotada y uniformemente continua en } \Omega \text{ si } |\alpha| \leq m\}.$$

La norma $\|\phi; C^m(\overline{\Omega})\| := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha\phi\|_\infty$ hace de este espacio vectorial un espacio de Banach.
Si Ω es acotado, vale que

(*) sop u := soporte de u; diremos que $G \subset\subset F$ si $\overline{G}$ es un compacto contenido en el interior de F.

$C^m(\overline{\Omega}) = \{\phi \in C^m(\Omega)$: $\partial^\alpha\phi$ puede extenderse continuamente hasta el borde de Ω, $|\alpha| \leq m\}$.

(En efecto, ϕ puede identificarse con su única extensión continua a $\overline{\Omega}$ si es uniformemente continua en Ω.).

En este caso un conjunto $A \subset C(\overline{\Omega})$ es precompacto si es acotado y equiuniformemente continuo (T. de Arzelá - Ascolí). También, si $S \subset C(\overline{\Omega})$ es un álgebra cecerrada por conjugación, que separa puntos de $\overline{\Omega}$ y que no se anula en un punto de $\overline{\Omega}$ entonces $\overline{S} = C(\overline{\Omega})$ (T. de Stone - Weierstrass). De aquí se deduce que los polinomios en x_1, ..., x_n, a coeficientes racionales forman una familia densa en $C(\overline{\Omega})$.

Sea $0 < \lambda \leq 1$. Definimos

$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) = \{\phi \in C^m(\overline{\Omega})$: $\partial^\alpha\phi$ satisface **una condición de Hölder** λ en Ω, $|\alpha| \leq m\}$,

es decir, para todo α, $|\alpha| \leq m$, y toda $\phi \in C^{m,\lambda}$ existe una constante K tal que

$$|\partial^\alpha\phi(x) - \partial^\alpha\phi(y)| \leq K|x - y|^\lambda, \qquad x,y \in \Omega.$$

Si $\lambda = 1$ diremos que $\partial^\alpha\phi$ satisface **una condición de Lipschitz.** $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ deviene un espacio de Banach si lo munimos con la norma:

$$\|\phi ;C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\| = \|\phi;C^m(\overline{\Omega})\| + \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha\phi(x) - \partial^\alpha\phi(y)|}{|x - y|^\lambda} .$$

Sea ahora Ω acotado, y $0 < \nu < \lambda \leq 1$. Vale

$$C^{m,1}(\overline{\Omega}) \underset{\neq}{\hookrightarrow} C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \underset{\neq}{\hookrightarrow} C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \underset{\neq}{\hookrightarrow} C^m(\overline{\Omega}) = C^{m,0}(\overline{\Omega}).$$

EJERCICIOS. 1) $|x|^{1/2} \in C^{0,1/2}(R)$,

2) $f(x) \in C^{0,\mu}(R^n)$, $\mu > 1$, $\Rightarrow$ $f = cte.$,

3) $C^{m,1}([0,1]) \not\subset C^{m+1}([0,1])$,

4) $C^{m+1}(\overline{\Omega})$ en general no está contenido en $C^{m,1}(\overline{\Omega})$ (vg. $\Omega = \bigcup_k (2^{-2k-1},2^{-k})$),

5) sen xy no es uniformemente continua en R^2.

6. DERIVADAS DEBILES. Supongamos, para fijar las ideas, que Ω es un paralelepípedo de lados paralelos a los ejes. Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, es decir, $f \in L^1(K)$ sobre todo compacto K contenido en el abierto Ω. Diremos que $v \in L^1_{loc}$ es la derivada débil de u según x_j si para toda $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale

$$\int_\Omega u(x) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\, dx = - \int_\Omega v(x)\, \phi(x)\, dx.$$

Luego, $v = \partial_j u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $v \in L^1_{loc}$. Sea u absolutamente continua en $\Omega = (0,1)$. Entonces $\frac{du}{dx}$ existe casi doquier y vale $\int u'(x)\, \phi(x)\, dx = - \int u(x) .\ \phi'(x)\, dx$ para todo $\phi \in C_0^\infty((0,1))$. Es decir, u' es la derivada débil de u aunque $\frac{du}{dx}$ no exista necesariamente en todo punto. (La función de Cantor $c(x)$ tiene derivada nula c.d. pero ésta no es su derivada débil ($c(x) \notin AC$)). Lo dicho puede enunciarse de la siguiente manera.

TEOREMA 5. *Sea* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $x' = (x_2,\dots,x_n)$. *Si* $f(x_1,x')$ *es absolutamente continua respecto de* x_1 *para todo* x' *y* $\frac{\partial f}{\partial x_1} = g(x_1,x') \in L^1_{loc}$, *entonces*

$$\partial_1 f = g(\mathcal{D}').$$

TEOREMA 6 (Lema de Du Bois - Reymond). *Sean* u *y* f *en* $C(\Omega)$ *y* $\partial_j u = f\ (\mathcal{D}'(\Omega))$. *Entonces* $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

DEMOSTRACION. Basta suponer que tanto u como f tienen soporte compacto. Luego, si $u_\varepsilon = J_\varepsilon * u$, tenemos

$$\partial_j u_\varepsilon = J_\varepsilon * (\partial_j u) = J_\varepsilon * f = f_\varepsilon.$$

Como $u_\varepsilon \dot{\to} u$, $f_\varepsilon \dot{\to} f$ resulta que

$$u = \lim u_\varepsilon = \lim \int^{x_j} \partial_j u_\varepsilon\, dx_j = \lim \int^{x_j} f_\varepsilon\, dx_j = \int^{x_j} f\, dx_j.$$

Por tanto, $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$, qed..

Como complemento de los dos teoremas anteriores enunciamos el

TEOREMA 7. *Sea* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\partial_1 f = g(\mathcal{D}')$, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Entonces* $f(x_1, x')$ *puede identificarse con una función absolutamente continua en* x_1, *cualquiera sea* x', *y* $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x') = g(x_1, x')$ *c.d. en el sentido clásico.*

Además, si $T \in \mathcal{D}'$ *y* $\partial_j T \in L^1_{loc}$, $j = 1, \ldots, n$, *entonces* $T = f \in L^1_{loc}$.

La última afirmación asegura que si Ω es un abierto de R^n y $\partial_j T \in W^{m,p}(\Omega)$ para todo j entonces $T \in W^{m+1,p}(\Omega')$ si $\Omega' \subset\subset \Omega$.

7. EL ESPACIO $W^{m,p}(\Omega)$. Sea Ω un abierto y sea

$$S(\Omega) = \{\phi \in C^m(\Omega): \|\phi\|_{m,p} < \infty\}.$$

Evidentemente, $S \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ isométricamente. Sea $\overline{S}$ la clausura de S en $W^{m,p}$. Luego $\overline{S}$ es un subespacio de $W^{m,p}$. Más aún, vale el

TEOREMA 8 (Meyers, Serrin). *Sea* $1 \leq p < \infty$. *Entonces* $\overline{S} = W^{m,p}$.

Para la demostración de este teorema necesitamos dos resultados auxiliares.

TEOREMA 9 (Partición de la unidad). *Sea* $\mathcal{O}$ *una colección de abiertos en* Ω *tal que* $\bigcup_{V \in \mathcal{O}} V = \Omega$. *Entonces existe una colección numerable de funciones de* $C_0^\infty(\Omega)$, $\{\phi_j\}$, *tal que (i)* $0 \leq \phi_j(x)$, *(ii)* sop $\phi_j \subset V = V(j) \in \mathcal{O}$, *(iii) si* K *es un compacto en* Ω, $\#\{j:$ sop $\phi_j \cap K \neq \emptyset\} < \infty$, *(iv)* $\sum \phi_j(x) \equiv 1$ *en* Ω.

DEMOSTRACION. Para probar este teorema basta observar que Ω es un espacio de Lindelöff y recurrir al teorema homónimo demostrado en [5,6] que dice que si $U_1, \ldots, U_N$ es un cubrimiento por abiertos de un compacto $K \subseteq R^n$ existe una familia $\phi_i(x) \in C_0^\infty(U_i)$, $i = 1, \ldots, N$, tal que $0 \leq \phi_i$, $\sum \phi_i = 1$ sobre K, qed..

TEOREMA 10. *Sean* $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{m,p}(\Omega)$, $\Omega' \subset\subset \Omega$. *Entonces* $J_\varepsilon * u \underset{\varepsilon \to \infty}{\to} u$ *y*

$\partial^\alpha(J_\varepsilon * u) = J_\varepsilon * \partial^\alpha u$, $|\alpha| \leq m$, *en* $W^{m,p}(\Omega')$.

DEMOSTRACION. Designaremos con $\tilde{u}$ a la función

$$\tilde{u} = u \text{ en } \Omega, \quad \tilde{u} = 0 \text{ en } C\Omega = R^n \backslash \Omega, \tag{4}$$

Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega')$. Entonces, si ε es bastante pequeño,

$$\int_{\Omega'} J_\varepsilon * u . \partial^\alpha \phi \, dx = \int_{R^n} \partial^\alpha \phi \, dx \int_{R^n} \tilde{u}(x - y) \, J_\varepsilon(y) \, dy =$$

$$= \int_{R^n} J_\varepsilon(y) \, dy \int_{R^n} \partial^\alpha \phi(x) \, \tilde{u}(x - y) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int J_\varepsilon(y) \, dy \int \phi(x)(\partial^\alpha u)(x - y) \, dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \iint \phi(x) \, J_\varepsilon(y) \, \partial^\alpha u(x - y) \, dx \, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega'} (J_\varepsilon * \partial^\alpha u)(x) \, \phi(x) \, dx.$$

Como $\|J_\varepsilon * v - v\|_{p|\Omega'} \leq \|J_\varepsilon * \tilde{v} - \tilde{v}\|_{p|R^n} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ resulta que

$\|\partial^\alpha(J_\varepsilon * u) - \partial^\alpha u\|_{p|\Omega'} \to 0$ para $\varepsilon \to 0$, qed..

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 8. Sean $\Omega_k = \{x \in \Omega : |x| < k \text{ y dist } (x, \partial\Omega) > 1/k\}$,
$\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$. Definamos

$$U_k = \Omega_{k+1} \cap C\overline{\Omega}_{k-1}, \qquad \mathcal{O} = \{U_k\}.$$

Sea Ψ una partición de la unidad para Ω subordinada a $\mathcal{O}$. Sea ψ_k la suma (finita) de todas las funciones en Ψ con soporte en U_k. Luego, $\sum \psi_k = 1$ en Ω y sop $\psi_k \subset U_k$. Sea $0 < \varepsilon_k < 1/(k + 1)(k + 2)$. Entonces sop $(J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u)) \subset \Omega_{k+2} \cap C\overline{\Omega_{k-2}} =: V_k$. Obviamente $V_k \subset\subset \Omega$. Elijamos ε_k tan pequeño como para que valga

$$\| J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u\|_{m,p|\Omega} = \| J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) - \psi_k u\|_{m,p|V_k} < \varepsilon/2^k,$$

y definamos $\phi = \sum_1^\infty J_{\varepsilon_k} * (\psi_k u) \in C^\infty(\Omega)$. Si $x \in \Omega_k$ se tiene

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k+2} \psi_j(x)u(x), \qquad \phi(x) = \sum_{j=1}^{k+2} (J_{\varepsilon_j} * (\psi_j u))(x).$$

Entonces, $\|u - \phi\|_{m,p|\Omega_k} \leq \sum_1^{k+2} \| J_{\varepsilon_j} * (\psi_j u) - \psi_j u\|_{m,p|\Omega} < \varepsilon$ implica $\|u - \phi\|_{m,p} \leq \varepsilon$, qed..

Sea $\Omega = (-1,1)$, $u(x) = |x|$. Entonces $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ pero no es aproximable por funciones C^∞ en $W^{1,\infty}$. O sea, el teorema no vale si $p = \infty$.

8. EL ESPACIO $W_0^{m,p}(\Omega)$. Este es, por definición, el subespacio de $W^{m,p}(\Omega)$ para el cual $C_0^\infty(\Omega)$ es una familia densa. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ entonces u (cf. (4)) no pertenece necesariamente a $W^{m,p}(R^n)$. Sin embargo, esto es cierto en $W_0^{m,p}(\Omega)$.

TEOREMA 11. *Sea* $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. *Si* $|\alpha| \leq m$ *entonces*

$$\partial^\alpha \tilde{u} = (\partial^\alpha u)^\sim (\mathcal{D}'(R^n)).$$

DEMOSTRACION. Sea $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to u$ en $W_0^{m,p}(\Omega)$. Sea $\psi \in C_0^\infty(R^n)$ y $|\alpha| \leq m$. Entonces

$$(-1)^{|\alpha|}\int_{R^n} \tilde{u}.\partial^\alpha\psi \, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u.\partial^\alpha\psi \, dx = \lim (-1)^{|\alpha|}\int \phi_n.\partial^\alpha\psi \, dx =$$

$$= \lim \int \partial^\alpha\phi_n.\psi \, dx = \int_\Omega \partial^\alpha u.\psi \, dx = \int_{R^n} (\partial^\alpha u)^\sim.\psi \, dx, \qquad \text{qed..}$$

Es interesante observar que, como veremos más adelante vale el

TEOREMA 12. $W^{m,p}(R^n) = W_0^{m,p}(R^n)$ *si* $1 \leqq p < \infty$.

Definamos la seminorma $|\cdot|_{m,p|\Omega}$ por

(5) $$|u|_{m,p|\Omega} := \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|^p_{0,p|\Omega}\Big)^{1/p}.$$

TEOREMA 13. *Sean* Ω *acotado y* $1 \leqq p < \infty$. *Entonces* $|\cdot|_{m,p}$ *define una norma equivalente a* $\|\cdot\|_{m,p}$ *en* $W_0^{m,p}(\Omega)$.

DEMOSTRACION. Sean $V = \{x\colon 0 < x_n < d < \infty\}$ y $\phi \in C_0^\infty(V) \cap C_0^\infty(R^n)$. Entonces de $\phi(x) = \int_0^{x_n} \frac{\partial}{\partial t}(\phi(x',t))\, dt$ sigue, por una aplicación de la desigualdad de Hölder,

(6) $$\|\phi\|^p_{0,p} = \int_{R^{n-1}} dx' \int_0^d |\phi(x',x_n)|^p\, dx_n \leqq \int_{R^{n-1}} dx' \int_0^d x_n^{p-1}\, dx_n \int_0^d |\partial_n\phi(x',t)|^p dt \leqq$$

$$\leqq (d^p/p)\, |\phi|^p_{1,p}.$$

(6) es la llamada **desigualdad de Poincaré**.

En consecuencia tenemos $|\phi|^p_{1,p} \leqq C'(d)|\phi|^p_{2,p}$, y por tanto

(7) $$\|\phi\|^p_{m,p} \leqq C(d).\|\phi\|^p_{m,p}.$$

Un pasaje al límite permite demostrar (7) para toda $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, si Ω es acotado, lo cual prueba el teorema 13.

TEOREMA 14. *Sea* Ω *acotado*, $1 \leqq p < \infty$, $m > 0$. *Entonces*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega).$$

DEMOSTRACION. Bastará demostrar que $1 \in W^{m,p}(\Omega)$ y $1 \notin W_0^{m,p}(\Omega)$. Y para esto es suficiente ver que $1 \notin W_0^{1,1}(\Omega) \supset W_0^{m,p}(\Omega)$. Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\|1 - \phi\|_{1,1} = \int_\Omega |1 - \phi|\, dx + \int_\Omega |\text{grad}\ \phi|\, dx; \qquad |\text{grad}\ \phi| = \sum |\partial_j \phi|.$$

Pero, de la desigualdad de Poincaré obtenemos

$$\|\phi\|_1 \leqq C\|\text{grad}\ \phi\|_1, \qquad C = \text{diam}\ \Omega.$$

Luego,

$$\|1 - \phi\|_{1,1} \geqq |\Omega| - \int |\phi|\, dx + \int |\text{grad}\ \phi|\, dx \geqq |\Omega| - (C - 1) \int |\text{grad}\ \phi|\, dx \geqq$$

$$\geqq |\Omega| - (C - 1)\|1 - \phi\|_{1,1}.$$

Por tanto, $\|1 - \phi\|_{1,1} \geqq \frac{|\Omega|}{C} > 0$, qed..

9. TRANSFORMACION DE COORDENADAS. Sea Φ: $\Omega \ni x \to y \in G$ una transformación biunívoca y sobre de un abierto $\Omega \subset R^n$ en otro abierto $G \subset R^n$. Supondremos que $y_i = \Phi_i(x) \in C^m(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$, lo mismo que su inversa $\Psi = \Phi^{-1}$: $\Psi_j(y) \in C^m(\overline{G})$, $j = 1, \ldots, n$, con $m \geqq 1$. Diremos entonces que Φ es **m-regular.** Entonces, si

$$\Phi'(x) = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)},$$

resulta que

$$0 < r = \inf_x |\det \Phi'(x)| \leqq \sup_x |\det \Phi'(x)| = R < \infty,$$

y por tanto que, si $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leqq p < \infty$, $(\Psi^* u)(y) := u(\Psi(y)) \in L^p(G)$ y valen

$$\|\Psi^* u\|_p^p = \int_G |u(\Psi(y))|^p\, dy = \int_\Omega |u(x)|^p . |\det \Phi'(x)|\, dx \leqq R.\|u\|_p^p,$$

(8) $$r^{1/p}\|u\|_{p|\Omega} \leqq \|\Psi^* u\|_{p|G} \leqq R^{1/p}\|u\|_{p|\Omega}.$$

TEOREMA 15. *Sea* $\Phi: \Omega \to G$ *m-regular,* $\Psi = \Phi^{-1}$. *Entonces*

$$\Psi^*: W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(G),$$

define un isomorfismo entre esos espacios.

DEMOSTRACION. De (8) sigue que basta probar que existe K tal que $\|\Psi^* u\|_{m,p} \leq K\|u\|_{m,p}$. Sea $\{u_n\} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{m,p}$, y $|\alpha| \leq m$.

$$(9) \qquad \partial^\alpha(\Psi^* u_n)(y) = \partial^\alpha(u_n(\Psi(y))) = \partial^{\alpha-1}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}(\Psi(y)).\frac{\partial x_1}{\partial y_k} + \frac{\partial u_n}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_k} + \ldots\right) =$$

$$= \partial^{\alpha-2}\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial y_k}\frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial y_k \partial y_j} + \ldots\right) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} M_{\alpha\beta}(y)\,\Psi^*(\partial^\beta u_n)(y),$$

donde $M_{\alpha\beta}$ es un polinomio de grado $\leq |\beta|$ en las derivadas de orden $\leq |\alpha| \leq m$ de las componentes de Ψ. Sea $\phi \in C_0^\infty(G)$:

$$(-1)^{|\alpha|}\int_G (\Psi^* u_n)(y).\partial^\alpha\phi(y)\,dy = \sum \int_G \Psi^*(\partial^\beta u_n)(y) M_{\alpha\beta}(y).\phi(y)\,dy.$$

En consecuencia,

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_n(x)(\partial^\alpha\phi)(\Phi(x)).|\det \Phi'(x)|\,dx =$$

$$= \sum \int_\Omega \partial^\beta u_n(x).M_{\alpha\beta}(\Phi(x))\,\phi(\Phi(x))\,|\det \Phi'(x)|\,dx.$$

Como $\partial^\beta u_n \to \partial^\beta u (L^p)$ se deduce que (9) vale para u en lugar de u_n:

$$\partial^\alpha(\Psi^* u)(y) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \Psi^*(\partial^\beta u)(y).M_{\alpha\beta}(y), \qquad (\mathcal{D}'(G)).$$

Entonces,

$$\int_G |\partial^\alpha(\Psi^* u)|^p \, dy \leq K_1^p . \sup_{\beta, y} |M_{\alpha\beta}(y)|^p . \sup_\beta \int_G |(\partial^\beta u) . (\Psi(y))|^p \, dy \leq$$

$$\leq K_2^p . \sup_\beta \int_\Omega |\partial^\beta u(x)|^p . |\det \Phi'(x)| \, dx \leq K_3^p \int_\Omega |\partial^\beta u|^p \, dx,$$

implica $\|\Psi^* u\|_{m,p|G} \leq K . \|u\|_{m,p|\Omega}$, qed..

10. CONJUNTOS PRECOMPACTOS EN $L^p(\Omega)$. En esta sección queremos caracterizar los conjuntos en L^p de clausura compacta, aunque más que el resultado nos interesa exhibir el uso de los regulizadores en la demostración escogida para ese fin.

TEOREMA 16. *Sea* $1 \leq p < \infty$, *y* K *un conjunto acotado en* $L^p(\Omega)$. K *es precompacto si y sólo si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *y existe* $G \subset\subset \Omega$ *tal que para toda* $u \in K$ *y todo* h, $|h| \leq \delta$, *vale (cf. (4))*

(A) $$\int_\Omega |\tilde{u}(x + h) - \tilde{u}(x)|^p \, dx < \varepsilon^p,$$

(B) $$\int_{\Omega \setminus G} |u|^p \, dx < \varepsilon^p.$$

DEMOSTRACION. (A) y (B) son necesarias: de la hipótesis sigue que existe una ε-red finita $\{\phi_i : i = 1, \ldots, N\}$ de funciones en $C_0^\infty(\Omega)$. Sea $(\tau_h v)(x) := v(x + h)$. Luego, si $G = \bigcup_{i=1}^N \operatorname{sop} \phi_i$, resulta (B), y en R^n:

$$\|\tau_h \tilde{u} - \tilde{u}\|_p \leq \|\tau_h \tilde{u} - \tau_h \tilde{\phi}_i\|_p + \|\tau_h \tilde{\phi}_i - \tilde{\phi}_i\|_p + \|\tilde{\phi}_i - \tilde{u}\|_p \leq 2\|\tilde{\phi}_i - \tilde{u}\|_p + \|\tau_h \tilde{\phi}_i - \tilde{\phi}_i\|_p,$$

y se obtiene (A).

(A) y (B) son suficientes: sea $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$|J_\eta * \tilde{\Phi}(x) - \tilde{\Phi}(x)|^p = \left|\int_{R^n} J_\eta(y)(\tilde{\Phi}(x - y) - \tilde{\Phi}(x)) \, dy\right|^p \leq \int J_\eta(y) |\tau_{-y} \tilde{\Phi}(x) - \tilde{\Phi}(x)|^p \, dy$$

implica

$$\|J_\eta * \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}\|_p \leqq \sup \{\|\tau_h\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}\|_p : |h| \leqq \eta\}.$$

Sea ahora

$$C_o^\infty(\Omega) \supset \{\Phi_n\}, \quad \Phi_n \to u \text{ en } L^p(\Omega).$$

Entonces $\|J_\eta * \tilde{u} - \tilde{u}\|_p \leqq \sup \{\|\tau_h\tilde{u} - \tilde{u}\|_p : |h| \leqq \eta\}$. Luego, de (A), y (B), si $|h|$ es bastante pequeño, obtenemos $J_\eta * \tilde{u} \to \tilde{u}$ en $L^p(R^n)$, uniformemente sobre K. Además

$$|J_\eta * \tilde{u}(x)| \leqq (\sup_{x \,\varepsilon\, R^n} J_\eta(x))^{1/p} . \|u\|_p, \quad x \,\varepsilon\, R^n.$$

O sea, si $h \,\varepsilon\, B_\eta(0)$,

$$|J_\eta * \tilde{u}(x + h) - J_\eta * \tilde{u}(x)| \leqq (\sup J_\eta(x))^{1/p} . \|\tau_h\tilde{u} - \tilde{u}\|_p .$$

Luego, sobre $G = \overline{G}$, $\mathcal{J} = \{J_\eta\tilde{u} : \tilde{u} \,\varepsilon\, K\}$ es precompacta en $C(G)$. Entonces existe $\mathcal{L} = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subset C(G)$ tal que $\mathcal{L}$ es una ε'-red allí para $\mathcal{J}$. En consecuencia, si $\delta = \eta$, $|h| \leqq \delta$ y $\varepsilon' = \varepsilon/|\overline{G}|^{1/p}$ tenemos:

$$\int_{R^n} |\tilde{u} - \tilde{\psi}_j|^p \, dx = \int_{R^n \setminus G} |\tilde{u}|^p \, dx + \int_G |u - \psi_j|^p \, dx \leqq$$

$$\leqq \varepsilon^p + 2^p \int_G |\tilde{u} - J_\eta * \tilde{u}|^p \, dx + 2^p \int_G |J_\eta * u - \psi_j|^p \, dx \leqq$$

$$\leqq \varepsilon^p + 2^p . \sup_{\eta \,\varepsilon\, B_h} \|\tau_h\tilde{u} - \tilde{u}\|_p^p + 2^p . \varepsilon'^p . |G| \leqq \varepsilon^p(1 + 2^{p+1}), \qquad \text{qed..}$$

II. ESPACIOS DE SOBOLEV EN DOMINIOS ESPECIALES.

1. DOMINIOS CON LA PROPIEDAD DEL SEGMENTO O DEL CONO. El dominio de definición de los elementos del espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $m \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, será siempre un **abierto** Ω contenido en R^n. Dominios que yacen a ambos lados de su frontera presentan algunas características indeseables. Por ejemplo, sea $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 =$ $= (-1,0) \times (0,1) \cup (0,1) \times (0,1) \subset R^2$. Sabemos que $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$, si $p < \infty$, es denso en $W^{m,p}$. ¿Qué ocurre con $C^\infty(\overline{\Omega})$? Sea u la función igual a 1 en Ω_1 y a 0 en Ω_2. En este caso no existe $\Phi \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\|u - \Phi\|_{1,p} < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por eso introducimos los abiertos Ω con **la propiedad del segmento** (PS).

DEFINICION 1. *Ω tiene la propiedad del segmento si para todo $x \in \partial\Omega$ existe un entorno U_x de x y un vector $y_x \neq 0$ tal que*

$$(1) \qquad z \in \overline{\Omega} \cap U_x \Rightarrow z + ty_x \in \Omega \quad \text{para todo } t \in (0,1).$$

Si denotamos con $C_0^\infty|_\Omega$ a las restricciones a Ω de las funciones del espacio $C_0^\infty(R^n)$ tenemos el

TEOREMA 1. *Sea $\Omega \in$ PS. Entonces $C_0^\infty|_\Omega$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$.*

(Como $R^n \in$ PS del T.1 se deduce el T.12 del Cap. 1: $W_0^{m,p}(R^n) = W^{m,p}(R^n)$.).
Con excepción de los dominios con la propiedad PS todos los otros dominios especiales que consideraremos serán acotados. El abierto $\Omega_1 \times \Omega_2$ citado arriba aunque no posee la propiedad PS sí posee la **propiedad del cono** (PC).

DEFINICION 2. *$\Omega \in$ PC si existe un cono finito C tal que todo punto $x \in \Omega$ es vértice de un cono C_x congruente a C y contenido en Ω.*

Por un **cono finito** entendemos la intersección con una esfera $B_r(0)$ de la proyección desde el origen de una esfera abierta contenida en $R^n \backslash 0$.

DEFINICION 3 (Propiedad del cono uniforme (PCU)). *Sea* Ω *acotado y* $\{U_j\colon j = 1, \ldots, N\}$ *un cubrimiento finito de* $\partial\Omega$, $\{C_j\colon j = 1, \ldots, N\}$ *una familia finita de conos congruentes a uno dado* C *y con vértices en* $\{0\}$. *Sea*

$$Q_j = \cup \{x + C_j\colon x \in \Omega \cap U_j\}. \tag{2}$$

$\Omega \in$ PCU *si* $Q_j \subset \Omega$, *para todo* j.

2. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1. Sea $f(x) \in C_0^\infty(B_2(0))$, $f(x) = 1$ en $B_{3/2}(0)$ y $M = \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty$; $0 < \varepsilon \leq 1$, $f^\varepsilon(x) := f(\varepsilon x)$. Luego, $f^\varepsilon(x) = 1$ si $|x| \leq 3/2\varepsilon$ y $|\partial^\alpha f^\varepsilon(x)| \leq M\varepsilon^{|\alpha|} \leq M$. Por tanto, $u \in W^{m,p}(\Omega)$ implica que $u^\varepsilon := f^\varepsilon . u \in W^{m,p}(\Omega)$: $|\partial^\alpha u^\varepsilon(x)| = |\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u(x) . \partial^{\alpha-\beta} f^\varepsilon(x)| \leq M \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta u(x)|$. Si $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega\colon |x| > 1/\varepsilon\}$ entonces

$$\|u - u^\varepsilon\|_{m,p|\Omega} = \|u - u^\varepsilon\|_{m,p|\Omega_\varepsilon} \leq \|u\|_{m,p|\Omega_\varepsilon} + \|u^\varepsilon\|_{m,p|\Omega_\varepsilon} \leq$$

$$\leq K . \|u\|_{m,p|\Omega_\varepsilon} \to 0 \text{ para } \varepsilon \to 0.$$

Con esto hemos probado el siguiente

LEMA 1. *Cualquiera sea* Ω, *la familia de funciones en* $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *con soporte acotado es densa en el espacio.*

Sea ahora $u \in W^{m,p}(\Omega)$ de soporte acotado K en Ω. Sea $F = K \setminus U_1' \cup \ldots \cup U_k'$ donde U_j' es un entorno de un punto de $\partial\Omega$ con la propiedad (1) y $\bigcup_1^k U_j'$ es un cubrimiento de $\partial\Omega \cap$ clausura de K en R^n. Sea U_0' un abierto tal que $\Omega \supset\supset U_0' \supset F$ compacto. Luego $U_0' \cup \ldots \cup U_k' \supset K$. Existen abiertos $U_0, \ldots, U_k$ tales que $U_j \subset\subset U_j'$ pero todavía $\bigcup_0^k U_j \supset K$. Sea $\{\psi_0, \ldots, \psi_k\}$, sop $\psi_j \subset U_j$, una partición de la unidad para K. Definamos $u_j = \psi_j u$. El resto de la demostración consiste en encontrar, dado $\varepsilon > 0$, $\Phi_j \in C_0^\infty(R^n)$ tal que $\|u_j - \Phi_j\|_{m,p|\Omega} < \varepsilon$, $j = 0, 1, \ldots, k$. El caso $j = 0$ se obtiene por regularización pues sop $u_0 \subset \subset \Omega$. Veamos el caso $j = 1$. Sea $\Gamma = \overline{U}_1 \cap \partial\Omega$, $\Gamma_t = \Gamma - ty_1$, $0 < t \leqq t_0 < 1$ con t_0 tan pequeño como para que $\Gamma_t \subset U_1'$ para todo t. Sea $z = \gamma - ty_1 \in \Gamma - ty_1 = \Gamma_t$. Entonces $z \in \overline{\Omega}$ equivale a $\gamma - ty_1 \in \overline{\Omega} \cap U_1'$, o sea, si y sólo si $\gamma = z + ty_1 \in \Omega$ (PS). Pero $\gamma \in \Gamma \subset \overline{\Omega}\setminus\Omega$, contradicción. Luego $\Gamma_t \subset \complement\overline{\Omega}$. Sea $E_{t_0} = U_1 \cup \bigcup_{0 < t \leqq t_0} \Gamma_t$. E_{t_0} es un abierto que prolonga a U_1. Sea

$$v_\tau(x) = u_1(x + \tau y_1),$$

$$0 < \tau \leqq t_0,$$

pero de manera que sop $v_\tau \subset E_{t_0}$

Entonces en E_τ vale

$$(\partial^\alpha v_\tau)(x) = (\partial^\alpha u_1)(x + \tau y).$$

En consecuencia, $\partial^\alpha v_\tau \to \partial^\alpha u_1$ en $L^p(E_{t_0})$ para $\tau \to 0$. Pero Γ_{t_0} es acotado y $\downarrow \emptyset$ para $t_0 \downarrow 0$. Luego, si $|\alpha| \leqq m$,

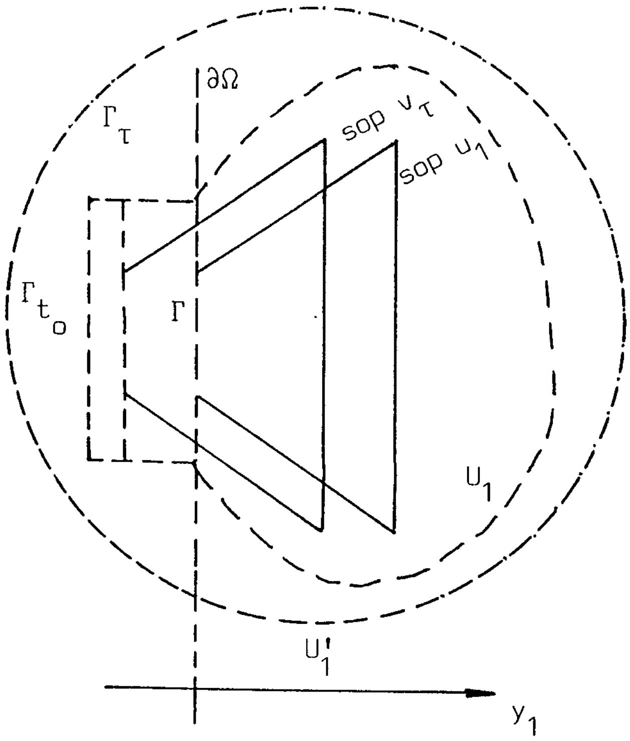

Figura 1

$$\partial^\alpha v_\tau|_{U_1} \xrightarrow[\tau \to 0]{} \partial^\alpha u_1 \quad \text{en } L^p(U_1).$$

Sea η tal que $\|v_\eta - u_1\|_{m,p|U_1} < \varepsilon/2$. Sea $\Phi_\delta = J_\delta * v_\eta$ con δ suficientemente pequeño de manera que $\Phi_\delta \in C_0^\infty(E_{t_0})$. Del T. 10, Cap. I, sigue ahora que $\|\Phi_\delta - v_\eta\|_{m,p|U_1} < \varepsilon/2$. Por tanto, $\|\Phi_\delta - u_1\|_{m,p|\Omega} < \varepsilon$, qed..

3. NORMAS EQUIVALENTES. En el teorema 13 del capítulo I vimos que para dominios

Ω acotados $\|\cdot\|_{m,p} \sim |\cdot|_{m,p}$. Vale aún el

TEOREMA 2. *Sea* $((u))_{m,p} := (|u|^p_{0,p} + |u|^p_{m,p})^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, $m \geq 1$. $((.))$ *es una norma equivalente a* $\|\cdot\|_{m,p}$ *en los siguientes casos*

(i) en $W^{m,p}_o(\Omega)$, $\Omega \subseteq R^n$,

(ii) en $W^{m,p}(\Omega)$, $\Omega \in PC$ *y acotado.*

DEMOSTRACION. Sólo probaremos (i). Extendiendo trivialmente los elementos de $W^{m,p}_o(\Omega)$ obtenemos un isomorfismo isométrico entre este espacio y un subespacio de $W^{m,p}(R^n)$. Basta entonces considerar el caso $\Omega = R^n$. Sea $\Phi \in C^\infty_o(R^n)$. El siguiente teorema 3 nos dice que

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right|^p dx_j \leq K\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j^2}\right|^p dx_j + \frac{K}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi|^p dx_j,$$

para $\varepsilon \in (0,\infty)$, $K = K(p)$. Tomando $\varepsilon = 1$ en (3) resulta

(4) $$|\Phi|^p_{1,p} \leq K'(|\Phi|^p_{2,p} + |\Phi|^p_{0,p}),$$

y también

(5) $$|\Phi|^p_{2,p} \leq K''(\frac{|\Phi|^p_{1,p}}{\varepsilon} + \varepsilon|\Phi|^p_{3,p}).$$

Reemplazando en (4) y eligiendo ε adecuadamente obtenemos

(6) $$|\Phi|^p_{1,p} \leq K'''(|\Phi|^p_{3,p} + |\Phi|^p_{0,p}) + |\Phi|^p_{1,p}/2.$$

y por tanto, $|\Phi|^p_{1,p} \leq 2K'''(|\Phi|^p_{3,p} + |\Phi|^p_{0,p})$. Siguiendo así logramos

(7) $$|\Phi|^p_{1,p} \leq K_1(|\Phi|^p_{m,p} + |\Phi|^p_{0,p}).$$

De (7) sigue enseguida la tesis, qed..

TEOREMA 3. *Sea* $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$, $1 \leqq p < \infty$, $0 < \varepsilon_0 < \infty$. *Existe* $K = K(\varepsilon_0, p, b - a)$, *que depende continuamente de* $b - a \in (0,\infty]$, *tal que para todo* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *y para toda* $f \in C^2(a,b)$*:*

$$(8) \qquad \int_a^b |f'(t)|^p \, dt \leq K\varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p \, dt + \frac{K}{\varepsilon} \int_a^b |f(t)|^p \, dt.$$

Si $b - a = \infty$, $K = K(p)$ *y puede tomarse* $\varepsilon_0 = \infty$.

DEMOSTRACION. Basta demostrarlo para f real, y sólo probaremos el caso $a = -\infty$, $b = +\infty$. Sea $\xi \in (0,1/3)$, $\eta \in (2/3,1)$, $x \in (0,1)$. Tenemos, para cierto $\lambda \in (\xi, \eta)$:

$$|f'(\lambda)| = \frac{|f(\eta) - f(\xi)|}{|\eta - \xi|} \leq 3(|f(\eta)| + |f(\xi)|),$$

$$|f'(x)| = |f'(\lambda) + \int_\lambda^x f''(t) \, dt| \leq 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)| + \int_0^1 |f''(t)| \, dt,$$

$$\frac{1}{9} |f'(x)| \leq \int_0^{1/3} |f(\xi)| \, d\xi + \int_{2/3}^1 |f(\eta)| \, d\eta + \frac{1}{9} \int_0^1 |f''(t)| \, dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 |f(t)| \, dt + \frac{1}{9} \int_0^1 |f''(t)| \, dt.$$

Por tanto, $|f'(x)| \leq \int_0^1 (9|f(t)| + |f''(t)|) \, dt$, y

$$|f'(x)|^p \leq 2^{p-1}.9^p \int_0^1 |f|^p \, dt + 2^{p-1} \int_0^1 |f''|^p \, dt.$$

Integrando la última desigualdad resulta

$$(9) \qquad \int_0^1 |f'|^p \, dt \leq K_p[\int_0^1 |f|^p \, dt + \int_0^1 |f''|^p \, dt].$$

El cambio de variables $x = A + (B - A)t$, $F(x) := f((x - A)/(B - A))$ da lugar a la siguiente relación:

$$(10)\qquad (B - A)^p\int_A^B |F'(x)|^p\, dx \leq K_p\int_A^B |F(x)|^p\, dx + K_p(B - A)^{2p}\int_A^B |F''(x)|^p\, dx,$$

válida para toda $F \in C^2(R)$. Sea $\varepsilon = (B - A)^p$, tenemos ahora, para toda $f \in C^2(R)$:

$$(11)\qquad \int_A^B |f'|^p\, dx \leq \frac{K_p}{\varepsilon}\int_A^B |f|^p\, dx + K_p\int_A^B |f''|^p\, dx.$$

Es decir, (11) vale sobre todo intervalo (A,B) de longitud igual a $\varepsilon^{1/p}$. Sumando sobre intervalos consecutivos obtenemos la desigualdad buscada, qed..
Valen las siguientes estimaciones (Ehrling, Nirenberg, Gagliardo):

TEOREMA 4. *Sea* $\Omega \in PC$, *o* $\in$ PS *y acotado, y* $0 < \varepsilon_0 < \infty$. *Existe* $K = K(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$ *tal que para todo* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *y para todo* j, $0 \leq j \leq m - 1$, *se tiene*

$$(12)\qquad |u|_{j,p} \leq K\varepsilon |u|_{m,p} + \frac{K}{\varepsilon^{j/(m-j)}} |u|_{o,p},$$

para toda $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

4. EXTENSIONES. Es ya clásico el problema de extender funciones con ciertas propiedades de un dominio a otro que lo inculuya manteniendo esas propiedades. Recordemos, por ejemplo, al teorema de Tietze, los resultados de Whitney, etc..
Sea $\Omega \subset R^n$. Por una extensión simple de $W^{m,p}(\Omega)$ en $W^{m,p}(R^n)$, o mejor, **m-extensión simple,** entenderemos una aplicación lineal $E: W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(R^n)$ tal que

1) $Eu(x) = u(x)$, c.d. ,
2) $\|Eu\|_{m,p} \leq K\|u\|_{m,p}$, $K = K(m,p)$.

La extensión se dirá **fuerte** si la aplicación E es una k-extensión simple para todo k, $k = 0, 1, \ldots, m$, y todo p, $1 \leq p < \infty$. (En este caso E debe estar definida sobre $\bigcup_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$.)

DEFINICION 4. *Sea* Ω *acotado. Diremos que* Ω *es* **C^m-regular** *(*$\Omega \in PC^m$*) si existe un cubrimiento finito* $U_1, \ldots, U_N$ *de* $\partial\Omega$ *y una familia equiindexada de transformaciones m-regulares,* $m \geq 1$, *(cf. §9, Cap.I) tal que, para todo* j, $\Phi_j: U_j \to B_1(0)$, $\Phi_j^{-1}: B_1(0) \to U_j$, $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B_1(0): y_n > 0\} := B^+$.

TEOREMA 5. *Sea* $\Omega \in PC^m$. *Entonces existe una m-extensión fuerte para* Ω.

No demostraremos en detalle este teorema. El núcleo central de su demostración se encuentra en el siguiente

TEOREMA 6. *Sean* $\Omega = R^n_+ = \{x \in R^n: x_n > 0\}$, $m \geq 1$. *Existe una m-extensión fuerte* E.

DEMOSTRACION. Sea u medible definida en R^n_+. Entonces

$$Eu(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x_n > 0, \\ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -jx_n) & \text{si } x_n < 0. \end{cases}$$

Análogamente definimos un operador semejante a E:

$$E_\alpha u(x) := \begin{cases} u(x), & x_n > 0, \\ \sum_{j=1}^{m+1} (-j)^{\alpha_n} \lambda_j . u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -jx_n), & x_n < 0, \end{cases}$$

donde los coeficientes λ_j se eligen de manera que

$$\sum_{j=1}^{m+1} (-j)^k \lambda_j = 1. \tag{13}$$

$\alpha = (\alpha', \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ es un multiíndice con $|\alpha| \leq m$. La matriz $H_{jk} = (-j)^k$ tiene determinante distinto de cero (Vandermonde) lo que asegura la existencia única de los coeficientes λ_j. (Nótese que la definición de E_α

sólo depende del índice α_n.)

Como R^+_n tiene la propiedad del segmento, la restricción a R^+_n de las funciones $C^\infty_o(R^n)$ es densa en $W^{m,p}(R^+_n)$. Sea u un elemento de esa familia C^+. Veremos a continuación que $Eu \in C^m_o(R^n)$ y $E_\alpha u \in C^{m-|\alpha|}_o(R^n)$.

En $R^n \setminus \{x_n = 0\}$ tenemos, si $|\alpha| \leq m$, $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$,

$$(14) \qquad \partial^\alpha Eu = \begin{cases} \partial^\alpha u, & x_n > 0 \\ \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j (-j)^{\alpha_n}.(\partial^{(\alpha',\alpha_n)} u)((x',-jx_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

O sea, allí

$$(15) \qquad \partial^\alpha(Eu)(x) = E_\alpha(\partial^\alpha u)(x).$$

De (13) se deduce ahora que si $x_n \neq 0, \to 0$, $\partial^\alpha Eu(x)$ converge a $\partial^\alpha u$ en $\{x_n = 0\}$. O sea, $\partial^\alpha Eu$ puede prolongarse a una función continua en R^n, que denotaremos con el mismo símbolo. Sea $\phi \in C^\infty_o(R^n)$. Integrando por partes obtenemos

$$\int_{R^n} Eu(x).(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\phi(x)\ dx = \int_{R^n} (\partial^\alpha Eu)(x).\phi(x)\ dx.$$

Es decir, $\partial^\alpha Eu$ es la α-ésima derivada de Eu en $\mathcal{D}'$, y del lema de Du Bois Reymond se concluye que es también su α-ésima derivada en el sentido usual. Además, de (14) obtenemos

$$(16) \qquad \int_{R^n} |E_\alpha \partial^\alpha u|^p\ dx \leq K(m,p,\alpha) \int_{R^n_+} |\partial^\alpha u|^p\ dx, \qquad |\alpha| \leq m.$$

Supongamos que $C^+ \ni u_n \to v$ en $W^{k,p}(R^n_+)$, $m \geq k \geq |\alpha|$. Como $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha v$ en $L^p(R^n_+)$, de (16) sigue que $\{E_\alpha \partial^\alpha u_n\}$ converge en $L^p(R^n)$; en particular Eu_n converge en $L^p(R^n)$. Como $\partial^\alpha Eu_n = E_\alpha \partial^\alpha u_n$ resulta que

$$\partial^{\alpha}(\lim Eu_n) = \lim E_{\alpha}(\partial^{\alpha} u_n).$$

Pero $\lim Eu_n = Ev$ y $\lim E_{\alpha}(\partial^{\alpha} u_n) = E_{\alpha}(\partial^{\alpha} v)$, o sea, (15) **vale para toda** $u \in W^{k,p}(R_n^+)$, c.d. R^n. De (16) se concluye entonces que

(17) $$\int_{R^n} |\partial^{\alpha} Eu|^p \, dx \leqq K(m,p,\alpha) \int_{R_+^n} |\partial^{\alpha} u|^p \, dx,$$

si $u \in W^{k,p}(R_+^n)$, $|\alpha| \leqq k$, qed..

5. DESIGUALDADES QUE INVOLUCRAN SUBDOMINIOS COMPACTOS. La desigualdad (12) del T.4 puede mejorarse así:

TEOREMA 7. *Sea* $\Omega \in$ PC *o* PS *y acotado. Sean* $0 < \varepsilon_0 < \infty$, $1 \leqq p < \infty$ *y* $0 \leqq j \leqq m-1$. *Existen una constante* $K = K(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$ *y para cada* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *un dominio* Ω_{ε} *tal que* $\Omega_{\varepsilon} \subset\subset \Omega$ *y para toda* $u \in W^{m,p}(\Omega)$:

(18) $$|u|_{j,p,\Omega} \leqq K\varepsilon |u|_{m,p,\Omega} + \frac{K}{\varepsilon^{j/(m-j)}} |u|_{0,p,\Omega_{\varepsilon}}.$$

No demostraremos este interesante resultado. Así como el teorema 4 depende de la estimación (8) del teorema 3, el teorema 7 puede demostrarse con el siguiente refinamiento de esa desigualdad (8).

TEOREMA 8. *Sean* $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \leqq p < \infty$, $\varepsilon > 0$. *Entonces existen* $K = K(p, b-a)$ *y* $\delta = \delta(\varepsilon, b-a)$, $0 < \delta < (b-a)/2$, *tal que para toda* $f \in C^1(a,b)$ *vale*

$$\int_a^b |f(t)|^p \, dt \leqq K\varepsilon \int_a^b |f'(t)|^p \, dt + K\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(t)|^p \, dt.$$

DEMOSTRACION. Sean $a = 0$, $b = 1$, $\frac{1}{3} < y < \frac{2}{3}$, $0 < x < 1$. Entonces

$$|f(x)| \leqq |f(y) + \int_y^x f'(t) \, dt| \leqq |f(y)| + \int_0^1 |f'(t)| \, dt.$$

Integrando y entre 1/3 y 2/3 obtenemos

(19) $$|f(x)| \leq 3\int_{1/3}^{2/3} |f(y)|\ dy + \int_0^1 |f'(t)|\ dt.$$

Sea $p > 1$. Entonces

$$|f(x)|^p \leq 2^{p-1}.3^p(\int_{1/3}^{2/3} |f(t)|\ dt)^p + 2^{p-1}(\int_0^1 |f'(t)|\ dt)^p$$

implica

(20) $$|f(x)|^p \leq 2^{p-1}.3\int_{1/3}^{2/3} |f(t)|^p\ dt + 2^{p-1}\int_0^1 |f'(t)|^p\ dt,$$

que contiene como caso particular a (19). Integrando x entre 0 y 1 obtenemos

$$\int_0^1 |f(x)|^p\ dx \leq K_p(\int_{1/3}^{2/3} |f(x)|^p\ dx + \int_0^1 |f'(x)|^p\ dx).$$

Sea $t = a + x(b - a)$, $x = (t - a)/(b - a)$, $F(t) = f((t - a)/(b - a))$. Entonces

$$\int_a^b |F(t)|^p\ dt/(b - a) \leq K_p\int_{a + \frac{b-a}{3}}^{b - \frac{b-a}{3}} |F(t)|^p\ dt/(b - a) + K_p\int_a^b |F'(t)|^p(b - a)^p\ dt/(b - a).$$

Luego,

(21) $$\int_a^b |f|^p\ dt \leq K_p(b - a)^p\int_a^b |f'|^p\ dt + K_p\int_{a + \frac{b-a}{3}}^{b - \frac{b-a}{3}} |f|^p\ dt.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sean n un entero tal que $n^{-p} \leq \varepsilon$, $a_j = a + (b - a)^j/n$ y δ un número en $(0,(b - a)/3n)$. Entonces

$$\int_a^b |f|^p\ dt = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f|^p\ dt \leq K_p\sum_{j=1}^n \{(\frac{b-a}{n})^p\int_{a_{j-1}}^{a_j} |f'|^p\ dt + \int_{a_{j-1+(b-a)/3n}}^{a_j-(b-a)/3n} |f(t)|^p\ dt \leq$$

$$\leq K_p(1 + (b - a)^p)\{\varepsilon\int_a^b |f'|^p\ dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f|^p\ dt\},$$ qed..

III. TEOREMAS DE INMERSION.

1. INMERSIONES CONTINUAS. En este capítulo presentaremos teoremas en los cuales un espacio de Sobolev se sumerge continuamente en otro, y comunmente llamados teoremas de inmersión de Sobolev, aunque algunos son el resultado de refinamientos debidos a Morrey, Gagliardo y otros, de proposiciones que sí son debidas justamente a Sobolev. También consideraremos la situación en la cual la inmersión es compacta y que hecha raíces en trabajos originales de Rellich y Kondrachov.

TEOREMA 1. *Sean* $\Omega \in PC$ *y* $1 \leqq p < \infty$, j *y* m *enteros no negativos:*

(1) $mp < n$, $p \leqq q \leqq \dfrac{np}{n - mp} \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$,

(2) $mp = n$, $p \leqq q < \infty \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$,

(3) $mp > n \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$,

(3') $m = n$, $p = 1 \Rightarrow W^{j+n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$,

(4) si se reemplaza W por W_0, (1), (2), (3) y (3') valen sin restricciones sobre Ω,

(5) si Ω es además acotado (1), (2), (3) y (3') valen aún para $1 \leqq q < p$.

COMENTARIOS. (a) $C_B^j(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega): \partial^\alpha u$ acotada para $|\alpha| \leqq j\}$. La inclusión en (3) significa que en cada clase de equivalencia de $W^{j+m,p}(\Omega)$ hay una función de C_B^j (y que $K\|u\|_{j+m,p} \geqq \sum_{|\alpha| \leqq j+m} \sup_x |\partial^\alpha u|$). Con sólo la propiedad del cono para Ω no debe esperarse que $C_B^j(\Omega)$ pueda reemplazarse por $C^j(\bar{\Omega})$ $(\subset C_B^j(\Omega))$.

(b) Las constantes K que se logran obtener en las inmersiones (1) - (3') dependen de parámetros del cono, de j, m y n, pero no de Ω. Si no se pretendiera esa precisión las inmersiones se reducirían a la simple inclusión. En efecto, sea $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{r,q}(\Omega)$. Sigue inmediatamente que la aplicación identidad es un operador lineal cerrado, y por tanto continuo.

(c) Las inmersiones mencionadas en el teorema quedarán probadas si se demuestra el caso $j = 0$ de ellas. Por ejemplo, supongamos que

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{0,q}(\Omega) = L^q(\Omega).$$

Sea $u \in W^{m+j,p}(\Omega)$. Luego $\partial^\alpha u \in W^{m,p}(\Omega)$ si $|\alpha| \leqq j$, y por tanto $\partial^\alpha u \in L^q$. En consecuencia $u \in W^{j,q}(\Omega)$. Además $\|u\|_{j,q} = (\sum_{|\alpha| \leqq j} \|\partial^\alpha u\|_q^q)^{1/q} \leqq K(\sum_{|\alpha| \leqq j} \|\partial^\alpha u\|_{m,p}^p)^{1/p} \leqq$ $\leqq K\|u\|_{j+m,p}$.

(d) Supongamos $m(\Omega) < \infty$, esto ocurre en particular si Ω es acotado. Sea $f \in L^q$, entonces $\|f\|_r \leqq C(m(\Omega)).\ \|f\|_q$ si $1 \leqq r < q$. Aplicando esta desigualdad a $\partial^\alpha u$, $|\alpha| \leqq j$, por ejemplo en el caso (2), obtenemos

$$\|u\|_{j,q} \leqq K.C(m(\Omega))\|u\|_{m+j,p}$$

para todo $q \in [1,p]$. Y esto prueba (5). Las inmersiones con $q < p$ no deben esperarse si $m(\Omega) = \infty$.

(e) Veamos la demostración de (4). Supongamos demostrada, por ejemplo, la proposición (1). Como $R^n \in PC$, vale entonces $W^{j+m,p}(R^n) \hookrightarrow W^{j,q}(R^n)$. La extensión trivial asegura que $W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m+j,p}(R^n)$ isométricamente. Luego $W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(R^n)$. Como las funciones en el primer espacio "se anulan en $R^n \backslash \Omega$" tenemos

$$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega).$$

(f) DEFINICION 1. *Sea Ω acotado. Diremos que Ω tiene un contorno localmente Lipschitz ($\Omega \in L$) si existe un cubrimiento finito de $\partial\Omega$ por abiertos $U_1, \ldots, U_n$ tal que en cada U_i hay un sistema ortogonal de coordenadas en el cual $\partial\Omega \cap U_i$ es representable por una función $f_i(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ Lipschitz-continua y $\Omega \cap U_i$ puede definirse por $\xi_n < f_i(\xi_i,\ldots,\xi_{n-1})$, (cf. §5, Cap. I).*

Obsérvese que $\Omega \in L \Rightarrow \Omega \in PC$.

Cuando $\Omega \in L$ se presentan inclusiones del tipo

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \lambda < 1.$$

(g) Si el par p,q en las inmersiones del teorema 1 lo representamos por el punto $(1/p,1/q)$ en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ las relaciones (1) - (5) se pueden visualizar y recordar más fácilmente en el caso que $m \leqq n$.

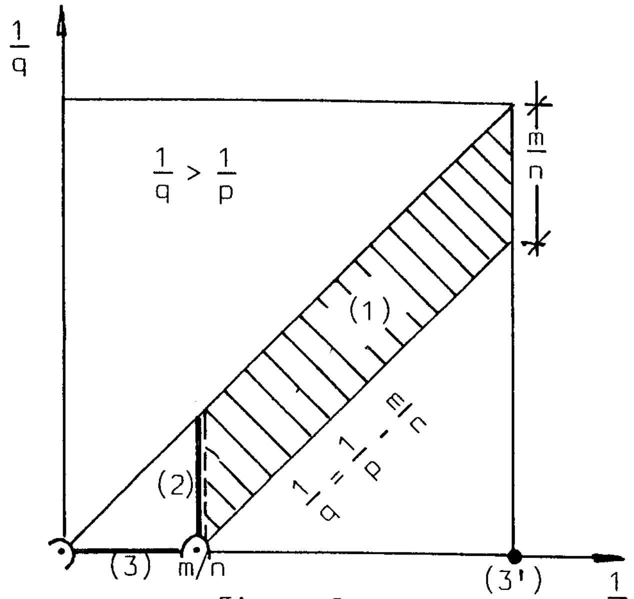

Figura 2

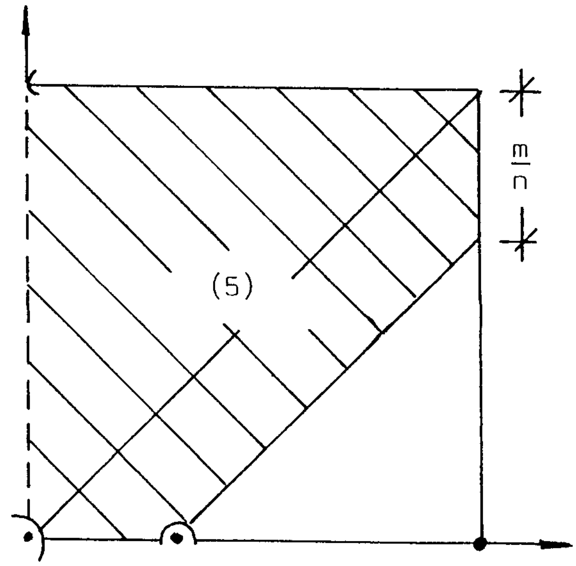

Figura 3

2. INMERSIONES COMPACTAS. Importantes aplicaciones tienen los resultados precedentes en el caso que además de continuas las inmersiones en cuestión sean compactas.

TEOREMA 2. *Sean* Ω *acotado* ε PC, $1 \leqq p < \infty$, $j \geqq 0$, $m > 0$.

(i) $mp < n$, $1 \leqq q < np/(n - mp) \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$,

(ii) $mp = n$, $1 \leqq q < \infty \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$,

(iii) $\Omega \varepsilon L$, $n < mp \Rightarrow W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{j}(\overline{\Omega})$.

Las relaciones se escriben también como

(i) $0 < \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < \frac{1}{q} \leqq 1$,

(ii) $0 < \frac{1}{q} \leqq 1$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{p}$,

(iii) $\frac{1}{p} < \frac{m}{n}$,

y pueden visualizarse en el cuadrado de los tipos de la siguiente manera (si $\frac{m}{n} < 1$):

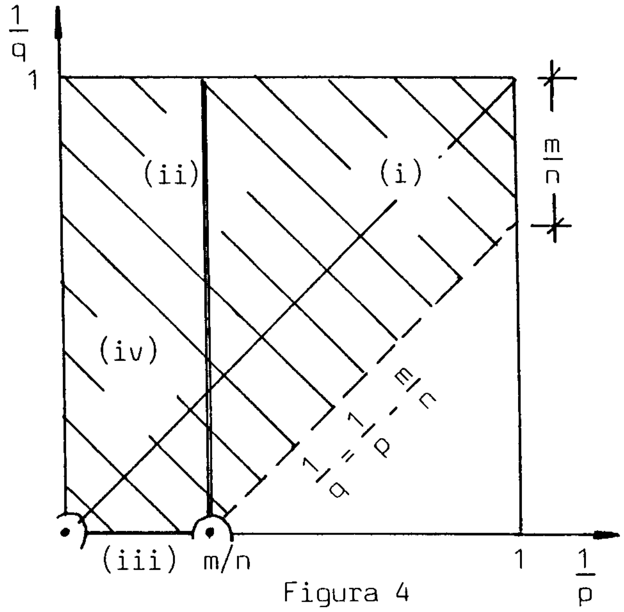

Figura 4

COMENTARIOS. (a) De (iii) sigue que $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$ pues $\|u\|_q \leq C(m(\Omega)).\|u\|_\infty$. Estas inmersiones corresponden al caso (iv) de la figura 4.

(b) Las inmersiones (i) - (iv) son compactas también si reemplazamos $W^{\cdot,\cdot}(\Omega)$ por $W_0^{\cdot,\cdot}(\Omega)$ y sin hipótesis adicionales fuera de la acotación del dominio. En efecto, $\Omega \subset$ esfera $\in L$, (cf. (d), §1).

(c) Basta demostrar el caso $j = 0$ del teorema 2. En efecto, supongamos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W^{0,q}(\Omega)$, y sea $\{u_i\}$ acotada en $W^{m+j,p}(\Omega)$. Entonces $\{\partial^\alpha u_i\}$ es una sucesión acotada en $W^{m,p}(\Omega)$ para $|\alpha| \leq j$, y por la hipótesis, es precompacta en $L^q(\Omega)$. Sea $\{u_i'\} \subset \{u_i\}$ tal que $\{\partial^\alpha u_i'\}$ converge en L^q para todo α, $|\alpha| \leq j$. Luego $\{u_i'\}$ converge en $W^{j,q}(\Omega)$. qed..

3. DEMOSTRACION DE ALGUNAS DE LAS PROPOSICIONES DE LOS TEOREMAS 1 Y 2. Supondremos ya demostradas las proposiciones (1) y (2) del T.1. De (c) §1 y el siguiente lema se obtiene (3) T.1, pues las constantes de inmersión que se logran para aquellos casos son de la misma naturaleza que la indicada en el lema.

LEMA 1. *Sean* $1 \leq p < \infty$, $mp > n$, Ω *con la propiedad del cono. Entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega)$; *la constante de inmersión* K *depende solamente de parámetros del cono invariantes por movimientos rígidos y de* m, n *y* p.

DEMOSTRACION. Si probáramos que para $\phi \in C^\infty(\Omega)$ vale

(6) $$\sup_{\Omega} |\phi(x)| \leq K\|\phi\|_{m,p,\Omega},$$

podríamos costruir para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ una sucesión $\{\phi_n\} \subset W^{m,p} \cap C^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n \to u$ en $W^{m,p}$. De (6) seguiría que $u \in C_B(\Omega)$, y que (6) valdría para toda $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Para demostrar (6) supongamos provisoriamente que $m = 1$. Tenemos, (ver figura 5),

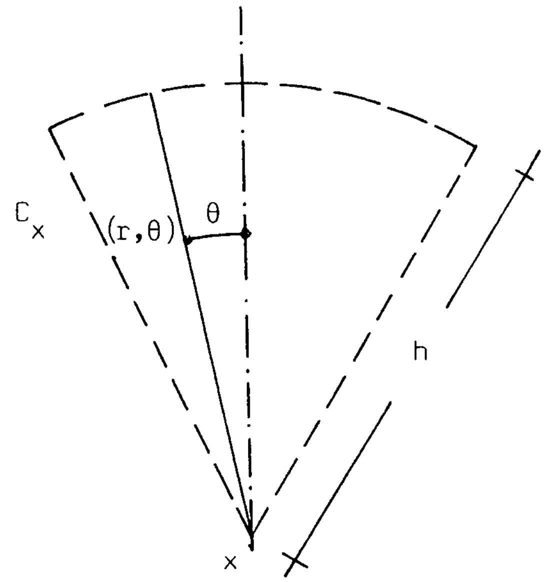

Figura 5

$$\phi(x) = \phi(0,\theta) = \phi(r,\theta) - \int_0^r \frac{d}{dt}\phi(t,\theta)\, dt,$$

$$|\phi(x)| \leq |\phi(r,\theta) + \int_0^h |\text{grad } \phi(t,\theta)|\, dt,$$

$$m(\Omega)|\phi(x)| \leq$$

$$\leq \int_{C_x} |\phi(y)|\, dy + \int_{C_x} [\int_0^h |\text{grad } \phi(t,\theta)|\, dt]\, w(\theta)\, r^{n-1}\, dr\, d\theta.$$

Aquí $y = (t,\theta)$, $t = |x - y|$. Por tanto el último sumando es igual a $\frac{h^n}{n} \int_{C_x} |\text{grad } \phi(y)| \frac{dy}{|x - y|^{n-1}}$ y en consecuencia

(7) $$m(\Omega)|\phi(x)| \leq$$

$$\leq m(C_x)^{1/p'} \cdot \|\phi\|_{p|C_x} + \frac{h^n}{n} \|\text{grad } \phi\|_{p|C_x} \cdot \left|\int_{C_x} \frac{dy}{|x - y|^{(n-1)p'}}\right|^{1/p'}.$$

Como $\frac{1}{n} > \frac{1}{p}$ equivale a $\frac{1}{p'} > \frac{n-1}{n}$, o sea, a $p'(n - 1) < n$, resulta

(8) $$|\phi(x)| \leq K_1\|\phi\|_{1,p|C_x} \leq K_1\|\phi\|_{1,p,\Omega}.$$

Sea ahora $m > 1$ y $1/n > 1/p$. Entonces

(9) $$|\phi(x)| \leq K\|\phi\|_{1,p|C_x} \leq K\|\phi\|_{m,p|C_x} \leq K\|\phi\|_{m,p,\Omega}.$$

Si $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{p} < \frac{m}{n}$ entonces existe k, $1 \leq k \leq m - 1$, tal que

(10) $$\frac{k}{n} \leq \frac{1}{p} < \frac{k+1}{n}.$$

Si $\frac{k}{n} < \frac{1}{p}$ elegimos r de manera que $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$; si $\frac{k}{n} = \frac{1}{p}$,

(11) $$0 < \frac{1}{r} < \inf\left(\frac{1}{p},\frac{1}{n}\right).$$

De (10) y (11) sigue que $r'(n - 1) < n$, o lo que es lo mismo, que $n < r$. Usando (7) y (1) y (2) obtenemos

(12) $$|\phi(x)| \leq K_1\|\phi\|_{1,r|C_x} \leq K_2\|\phi\|_{m-k,r|C_x} \leq K\|\phi\|_{m,p|C_x} \leq K\|\phi\|_{m,p|\Omega}, \quad \text{qed..}$$

LEMA 2. *Sean* $\Omega \in L$, $\frac{m}{n} > \frac{1}{p} \geq \frac{m}{n} - \frac{1}{n}$, $1 \leq p < \infty$. *Entonces*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}),$$

(i) $0 < \lambda \leq m - n/p$ *si* $n > (m - 1)p$,
(ii) $0 < \lambda < 1$ *si* $n = (m - 1)p$, $p > 1$,
(iii) $0 < \lambda \leq 1$ *si* $n = m - 1$, $p = 1$.

La constante de inmersión depende solamente de m, p, n, diam Ω y las constantes de Lipschitz de las representaciones del contorno.

DEMOSTRACION. Si Ω satisface la propiedad de Lipschitz entonces satisface la propiedad del cono, luego, por el lema 1 sabemos que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ implica $u \in C_B(\Omega)$ y que vale

(13) $$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq K_1 \|u\|_{m,p,\Omega}.$$

Veamos que para λ adecuado y cierto r

(14) $$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\lambda}} \leq K_1 \|u\|_{1,r,\Omega}.$$

Supongamos por un momento que Ω es el cubo unitario. Si $0 < t < 1$, Ω_t designará a un cubo de lado t paralelo a Ω tal que $\overline{\Omega}_t \subset \Omega$. Sean $u \in C^{\infty}(\Omega)$, $x,y \in \Omega$, $|x - y| = \sigma < 1$. Entonces existe Ω_σ tal que $\overline{\Omega}_\sigma \subset \Omega$, $x,y \in \overline{\Omega}_\sigma$. Sea $z \in \Omega_\sigma$.

$$u(x) = u(z) - \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(z - x))\, dt \Rightarrow$$

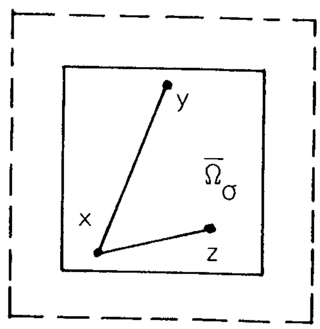

Figura 6

$$|u(x) - u(z)| \leq C\sigma \int_0^1 |(\text{grad } u)(x+t(z-x))|\, dt \Rightarrow$$

$$\left|u(x) - \frac{1}{\sigma^n}\int_{\Omega_\sigma} u(z)\, dz\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{\sigma^n}\int_{\Omega_\sigma} (u(x) - u(z))\, dz\right| \leq \frac{C}{\sigma^{n-1}} \int_{\Omega_\sigma} dz \int_0^1 |\text{grad } u(x + t(z - x))|\, dt =$$

$$= \frac{C}{\sigma^{n-1}} \int_0^1 dt \int_{\Omega_\sigma} |\text{grad } u(x + t(z - x))|\, dz =$$

$$= \frac{C}{\sigma^{n-1}} \int_0^1 t^{-n}\, dt \int_{\Omega_{t\sigma}} |\text{grad } u(x(1 - t) + w)|\, dw = A.$$

Supongamos ahora $0 \leq \frac{1}{r} < \frac{1}{n}$. Entonces

$$A \leq \frac{C}{\sigma^{n-1}} \|\text{grad } u\|_{r,\Omega} \cdot \int_0^1 |m(\Omega_{t\sigma})|^{1/r'}\, t^{-n}\, dt = \frac{C\|\text{grad } u\|_{r,\Omega}}{\sigma^{\frac{n}{r} - 1}} \int_0^1 \frac{dt}{t^{n/r}} \Rightarrow$$

(15) $$|u(x) - u(y)| \leq K|x - y|^{1 - \frac{n}{r}} \cdot \|\text{grad } u\|_{r,\Omega} \, .$$

Esta fórmula vale aún para un paralelepípedo P como se demuestra via una transformación lineal no singular. Elegimos r:

(16) $$\begin{cases} \text{si } n > (m-1)p \;, & 0 < 1 - \frac{n}{r} = \lambda = m - \frac{n}{p} < 1, \\ \text{si } n = (m-1)p \;, & 0 < 1 - \frac{n}{r} = \lambda < 1, \\ \text{si } n = m-1 \text{ y } p = 1, & r = \infty \text{ y } 1 - \frac{n}{r} = \lambda = 1. \end{cases}$$

Sea δ_o tal que si $V_j := \{x \in U_j : \text{dist } (x, \partial U_j) > \delta_o\}$ aún $\bigcup_j V_j \supset \partial\Omega$, $(j = 1, 2, \ldots, N)$, y podemos elegir δ_o tan pequeño como para que si $x \in \Omega$ y dist $(x, \partial\Omega) < \delta_o$ entonces $x \in V_j$ para cierto j. Sea ahora P un paralelepípedo de diam $\delta_2 < 2\delta_o$ tal que para todo $j = 1, \ldots, N$, existe un paralelepípedo P_j congruente con P, para el cual vale

$$x + P_j \subset U_j \quad \text{si } x \in V_j \cap \Omega .$$

La existencia de un tal P está asegurada por poseer Ω la propiedad de Lipschitz. Sea $x \in V_j \cap \Omega$. Para cierto δ, $0 < \delta < \delta_2$, si $|x - y| < \delta$ entonces

$Z = (x + P_j) \cap (y + P_j) \neq \emptyset$,

y existe $z \in Z$,

(17) $|x-z| + |y-z| \leq \delta_1 |x-y|$,

con $\delta_1 = \delta_1(P)$. (Esto es fácil verlo cuando P es un cubo. Una transformación lineal no singular da cuenta de la desigualdad final (17)). Luego, si $u \in C^\infty \cap W^{m,p}(\Omega)$:

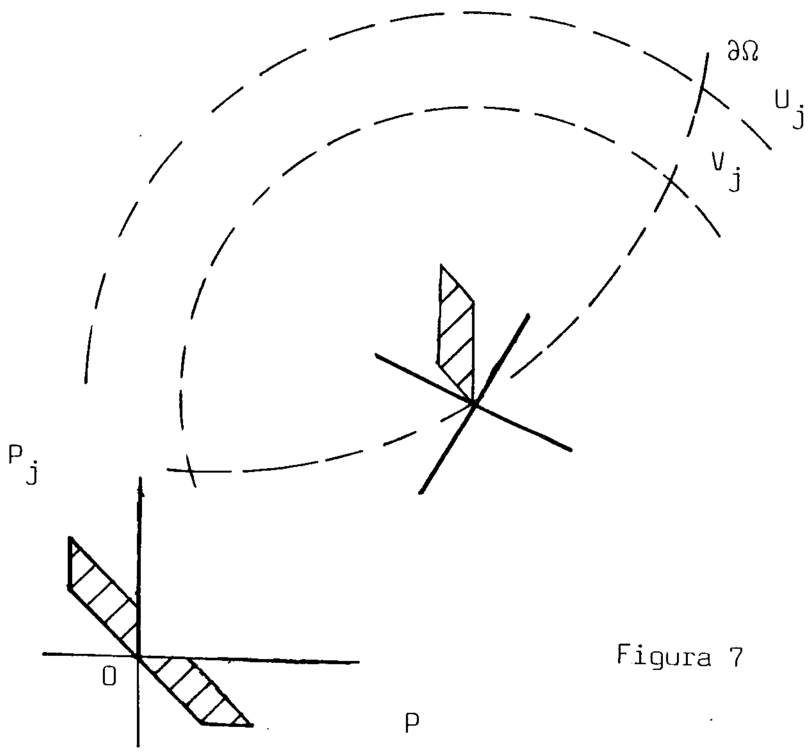

Figura 7

(18) $$|u(x) - u(y)| \leqq |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)| \leqq (\text{por } (15)) \leqq$$

$$\leqq K(|x - z|^{\lambda} + |y - z|^{\lambda})\|u\|_{1,r,P_j} \leqq K'|x - y|^{\lambda}.\|u\|_{1,r,\Omega}.$$

Aplicando en los tres casos (16), (1), (2) y (3') del T.1 respectivamente, obteneoms

$$\|\text{grad } u\|_r \leqq M\|\text{grad}\|u\|_{m-1,p,\Omega} \leqq M'\|u\|_{m,p,\Omega}.$$

En consecuencia,

(19) $$|u(x) - u(y)| \leqq K.|x - y|^{\lambda}\|u\|_{m,p,\Omega}.$$

Sean ahora $x,y \in \Omega$, $|x - y| < \delta$. Si dist $(x,\partial\Omega) \leqq \delta_2$ entonces $x \in V_j$ para cierto j y puede usarse (19). Si dist $(x,\partial\Omega) > \delta_2 <$ dist $(y,\partial\Omega)$, nuevamente es aplicable (19) (cualquier paralelepípedo congruente con P sirve para la demostración de esa desigualdad).
Sea ahora $|x - y| \geqq \delta$. Entonces

$$|u(x) - u(y)| \leqq |u(x)| + |u(y)| \leqq (\text{por } (13)) \leqq K_1\|u\|_{m,p,\Omega} \leqq \left(\frac{K_1}{\delta^{\lambda}}\right)|x - y|^{\lambda}\|u\|_{m,p,\Omega}.$$

Sea $u \in W^{m,p}(\Omega)$ arbitraria. De (13) y la densidad de $C_0^{\infty}(R^n)|_{\Omega}$ en $W^{m,p}(\Omega)$ obtenemos (19), y por tanto el lema para los valores extremos de λ en los casos (i) y (iii) y para $\lambda \in (0,1)$ en el caso (ii). Puesto que $\Omega \in L$, Ω es un dominio acotado, y por tanto (i) e (iii) se deducen de los resultados ya obtenidos, qed..

COROLARIO 1. *Sean* m, n, p, λ *y* Ω *como en el lema 2. Entonces*

(20) $$W^{m+j,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}).$$

DEMOSTRACION. Véase §5, Cap. I, qed..

DEMOSTRACION DE (iii) DEL TEOREMA 2. Sea $\frac{m}{n} > \frac{1}{p} \geqq \frac{m}{n} - \frac{1}{n}$, $0 < \lambda < m - n/p$. Del lema 2 y el teorema de Arzelá-Ascoli obtenemos

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Sea ahora $\frac{m-1}{n} > \frac{1}{p}$. De (3) T.1 obtenemos

$$W^{(m-1)+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Luego, si $n < mp$, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, y (iii) sigue de (c) §2, qed..

4. CONTRAEJEMPLOS. En esta sección queremos exhibir un par de ejemplos que sugieren, como es cierto, que los resultados del T.1 son los *mejores posibles*. Supongamos $0 \in \Omega \supset \overline{B_{2R}(0)}$, $f \in C_0^\infty(R^n)$, $f = 1$ en $t \leqq R$, $= 0$ en $t \geqq 2R$.

EJEMPLO 1. Sean $\frac{m}{n} < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$, $u(x) = |x|^\lambda$. Entocnes, en $R^n \backslash 0$, $\partial^\alpha u(x) = P_\alpha(x).|x|^{\lambda-2|\alpha|}$, P_α polinomio homogéneo de grado $|\alpha|$. Luego, $|\partial^\alpha u(x)| \leqq K_\alpha |x|^{\lambda-|\alpha|}$. Supongamos $(\lambda - m)p + n > 0$. en este caso,

$$\int_{B_R \backslash 0} |\partial^\alpha u|^p \, dx \leqq M.\int_0^R \rho^{(\lambda-|\alpha|)p+n-1} \, d\rho < \infty, \qquad |\alpha| \leqq m,$$

$$\int_{B_R \backslash 0} |u|^q \, dx = C.\int_0^R \rho^{\lambda q+n-1} \, d\rho = \infty, \qquad \lambda q + n < 0.$$

Como $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ existe λ tal que $\frac{1}{q} < \frac{-\lambda}{n} < \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$, y por tanto satisface las condiciones exigidas a este parámetro. Vimos entonces que $u \in W^{m,p}(\Omega\backslash 0) \setminus L^q(\Omega\backslash 0)$. El T.5 del Cap. I nos asegura ahora que $u \in W^{m,p}(\Omega) \setminus L^q(\Omega)$.

EJEMPLO 2. Sea $1 < p = n/m < \infty$. Construímos $u \in W^{m,p}(B_R)$ y $u \notin L^\infty(B_R)$:

$$u(x) := \lg \lg \frac{4R}{|x|}, \qquad x \neq 0.$$

En $R^n \backslash 0$ vale (por inducción) que

$$\partial^\alpha u(x) = \sum_{j=1}^{|\alpha|} P_{\alpha,j}(x) \; |x|^{-2|\alpha|} (\lg \frac{4R}{|x|})^{-j},$$

con $P_{\alpha,j}$ polinomio homogéneo de grado $|\alpha|$. Entonces

$$|\partial^\alpha u|^p \leqq \sum_{j=1}^{|\alpha|} K_{\alpha,j} |x|^{-|\alpha|n/m} (\lg (4R/|x|))^{-jp},$$

$$(21) \qquad \int_{B_R \setminus 0} |\partial^\alpha u|^p \, dx \leqq M \sum_{j=1}^{|\alpha|} \int_0^R \left(\lg \frac{4R}{\rho}\right)^{-jp} \rho^{-\frac{|\alpha|n}{m} + n-1} d\rho < \infty$$

si $|\alpha| < m$. Si $|\alpha| = m$, haciendo $t = \lg \frac{4R}{\rho}$, la última integral en (21) coincide con $4R\int_{\lg 4}^{\infty} t^{-jp} \, dt < \infty$ pues $j \geqq 1$, $p > 1$. Como en el ejemplo anterior $u \in W^{m,p}(B_R)$.

IV. DUALIDAD.

1. TOPOLOGIAS DEBILES. Antes de comenzar con el estudio de los duales de los espacios de Sobolev recordaremos aquí algunos resultados importantes sobre las topologías débiles en espacios de Banach.

TEOREMA 1. *Sea* X *un espacio vectorial con dos topologías localmente convexas,* τ_1, τ_2. *Si los* EVT (X,τ_1) *y* (X,τ_2) *admiten las mismas funcionales lineales continuas entonces tienen los mismo convexos cerrados, (cf. [3]).*

TEOREMA 2. *Sea* X *un espacio de Banach y* w *su topología débil. Entonces* (X,w) *es un espacio vectorial topológico localmente convexo y* $(X,\|\cdot\|)^* = (X,w)^*$, *(cf. [3]).*

TEOREMA 3 (Eberlein - Smulian). *Sea* $A \subset X \in$ *Banach. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) A *es débilmente secuencialmente compacto,*
(ii) todo subconjunto infinito de A *tiene un punto límite débil en* X,
(iii) $\overline{A}^w$ *es débilmente compacto, (cf. [3]).*

TEOREMA 4 (Alaoglu). *La esfera unitaria (cerrada) de* X^*, $X \in$ *Banach, es compacta en la* X*-topología, (cf. [3]).*

TEOREMA 5 (Goldstine). *Sea* Φ: $X \to X^{**}$, X *de Banach,* Φ *la inyección canónica. Entonces* $\Phi(B_1(0))$ *es* X^**-denso en* $B_1^{**}(0)$, *(cf. [3]).*

TEOREMA 6. $X \in$ *Banach.* X *es reflexivo si y sólo si* $B_1(0)$ *es* w*-compacta, (cf. [3]).*

TEOREMA 7. $X \in$ *Banach.* $X \in$ *reflexivo sii* $B_1(0)$ *es débilmente secuencialmente compacta.*

Veamos la última proposición. Si X es reflexivo entonces $\overline{B_1(0)}^w = B_1(0)$ (T.1) es w-compacta (T.6), luego $B_1(0)$ es débilmente secuencialmente compacta (T.3), luego es débilmente compacta (T.3), y por tanto X es reflexivo (T.6).

2. REPRESENTACION DE LAS FUNCIONALES LINEALES. Sabemos que existe un isomorfismo isométrico P tal que

$$P:\ W^{m,p}(\Omega) \to W \subset L^p_N(\Omega),$$

donde $N = \#\{\alpha:\ |\alpha| \leq m\}$. Para determinar el espacio de funcionales lineales continuas sobre $W^{m,p}$, $(W^{m,p}(\Omega))^*$, es preciso conocer el dual de L^p_N.

TEOREMA 8. $1 \leq p < \infty$. *Sea* $L \in (L^p_N)^*$. *Entones existe exactamente un* $v \in L^{p'}_N$ *tal que para todo* $u \in L^p_N$ *se tiene*

(1) $$L(u) = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j\rangle.$$

Además, $\|L;(L^p_N)^*\| = \|v;L^{p'}_N\|$. *Es decir,* $(L^p_N)^* \cong L^{p'}_N$.

Dejamos al lector la demostración de este resultado, (cf.[1]).

TEOREMA 9. *Sea* $1 \leq p < \infty$. *Para todo* $L \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ *existe* $v \in L^{p'}_N(\Omega)$ *tal que*

(2) $$L(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, v_\alpha\rangle, \qquad v = \{v_\alpha\}.$$

Además,

(3) $$\|L\| = \min\ \{\|v\|:\ v \in (2)\}.$$

DEMOSTRACION. Primero trasplantamos la funcional L a W: $L^*(Pu) = L(u)$. Luego, extendemos L^* de W a $L^p_N(\Omega)$ sin cambiar de norma. Sea L' la extensión, luego, $\|L'\| = \|L\|$. Existe $v \in L^{p'}_N$ tal que $L'(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle u_\alpha, v_\alpha\rangle$. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$: $L(u) = \sum \langle \partial^\alpha u, v_\alpha\rangle$, qed..

NB. En general v no es única. Sea $u = \phi \in C^\infty_0(\Omega)$ no es denso en $W^{m,p}(\Omega)$. Entonces

$$L(\phi) = \sum <\phi,(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha v_\alpha> = T(\phi),$$

con $T = \sum (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha v_\alpha \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Luego, L es una extensión de T.

Es claro que el teorema 9 vale también para $W_0^{m,p}(\Omega)$ pero en este caso $T \leftrightarrow L$ pues C_0^∞ es denso en $W_0^{m,p}$ y $T = L|_{C_0^\infty}$.

TEOREMA 10 . $1 \leq p < \infty$. $(W_0^{m,p}(\Omega))^*$ *es isométricamente isomorfo al espacio de Banach de las distribuciones* T *de la forma*

(4) $$T = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (-1)\partial^\alpha T v_\alpha ,$$

donde Tv_α *representa a la función* $v_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, *normada por* $\|T\| = \inf \{\|v: L_N^{p'}\|: v = (\dots, v_\alpha, \dots), v_\alpha \in L^{p'}, v \in (4)\}$.

NB. Recuérdese que no necesariamente la representación es única y que por tanto existirá v tal que $\sum (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha v_\alpha = 0 \; (\mathcal{D}')$.

3. EL ESPACIO $W^{-m,p'}(\Omega)$. Queremos probar el siguiente resultado

TEOREMA 11. *Sea* $1 < p < \infty$. *Existe un único elemento* $v \in L_N^{p'}(\Omega)$ *que satisface (2) y (3).*

Para demostrarlo veamos el siguiente

LEMA 1. *Sea* X *un espacio de Banach con norma uniformemente convexa. Si* $0 \neq L \in X^*$ *entonces existe un único elemento* $w \in B_1(0) \subset X$ *tal que* $L(w) = \|L\|$.

DEMOSTRACION. Sea $\{w_n\} \subset B_1(0)$, $\|w_n\| \to 1$, $L(w_n) \to \|L\|$. $\{w_n\}$ es de Cauchy. Si no fuera así existiría un $\varepsilon > 0$ y pares n,m tan grandes como se quiera para los cuales $\|w_n - w_m\| \geq \varepsilon$, $\left\|\frac{w_n + w_m}{2}\right\| \geq 1 - \delta(\varepsilon) > 0$. Entonces

$$(5) \qquad \|L\| \geq \left| \frac{L(w_n + w_m)}{\|w_n + w_m\|} \right| = \left\| \frac{w_n + w_m}{2} \right\|^{-1} \cdot \left| L\left(\frac{w_n + w_m}{2}\right) \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{1 - \delta(\varepsilon)} \cdot \frac{1}{2} \left| L(w_n) + L(w_m) \right| \to \frac{1}{1 - \delta} \|L\| ,$$

contradicción. Luego, $\{w_n\}$ es de Cauchy y $w_n \to w$, $L(w_n) = \|L\|$. Si existieran w_n y w_m tales que $L(w_n) = L(w_m) = \|L\|$, $\|w_n - w_m\| \geq \varepsilon > 0$, entonces, nuevamente por (5) obtendríamos $\|L\| \geq \frac{1}{1-\delta}\frac{1}{2}(\|L\| + \|L\|) = \frac{1}{1-\delta}\|L\| > \|L\|$, contradicción, qed..

LEMA 2. *Toda funcional lineal continua* L *sobre un subespacio* W *de* $L_N^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *se extiende a* $L_N^p(\Omega)$ *en forma única si preserva norma.*

DEMOSTRACION. Si existieran dos, L_1, L_2, tendríamos $\|L_1\| = \|L_2\| = \|L\| = L(w)$, $\|w\| = 1$, $w \in W$, (cf.Cap. 1, §2, c)). Luego, $\|w\| = w(L/\|L\|) = w(L_i/\|L_i\|)$, $i = 1, 2$. O sea, w como elemento de $(L_N^p)^* = L_N^{p'}$, toma su norma en $L_i/\|L_i\|$, $i = 1, 2$. Del lema 1 sigue inmediatamente que $L_1 = L_2$, qed..

El teorema 11 se deduce ahora del lema 1.

DEFINICION 1. $W^{-m,p'}(\Omega) := \{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\colon T = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha v_\alpha\}$,

$\|T;W^{-m,p'}\| = \inf\{\|v;L_N^{p'}(\Omega)\| : v = (\ldots, v_\alpha, \ldots)\}$, $(1 \leq p < \infty)$.

Sea $F := \{(v_1,\ldots) \in L_N^{p'}\colon \sum (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha v_\alpha = 0\}$. F es un subespacio de $L_N^{p'}$.

TEOREMA 12. *Sea* $1 < p < \infty$. *Entonces*

$$L_N^{p'}(\Omega)/F = W^{-m,p'}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))^*,$$

es un espacio separable y reflexivo, lo mismo que $W_0^{m,p}(\Omega)$.

DEMOSTRACION. Resulta del T. 10, y de c) y a), §2, Cap. I, qed..

EJERCICIOS. Sea $1 < p < \infty$.

a) Sean $v \in L^{p'}(\Omega)$, $L_v(u) := \langle u,v\rangle$, $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Entonces

$$|L_v(u)| \leq \|v\|_{p'}\cdot\|u\|_{m,p} ,$$

b) $\|v\|_{-m,p'} := \|L_v;(W_0^{m,p}(\Omega))^*\| \leq \|v\|_{p'}$,

c) $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|_{m,p}\cdot\|v\|_{-m,p'}$,

d) $L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-m,p'}(\Omega)$, ($v_\alpha = 0$ si $\alpha \neq 0$).

e) $W^{-m,p'}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

TEOREMA 13. $V := \{L_v\colon v \in L^{p'}\}$ *es una variedad lineal densa en* $W^* := (W_0^{m,p}(\Omega))^*$.

DEMOSTRACION. Sea $F \in W^{**}$ tal que $F(L_v) = 0$ para todo $L_v \in V$. (Suponemos $L_v \leftrightarrow (v,0,0,\ldots)$). Como $W_0^{m,p}$ es reflexivo existe $f \in W_0^{m,p}$ tal que

$$\langle f,v\rangle = L_v(f) = F(L_v) = 0 \quad \text{para todo } v \in L^{p'}.$$

Pero $f \in L^p(\Omega)$, y por tanto $f = 0$ c.d.. Luego $\partial^\alpha f = 0$ para todo α y $\|f\|_{m,p} = 0$. En consecuencia $f = 0$ en $W_0^{m,p}$ y $F = 0$, qed..

4. CONJUNTOS POLARES. Sea T una distribución concentrada en $\{0\}$. Entonces es de la forma $T = \sum c_\beta\partial^\beta\delta$. Supongamos $c_\gamma \neq 0$ y $\phi \in C_0^\infty(B_2(0))$, $\phi \geq 0$, $= 1$ en $B_1(0)$. Si $j \in N$ y $\phi_j(x) := x^\gamma\phi(jx)$ entonces $T(\phi_j) = (-1)^{|\gamma|}c_\gamma$. Sea $|\alpha| \leq m$. Luego $\|\partial^\alpha\phi_j\|_p^p \to 0$ para $j \to \infty$ si $mp - n < 0$, $1 \leq p < \infty$. O sea, $\|\phi_j\|_{m,p} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. En consecuencia, $T \notin (W_0^{m,p}(R^n))^* = W^{-m,p'}(R^n)$.

DEFINICION 2. *Sea* F *un subconjunto cerrado de* R^n. F *se dice* (m,p')-*polar si* 0 *es la única distribución* $T \in W^{-m,p'}(R^n)$ *con soporte contenido en* F.

Hemos visto entonces que si $mp < n$ y $1 \leqq p < \infty$, un punto de R^n es (m,p')-polar. Vale el siguiente resultado

TEOREMA 14. *i) Sea* $2 \leqq p < \infty$ $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$ *si y sólo si* $C\Omega = R^n \setminus \Omega$ *es* (m,p')-*polar.*

ii) Sea $1 < p < \infty$. $C_0^\infty(\Omega)$ *es denso en* $W^{m,p}(R^n)$ *si y sólo si* $C\Omega$ *es* (m,p')-*polar.*

V. LOS ESPACIOS $H^s(R^n)$, $s \in R$.

1. LA TRANSFORMADA DE FOURIER. Si $u \in L^1(R^n)$,

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} u(x)\, e^{-i<x,\xi>}\, dx,$$

con $<x,\xi> = \sum_1^n x_i\xi_i = x.\xi$. Vale $\|\hat{u}\|_\infty \leqq (2\pi)^{-n/2}\|u\|_1$. Además $\hat{u} \in C(R^n)$ y tiende a cero con $|\xi| \to \infty$. Sea $(\mathcal{F}^{-1}u)(x) = (\mathcal{F}^* u)(x) = u^{\vee}(\xi) := (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} u(\xi)\, u^{i\xi.x}\, d\xi$.

En los dos teoremas que siguen inmediatamente reunimos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier y del operador de convolución.

TEOREMA 1. *i)* $u \in \mathcal{S}(R^n) \Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{S}(R^n)$.

ii) $\xi^\beta D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_{R^n} D_x^\beta(x^\alpha u)e^{-ix.\xi}\, dx$, $u \in \mathcal{S}$,

iii) en $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = I = \mathcal{F}\mathcal{F}^*$,

iv) definiendo para $T \in \mathcal{S}'(R^n)$, $\hat{T}(\phi) = T(\hat{\phi})$ *para todo* $\phi \in \mathcal{S}(R^n)$, *se tiene* $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = I$ *en* $\mathcal{S}'$,

v) en $L^2(R^n)$, $\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$, *(Plancherel).*

TEOREMA 2. *i)* $\mathcal{S} * \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$,

ii) $L^1 * L^1 \subset L^1$,

iii) $C_0^\infty * \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$,

iv) $C_0^\infty * C^\infty \subset C^\infty$,

v) sea $\check{w}(x) := w(-x)$ *si* w *es una función, y si* $w \in \mathcal{D}'$: $\check{w}(\phi) := w(\check{\phi})$ *para todo* $\phi \in C_0^\infty$. *Definimos* $(w * u)(\phi) := \check{w}(u * \phi)$. *Con esta definición, si* $w \in \mathcal{D}'(R^n)$, $u \in C_0^\infty(R^n)$, *etc., valen las siguientes relaciones:* $\mathcal{D}' * C_0^\infty \subset C^\infty$, $\mathcal{E}' * C_0^\infty \subset C_0^\infty$, $\mathcal{E}' * C^\infty \subset C^\infty$, $\mathcal{E}' * \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$,

vi) $\mathcal{S}' * \mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$,

Valen las siguientes inclusiones para la convolución entre distribuciones:

vii) $\mathcal{E}' * \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$,
viii) $\mathcal{E}' * \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'$,
ix) $\mathcal{E}' * \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$.

TEOREMA 3. *(i) En* $\mathcal{S}$ *tenemos*

$$(u * v)\hat{}(\xi) = (2\pi)^{n/2}.\hat{u}(\xi)\ \hat{v}(\xi),$$

$$(uv)(x) = (2\pi)^{n/2}.\mathcal{F}^{-1}(\hat{u} * \hat{v})(x).$$

(ii) $P(D)u = \mathcal{F}^{-1}P(\xi)\mathcal{F}u$, *si* P *es un polinomio a coeficientes constantes y* $u \in \mathcal{S}$.

DEMOSTRACION DE (ii). Recordemos que $D^\alpha = i^{-|\alpha|}\partial^\alpha$; diferenciando bajo el signo integral, o integrando por partes, obtenemos las siguientes relaciones (obsérvese que $\xi^\beta e^{-ix.\xi} = (-1)^{|\beta|}D^\beta_x e^{-ix.\xi}$):

(1) $$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} \xi^\alpha \hat{u}(\xi).e^{ix.\xi}\, d\xi,$$

(2) $$(-x)^\beta u(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} D^\beta_\xi \hat{u}(\xi).e^{ix.\xi}\, d\xi.$$

Luego,

(3) $$D^\alpha = \mathcal{F}^{-1}\xi^\alpha\mathcal{F}, \qquad x^\beta = \mathcal{F}^{-1}(-D)^\beta\mathcal{F},$$

y de aquí: $P(D) = \mathcal{F}^{-1}P(\xi)\mathcal{F}$, qed..

2. ESPACIOS H^s. Sea k entero no negativo. $H^k(R^n) := W^{k,2}(R^n) = \{u \in L^2(R^n): D^\alpha u \in L^2, |\alpha| \leq k\}$. Es fácil ver que

$$H^k(R^n) = \{u \in L^2: \xi^\alpha\hat{u} \in L^2, |\alpha| \leq k\} = \{u \in L^2: (1 + |\xi|)^k\hat{u} \in L^2\}.$$

DEFINICION 1. *Sea* $s \in R$, $H^s(R^n) := \{u \in \mathcal{S}'(R^n): \hat{u} \in L^2_{loc}(R^n)$ *y* $(1 + |\xi|)^s\hat{u} \in L^2\}$, *con*

$$\|u\|_s^2 = \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^s . |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi .$$

Si $s = k$ entero no negativo, entonces $\|u\|_k^2 \simeq \|u; W^{k,2}(R^n)\|$. En efecto, para $|\alpha| \leqq k$,

$$|\xi^\alpha|^2 \leqq (1 + |\xi|^2)^k = (1 + \sum_1^n \xi_j^2)^k \leqq C_1 \sum_{|\alpha| \leqq k} |\xi^\alpha|^2 ,$$

$$\|D^\alpha u\|_2^2 = \int D^\alpha u . \overline{D^\alpha u} = C_3 \int_{R^n} |\xi^\alpha|^2 \; |\hat{u}|^2 \, d\xi .$$

Luego,

$$\sum_{|\alpha| \leqq k} \|D^\alpha u\|_2^2 \simeq \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^k . |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi , \qquad \text{qed..}$$

TEOREMA 4. *i)* $H^s(R^n)$ *es un espacio de Hilbert.*

ii) La transformada de Fourier define una isometría entre H^s *y* $L^2(R^n;\lambda)$ *(*λ *es la medida* $(1 + |\xi|^2)^s d\xi$*):*

$$\mathcal{F}: H^s(R^n) \to L^2(R^n;\lambda).$$

iii) $\mathcal{S}$ *es denso en* $H^s(R^n)$.

iv) Sea $P(\xi)$ *un polinomio de grado* m*:*

$$P(D): H^s(R^n) \to H^{s-m}(R^n) \qquad \textit{continuamente.}$$

v) $a \in \mathcal{S}$, $u \in H^s \Rightarrow au \in H^s$ *y* $\|au\|_s \leqq K\|u\|_s$ *con* K *independiente de* u.

DEMOSTRACION. iii) sigue de ii) y la densidad de $\mathcal{S}$ en $L^2(R^n;\lambda)$;

iv) $$\int |\widehat{P(D)u}|^2 \, (1 + |\xi|^2)^{s-m} \, d\xi \leqq C \int (1 + |\xi|)^{2m} (1 + |\xi|^2)^{s-m} |\hat{u}|^2 \, d\xi \leqq$$

$$\leqq C' \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 \, ds;$$

v) Si demostramos que $\|au\|_s \leq K\|u\|_s$ para todo $u \in \mathcal{S}$ de iii) seguirá que la misma desigualdad vale para todo $u \in H^s$. En efecto, basta observar que si $u_n \to u$ en H^s entonces $u_n \to u$ en $\mathcal{S}'$. Supongamos entonces que $u \in \mathcal{S}$:

$$\left(\int_{R^n} |\hat{a} * \hat{u}|^2 \, d\lambda(\xi)\right)^{1/2} = \left(\int_{R^n} \left|\int_{R^n} \hat{u}(\xi-y)a(y)\, dy\right|^2 d\lambda(\xi)\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \int |a(y)|\, dy \left(\int |\hat{u}(\xi-y)|^2 \, d\lambda(\xi)\right)^{1/2} = \int |\hat{a}(y)|.I^{1/2}(y)\, dy.$$

Pero: $1 + |\xi - y| \leq (1 + |\xi|)(1 + |y|)$, $1 + |\xi| \leq (1 + |\xi - y|)(1 + |y|)$ implican $(1 + |\xi - y|^2)^s \leq M_0(1 + |\xi|^2)^s.(1 + |y|^2)^s$ si $s \geq 0$.

Si $s < 0$, $1 + |\xi|^2 \leq C(1 + |\xi - y|^2)(1 + |y|^2)$ y por tanto $C_1\left(\frac{1 + |\xi|^2}{1 + |y|^2}\right)^s \geq (1 + |\xi - y|^2)^s$. Luego, para $s < 0$,

$$(1 + |\xi - y|^2)^s \leq M_1(1 + |y|^2)^{|s|}.(1 + |\xi|^2)^s.$$

En consecuencia,

$$I = \int |\hat{u}(\xi)|^2.(1 + |\xi - y|^2)^s \, d\xi \leq M(1 + |y|^2)^{|s|}\int |\hat{u}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^s \, d\xi =$$

$$= M(1 + |y|^2)^{|s|}.\|u\|_s^2,$$

y por tanto,

$$\left(\int |\widehat{au}|^2 \, d\lambda\right)^{1/2} \leq C\left(\int |\hat{a} * \hat{u}|^2 \, d\lambda(\xi)\right)^{1/2} \leq M_2\|u\|_s.\int |\hat{a}(y)|(1 + |y|^2)^{|s|/2}\, dy,$$

qed..

LEMA 1. *Sea* $\phi \in C_0^\infty(R^n)$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(x) = 1$ *sobre* $B_1(0)$. *Si* $u \in L^\infty(R^n)$ *y* $0 \leq \hat{u} \in L^1_{loc}(R^n)$ *entonces*

$$\|\hat{u}\|_1 \leq \|\hat{\phi}\|_1.\|u\|_\infty.$$

DEMOSTRACION. Sea $\phi_m(x) := \phi(x/m)$. Entonces $\int \hat{u}\phi_m \, dx \to \|\hat{u}\|_1$. Además $(\phi_m)^\wedge(\xi) = m^n\hat{\phi}(m\xi)$ y $\int |\hat{\phi}_m(\xi)| \, d\xi = \int |\hat{\phi}(\xi)| \, d\xi$. Como u y $\hat{u} \in \mathcal{S}'$: $\hat{u}(\phi_m) = u(\hat{\phi}_m)$, y por tanto, $|\int \hat{u}\phi_m \, d\xi| = |\int u\hat{\phi}_m \, d\xi| \leqq \|u\|_\infty/\|\hat{\phi}\|_1$, qed..

TEOREMA 5. *i) Si* $s > n/2$ *y* $u \in H^s$ *entonces u es acotada, continua y tiende a* 0 *para* $x \to \infty$. *Además* $\|u\|_\infty \leqq K.\|u\|_s$ *con* K *independiente de* u.

ii) Si $s > k + n/2$ *entonces* $H^s \subset C_B^k(R^n)$.

iii) Los elementos de $H^{n/2}(R^n)$ *no son necesariamente acotados.*

DEMOSTRACION. i) extiende la proposición (3) del T.1, Cap. III. Sigue de

$$\int |\hat{u}(\xi)| \, d\xi \leqq \left(\int |\hat{u}|^2 \, d\lambda\right)^{1/2}\left(\int (1 + |\xi|^2)^{-s}\right)^{1/2} = M.\|u\|_s.$$

ii) $\int |\hat{u}(\xi)|.(1 + |\xi|)^k \, d\xi < \infty$ si $u \in H^s(R^n)$ y $s > k + n/2$ (des. de Schwarz).

De (1) obtenemos ahora: $D^\alpha u \in C_B(R^n)$ si $|\alpha| \leqq k$.

iii) $\hat{u}(\xi) := (1 + |\xi|)^{-n}/\ln(2 + |\xi|)$ implica $u \in H^{n/2}$ y $u \notin L^1$. Luego, por el lema 1, $u \notin L^\infty$, qed..

COROLARIO. *Las medidas finitas pertenecen a* $(H^s(R^n))^*$ *si* $s > n/2$; *en particular,* $\delta \in (H^sR^n))^*$.

En consecuencia, si m es entero y $m > n/2$ entonces un punto de R^n no es (m,2)-polar (cf. §4 Cap. IV). Recordemos que si $m < n/2$ un punto es (m,2)-polar. La proposición (1) del T.1, Cap. III para $j = 0$ puede generalizarse de la siguiente manera

TEOREMA 6. *Sean* $0 \leqq s < n/2$, $q = 2n/((n - 2s)$. *Entonces*

$$H^s(R^n) \subset L^q(R^n).$$

3. LA TRAZA. Consideremos el operador lineal $\tau: \mathcal{S}(R^n) \to \mathcal{S}(R^{n-1})$ tal que $(\tau u)(x') = u(0,x')$, donde $x = (x_1,x')$, $x' = (x_2, \ldots, x_n)$.

TEOREMA 7. τ: $H^s(R^n) \to H^{s-1/2}(R^{n-1})$ *continuamente si* $s > 1/2$.

DEMOSTRACION. Demostraremos que si $f = \tau u$, $u \in \mathcal{S}$, vale

$$(4) \qquad \|f;H^{s-1/2}(R^{n-1})\|^2 \leq K^2.\|u;H^s(R^n)\|^2,$$

con K independiente de u, y **definimos la traza** τ **sobre** $H^s(R^n)$ **por extensión.** Por una parte tenemos ($u \in \mathcal{S}$):

$$(5) \qquad \int_R \hat{u}(\xi_1,\xi')\, d\xi_1 = \int_R d\xi_1 \left(\int_R dx_1 \left\{\int_{R^{n-1}} u(x_1,x')e^{-ix'.\xi'}\, dx'\right\} e^{-ix_1.\xi_1}\, dx_1\right),$$

$\{\ldots\} \in \mathcal{S}$ para cada ξ'. Luego, el miembro derecho es la antitransformada calculada en 0 de su transformada de Fourier. En consecuencia, el miembro izquierdo de (5) es igual, salvo por un factor constante, a

$$(6) \qquad \int_{R^{n-1}} u(0,x')e^{-ix'.\xi'}\, dx',$$

que es la transformada de Fourier de $f = \tau u$, $\hat{f}(\xi')$, otra vez salvo por un factor constante. Luego

$$|\hat{f}(\xi')| \leq C_o\left(\int_R |\hat{u}(\xi)|^2(1 + |\xi|)^{2s}\, d\xi_1\right)^{1/2}.\left(\int_R (1 + |\xi|)^{-2s}\, d\xi_1\right)^{1/2}.$$

Por otra parte tenemos

$$(7) \int_R (1 + |\xi|)^{-2s}\, d\xi_1 \leq C_1\int_R (1 + |\xi'|^2 + \xi_1^2)^{-s}\, d\xi_1 = C_1.C(1 + |\xi'|^2)^{-s+1/2}.$$

En consecuencia

$$(1 + |\xi'|^2)^{s-1/2}.|\hat{f}(\xi')|^2 \leq C_2\int_R |\hat{u}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^s\, d\xi_1, \qquad \text{y}$$

$$\int_{R^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{s-1/2}.|\hat{f}(\xi')|^2\, d\xi' \leq C_2\int_{R^n} |\hat{u}(\xi)|^2.(1 + |\xi|^2)^s\, d\xi =$$

$$= C_2\|u\|_s^2, \qquad \text{qed..}$$

TEOREMA 8. *La aplicación traza* τ *del teorema 7 es suryectiva.*

DEMOSTRACION. Sea $g \in \mathcal{S}(R^{n-1})$. Definamos

(8) $$\phi(\xi) = \hat{g}(\xi').\frac{(1+|\xi'|^2)^{s-1/2}}{(1+|\xi|^2)^s} = \hat{g}(\xi').A(\xi), \qquad A(\xi) \in L^\infty.$$

Sabemos que ((7))

(9) $$\int_R (1+|\xi|^2)^{-s}\,d\xi_1 = C(1+|\xi'|^2)^{-s+1/2}, \qquad C = C(s),$$

y por tanto que $\int_R A(\xi)\,d\xi_1 = C > 0$. De (8) obtenemos

(10) $$(1+|\xi|^2)^s.|\phi(\xi)|^2 = |\hat{g}(\xi')|^2.(1+|\xi'|^2)^{-s+1/2}.A(\xi).$$

Entonces, $(1+|\xi|^2)^s.|\phi(\xi)|^2 \in L^1(R^{n-1})$. O sea, $u := \phi^{\vee}\,(\hat{u} = \phi)$ pertenece a $H^s(R^n)$. De (8) y (9) se concluye que también $\phi(\xi) \in L^1(R^n)$, y por tanto que $u \in C(R^n)$. Además

$$u(0,x') = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} \phi(\xi)\,e^{i\xi'.x'}\,d\xi = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^{n-1}} d\xi' \int_R \hat{g}(\xi')\,e^{ix'.\xi'}\,A(\xi)\,d\xi_1 =$$

$$= C_1\int_{R^{n-1}} \hat{g}(\xi')\,e^{ix'.\xi'}\,d\xi' \in \mathcal{S}(R^{n-1}).$$

Entonces, para cierta $u \in H^s(R^n) \cap C(R^n)$,

(11) $$u(0,x') = C_2 g(x'), \qquad C_2 = C_2(s,n).$$

Pero, como $\hat{u} = \phi$, de (10) resulta

$$\|(1+|\xi|^2)^{s/2}.|\phi|\|_2^2 = \int |\hat{u}(\xi)|^2.(1+|\xi|^2)^s\,d\xi = \|u\|_s^2 \leq$$

$$\leq C_3^2\int |\hat{g}(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{s-1/2}\,d\xi' = C_4^2\|g;H^{s-1/2}(R^{n-1})\|^2.$$

O sea, la aplicación lineal E, $E(g) = u$ ($= \phi^{N}$), es continua. Podemos ahora extender E por continuidad de $H^{s-1/2}(R^{n-1})$ en $H^s(R^n)$. Luego, si $g \to f \in H^{s-1/2}$ entonces $Eg \to Ef \in H^s$, y $\tau Eg \to \tau Ef$. Supongamos por un momento que

$$(12) \qquad g \in \mathcal{S}(R^{n-1}) \Rightarrow \tau Eg = g.$$

Entonces $f = \tau Ef$, y τ es sobre. QED.

4. EJERCICIOS. A) Sea $u \in H^s(R^n)$. Entonces es posible definir una traza de u sobre R^{n-k}, la "restricción" de u a $R^{n-k} = \{x \in R^n: x_1 = \dots = x_k = 0\}$, de manera que sea continua de H^s en $H^{s-k/2}(R^{n-k})$, (cf. Ts. 7 y 8).

B) Sea $(1 - \Delta)^{s/2}$ definido por $\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}$. Entonces

$$H^s(R^n) = (1 - \Delta)^{-s/2}L^2(R^n).$$

$(v := \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\mathcal{F}$; $u \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}v \in L^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{v} \in L^2 \Rightarrow v \in H^s(R^n) \Rightarrow (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{v} \in L^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow u = \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}v \in L^2)$.

C) Sea $s > 0$. $D :=$ dominio de $(1 - \Delta)^{s/2} = H^s(R^n)$.
$(L^2(R^n) \supset D := \{v \in L^2: (1 - \Delta)^{s/2}v \in L^2\} = \{v \in L^2: \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}v \in L^2\} =$
$= \{v \in L^2: (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{v} \in L^2\} = H^s(R^n))$.

D) $C_o^\infty(R^n)$ es denso en $H^s(R^n)$.
$(C_o^\infty \ni \phi_n \to u$ en $\mathcal{S} \Rightarrow \hat{\phi}_n \to \hat{u}$ en $\mathcal{S} \Rightarrow \int |\hat{\phi}_n - \hat{u}|^2.(1 + |\xi|^2)^s \, d\xi \to 0)$.

E) Demostración de (12). Sea $\chi(x) \in C^\infty(R_+)$, igual a 1 en $(0,1/2)$, a 0 en $(1,\infty)$ y no negativa; $\chi^\varepsilon(x) := \chi(\varepsilon x)$. Demostrar las proposiciones 1) - 7).

1) $u \in H^s \Rightarrow u\chi^\varepsilon \in H^s$ y $(u\chi^\varepsilon) * J_{1/n} \to u\chi^\varepsilon$ en H^s,

$(J_{1/m}(x) = m^{-n}J(x/m) \Rightarrow \hat{J}_{1/m}(\xi) = \hat{J}(\xi/m) \overset{\bullet}{\to} 1$ sobre compactos y acotadamente.
En consecuencia,

$$\int_{R^n} |\hat{\phi}(\xi)\,\hat{J}(\xi/m) - \hat{\phi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi \xrightarrow[m \to \infty]{} 0)).$$

2) $u\chi^{\varepsilon} \to u$ en H^s,

(Por el T.4 sabemos que $a \in \mathcal{S}$, $u \in H^s \Rightarrow \|au\|_s \leq M.\|u\|_s.\int_{R^n} |\hat{a}(y)|(1 + |y|^2)^{|s|/2} dy$.

Sea $a_R(x) := \chi(x/R)$. Luego $\hat{a}_R(\xi) = \hat{\chi}(\xi R).R^n$ y

$$\int_{R^n} |\hat{a}_R(\xi)|.(1 + |\xi|^2)^{|s|/2} \, d\xi = \int_{R^n} |\hat{\chi}(\eta)|.(1 + |\eta|^2/R^2)^{|s|/2} \, d\eta \leq K$$

independiente de $R \uparrow \infty$. Luego, si $\phi \in C_0^{\infty}$ y $R >> 1$:

$$\| a_R u - u\|_s = \|a_R(\phi - u) - (\phi - u)\|_s \leq (Mk + 1)\|\phi - u\|_s).$$

3) $u\chi^{\varepsilon_i} * J_{1/i} \to u$ en H^s, $i \in \{n_1, n_2, n_3 \ldots\}$.

4) $u \in C \cap H^s \Rightarrow u\chi^{\varepsilon_i} * J_{1/i} \xrightarrow{\cdot} u$ sobre compactos.

5) $u \in C \cap H^s \Rightarrow \tau(u\chi^{\varepsilon_i} * J_{1/i}) \xrightarrow{\cdot} u(0,x')$ sobre compactos.

6) $\tau(u\chi^{\varepsilon_i} * J_{1/i}) \longrightarrow \tau u$ en $H^{s-1/2}(R^{n-1})$ si $s > 1/2$.

7) $\tau(u\chi^{\varepsilon_i} * J_{1/i}) \to \tau u$ en L^2, (6) $\Rightarrow$ 7)).

Entonces 5) y 7) $\Rightarrow u(0,x') = \tau u$ c.d. $x' \in R^{n-1}$.

5. LOS DUALES. Para todo $s \in R$ tenemos el

TEOREMA 9. $(H^s(R^n))^* = H^{-s}(R^n)$.

DEMOSTRACION. Sea $l \in (H^s)^*$. Debido a la isometría existente entre $H^s(R^n) = \{u \in \mathcal{S}' : \hat{u} \in L^2_{loc}, \int_{R^n} |\hat{u}|^2 (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi < \infty\}$ y $L^2(R^n; (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi)$

podemos escribir, para cierta L en $(L^2)^*$:

$$l(u) = L(\hat{u}) = \int \hat{u}\, \overline{\hat{w}}.(1 + |\xi|^2)^s \, d\xi.$$

Sea $V = \hat{w}.(1 + |\xi|^2)^s$. Como $w \in H^s(R^n)$ tenemos

$$\infty > \int |\hat{w}|^2.(1 + |\xi|^2)^s \, d\xi = \int \frac{|V|^2}{(1 + |\xi|^2)^s} \, d\xi.$$

Sea v definida por $\hat{v} = V$. Entonces $v \in H^{-s}(R^n)$ y

$$l(u) = \int_{R^n} \hat{u}.\overline{\hat{v}} \, d\xi; \; \|l\| = \|L\|_2 = \|w\|_s = \|v\|_{-s}, \qquad \text{qed..} \tag{14}$$

ESPACIOS. pgs.

INDICE

BIBLIOGRAFIA

[1] ADAMS, Robert A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press, (1975).

[2] BERGH, Jóran, LÖFSTRÖM, Jörgen: *Interpolation Spaces, An introduction*, Springer, (1976).

[3] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J.T.: *Linear operators, Vol. I*, Interscience, (1957).

[4] GAGLIARDO, Emilio: *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, Rendiconti Sem. Mat. U. Padova, 27 (1957), pag. 284-305.

[5] HÖRMANDER, Lars: *Linear partial differential operators*, Springer (1969)

[6] HÖRMANDER, Lars: *The analysis of linear partial differential equations*, Vol. I, Springer, (1983).

[7] SCHWARTZ, Laurent: *Théorie des distributions*, Hermann, (1966).

[8] YOSIDA, Kósaku: *Functional Analysis*, Springer, (1965).

[9] ZAANEN, Adrian, C.: *Linear analysis*, Noordhoff, (1960).

[10] HALMOS, Paul, R.: *Measure Theory*, Van Nostrand, (1950).

[11] KÖTHE, Göttfried: *Topological Vector spaces*, Springer, (1969).