Ej. 1

INFORME TECNICO INTERNO

N°. 21

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

Notas del curso de

V A R I A B L E   C O M P L E J A

Y

F U N C I O N E S   E S P E C I A L E S

por

RAFAEL PANZONE

INMABB

UNS CONICET

1989

INDICE.

CAPITULO 1.

El número complejo. Propiedades topológicas del plano complejo. Continuidad y diferenciabilidad de funciones a valores complejos. Función holomorfa. Condiciones de Cauchy-Riemann. Series: criterios de convergencia. Series de potencias. El teorema de Cauchy-Hardamard. La distancia cordal.

1. EL NÚMERO. Supondremos que el lector ya conoce a los números complejos y sus propiedades. Esta sección es sólo un repaso informal e incompleto de esos conocimientos. El conjunto de los números naturales $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es una familia cerrada bajo dos operaciones fundamentales: $+$, $\times$,
$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es una ampliación en la que también pueden realizarse las operaciones de suma y producto de dos números siendo el resultado otro número en Z. Estos son los números enteros que en el método genético de introducción del número que estamos describiendo aparecen como la respuesta a la necesidad de restar dos números naturales. La necesidad de dividir dos números en Z, p y q, $q \neq 0$, lleva a la introducción de los números racionales $Q = \{p/q;\ p,q \in Z,\ q \neq 0\}$. Esta familia es cerrada bajo las operaciones $+$, $\times$, $-$, $\div$ con divisor distinto de cero. (El conjunto de los racionales con sus operaciones definen un cuerpo ordenado mínimo: todo cuerpo ordenado K contiene un subcuerpo ordenado isomorfo a Q). El conjunto de los números reales se obtiene extendiendo Q, y como hasta ahora, de manera que se satisfaga **el principio de permanencia de las leyes formales**; es decir, en este caso $R \supset Q$ y las operaciones, $+$, $\times$, $-$, $\div$ en R restringidas a Q dan los mismos resultados que se obtenían antes de la extensión. En R puede definirse el logaritmo $\log_{10} x$, $x > 0$, y el concepto de límite: $(1 + 1/n)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e$. Pero este último es un concepto topológico más que aritmético. Números como π, e y $\sqrt{2}$ pertenecen a $R \setminus Q$.
El número real es introducido, por ejemplo, por **cortaduras de Dedekind** y vale para ellos el **teorema fundamental:** si se separan los números de R en dos clases no vacías A, B tales que todo número $a \in A$ es menor o igual que todo número $b \in B$ y $R = A \cup B$ (cortadura) entonces existe un sólo número real r tal que $a \leq r \leq b$ para todo $a \in A$, para todo $b \in B$.
La geometría analítica se basa en el principio que dice que pueden ponerse en correspondencia ordenada los puntos de una recta y el conjunto de números reales. En términos geométricos entonces el teorema fundamental mencionado dice que la recta es "continua", y corresponde a lo que se llamó **postulado**

de **continuidad de la recta** o postulado geométrico de Cantor. Conceptualmente es equivalente al **principio de encaje.** Diremos que $\{[a_n,b_n]: a_n < b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, es un encaje de intervalos de números reales si $a_n < a_{n+1}$, $b_{n+1} < b_n$ y $b_n - a_n \to 0$ para $n \to \infty$. El teorema de encaje (de intervalos cerrados) dice que existe un y sólo un número real p tal que $a_n \leqq p \leqq b_n$ para todo n. (El teorema de **plenitud** y **unicidad** de los números reales puede enunciarse así: todo cuerpo ordenado completo K es isomorfo a R. La completitud se define por la existencia de por lo menos un elemento de separación en todo encaje en K).
La familia de números complejos $C = \{(a,b): a,b \in R\}$, o también $C = \{a + ib: a,b \in R,\ i = \sqrt{-1}\}$, aparece al tratar de extender el concepto de número real de manera que puedan realizarse en C operaciones como α^β, $\alpha \neq 0$, o resolver ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$. Recordemos que $\alpha = (a,b)$, o $\alpha = a + ib = a.1 + b.i$, es igual a cero si y sólo si $a = b = 0$. En otras palabras, las "unidades" 1 e i son " linealmente independientes respecto del cuerpo R". El llamado **teorema final de la Aritmética** de Hankel asegura que no puede ampliarse más el concepto de número de manera que se conserven las leyes formales de las operaciones. (Más precisamente, no existe un sistema de números de más de dos unidades que forme un cuerpo conmutativo).

2. EL NÚMERO COMPLEJO. Sea $\alpha = a + ib = [\rho,\phi]$ donde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\phi = \text{arc tg}(b/a)$. ϕ puede reemplazarse por $\phi + 2k\pi$, $k \in Z$, en la representación polar del número complejo α. En general fijaremos de antemano un intervalo semicerrado de longitud 2π donde se encontrará el argumento ϕ, vg. $\phi \in [0,2\pi)$, $\phi \in (-\pi,\pi]$, etc.. El módulo $\rho \in [0,\infty)$. Cuando $\alpha = 0$, y sólo en ese caso, $\rho = 0$, y ϕ puede tomar cualquier valor. Sea $|\alpha| := \rho$. Valen:

a) $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$, y por tanto,
$||z_1| - |z_2|| \leqq |z_1 - z_2|$,

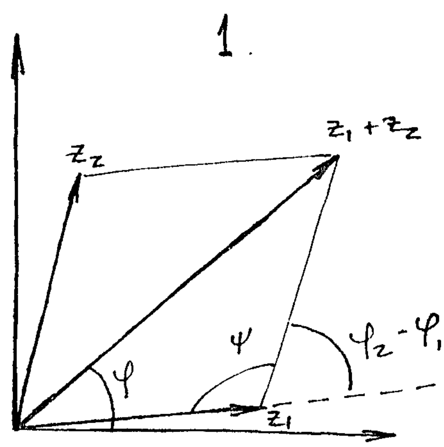
b) si $\bar{z} := [\rho,-\phi]$ entonces $|\bar{z}| = |z|$ y
$z\bar{z} = |z|^2$ pues,

c) $z_1.z_2 = [\rho_1\rho_2,\ \phi_1 + \phi_2]$,
$|z_1z_2| = |z_1|.|z_2|$,

d) $z_1 + z_2 = [(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos\psi)^{1/2},\ \phi]$,

e) $i = [1,\pi/2]$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$,

f) si $z_2 \neq 0$, $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$,



g) parte real de $\alpha = \mathcal{R}\alpha := a$, parte imaginaria de $\alpha = \mathcal{I}\alpha := b$; $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}z = 2a$,
h) de $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ se deduce la **ley del paralelogramo:**

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2,$$

i) el **producto escalar** de $z,w \in C$ es por definición $(z,w) := z\bar{w}$, y por tanto $|(z,w)| = |z|.|w|$.
Identificamos al número real x con $(x,0)$. Tenemos
j) $[1,\phi] = (\cos\phi, \text{ sen }\phi) = (\cos\phi, 0) + i(\text{sen }\phi, 0) = \cos\phi + i \text{ sen }\phi =$
$= (1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \ldots) + i(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \ldots) = 1 + \frac{i\phi}{1!} + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \ldots =: e^{i\phi}$,
k) $e^{i\psi}.\alpha = e^{i\psi}.[\rho,\phi] = [\rho, \phi + \psi]$,
l) $\alpha = (a,b) = [\rho,\phi] = \rho.e^{i\phi} = \rho(\cos\phi, \text{ sen }\phi) = \rho(\cos\phi + i \text{ sen }\phi)$; luego, $e^{i\psi}.\ \alpha = |\alpha|.e^{i(\phi+\psi)}$,
m) $e^{i\pi} + 1 = 0$, fórmula de de Moivre-Euler,
n) $\bar{z} = z.e^{-2i\phi}$,
o) sea $z \neq 0$; $1/z = 1/[\rho,\phi] = [\frac{1}{\rho}, -\phi] = \rho^{-1}.e^{-i\phi}$. La aplicación $z \to z' = 1/z$ pone en correspondencia biunívoca al conjunto $|z'| < 1$ con $|z| > 1$, $|z'| > 1$ con $|z| < 1$ y $|z'| = 1$ con $|z| = 1$, y sugiere la introducción de un punto en el infinito, imagen de $z = 0$,
p) sea $r > 0$, $n \in N$; $(re^{i\phi})^n = r^n(e^{i\phi})^n = r^n.e^{in\phi} = r^n(\cos n\phi + i \text{ sen } n\phi)$, (fórmula de de Moivre),
q) $\sqrt[n]{Re^{i\psi}} := (Re^{i\psi})^{1/n} = R^{1/n}.(e^{i\psi})^{1/n}$,
r) $(e^{i\psi})^{1/n} = e^{i(\psi+2k\pi)/n}$, $k \in Z$. Todos los valores posibles del argumento son $\frac{\psi}{n}$, $\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}$, ... , $\frac{\psi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$, que corresponden a $k = 0, 1, \ldots, n - 1$; si $k = n, n+1, \ldots$, o $k = -1, -2, \ldots$ vuelven a aparecer los n números distintos:

(1) $$e^{i\psi/n}.1,\ e^{i\psi/n}.e^{i2\pi/n},\ \ldots,\ e^{i\psi/n}.e^{i(n-1)2\pi/n}.$$

Los factores de $e^{i\psi/n}$ son las raíces n-ésimas de la unidad. Podemos suponer en (1) que $\psi \in [0,2\pi)$.

3. LA ECUACION CUADRATICA. El problema que surge en el campo real al tratar

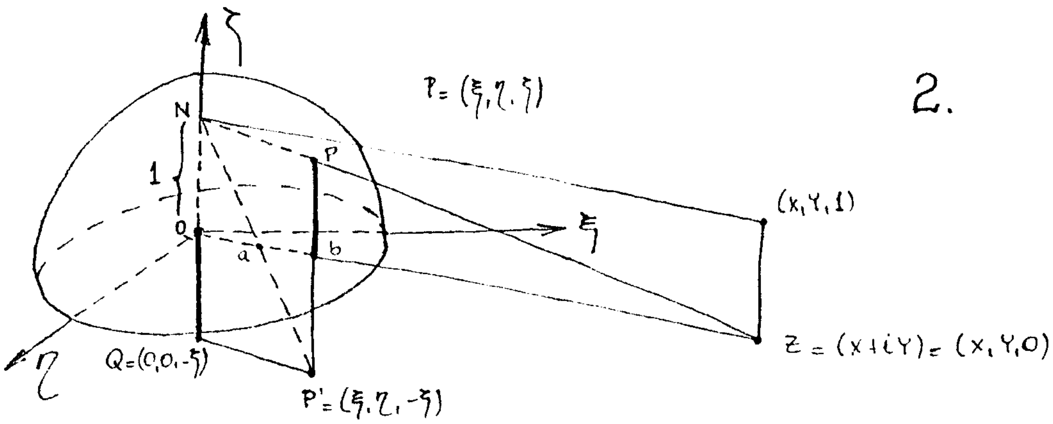
de encontrar las raíces de $x^2 + 1 = 0$ no es otro que el de hallar $(-1)^{1/2} = (e^{i\pi})^{1/2}$. Y no es en manera alguna un problema específico de esa ecuación de segundo grado. Sea $y = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in R$, $a \neq 0$. Hallaremos los x para los que $y = 0$. Haciendo $x = X - \gamma$ se obtiene $y = aX^2 + d$ para un cierto valor de γ. Luego el problema se reduce a calcular $(-d/a)^{1/2}$. Se ve enseguida que los valores posibles son

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \tag{2}$$

Las soluciones estarán en $C \setminus R$ si el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. El método no usa en absoluto el hecho que los coeficientes sean reales por lo que (2) resuelve también la ecuación de segundo grado a coeficientes complejos.

4. LA PROYECCION ESTEREOGRAFICA. Llamaremos plano de Argand, o Gauss, o simplemente plano complejo, al conjunto C de los pares $z = (a,b)$, $a,b \in R$. Si $z_i = (a_i,b_i)$, $i = 1, 2$, la distancia entre z_1 y z_2 será $|z_1 - z_2| = ((a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2)^{1/2}$. (Así $|z|$ define una norma en el espacio C asociada al producto escalar $(z_1,z_2) = z_1 . \overline{z_2}$. O sea, topológicamente, C es isomorfo a $R \times R = R^2$). Cuando al plano de Argand se le asocia un punto ∞ vinculado con C en la forma que se describe a continuación hablaremos de la esfera de Riemann. ($C \cup \{\infty\}$ es topológicamente isomorfo a la superficie de la esfera unitaria en R^3).

Proyectando desde N sobre C (ver figura 2) la superficie Σ de la esfera unitaria cuyo ecuador se encuentra en C, se establece una correspondencia σ en la que $N \leftrightarrow \infty$, y que permite definir $z \to \infty$ exactamente cuando su homólogo $P \in \Sigma$ tiende a N.



2.

A S opuesto de N en Σ, le corresponde $z = 0$, y puntos simétricos en la esfera respecto del plano del ecuador se corresponden con puntos inversos respecto a $|z| = 1$ en el plano complejo: $P \to z$, $P' \to a \Rightarrow a = 1/\bar{z}$. En efecto, utilizando semejanza de triángulos y que $(\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = (1 - \zeta)(1 + \zeta)$ obtenemos:

$$(3) \qquad \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{|z|}{|b|} = \frac{1}{1 - \zeta}, \quad (\overset{\Delta}{NOZ} \sim \overset{\Delta}{Pbz}, \text{ etc.}),$$

$$(4) \qquad \frac{a}{1} = \frac{\xi + i\eta}{1 + \zeta} = \frac{1 - \zeta}{\xi - i\eta}, \quad (\overset{\Delta}{NOa} \sim \overset{\Delta}{NQP'}),$$

$$(5) \qquad \frac{2}{\text{dist }(N,P)} = \frac{\text{dist }(N,z)}{1}, \quad (\overset{\Delta}{NSP} \sim \overset{\Delta}{NzO}).$$

Luego, $z = (\xi + i\eta)/(1 - \zeta)$, y $|a.z| = |(\xi + i\eta)/(\xi - i\eta)| = 1$. O sea, $a = 1/\bar{z}$. Además

$$(6) \qquad \frac{\xi}{x} = \frac{\text{dist }(N,P)}{\text{dist }(N,z)} = \frac{2}{\text{dist }(N,z)^2} = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} = 1 - \zeta.$$

Por tanto, si $|z| \geqq 1$, o equivalentemente para $\zeta \geqq 0$:

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi + i\eta = \dfrac{2z}{z\bar{z} + 1}, \ \zeta = \dfrac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}, \\[2ex] z = \dfrac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}. \end{cases}$$

Notando que $\zeta(a) = -\zeta(z)$ y que $a = \dfrac{1 + \zeta(a)}{\xi - i\eta} = \dfrac{\xi + i\eta}{1 - \xi(a)} = \dfrac{\xi + i\eta}{1 + |\zeta(a)|}$, se deduce que (7) también define a la transformación σ restringida al hemisferio sur de Σ y cuya imagen es el círculo unitario $\{|z| \leqq 1\}$. Además σ transforma circunferencias en Σ en circunferencias en C, o rectas. Si nominamos a las rectas como circunferencias (degeneradas), σ pone en correspondencia circunferencias con circunferencias. La transformación es **conforme:** dos curvas en C que se intersecan en z y cuyas tangentes allí forman un ángulo θ tienen imágenes en Σ que se intersecan en P y cuyas tangentes forman también un ángulo θ.

5. EL PLANO COMPLEJO. Llamaremos **entorno circular** de un punto z_0 a un conjunto $B_\varepsilon(z_0)$ de la forma $\{z: |z - z_0| < \varepsilon\}$ para algún $\varepsilon > 0$, y por entorno de

z_0 entenderemos cualquier conjunto de C que contenga un entorno circular de z_0. Luego, $z_n \to z_0$ si y sólo si $|z_n - z_0| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si y sólo si $z_n \in B_\varepsilon$ desde un n en adelante y cualquiera sea ε. Un entorno (circular) del ∞ será la imagen por la transformación $1/z$ de un entorno (circular) del origen. Llamaremos **acotado** a todo subconjunto M del plano complejo para el que exista un círculo $B_r(0)$ tal que $B_r(0) \supset M$. Llamaremos **abierto** a cualquier unión de entornos circulares: $A = \bigcup \{B_{r(\alpha)}(z_\alpha): \alpha \leftarrow \Lambda\}$.

Sea I_n un rectángulo $[a_{1,n},b_{1,n}] \times [a_{2,n},b_{2,n}]$, $n = 1, 2, \ldots$. Si diam $(I_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $I_n \supset I_{n+1}$ diremos que $\{I_n\}$ es un **encaje** de rectángulos. Vale (demostrarlo): existe un único punto común a todos los rectángulos de un encaje.

Dado un conjunto $M \subset C$ diremos que z es un **punto de acumulación** de M si para todo $B_\varepsilon(z)$, $B_\varepsilon(z) \cap M$ contiene infinitos puntos. El teorema de Bolzano-Weierstrass afirma que todo conjunto infinito y acotado posee un punto de acumulación al menos.

Un conjunto K se dice **compacto** si además de acotado es cerrado. Esto último significa que su complemento $C\backslash K$ es abierto. Se demuestra que $K \subset C$ es compacto si y sólo si todo subconjunto infinito $M \subset K$ tiene un punto de acumulación en K. O también, toda sucesión $\{z_n\} \subset K$ contiene una subsucesión convergente $\{z_{n_j}\}$ convergente a un punto en K. Teorema de Heine-Borel: un conjunto K es compacto si de todo cubrimiento de K por círculos, $\bigcup \{B_{\varepsilon_\lambda}(z_\lambda): \lambda \in \Lambda\} \supset K$, puede extraerse un subcubrimiento finito: $B_{\varepsilon_{\lambda_1}} \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_{\lambda_N}} \supset K$. (Nótese que no exigimos que $z_\lambda \in K$ aunque, obviamente, la versión del teorema con esta hipótesis adicional es equivalente a la anterior).

Dado un conjunto $T \subset C$ designaremos con $\overline{T}$ a su **clausura** que es la unión de T con todos sus puntos de acumulación. Si un punto $a \in \overline{T}\backslash T$ entonces necesariamente existe una sucesión $\{z_n\} \subset T$ tal que $z_n \to a$. $\overline{T}$ es un conjunto cerrado, y es el menor conjunto cerrado que contiene a T. Llamaremos **disco** a la clausura de un entorno circular de un punto:

$\overline{B}_r(a) = \{z: |z - a| \leqq r\}$.

Un **arco simple** S es un arco continuo sin puntos múltiplos, es decir, la imagen S(t), biunívoca y bicontinua de un intervalo cerrado finito propio $t_0 \leqq t \leqq t_1$.

Una curva cerrada simple, o **curva de Jordan**, es un arco J continuo con un sólo punto múltiple: $J(t_0) = J(t_1)$.

O sea, una curva de Jordan es la imagen biunívoca y bicontinua de una circunferencia.

Un **dominio** es un abierto conexo: D es **abierto** si para todo punto $z_0 \in D$ existe $B_\varepsilon(z_0) \subset D$; D es **conexo** si para cada par de puntos z_1, z_2 en D existe un arco simple que los une contenido en D. El famoso teorema de Jordan-Veblen asegura que el complemento en C de una curva de Jordan J, $C\backslash J$, está formado por exactamente dos dominios, uno acotado, el dominio interior, y el otro no acotado, el exterior. Todo arco simple que une un punto de uno con un punto del otro interseca a J.

Para saber si un punto $z \in C\backslash J$ es interior o exterior basta unirlo por medio de un segmento con un punto de J (por ejemplo $J(t_0)$) y recorrer la curva con el extremo en J. Si al regresar al punto $(J(t_1))$ el ángulo total recorrido es 0 (2π, -2π) entonces z es exterior (interior).

Un dominio Σ se dice **simplemente conexo** si toda curva de Jordan J contenida en Σ, $J \subset \Sigma$, encierra solamente puntos de Σ. Es decir, el interior de J está contenido en Σ. Intuitivamente, un dominio simplemente conexo es un dominio sin agujeros.

6. SUCESIONES Y SERIES. Suponemos aquí que el lector está familiarizado con los conceptos de supremo (sup) e ínfimo (inf) de una familia de números reales y el de límite de una sucesión de números reales, y también con los de límite superior ($\overline{\lim}$) y límite inferior ($\underline{\lim}$).

Sea $z_n = (x_n, y_n)$, n = 1, 2, ..., una **sucesión** de números complejos, esto es, una aplicación de N en C. $z_n \to z_0$ si y sólo si $|z_n - z_0| \to 0$, lo que equivale a

$$x_n - x_0 \to 0, \quad y_n - y_0 \to 0.$$

Aplicando el **criterio de Cauchy** a $\{x_n\}$,$\{y_n\}$, resulta éste mismo para $\{z_n\}$: condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión $\{z_n\}$ es que dado $\varepsilon > 0$ exista $n = n(\varepsilon)$ tal que para todo $p > 0$, $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$. En efecto, $|z_n - z_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \leq 2|z_n - z_m|$.

z_0 es el límite de $\{z_n\}$: $z_0 = \lim_{n \to \infty} z_n$. Si $\{z_n\}$ define un conjunto infinito entonces z_0 es su único punto de acumulación. Vale:

$z_n \to z$, $w_n \to w \Rightarrow z_n \pm w_n \to z \pm w$, $z_n w_n \to zw$, y si $z \neq 0 \neq z_n$, $w_n/z_n \to w/z$ (demostrarlo).

Sea $a_j \in C$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Recordemos que $\sum_0^\infty a_j =: S$ si $S_n := \sum_0^n a_j \to S$.

El criterio de Cauchy aplicado a $\{S_n\}$ dice que existe la suma de la serie $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n = n(\varepsilon)$ tal que $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$ cualquiera sea $p \geq 0$.

Recordemos que la serie se dice **absolutamente convergente** si $\sum_0^\infty |a_j| = t < \infty$.

Si esto ocurre también la serie original converge a un número S, y cualquier reordenamiento de la misma da lugar a una serie convergente a S (convergencia incondicional). La convergencia absoluta no equivale a la convergencia simple $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots)$.

7. FUNCIONES COMPLEJAS. Una función compleja, o a valores complejos, es una aplicación f de un conjunto D_f, su dominio, en C. Si su valores están en $R \subset C$ diremos que la función es real. Salvo indicación en contrario supondremos siempre $D_f \subset C$. f se dirá **continua en** $z \in D_f$ si $z_n \to z$ en D_f implica $f(z_n) \to f(z)$. Es fácil ver que $f(z)$ es continua en $z = x + iy$ si y sólo si las funciones rereales $\mathcal{R}f(z)$, $\mathcal{I}f(z)$ son continuas en (x,y) y que si f y g son continuas en z y $D_f = D_g$ entonces $f \pm g$, $f.g$, y f/g si $g(z) \neq 0$, también lo son.

La continuidad de f en $z \in D_f$ significa entonces que $\lim_{z_n \to z} f(z_n) = f(z)$. Se dice que f es continua en D_f si y sólo si lo es en cada uno de sus puntos. La continuidad en $z_0 \in D_f$ puede describirse en la siguiente forma equivalente: para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|z - z_0| < \eta$, $z \in D_f$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, (demostrarlo).

La función $f(x) = 1/x$, $D_f = (0,1)$, es continua, pero a medida que $x_0 = z_0$ se acerca a 0, el mayor $\eta(\varepsilon)$ posible para un ε fijo, es cada vez más pequeño. Cuando esto no ocurre se habla de **continuidad uniforme:** f es uniformemente continua en D_f si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $z_0 \in D_f$ existe un $\eta = \eta(\varepsilon)$ tal que $|z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

TEOREMA DE HEINE-CANTOR. *Si f es continua en el conjunto cerrado y acotado A entonces f es acotada y uniformemente continua allí.*

DEMSOTRACION. (El ejemplo precedente prueba que el teorema no vale si A no es compacto). Dado $a \in A$ existen $B_\eta(a)$, $\eta = \eta(a)$, tal que si $z_1, z_2 \in B_\eta(a) \cap A$ entonces $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. Esto se expresa diciendo que la **oscilación** de f en $B_\eta(a)$ es menor que ε. Cada punto a de A lo cubrimos con un entorno circular $B_{\eta(a)/2}(a)$. El teorema de Heine-Borel asegura que con un número finito de estos entornos queda cubierto todo A. Sean estos los correspondientes a los puntos $a_1, \dots, a_N$. Sea $z_o \in A$. Existe entonces a_j tal que $B_{\eta(a_j)/2}(a_j) \ni z_o$. Sea $\eta = \inf \{\eta(a_j)/2\}$. Si $|z - z_o| < \eta$ entonces $z \in B_{\eta(a_j)}(a_j)$ y por tanto $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$. Además $|f(z)| \leq \sup_j |f(a_j)| + \varepsilon$, QED.

8. DIFERENCIABILIDAD. Sea D_f un abierto. Diremos que f es diferenciable en $z_o \in D_f$ si $\dfrac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \to l \in C$ para $0 < |z - z_o| \to 0$, y que l es la derivada de f en z_o: $l = \frac{df}{dz}(z_o)$; escribiremos también $l = f'(z_o)$.
Es claro que si f es diferenciable en z_o entonces es continua en ese punto. La recíproca es falsa. Por ejemplo, $|z|$ no es diferenciable en $z = 0$ ni en $z = 1$. Arg z no es diferenciable en $z = 1$.

DEFINICION 1. *Sea D_f un abierto. f se dice **holomorfa** en D_f (o analítica regular) si es diferenciable en todo punto de su dominio.*

Si $D_f = D_g$ y f y g son holomorfas en un abierto entonces $f + g$, $f.g$ y f/g para $g \neq 0$, también lo son y vale:

i) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$; $(f.g)'(z) = f'(z).g(z) + f(z).g'(z)$;

ii) $\dfrac{d(f/g)}{dz} = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

(Estas fórmulas valen punto a punto, y por tanto son válidas si f y g son sólo diferenciables en un punto.) La última sigue de i) y de

$$\frac{d}{dz}(1/g) = - \frac{g'}{g^2}(z). \tag{8}$$

Sea f holomorfa en un abierto que contiene a $g(D_g)$. Entonces $w(z) = f(g(z))$

es holomorfa en D_g y (cf. §9):

(9) $$w'(z) = f'(g(z)).g'(z).$$

En efecto, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta z}$ si $\Delta g \neq 0$, y pasando al límite resulta (9). Si g es constante en un entorno de z, $\Delta g = 0 = g'(z)$ pero también w es constante en ese entorno y $w'(z) = 0$, qed.

DEFINICION 2. *Una función* f *se dice holomorfa en un punto* a *si está definida en un entorno circular* $B_r(a)$ *donde es holomorfa.*

Luego, f es holomorfa si y sólo si es holomorfa en cada uno de los puntos de D_f.

DEFINICION 3. *Si* f *es holomorfa en* C *decimos que* f *es una función entera.*

Todo polinomio de grado n, $P(z) := a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, es una función entera. En efecto, basta ver que z^n lo es. De la identidad

(10) $$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots + z_0^{n-1})$$

resulta que $\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} n z_0^{n-1}$. Es decir,

(11) $$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}.$$

Un teorema de Gauss (que demostraremos más adelante) afirma que en a lo sumo n puntos de C: $P(z) = 0$. Sean $z_1, \ldots, z_m$. Si Q es otro polinomio, la función racional $Q(z)/P(z)$ es holomorfa en $C \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$.

9. LOS SIMBOLOS O Y o. Sean f(z) y g(z) funciones complejas definidas en $U = B_r(a) \setminus \{a\}$. Diremos que $f(z) = O(g(z))$ para $z \to a$ si existe una constante M tal que $|f(z)| \leq M|g(z)|$ para $|z - a| < r_0$, $r_0 \leq r$; y que $f(z) = o(g(z))$ si

para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_o(\varepsilon)$ tal que $|f(z)| \leq \varepsilon|g(z)|$ cuando $|z - a| < r_o(\varepsilon)$.

Así tenemos, para $(x,y) \to 0$: $e^{ix} = O(1)$, $z^2 = o(z)$, $z = o(1)$, $|z|^2 = o(\sqrt{x^2 + y^2}) = o(|z|)$. En particular, si f está definida en un entorno de z y es derivable en ese punto, o sea, existe el $\lim\limits_{0 \neq \Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = 1$, entonces $\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = 1.\Delta z + o(1)\,\Delta z = 1.\Delta z + o(\Delta z)$. Si el incremento de f en z verifica esta relación, entonces $1 = f'(z)$.

Supongamos que la función compuesta $w(z) = f(\zeta(z))$ esté definida en un entorno de z y existan $\zeta'(z)$, $f'(\zeta(z))$. Entonces $\Delta w = f(\zeta(z + \Delta z)) - f(\zeta(z)) = f'(\zeta(z)).\Delta\zeta + o(1)\,\Delta\zeta = f'(\zeta(z))(\zeta'(z)\Delta z + o(\Delta z)) + o(1)\Delta z = f'(\zeta(z)).\zeta'(z)\Delta z + o(\Delta z)$, y por tanto, $w'(z) = f'(\zeta(z)).\zeta'(z)$, (cf. (9)).

10. LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN. Sea f holomorfa en $z = (x,y)$, $f(z) = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, u y v reales. Si $\Delta z = h$ real:

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \to u_x + iv_x = f'(z)$$

Si $\Delta z = ih$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{ih} + i\,\frac{v(x,y+h) - v(x)}{ih} \to -iu_y + v_y = f'(z).$$

Entonces

(12) $$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{en } z.$$

APLICACION. Sea $f(z)$ holomorfa en $B_r(a)$ con $f'(z) = 0$ allí. Entonces $u_x = v_x = 0$, y por tanto, $u_y = v_y = 0$ en B_r. Luego, u es constante y v también, es decir, $f(z)$ es igual a una constante.

Vale el

TEOREMA 1. *Sea* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *definida en un entorno de* $z = (x,y)$, u *y* v *reales.* f *tiene derivada en* z *si y sólo si* u *y* v *son diferenciables en* (x,y) *y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann (12). Es decir,*

(13) $$\Delta u = u(x+\Delta x,y+\Delta y) - u(x,y) = M\Delta x + N\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}),$$

(14) $$\Delta v = v(x+\Delta x,y+\Delta y) - v(x,y) = M'\Delta x + N'\Delta y + o(|\Delta z|),$$

(15) $$M = N', \quad N = -M'.$$

En esta situación $f'(z) = f'_x(x,y) = -if'_y(x,y) = M + iM' = \dfrac{N + iN'}{i}$, *y*

(16) $$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + o(\Delta z).$$

* 11. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1. (16) expresa la diferenciablidad de f en z que es equivalente a la derivabilidad de f; (13) y (14) la diferenciabilidad de u y v. En el caso de varias variables la diferenciabilidad implica (pero no es equivalente a) la continuidad de la función y la existencia de las derivadas parciales en el punto.

a) Diferenciablidad de f $\Rightarrow$ diferenciablidad de u y v:

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = f'(z)\Delta z + o(\Delta z) = (M - iN)\Delta z + o(\Delta z) =$$

$$= M\Delta x + N\Delta y + i(-N\Delta x + M\Delta y) + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

De aquí sigue (15) que son las condiciones de Cauchy-Riemann.

b) Diferenciablidad de u y v + condiciones de C-R $\Rightarrow$ derivabilidad de f:

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = ((13),(14),(15)) =$$

$$= M\Delta x - M'\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) + i(M'\Delta x + M\Delta y) + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) =$$

$$= (M + iM')(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|),$$ qed..

12. SERIES DE POTENCIAS. Sea $a_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$:

TEOREMA 2. *a)* $\sum a_n$ *es absolutamente convergente si* $\overline{\lim}\ |a_n|^{1/n} < 1$ *y absolutamente divergente si* $\overline{\lim}\ |a_n|^{1/n} > 1$.

b) Sea $a_n \neq 0$ *para todo* n. *Si* $\overline{\lim} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ *entonces* $\sum |a_n| < \infty$ *y si*

$\underline{\lim} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, $\sum |a_n| = \infty$.

DEMOSTRACION. a) es el criterio de Cauchy para la convergencia absoluta de series numéricas y b) es el criterio de D'Alembert. Este último es más débil que el anterior pero en general es más fácil de aplicar. Veamos a). Si $\overline{\lim}\ |a_n|^{1/n} < 1$, existe $q \in (0,1)$ tal que $|a_n| < q^n$ para $n \geq n_o$ y por tanto $\sum_{n_o}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n_o}^{\infty} q^n < \infty$. Si $\overline{\lim}\ |a_n|^{1/n} > 1$ entonces $|a_n| > 1$ para infinitos valores de n. Puede demostrarse b) recurriendo a las siguientes desigualdades

$$\text{(17)} \qquad \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq \overline{\lim}|a_n|^{1/n} \geqq \underline{\lim}|a_n|^{1/n} \geqq \underline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

En lugar de demostrar (17) probaremos directamente el criterio de d'Alembert. Si existe q tal que $\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$ entones $|a_{n+1}| < q.|a_n|$ desde un n_o en adelante y por tanto $\sum_{n_o}^{\infty} |a_j| \leq |a_{n_o}| \sum_{0}^{\infty} q^n < \infty$. Si $\underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ entonces desde un n_o en adelante vale $|a_{n+1}| > |a_n|$ y la serie diverge absolutamente, qed.

Una serie de potencias es una serie de la forma

$$\text{(18)} \qquad \sum_{0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n \in C,\ z \in C.$$

z es una variable y nos preguntamos para qué valores de z converge la serie. Aplicando el criterio de Cauchy vemos que converge absolutamente si $\overline{\lim}\ |a_n z^n|^{1/n} = \overline{\lim}\ |a_n|^{1/n}.|z| < 1$, y diverge si $\overline{\lim}\ |a_n|^{1/n}.|z| > 1$. O sea, converge si

$$|z| < \frac{1}{\overline{\lim}\ |a_n|^{1/n}} = \underline{\lim}\ \frac{1}{|a_n|^{1/n}} = \underline{\lim}\ |a_n|^{-1/n} =: R,$$

y diverge si

$$|z| > \frac{1}{\overline{\lim}\ |a_n|^{1/n}} = R.$$

Tenemos entonces el

TEOREMA 3 (Cauchy-Hadamard). *Sea* $R = \underline{\lim} |a_n|^{-1/n}$. *La serie (18) converge absolutamente si* $|z| < R$ *y diverge si* $|z| > R$.

R es el llamado **radio de convergencia de la serie de potencias.** En rigor, ésta debería llamarse serie de potencias alrededor del origen. Una serie de potencias alrededor del punto $z_0 \in C$ es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y el mayor círculo alrededor de z_0 donde ésta converge tiene radio R. Si en un punto z, $\sum |a_n||z - z_0|^n = \infty$ entonces $|z - z_0| \geqq R$ y si $|z - z_0| > R$ seguramente esta última serie diverge.

Para determinar el radio de convergencia es cómodo aplicar, cuando es posible, la siguiente regla práctica.

TEOREMA 4. *Sea* $a_n \neq 0$, $n \geqq n_0$. *Si* $|a_n/a_{n+1}| \to R$ *entonces* R *es el radio de convergencia de* $\sum a_n z^n$.

DEMOSTRACION. Sea $r = \lim |a_{n+1}/a_n|$ y $z \neq 0$. Entonces existe el límite de $|a_{n+1}z^{n+1}|/|a_n z^n|$ y es $r|z|$. Luego habrá convergencia absoluta si y sólo si $r|z| < 1$, (T.2, b)). Luego $1/r = R$, qed.

Obsérvese que el argumento es correcto aún para $r = \infty$.

La serie de potencias $\sum n^n z^n$ tiene radio de convergencia $R = 0$; $\sum 2^{-n^2} z^n$ tiene radio $R = \infty$; $\sum_0^{\infty} z^n$ tiene radio igual a uno. Como $S_n = 1 + z + \ldots + z^n$, vale $zS_n = z + \ldots + z^{n+1}$ y resulta $(1 - z)S_n = 1 - z^{n+1}$. Por tanto

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sum_0^{\infty} z = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

* 13. LA DISTANCIA CORDAL. En ocasiones es conveniente introducir en el plano complejo una métrica d equivalente a la euclídea, es decir, tal que $|z_n - z_0| \to 0$ si y sólo si $d(z_n, z_0) \to 0$, respecto de la cual pueda hablarse de la distancia de un punto al infinito. Una métrica que responde a estas exigencias es

(19) $$d(z_1,z_2) = \text{arc tg} \left|\frac{z_1 - z_2}{1 + \bar{z}_1 z_2}\right| ,$$

para la cual valen

(20) $$0 \leq d(z_1,z_2) \leq \pi/2,$$

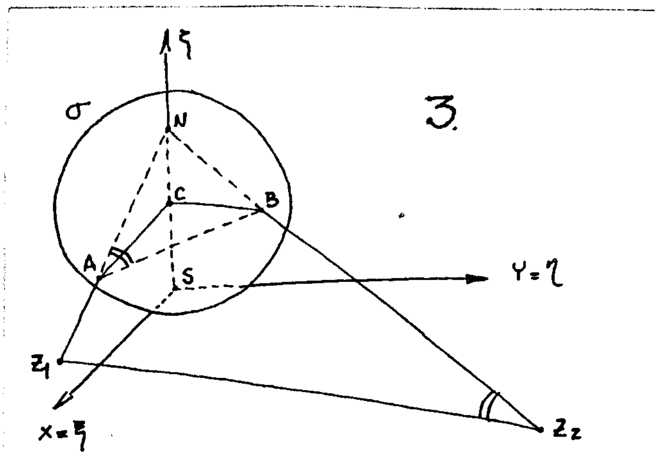
(21) $$d(z_1,z_2) = d(z_2,z_1); \quad d(z_1,z_2) = 0 \text{ sii } z_1 = z_2,$$

(22) $$d(z_1,z_2) + d(z_2,z_3) \leq d(z_1,z_3),$$

con $z_i \in C \bigcup \{\infty\}$. Si $z_2 = \infty \neq z_1$, $d(z_1,z_2) = \text{arc tg } 1/|z_1|$. A continuación explicamos el significado de $\phi = d(z_1,z_2)$, sin entrar en todos los detalles.

Consideremos una esfera σ en R^3 con centro $C = (0,0,1/2)$ de radio $1/2$. Esta será tangente al plano $C = \{(x,y)\}$. Si proyectamos σ sobre C desde $N = (0,0,1)$ obtenemos una correspondencia, que también podemos llamar estereográfica, que tiene las mismas propiedades que la descripta en el párrafo 4. Las relaciones (7) deberán alterarse de acuerdo a la nueva situación aunque todavía el ecuador de σ se corresponderá con la circunferencia unitaria en C, el hemisferio norte de σ con el exterior de esta circunferencia, N con ∞, etc..

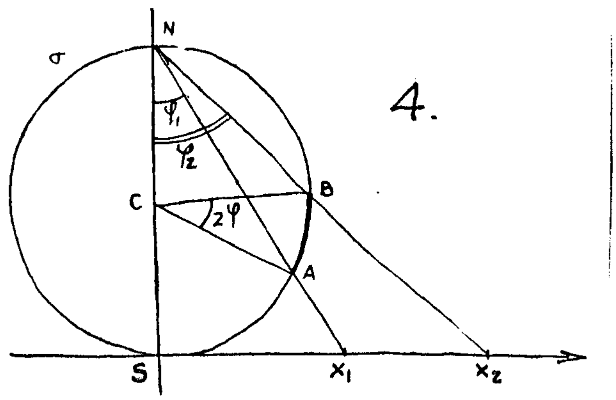
La distancia cordal entre z_1 y z_2 puede elegirse igual a $|A - B|$ (ver fig.3). Una métrica equivalente a esta viene dada por el ángulo $\hat{ACB}$ medido en radianes. La fórmula (19) define una métrica equivalente:



(23) $$d(z_1,z_2) = \phi = \frac{\hat{ACB}}{2} =$$

$$= \text{lg del arco de círculo máximo } \overset{\frown}{AB}.$$

En efecto, si $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, se tiene (veáse fig. (4):



(24) $$\phi = \phi_2 - \phi_1 =$$

$$= \text{arc tg} \left|\frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2}\right| =$$

$$= \text{arc tg} \left| \frac{z_2 - z_1}{1 + \bar{z}_1 z_2} \right| .$$

Se puede demostrar que las rotaciones en σ alrededor de C se traducen en C en transformaciones de la forma

$$w = \frac{Az + B}{-\bar{B}z + \bar{A}} , \quad A\bar{A} + B\bar{B} = 1. \tag{25}$$

Para éstas es fácil verificar que

$$\left| \frac{w_1 - w_2}{1 + \bar{w}_1 w_2} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + \bar{z}_1 z_2} \right| .$$

(19) es entonces consecuencia de (24). La desigualdad triangular (22) se prueba fácilmente utilizando en lugar de ϕ el ángulo $2\phi = z_1 \hat{C} z_2$.

NB. Cuando se realiza la inversión de R^3 con centro N la superficie σ se transforma en el plano $C = \{(\xi,\eta)\}$ y puntos homólogos en esta correspondencia son también homólogos respecto de la proyección estereográfica recién descripta.

CAPITULO 2

Integral curvilínea. Teoremas de Cauchy y Morera. Fórmula de Cauchy. Las funciones elementales. La función z^{α}. Convergencia uniforme de funciones holomorfas en una región. Desarrollo en serie de potencias: el teorema de Taylor. Los ceros de una función holomorfa. Determinación de una función holomorfa por uno de sus elementos analíticos. Funciones armónicas. El núcleo de Poisson y su conjugado en el círculo unitario. La transformación conforme.

1. LA INTEGRAL DE CAUCHY. Sea S un **segmento** de extremo inicial z_0 y final z: $[z_0,z]$, y f una función compleja continua sobre S. Sea $\tau = \{z_0,z_1,\dots,z_n = z\}$ una partición (ordenada) de S donde z_r sigue a z_{r-1} al recorrer S de z_0 a z. Sea ξ_r un punto cualquiera del segmento $[z_{r-1},z_r]$. Existe un número I tal que dado $\varepsilon > 0$

$$\left|\sum_1^N f(\xi_r)(z_r - z_{r-1}) - I\right| < \varepsilon$$

si $\max |z_r - z_{r-1}| < \eta(\varepsilon)$. En efecto, esto es una consecuencia inmediata de la continuidad uniforme de f. Definimos

$$\int_S f(z)\, dz := \lim_{\max |\Delta z| \to 0} \sum_1^n f(\xi_r)(z_r - z_{r-1}) = I.$$

Sean $w \in S$ y $S_1 = [z_0,w]$, $S_2 = [w,z]$. Valen las siguientes propiedades para f y g continuas sobre S, a, b $\in$ C, $-S = [z,z_0]$:

(1) $$\int_S (af + bg)\, dz = a\int_S f\, dz + b\int_S g\, dz,$$

(2) $$\int_{-S} f\, dz = -\int_S f\, dz,$$

(3) $$\int_S f\, dz = \int_{S_1} f\, dz + \int_{S_2} f\, dz.$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas sobre S que converja uniformemente a f (recordemos que esto significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $m = m(\varepsilon)$ tal que $|f_n(z) - f(z)| \leqq \varepsilon$ si $n \geqq m$ cualquiera sea $z \in S$). Entonces

(4) $$\int_S f_n(z)\, dz \to \int_S f(z)\, dz.$$

Sea P una **poligonal:** $P = \sum_1^N S_i$, donde los S_i son los segmentos consecutivos que la forman. Definimos para f(z) continua en P:

$$\int_P f(z)\, dz := \sum_1^N \int_{S_i} f\, dz.$$

Obviamente las propiedades (1) - (4) valen para $\int_P$. Designemos con $|S|$ la longitud de S y con $|P| := \sum |S_i|$. Es fácil ver que

(5) $$\left|\int_P f(z)\, dz\right| \leqq M.|P|, \qquad M = \sup_{z \in P} |f(z)|.$$

Si $z_j \to z$ en P entonces $|f(z_j)| \to |f(z)|$ pues $||f(z_j)| - |f(z)|| \leqq |f(z_j) - f(z)|$, y $|f(z)|$ es continua en P. Como P es un conjunto compacto, la demostración conocida en el caso real se aplica para demostrar que existe un punto $p \in P$ tal que $|f(p)| = \sup\{|f(z)|: z \in P\}$, y (5) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\left|\int_P f\, dz\right| \leqq \left(\max_{z \in P} |f(z)|\right) \times \text{longitud de } P.$$

EJEMPLOS. Sean z_o y Z los extremos inicial y final de P. Entonces:

$$\int_P 1\, dz = \int_P dz = Z - z_o,$$

$$\int_P z\, dz = \lim \sum_1^N \frac{z_r + z_{r-1}}{2}(z_r - z_{r-1}) = \frac{1}{2}\sum_1^N (z_r^2 - z_{r-1}^2) = \frac{1}{2}(Z^2 - z_o^2).$$

2. LA INTEGRAL CURVILINEA. Llamaremos **arco suave** a un arco L de Jordan, definido por funciones $x(t)$, $y(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, con x,y continuas allí, continuamente diferenciables en $(0,1)$, y tal que $\int_0^1 (|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)|)\, dt < \infty$. La siguiente relación entre números no negativos

$$(6) \qquad \sqrt{a^2 + b^2} \leqq a + b \leqq 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

permite demostrar que la finitud de la última integral equivale a la de $\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$. En este caso $\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$ es la **longitud del arco L.**

Llamaremos **curva suave** a la suma de un número finito de arcos suaves consecutivos. Sea $f(z)$ continua sobre el arco suave L. La integral curvilínea de f sobre L es

$$\oint_L f(z)\, dz := \int_0^1 f(x(t) + iy(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))\, dt =$$

$$= \int_0^1 [u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))][\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)]\, dt =$$

$$= \oint_L u\, dx - v\, dy + i\oint_L v\, dx + u\, dy, \qquad u = \mathcal{R}f,\ v = \mathcal{I}f.$$

Supongamos que entre $0 \leqq t \leqq 1$ y $\tau_0 \leqq \tau \leqq \tau_1$ se establece una correspondencia biunívoca y bicontinua $\tau = \tau(t)$, continuamente diferenciable en el interior de esos intervalos en ambos sentidos y tal que $\tau(0) = \tau_0$, $\tau(1) = \tau_1$. Entonces

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(x(\tau) + iy(\tau))(\dot{x}(\tau) + i\dot{y}(\tau))\, d\tau = \int_0^1 f(X(t) + iY(t))(\dot{X}(t) + i\dot{Y}(t))dt$$

donde $x(\tau) + iy(\tau) = x(\tau(t)) + iy(\tau(t)) = X(t) + iY(t)$ describen al arco L. Esto se expresa diciendo que **la integral curvilínea es independiente de la parametrización del arco.** Valen

$$(7) \qquad \oint_L (af + bg)\, dz = a\oint_L f\, dz + b\oint_L g\, dz, \quad a,b \in C,\ f,g \text{ continuas, L arco suave,}$$

(8) $\displaystyle \oint_L f\,dz = -\oint_{-L} f\,dz$, $-L$ = arco L recorrido en sentido opuesto,

(9) $\displaystyle \oint_{L_1+L_2} f\,dz = \oint_{L_1} f\,dz + \oint_{L_2} f\,dz$, si $L_1 + L_2$ es un arco suave,

(10) si $f_n(z)$ converge uniformemente a f, todas continuas,entonces

$$\oint_L f_n\,dz \xrightarrow[n \to \infty]{} \oint_L f\,dz.$$

Si C es una curva suave, $C = L_1 + \ldots + L_N$, definimos $\displaystyle \oint_C f(z)\,dz := \sum_1^N \oint_{L_i} f(z)\,dz$,

y para la integral curvilínea sobre C valen las propiedades (7) - (10).
Sea P una poligonal parametrizada con el parámetro longitud de arco. Se tiene (demostrarlo):

$$\int_P f(z)\,dz = \oint_P f(z)\,dz.$$

Es decir, el concepto de integral curvilínea es una extensión del concepto de integral de Cauchy. Por esta razón, de ahora en adelante, en lugar de $\oint_C$ escribiremos simplemente $\int_C$. La desigualdad (5) se demuestra ahora así:

(11) $$\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z(t))|.\int_0^1 |\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)|\,dt =$$

$$= \max |f|.\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \max |f|.\text{long } (L),$$

desigualdad que se extiende en forma obvia a curvas suaves.
Sea $0 \leq t \leq 1$, $L = \{(x(t),y(t))\}$ y

(12) $$d := \int_0^t (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}(t)\,dt.$$

d es el **parámetro longitud de arco.** Para parametrizar con él a L es suficiente exigir que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ en $(0,1)$; así, cuando t va de 0 a 1, d recorre el segmento $[0,$ longitud de $L]$ en forma extrictamente monótona con derivada positiva en $0 < t < 1$.

DEFINICION 1. *Llamaremos* ***arco regular*** *a un arco de Jordan* L *definido por funciones continuas* $x(t)$, $y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, *con derivadas continuas* $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, *en* $0 < t < 1$, *tales que* $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2(t)}$ *sea (finita y)* ***positiva*** *y*

$$l(L) := \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt < \infty.$$

$l(L)$ es la longitud del arco L. Una **curva regular** será una suma finita de arcos regulares consecutivos.

DEFINICION 2. *Una curva de Jordan* $J = \{z(t): 0 \leq t \leq 1\}$ *se dice recorrida en* ***sentido positivo*** *si al pasar* t *de* 0 *a* 1 *el radio vector que une un punto interior a* J *con* $(x(t),y(t))$ *barre un ángulo de* $+2\pi$ *radianes. Al sentido opuesto se lo llamará negativo.*

Por $\int_J f(z)\, dz$ entenderemos la integral de f sobre el arco J recorrido en sentido positivo.

*3. APROXIMACION POR POLIGONALES. Sea L un arco regular y $f(z)$ una función uniformemente continua en un entorno A de L, vg. $A = \bigcup \{B_r(z): z \in L\}$, r fijo. Sea $\{0 = t_0, t_1, \ldots, t_N = 1\}$ una partición π de $[0,1]$ tal que la poligonal P formada por los puntos $\{z(t_i)\}$ esté contenida en A. Esto ocurre siempre que el módulo $M(\pi)$ de la partición, $M = \sup (t_i - t_{i-1})$, sea bastante pequeño. Sea τ_r un punto en el arco de L definido por los extremos $z_r = z(t_r)$, $z_{r+1} = z(t_{r+1})$ y ζ_r un punto del segmento que une esos puntos. Si M es bastante pequeño entonces la longitud de cada arco (z_r, z_{r+1}) sobre L es menor que η y por tanto

$|z_r - z_{r+1}| < \eta$ pues $\int_{t_r}^{t_{r+1}} (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))\, dt = z_{r+1} - z_r$. Todo punto z del

arco: $z = \int_{t_r}^{t} (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))\, dt + z_r$, $t_r \leq t < t_{r+1}$, dista menos que ¶ de

z_r y si η es bastante pequeño (o sea, si lo es M) entonces f oscila en $B_\eta(z_r)$

menos que ε. Además $l(P) = \sum |z_{r+1} - z_r| \leq \int_0^1 |\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)|\, dt = l(L)$, (y se puede demostrar que $l(P) \to l(L)$). Tenemos entonces (con ζ_r en el segmento $[z_r, z_{r+1}]$),

$$\int_L f(z)\, dz = \int_0^1 f(x(t) + iy(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))\, dt =$$

$$\sum f(z(\tau_r))(z_{r+1} - z_r) + O(l(P)\varepsilon) = \sum f(\zeta_r)\Delta z_r + O(l(P)\varepsilon)$$

$$= \int_P f(z)\, dz + O(l(P)\ \varepsilon) = \int_P f(z)\, dz + O(\varepsilon).$$

En consecuencia, $\int_P f(z)\, dz \to \int_L f(z)\, dz$ si $M(\pi) \to 0$.

4. CALCULO DE ALGUNAS INTEGRALES. Sea L un arco regular que une z_0 con Z, n entero no negativo:

$$\int_L z^n\, dz = \int_0^1 (x + iy)^n(\dot{x} + i\dot{y})\, dt = \tag{13}$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{(x + iy)^{n+1}}{n + 1}\, dt = \left.\frac{(x + iy)^{n+1}(t)}{n + 1}\right|_0^1 = \frac{Z^{n+1} - z_0^{n+1}}{n + 1}\ .$$

Si $0 \notin L$ y n es entero ≤ -2, (13) vale y su demostración es todavía correcta. Sea $C = \{a + R\cos t + i\, R \operatorname{sen} t\colon 0 \leq t \leq 2\pi\}$ una circunferencia de centro a, radio R, recorrida en sentido positivo. Entonces

$$\int_C \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{-R \operatorname{sen} t + i\, R \cos t}{R \cos t + i\, R \operatorname{sen} t}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i. \tag{14}$$

Sea L un segmento de longitud 2 por cuyo centro T pasa perpendicularmente una semirrecta con extremo en 0. Sea $1/p$ la distancia de T a 0, y $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

$$\int_L \frac{dz}{z} = \int_{\alpha L} \frac{dz}{z} = \int_{-1}^1 \frac{ip\, dy}{1 + ipy} = ip\int_{-1}^1 \frac{1 - ipy}{1 + p^2y^2}\, dy =$$

$$= ip\int_{-1}^{1} \frac{dy}{1 + p^2y^2} = 2i\int_0^p \frac{ds}{1 + s^2} = 2i \text{ arc sen } \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} \Bigg|_0^p =$$

$$= 2i.\text{arc sen } \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \text{ ; pues } (\text{arc sen } x)' = (1 - x^2)^{-1/2}.$$

Si $p = 1$; $\int_L \frac{dz}{z} = \pi i/2$. Luego, la integral de $1/z$ sobre un cuadrado de lado 2 con centro en 0, y por lo tanto sobre cualquier cuadrado con centro en 0, es igual a $2\pi i$. Entonces, si Q es un cuadrado con centro a:

$$\int_Q \frac{dz}{z - a} = 2\pi i. \tag{15}$$

EJERCICIO. Deducir de (13) la fórmula

$$\frac{1}{(w - b)^n} - \frac{1}{(w - a)^n} = \int_L \frac{n}{(w - t)^{n+1}}\, dt \ , \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{13'}$$

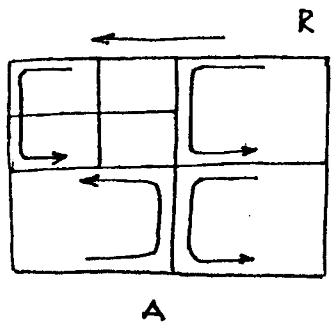
donde L es un arco regular que une a con b y que no pasa por w.

5. REGULARIDAD DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA. Nuestro objetivo es ahora mostrar que la derivada de una función holomorfa es también una función holomorfa. Para ello recurriremos al siguiente **teorema elemental de Cauchy:**

LEMA 1. *Sea* R *un rectángulo totalmente contenido en un dominio simplemente conexo* A *donde* f(z) *es holomorfa. Entonces*

$$\int_R f(z)\, dz = 0.$$

DEMOSTRACION (según Goursat). Dividiendo el rectángulo en 4 rectángulos congruentes $R^{(1)}, \ldots, R^{(4)}$ e integrando sobre ellos obtenemos



1.

$$\int_R f(z)\, dz =$$

$$\left(\int_{R^{(1)}} + \int_{R^{(2)}} + \int_{R^{(3)}} + \int_{R^{(4)}}\right) f(z)\, dz$$

y por tanto, para cierto $R_1 = R^{(i)}$, $|\int_R| \leq 4|\int_{R_1}|$. Repitiendo el proceso, esta vez sobre R^1, obtenemos $|\int_R| \leq 4^2|\int_{R_2}|$, y en general

$$|\int_R f(z)\,dz| \leq 4^n|\int_{R_n} f(z)\,dz| \;.$$

Sea s el perímetro de R. Entonces, el perímetro de R_n es $s_n = s/2^n$. La familia $\{R_j\}$ es un encaje de rectángulos que determina un punto a $\in$ R. Si R_n es de diámetro bastante pequeño se tiene (cf. (13)):

(16) $$|\psi(z)| = |f(z) - f(a) - f'(a)(z - a)| < \varepsilon|z - a|, \qquad z \in R_n,$$

$$\int_{R_n} f(z)\,dz = f(a)\int_{R_n} dz - af'(a)\int_{R_n} dz + f'(a)\int_{R_n} z\,dz + \int_{R_n} \psi(z)\,dz =$$

$$= 0 + 0 + 0 + \int_{R_n} \psi(z)\,dz.$$

Luego,

$$|\int_{R_n} f(z)\,dz| \leq \varepsilon . s_n^2 = \varepsilon(s/2^n)^2 = s^2.\varepsilon/4^n,$$

$$|\int_R f\,dz| \leq 4^n.|\int_{R_n}| \leq s^2\varepsilon, \qquad\qquad \text{QED.}$$

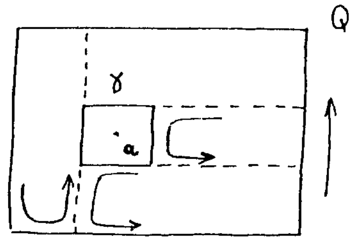
El teorema siguiente presenta la llamada **fórmula de Cauchy en su forma elemental.**

LEMA 2. *Sea* Q *un cuadrado contenido en el dominio simplemente conexo* A *donde* f(z) *es holomorfa. Entonces, si* a *es interior a* Q*,*

(17) $$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_Q \frac{f(z)}{z - a}\,dz.$$

DEMOSTRACION. Sea γ un cuadrado con centro a contenido en Q tal que si $z \in \gamma$

vale (16) para un $\varepsilon > 0$ dado. Recurriendo al lema 1 se ve que (cf. figura)



2.

$$\int_Q \frac{f(z)}{z - a}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz .$$

Pues $f(z)/(z - a)$ es holomorfa fuera de $z = a$. Por otra parte

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz = f(a)\int_\gamma \frac{dz}{z - a} + f'(a)\int_\gamma dz + \int_\gamma \frac{\psi(z)}{z - a}\, dz = (\text{cf.}(15)) =$$

$$= 2\pi i\ f(a) + 0 + \eta \quad \text{donde } |\eta| \leq \varepsilon . l(\gamma).$$

Entonces, para $\gamma \to \{a\}$, $\eta \to 0$ y $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz \to 2\pi i\ f(a)$, qed..

TEOREMA 1. *Sea* $f(z)$ *holomorfa en un punto* a. *Entonces existe* $f^{(n)}(a) = ((\frac{d}{dz})^n f)(a)$ *cualquiera sea* $n \in \mathbb{N}$. *O sea, una función holomorfa es indefinidamente diferenciable.*

DEMOSTRACION. Sea $A = B_r(a)$ contenido en el recinto donde $f(z)$ es holomorfa, sea Q un cuadrado contenido en A y conteniendo en su interior al punto a. Derivando (17) bajo el signo integral se obtiene

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_Q \frac{f(z)}{(z - a)^2}\, dz$$

$$\vdots$$

(18)
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_Q \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz$$

$$\vdots$$

El próximo lema nos muestra que es legítimo derivar bajo el signo integral para obtener (18), QED.

COROLARIO. *Sea* $f(z)$ *holomorfa en un abierto* B. *Entonces su parte real* u *y su* *parte imaginaria* v *son funciones armónicas:* $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\Delta v = 0$.

DEMOSTRACION. Sabemos que $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Además existen $u_{xx} = v_{yx}$, $u_{yy} = -v_{xy}$ y son continuas (T.1). Del teorema de Bonnet (*), o Schwarz, se deduce que $v_{yx} = v_{xy}$, y por tanto $u_{xx} + u_{yy} = 0$, QED.

LEMA 3. *Sea* L *un arco regular y* A *un dominio simplemente conexo y sea* $G(u) = \int_L F(z,u)\,dz$, *donde* $F(z,u)$ *es continua en* (z,u), $z \in L$, $u \in A$. *Si* F'_u *existe y es continua en* $(z,u) \in L \times A$ *entonces*

$$\frac{d}{du}G(u) = \frac{d}{du}\int_L F(z,u)\,dz = \int_L \frac{\partial F}{\partial u}(z,u)\,dz.$$

DEMOSTRACION. Esta demostración puede entenderse en toda su generalidad al finalizar el siguiente párrafo 6. Para la verificación de (18) basta con poner en ella $F(z,u) = \dfrac{1}{(z-u)^n}$, $n \geqq 1$, y recordar la fórmula (13').

$$\frac{\Delta G}{\Delta u} = \int_L \frac{F(z,u+\Delta u) - F(z,u)}{\Delta u}\,dz = \int_L \left(\frac{1}{\Delta u}\int_u^{u+\Delta u} F'_u(z,t)\,dt\right) dz =$$

$$= \int_L \left\{ \frac{1}{\Delta u}\int_u^{u+\Delta u} (F'_u(z,u) + \phi(z,t))\,dt\right\} dz = \int_L F'_u(z,u)\,dz + O(\varepsilon . l(L)),$$

pues si $t \in [u,u+\Delta u]$ y Δu es bastante pequeño entonces $|\phi(z,u)| = |F'_u(z,u) - F'_u(z,t)| \leqq \varepsilon$ para todo $z \in L$ (demostrarlo). Luego,

$$\frac{\Delta G}{\Delta u} \xrightarrow[\Delta u \to 0]{} \int_L F'(z,u)\,dz, \qquad \text{QED.}$$

6. TEOREMA DE CAUCHY Y FORMULA DE CAUCHY.

(*) Existen f_{xy}, f_{yx} en $U \ni (x_0,y_0)$, continuas en $(x_0,y_0) \Rightarrow f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.

TEOREMA 2. *Sea f holomorfa en el dominio A y J una curva de Jordan regular contenida en A junto con su interior. Entonces*

$$\int_J f(z)\,dz = 0.$$

DEMOSTRACION. Sea D el interior de J. Tenemos

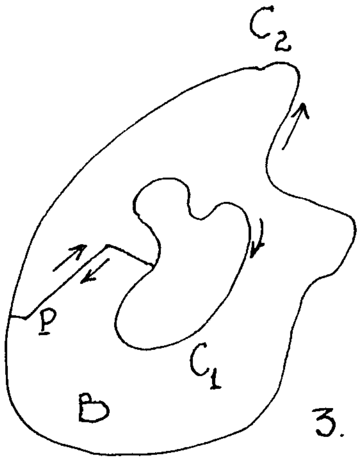
$$\int_J f(z)\,dz = \int_J u\,dx - v\,dy + i\int_J v\,dx + u\,dy =$$

$$= \iint_D (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint_D (u_x - v_y)\,dx\,dy.$$

El teorema de Gauss-Green es aplicable pues J es un arco regular y por el teorema 1, u_x, u_y, v_x, v_y son continuas en A. Como f verifica las condiciones de Cauchy-Riemann los dos últimos integrandos son identicamente iguales a cero, QED.

APLICACIONES. 1) Deformación del contorno. Si C_1 y C_2 son dos curvas de Jordan regulares, con C_1 contenida en el interior de C_2, y f(z) es una función holomorfa sobre C_1, C_2, y en el dominio B contenido entre ambas curvas, entonces

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz. \tag{19}$$



3.

Existe una poligonal P que une C_2 con C_1 y contenida en B salvo por sus extremos. Del teorema 2 se deduce que $\int_{C_2+P-C_1-P} f(z)\,dz = 0$,

(suministrar los detalles), y por tanto (19).

2) TEOREMA 3. *Sea f(z) holomorfa sobre la curva de Jordan J y en su interior I. Entonces, si* a ε I,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_J \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{20}$$

DEMOSTRACION. Se obtienen de (18) por deformación del contorno, QED.

COROLARIO (teorema de Liouville). *Sea* f(z) *entera (i.e. holomorfa en* C*). Entonces* f(z) *es igual a una constante si es acotada.*

DEMOSTRACION. De (20) obtenemos

$$|f'(a)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz\right| \leq \frac{\sup\{|f(z)| : |z-a| = r\}}{r}$$

que tiende a 0 para $r \to \infty$. Luego, $f' \equiv 0$, y por tanto, $f \equiv$ constante, QED.

3) Primitiva de una función holomorfa. Sea A un dominio simplemente conexo y f una función holomorfa en A. Sean L_1 y L_2 dos arcos regulares en A que unen z_0 con Z. Entonces

$$\int_{L_1} f(z)\, dz = \int_{L_2} f(z)\, dz. \tag{21}$$

Veámoslo para poligonales. Si L_1 y L_2 son poligonales entonces $\int_{P_1-P_2} f(z)\, dz = 0$ pues $P_1 - P_2$ es una poligonal cerrada que encierra un número finito de regiones a las que puede aplicarse el T.2. El caso general se demuestra aplicando el teorema de aproximación por poligonales del párrafo 3. Puede entonces escribirse

$$F(Z) = \int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz. \tag{22}$$

En este caso, $\dfrac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} = \dfrac{1}{\Delta Z}\displaystyle\int_{Z}^{Z+\Delta Z} f(z)\, dz$ donde podemos suponer que la última integral se calcula sobre el segmento que une Z con $Z + \Delta Z$. Luego $\dfrac{\Delta F}{\Delta Z} = \dfrac{1}{\Delta Z}\displaystyle\int_{Z}^{Z+\Delta Z} (f(Z) + o(1))\, dz \xrightarrow[\Delta Z \to 0]{} f(Z)$. O sea, $F'(Z) = f(Z)$ y F es una primitiva de f. Si G(z) es holomorfa en A y $G'(z) = f(z)$ entonces $(F - G)' = 0$ en A, y por tanto, F - G es una constante. Luego,

$$\int_{z_0}^{Z} f'(z)\, dz = f(Z) - f(z_0), \tag{23}$$

es decir, tenemos en (23) al **teorema de Barrow-Newton.**

4) Sea también g holomorfa en A. Vale entonces la fórmula de **integración por partes**

$$\int_{z_0}^{z} f(w)\ g'(w)\ dw = f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0) - \int_{z_0}^{z} f'(w)\ g(w)\ dw.$$

7. RECIPROCA DEL TEOREMA DE CAUCHY. CONVERGENCIA CASI UNIFORME. Las ideas recién presentadas pueden utilizarse para demostrar el siguiente resultado debido a **Morera.**

TEOREMA 4. *Sea* f *continua en* A *dominio simplemente conexo. Si para toda curva de Jordan regular contenida en* A, J, *se tiene* $\int_J f\ dz = 0$ *entonces* f *es holomorfa.*

DEMOSTRACION. Una función F(z) queda definida en A por $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\tau)\ d\tau$,

$z_0, z \in A$. Sólo resta observar que la demostración con la que se probó la diferenciabilidad de (22) sólo usó la continuidad del integrando. Entonces, $F'(z) = f(z)$. El resultado sigue ahora del T.1, QED.

Si $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de funciones holomorfas en un abierto B diremos que $f_n(z)$ converge **casi uniformemente** a f(z) si $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente sobre todo compacto K contenido en B. Denotaremos la convergencia uniforme con un punto: $f_n \underset{K}{\dot{\to}} f$ y la casi uniforme así: $f_n \underset{B}{\to} f$. Recordemos que $f_n \dot{\to} f$ sobre K si para todo $\varepsilon > 0$ existe $m = m(\varepsilon)$: $n \geq m \Rightarrow$ para todo $z \in K$, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. El criterio de convergencia uniforme es ahora: para todo $\varepsilon > 0$ existe $m = m(\varepsilon)$: para todo $p \in N$ para todo $z \in K$, $|f_{m+p}(z) - f_m(z)| < \varepsilon$. El límite uniforme de funciones continuas es continua. En efecto, si $n \geq m(\varepsilon)$,

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| + |f_n(w) - f(w)| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + |f_n(z) - f_n(w)|.$$

Fijando n resulta, para $|z - w| < \eta = \eta(\varepsilon,n)$: $|f(z) - f(w)| \leqq 3\varepsilon$, QED.

TEOREMA 5. *Sea* $\{f_n(z)\}$ *una sucesión de funciones holomorfas en* A *dominio simplemente conexo. Entonces*

$$f_n \overset{\to}{\to} f \Rightarrow f \text{ holomorfa.}$$

DEMOSTRACION. Sea J una curva de Jordan regular contenida en A. Tenemos $0 = \int_J f_n(z)\,dz \to \int_J f(z)\,dz$. Y el teorema sigue del T.4, QED.

COROLARIO. *Bajo las hipótesis del T.5 vale también que*

$$f_n^{(j)} \overset{\to}{\to} f^{(j)}. \tag{24}$$

En efecto, si $w \in B_r(a) \subset B_{2r}(a) \subset A$, entonces de

$$f_n^{(j)}(w) - f^{(j)}(w) = \frac{j!}{2\pi i}\int_{|z-a|=2r} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z-a)^{j+1}}\,dz,$$

resulta $|f_n^{(j)}(w) - f^{(j)}(w)| \leqq \frac{j!\,4\pi r}{2\pi . r^{j+1}} \sup\{|f_n(z) - f(z)| : |z - a| = 2r\} \to 0$ para $n \to \infty$. O sea, $f_n^{(j)} \overset{\to}{\to} f^{(j)}$ en $B_r(a)$. Una aplicación del teorema de Heine-Borel da cuenta de la convergencia uniforme sobre un compacto arbitrario.

TEOREMA 6. *Si* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *converge absolutamente en* $\{|z| < R\}$ *entonces converge uniformemente en todo disco de radio* $r < R$ *y define una función holomorfa* $f(z)$ *en* $B_R(0)$. *La serie derivada* $\sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$ *también converge uniformemente en ese disco y a* $f'(z)$. *Más aún, la serie y la serie derivada tienen el mismo radio de convergencia. Además* $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, $n = 0, 1, \ldots$.

DEMOSTRACION. Por hipótesis tenemos

$$\frac{1}{\overline{\lim}\ |a_n|^{1/n}} \geq R.$$

Luego, si $n > N(\varepsilon)$, $(1 + \varepsilon)^n > |a_n R^n|$. Por tanto, si $|z| < R(1 - \varepsilon)/(1 + \varepsilon) = r$:

$$\sum_N^\infty |a_n z^n| = \sum_N^\infty |a_n R^n| \left|\frac{z}{R}\right|^n \leq \sum_N^\infty (1 - \varepsilon)^n < \infty,$$

y $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge uniformemente en $\overline{B}_r(0)$.

La recíproca del radio de convergencia de la serie derivada es

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{(n + 1)|a_{n+1}|} = \overline{\lim}\ |a_{n+1}|^{1/n} = \overline{\lim}\ (|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} = \overline{\lim}\ |a_{n+1}|^{1/n+1}$$

o sea, $\sum_0^\infty a_n z^n$ y $\sum_0^\infty (n + 1)a_{n+1} z^n$ **tienen el mismo radio de convergencia.** Si

$f_N(z) = \sum_0^N a_n z^n$ entonces $f_N'(z) \to f'(z)$ por (24). Derivando n veces a

$f(z) = \sum_0^\infty a_j z^j$ y calculando su valor en $z = 0$ obtenemos $f^{(n)}(0) = n! a_n$, QED.

COROLARIO. *Si* $\sum a_n z^n$ *y* $\sum b_n z^n$ *tienen radios de convergencia* R_a *y* R_b *respectivamente y* $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ *en* $B_r(0)$, *entonces representan la misma función holomorfa* $f(z)$ *y* $R_a = R_b \geq r$, $a_n = b_n$ *para todo* n.

*8. EL TEOREMA FUERTE DE CAUCHY. Se dice que un arco de Jordan L es rectificable si el supremo l de las longitudes de todas las poligonales inscritas es finito. Sea $L = \{(x(t),y(t)): 0 \leq t \leq 1\}$. Si $d(\tau)$ coincide con ese supremos pero para el arco definido por $0 \leq t \leq \tau$, entonces $\sigma = d(\tau)$ es una función continua que crece de 0 a l con t entre 0 y 1. Sea f continua sobre un arco de Jordan rectificable. Puede demostrarse que existe

$$I = \lim_{\max |\Delta x| \to 0} \sum_{r=1}^n f(\zeta_r)(z_r - z_{r-1}), \qquad \zeta_r \in \text{arco } z_{r-1}, z_r \text{ en } L.$$

Definimos $\int_L f(z)\,dz = I$. Sean $L \subset D$ dominio simplemente conexo y $f(z)$ holomorfa en D. Sea $P = \{z_0, \ldots, z_n\}$ una poligonal en D formada por puntos de L con z_0 el punto inicial del arco y z_n el final y ordenados según el parámetro creciente. Entonces $\int_P f(z)\,dz = \int_L f(z)\,dz$. Vale el

TEOREMA 7. *Si* $f(z)$ *es holomorfa en el dominio interior* D *de una curva de Jordan rectificable* J *y si* f *es continua en* $\overline{D} = D \cup J$ *entonces* $\int_J f(z)\,dz = 0$.

9. LAS FUNCIONES ELEMENTALES. i) LA FUNCION EXPONENCIAL:

$$\exp z := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n! \tag{25}$$

es una función entera, pues el radio de convergencia de la serie es infinito, y verifica para x real: $\exp x = e^x$. Por eso definimos e^z como $\exp z$. Vale $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$. En efecto, observemos que $\frac{de^z}{dz} = e^z$. Luego $0 = \frac{d}{dz}(e^z.e^{a-z})$ implica $e^z.e^{a-z} = A =$ constante. Como $e^0 = 1$, $A = e^a$. Es decir, $e^z.e^{a-z} = e^a$. Haciendo $z_1 = a - z$, resulta $e^z.e^{z_1} = e^{z+z_1}$, qed.

En particular, $e^z.e^{-z} = e^0 = 1$, y en consecuencia $e^z \neq 0$ para todo z.

ii) FUNCIONES TRIGONOMETRICAS: seno y coseno. Definimos

$$\text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{26}$$

que coinciden con sen x y cos x para x real. Ambas series tienen radio de convergencia infinito y como pueden derivarse término a término obtenemos

$$(\text{sen } z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\text{sen } z.$$

Es fácil verificar que

(27) $$\text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Sumando tenemos: $e^{iz} = \cos z + i \text{ sen } z$. Luego, $e^{-iz} = \cos(-z) + i \text{ sen }(-z) = \cos z - i \text{ sen } z$ y multiplicando por e^{iz}: $1 = \cos^2 z + \text{sen}^2 z$. Si $z = x + iy$:

(28) $$e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos y + i \text{ sen } y).$$

De (27) se deducen las siguientes fórmulas ya conocidas en el caso de variables reales:

$$\text{sen }(z_1 + z_2) = \text{sen } z_1.\cos z_2 + \cos z_1.\text{sen } z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1.\cos z_2 - \text{sen } z_1.\text{sen } z_2.$$

iii) FUNCIONES HIPERBOLICAS, seno y coseno hiperbólico:

(29) $$\text{sh } z = (e^z - e^{-z})/2, \qquad \text{ch } z = (e^z + e^{-z})/2.$$

Se verifican fácilmente las siguientes relaciones:

$\text{sh}(iz) = i \text{ sen } z$ $\qquad \text{ch}(iz) = \cos z$

$-i \text{ sen } iz = \text{sh } z, \qquad \cos iz = \text{ch } z, \qquad \text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1.$

$\text{sen}(iz) = i \text{ sh } z$

iv) CEROS DE SEN z Y COS z. Supongamos que $z = x + iy$, $\text{sen } z = \text{sen }(x + iy) = \text{sen } x \cos iy + \text{sen } iy \cos x = \text{sen } x.\text{ch } y + i \cos x.\text{ sh } y = 0$. Como $\text{ch } y \geq 1$, $\text{sen } x = 0$ y en consecuencia $x = n\pi$. Entonces $\text{sh } y = 0$, o sea, $y = 0$.
Conclusión: los ceros de sen z son reales e iguales a $n\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$.
Sea $\cos z = 0$. Entonces

$$0 = \cos x.\cos iy - \text{sen } x.\text{ sen } iy = \cos x.\text{ ch } y - i \text{ sen } x.\text{sh } y,$$

y de aquí resulta que los ceros de cos z son reales e iguales a $(n + \frac{1}{2})\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

v) PERIODICIDAD DE e^z. Diremos que $p \in C$ es un período para la función entera $F(z)$ si para todo z vale $F(z+p) = F(z)$. Obviamente si p es un período, np, $n \in Z$, también lo es. Si $e^{z+p} = e^z = e^z.e^p$ entonces $e^p = 1$. Sea $p = \alpha + i\beta$.

Luego, $e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) = 1$. Necesariamente $|e^{\alpha}| = 1 = e^{\alpha}$, o sea, $\alpha = 0$. Entonces $\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta = 1$ que se satisface si y sólo si $\beta = 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Conclusión: los períodos de e^z son los múltiplos enteros de $2\pi i$.

vi) LA FUNCION LOGARITMO. Se define $\log z$ para $z \neq 0$ como el número w tal que $e^w = z$. Sea $w = u + iv$. Entonces $e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) = |z|(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$. Para fijar ϕ supondremos al plano complejo "cortado" en $(-\infty, 0]$, o sea $-\pi < \phi \leq \pi$. Se tiene entonces: $\phi = \operatorname{Arg} z$ y

$$e^u = |z|, \qquad v = \operatorname{Arg} z + 2n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

O sea, hay infinitas soluciones de $e^w = z$, y son

(30) $$w = \log z = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2n\pi).$$

Uno de estos valores $n=0$ será designado con $\operatorname{Log} z$, y se denominará **valor principal del logaritmo del** z:

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Cuando z recorre $C\setminus\{0\}$, $\operatorname{Log} z$ recorre la franja $\{w: -\pi < y \leq \pi\}$. En $C\setminus(-\infty, 0]$ quedan definidas infintas ramas continuas de $\log z$ cada una asociada a exactamente un valor entero n (cf. (30)). Cada una de ellas puede derivarse en z:

$$\frac{d(\log z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta w \to 0} 1/\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w}.$$

Conclusión:

(31) $$\frac{d(\log z)}{dz} = \frac{1}{z}.$$

La elección del semieje negativo para cortar el plano C es arbitraria. Por eso, al considerar puntos z en ese semieje podemos suponer el corte efectuado según otro semieje, vg. $[0, \infty)$. Como las ramas son localmente continuas no se introducen complicaciones mayores, y por ejemplo, el cálculo de $(\log z)'$ precedente sigue siendo correcto para $z \in (-\infty, 0]$.

EJERCICIO. Demostrar que los únicos períodos de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son los múltiplos enteros de 2π.

Ocasionalmente escribiremos ln z o lg z en lugar de log z.

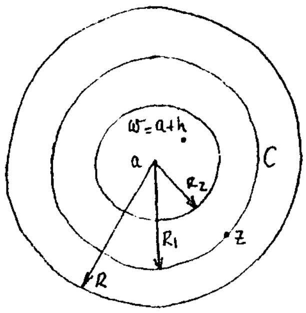
10. DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS DE UNA FUNCION HOLOMORFA.

TEOREMA 8 (Taylor). *Sea* $f(w)$ *holomorfa en* $|w - a| < R$. *Entonces* $f(w)$ *es desarrollable en serie de potencias* $\sum_0^\infty b_n(w - a)^n$ *con* $b_n = f^{(n)}(a)/n!$ *y radio de convergencia* $\geq R$.

DEMOSTRACION. Recurriendo a la conocida fórmula

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x}, \quad |x| < 1, \tag{32}$$

obtenemos (ver figura 4):



4.

$$f(w) = f(a + h) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - a - h}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - a)(1 - \frac{h}{z - a})}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\{\frac{1}{z - a} + \frac{h}{(z - a)^2} + \frac{h^2}{(z - a)^3} + \ldots + \frac{h^n}{(z - a)^{n+1}} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\}\, dz =$$

$$= f(a) + \sum_{r=1}^{n} f^{(r)}(a)\,\frac{h^r}{r!} + A_n.$$

Si $\varepsilon = R_1 - R_2 > 0$,

$$|A_n| \leq \frac{|h|^{n+1}}{2\pi}\,\frac{\sup_C |f(z)|}{R_1^{n+1}\cdot\varepsilon}\, 2\pi R_1 = \frac{MR_1}{\varepsilon}\left(\frac{|h|}{R_1}\right)^{n+1} \leq K.\left|\frac{R_2}{R_1}\right|^{n+1} \to 0$$

para $n \to \infty$. Luego, $\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}}{j!}(w - a)^j \rightrightarrows f(w)$ en $\{|w - a| < R\}$. La serie también converge absolutamente en ese disco (cf. el siguiente teorema 10) y por tanto

su radio de convergencia es por lo menos R,QED.
Usando (31) y el teorema 8 se obtiene el desarrollo de $f(z) = \mathrm{Log}\,(1 + z)$ alrededor de $z = 0$:

$$\mathrm{Log}\,(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \qquad R = 1.$$

De aquí se deduce fácilmente que

$$(1 + \frac{z}{n})^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^z, \qquad n \in N.$$

DEFINICION 3. *Sea* f *holomorfa en* a. a *es un* ***cero de orden*** p *de* f *si*
$f(z) = \sum_{m=p}^{\infty} a_m(z - a)^m$, $a_p \neq 0$, $p \geqq 1$.

Esta definición es inequívoca pues existe el desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = a$ (teorema de Taylor) y este desarrollo es único (corolario al teorema 6).

TEOREMA 9. *Sea* $f(z)$ *holomorfa en* $z = a$ *con* $f(a) = 0$. *Entonces, o bien* f *es idénticamente nula en un entorno de* a, *o bien existe un entorno de* a *donde* $f(z)$ *no se anula si* $z \neq a$.

DEMOSTRACION. Si $f \not\equiv 0$ en un entorno circular de a entonces allí es de la forma
$f(z) = (z - a)^p \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z - a)^m = (z - a)^p \phi(z)$ con $a_0 \neq 0$. Pero
$|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(z - a)^j| \leqq |a_0|/2$ si $|z - a| < \varepsilon$ y ε es bastante pequeño, pues si en una serie de potencias se omite un número finito de términos su radio de convergencia no cambia, y por tanto $\sum_1^{\infty} a_j(z - a)^j$ define una función continua y nula en a. Luego, $\phi(z) \neq 0$ en un entorno de a, qed..
La **fórmula de Leibnitz** de la derivada de un producto de funciones holomorfas en un punto z tiene la misma forma que en el caso real

$$\frac{d^n(fg)}{dz^n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{d^r f}{dz^r} \frac{d^{n-r} g}{dz^{n-r}} \tag{34}$$

y se demuestra por inducción recordando que $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$. Para calcular la serie de Taylor alrededor de $z = 0$ de $f.g$ debemos estimar $(fg)^{(n)}/n!$ que por (34) es igual a

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(r)}}{r!} \cdot \frac{g^{(n-r)}}{(n-r)!} \,.$$

O sea, si $f = \sum \alpha_n z^n$ y $g = \sum \beta_n z^n$ con radios de convergencia R_α y R_β respectivamente

$$(35) \qquad (f.g)(z) = \sum_{0}^{\infty} \left(\sum_{0}^{n} \alpha_i \beta_{n-i}\right) z^n,$$

en el entorno circular de $z = 0$ de radio $\inf (R_\alpha, R_\beta)$.

(35) puede demostrarse también usando el siguiente **teorema de Cauchy** sobre el producto de series:

Sean $\sum_{1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{1}^{\infty} b_n$ series numéricas absolutamente convergentes. Entonces

$\sum_{1}^{\infty} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + a_1 b_n)$ es absolutamente convergente y vale

$$(36) \qquad \sum_{1}^{\infty} (a_n b_1 + \ldots + a_1 b_n) = \sum_{1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{1}^{\infty} b_n.$$

Más aún, $\sum_{i,j} a_i b_j$ es absolutamente convergente y a (36).

($\sum a_{mn}$ se dice convergente a S si para todo $\varepsilon > 0$ existe $M(\varepsilon)$ tal que si $p,q \geq M$ entonces $\left| \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=0}^{q} a_{mn} - S \right| < \varepsilon$. Lo que el teorema afirma es que $\sum a_i b_j$ se puede ordenar de cualquier forma y la serie así obtenida, que es absolutamente convergente, converge a (36)).

En el teorema que sigue reunimos algunos resultados sobre series de potencias que ayudan a comprender mejor su comportamiento.

TEOREMA 10. *i) Si* $\sum a_n z^n$ *converge en* $z = z_0 \neq 0$ *entonces converge absolutamente en* $B_{|z_0|}(0)$. *Además* $\sum a_n z^n \xrightarrow[z \to 0]{} a_0$.

ii) Si $f(z)$ *es holomorfa en un abierto* A *entonces* f *es desarrollable en serie potencias alrededor de* $z_1 \in A$ *en el círculo de mayor diámetro con centro* z_1 *y contenido en* A.

iii) Sean $\sum \alpha_n z^n$ *y* $\sum \beta_n z^n$ *series de potencias tales que* $|\beta_n| \geq |\alpha_n|$ *desde un momento en adelante. Entonces* $R_\alpha \geq R_\beta$.

DEMOSTRACION. i) Sea $|z| < |z_0|$. Entonces, si $|z/z_0| = q$,

$$\sum |a_n z^n| = \sum |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq \sum |a_n z_0^n \cdot q^n|.$$

Como $a_n z_0^n \to 0$, existe M tal que $|a_n z_0^n| \leq M$ para todo n, y en consecuencia la serie $\sum a_n z^n$ está dominada por $M \sum q^n . < \infty$

La serie define en $B_{|z_0|}(0)$ una función holomorfa $f(z)$. $f(0) = a_0$ y como $f(z) \to f(0)$, $\sum a_n z^n \xrightarrow[z \to 0]{} a_0$.

ii) Sigue ~~de la demostración~~ del T.8.

iii) Basta recordar que $R_\beta^{-1} = \overline{\lim} \; |\beta_n|^{1/n}$, QED.

11. LA FUNCION z^α. Sea $z \neq 0$. Si p es un entero positivo:

$$z^p = z \overset{p}{\cdots} z = e^{p\text{Log } z} = e^{p \log z},$$

relación válida aún para p = 0, o p entero negativo. Si p y q son enteros positivos:

$$(37) \qquad w := e^{(p/q)\log z} = e^{\frac{p}{q}(\text{Log } |z| + i\text{Arg } z + 2n\pi i)},$$

es solución de $w^q = z^p$. Esta solución es q-valuada si p y q son **primos entre sí:**

$$w = (z^{p/q}).e^{2\pi i k/q}; \quad k = 0, 1, \dots, q-1, \quad (z^{p/q}) = e^{(p/q)\text{Log } z},$$

En efecto, al variar k en Z, $e^{2\pi ik/q}$ toma sólo q valores distintos dos a dos. Estos deben ser todos los valores de $e^{2\pi inp/q}$ en (37), pues si $n - m = \dot{q}$, $e^{2\pi inp/q} = e^{2\pi imp/q}$, y si para $r \in Z$, $p.n/q = p.m/q + r$, y $n - m \neq \dot{q}$, entonces $(n - m)p = qr$ y p divide a r: $r = ps$. Luego, $n - m = q.s$, contradicción.
Si p y q no son primos entre sí, (37) toma q' valores -dos a dos distintos- al recorrer n los enteros,donde $p'/q' = p/q$, p',q' primos entre sí. Si p/q no es positivo, escribimos $p/q = -|p|/|q|$. w recorre ahora los recíprocos de $e^{(|p|/|q|)\log z}$.

DEFINICION 4. *Sea* α *real:* $z^\alpha := e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\mathrm{Log}\, z + 2\pi in)}$.

Si Arg $z \in (-\pi, \pi]$, $e^{\alpha \mathrm{Log}\, z}$ define una función holomorfa en el plano cortado en $(-\infty, 0]$. Esto ocurre para cada valor de n y si α no es racional hay infinitas ramas -dos a dos distintas- de z^α, cada una correspondiendo a una rama del logaritmo. Vale, si $\alpha, \beta \in R$, y con una misma rama del logaritmo: $z^\alpha . z^\beta = z^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\log z}$. Por otra parte

$$(38) \qquad \frac{dz^\alpha}{dz} = \frac{de^{\alpha w}}{dw}(\log z). \frac{d\log z}{dz} = \frac{\alpha e^{\alpha \log z}}{z} = \alpha z^{\alpha-1},$$

y con la misma rama del log.
Si α fuera complejo no real se utiliza la misma definición 4 para definir z^α y se obtiene también (38). Los casos que más no interesarán serán aquellos donde α es real. Cuando α es complejo, las determinaciones de z^α cambian módulo. Por ejemplo, $z^i = e^{i \mathrm{Log}\, z - 2n\pi}$ toma infinitos valores de módulos distintos dos a dos, mientras que en las potencias **reales** todas las determinaciones poseen el **mismo módulo.**

En el caso de α real, $(1 + z)^\alpha$ tiene un valor principal desarrollable en serie de potencias (verificarlo):

$$(39) \qquad (1 + z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} z^n, \qquad R = 1.$$

*12. LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN EN COORDENADAS POLARES. Sea $F(Z) = U(X,Y) + iV(X,Y)$ holomorfa en $Z = 0$ y $z = e^{i\theta}Z$. Si $f(z) = F(Z)$ entonces $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $z = 0$ y $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Por otra parte, $U_X = V_Y$, $U_Y = -V_X$. Es decir, estas relaciones entre derivadas de las partes real e imaginaria se verifican en cada sistema de ejes ortogonales equi-orientados. Sea $w = Z - a$. De $F(Z) = F(w+a) =: G(w)$ se deduce que lo dicho para $z = 0$ se aplica a cualquier otro punto. Es fácil ver ahora que en coordenadas polares las condiciones de Cauchy-Riemann se expresan de la siguiente manera $(r > 0)$:

(40) $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\ .$$

*13. LA FUNCION arc tg z. Sea $|Rw| < \pi/2$:

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{iw}} = \frac{1}{i}\frac{1 - e^{-2iw}}{1 + e^{-2iw}}\ .$$

Entonces

(41) $$iz = \frac{1 - e^{-2iw}}{1 + e^{-2iw}}\ ,\ e^{2iw} = \zeta = \frac{1 + iz}{1 - iz}\ .$$

La relación entre ζ y z establece una correspondencia biunívoca entre $C(\zeta)\setminus\{-1\}$ y $C(z)\setminus\{-i\}$. Como la exponencial tiene período $2\pi i$ y el único valor que no toma es el cero resulta que la región $|Rw| < \pi/2$ está en correspondencia con el plano ζ cortado por el eje real en $(-\infty,0]$. Esta región se corresponde con la región del plano z obtenida eliminando de C a $\{z\colon z = he^{i\pi/2},$ $|h| \geq 1$, h real$\}$. Se tiene entonces para $|Rew| < \pi/2$:

(42) $$w = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{1 + iz}{1 - iz}\ ,\ z \neq \text{imaginario puro de módulo} \geq 1.$$

Si $z = x$ real entonces $w = y$ es real y recorre $(-\pi/2,\pi/2)$ cuando x varía entre $-\infty$ y $+\infty$. Además $\operatorname{Arc\,tg} x = y = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{1 + ix}{1 - ix}$.

14. DETERMINACION DE UNA FUNCION HOLOMORFA POR UNO DE SUS ELEMENTOS ANALITICOS.
Dar un **elemento analítico** de $f(z)$, (f,a), es dar un entorno circular de a donde la función f es holomorfa. Los elementos analíticos (f,a) y (g,b) se dirán iguales si $a = b$ y $f(z) = g(z)$ en un entorno circular de a.
Queremos probar que dar un elemento de una función que es holomorfa en un

abierto conexo equivale, teóricamente, a conocer toda la función en ese abierto. Sea $f(z)$ holomorfa en el dominio G lo mismo que $g(z)$. Vale entonces (cf. T.9) el

TEOREMA 11. *Si* $f = g$ *en un conjunto infinito de puntos con un punto de acumulación* a *en* G *entonces* $f(z) = g(z)$ *para todo* $z \in G$.

La función $F(z) = f(z) - g(z)$, por el T.9, debe ser idénticamente cero en un entorno de a. Es decir, $(f,a) = (g,a)$. Para mostrar que f coincide con g en A basta entonces ver que vale el

TEOREMA 12. *Sea* f *holomorfa en el dominio* G. *Si* $f \equiv 0$ *en un entorno de* $a \in G$ *entonces* $f \equiv 0$. *O sea,* $(f,a) = (0,a) \Rightarrow f = 0$.

DEMOSTRACION. La que presentamos aquí recurre a un procedimiento propio de la **prolongación**, o **continuación analítica**, que discutiremos más adelante. Sea $b \in G$ y P un arco poligonal contenido en G que parte de a y llega a ese punto. Supongamos a P parametrizado con el parámetro d longitud de arco: $0 \leqq d \leqq L = l(P)$. La distancia de un punto c a un cerrado X,

$$\text{dist}\,(c,X) := \inf\,\{|c - x| : x \in X\},$$

es una función continua de c. En efecto, por ser cerrado, dado c_1 existe $x_1 \in X$ tal que $|c_1 - x_1| = d(c_1,x_1) = d(c_1,X)$. Entonces $d(c_2,X) \leqq d(c_2,x_1) \leqq$ $\leqq d(c_2,c_1) + d(c_1,x_1) \leqq |c_2 - c_1| + d(c_1,X)$, y por tanto $|d(c_2,X) - d(c_1,X)| \leqq$ $\leqq |c_2 - c_1|$. Luego, si z varía sobre un compacto K disjunto a X queda definida sobre K una función continua y positiva: $d(z,X)$. Esta toma su mínimo en K: $d(z_0,X) > 0$. Aplicado a $K = P$ y a $X = \mathbb{C}\setminus G$, este resultado prueba que existe un número $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset G$ cualquiera sea $p \in P$. Sea $p_0 = a$ y p_0' el primer punto de P sobre el contorno de $B_r(p_0)$, si es que hay alguno. Sea p_1 un punto del arco $\widehat{p_0,p_0'}$ en $P \cap B_r(p_0)$ tal que su parámetro $d(p_1) \geqq d(p_0') - r/2$. (Por ser P un arco poligonal regular tenemos que si $p,q \in P$, $p \neq q$ si y sólo si $d(p) \neq d(q)$). Sea p_1' el primer punto de P con $d(p_1') \geqq d(p_1)$ sobre el contorno de $B_r(p_1)$. Sea p_2 un punto del subarco $\widehat{p_1,p_1'}$ con $d(p_1') > d(p_2) \geqq dp_1') - r/2$, etc.. Queda definida así una sucesión de puntos $a = p_0, p_1, \ldots, p_n = b$ tal que $p_{i+1} \in B_r(p_i)$. Por hipótesis el elemento (f,a) es nulo. Luego $f(z)$ se anula en $B_r(p_0)$ pues $f(a) = f'(a) = \ldots = 0$. El desarrollo de f alrededor de p_1 tiene radio de convergencia $\geqq r$ y de lo dicho se desprende que $f(z) \equiv 0$ en

$B_r(p_1)$. Así siguiendo llegamos a que $f(z)$ es nula en un entorno de b. Como todo punto de G es alcanzable con un arco poligonal que parte de a, tenemos $f \equiv 0$ en G, QED.

APLICACION. La función e^z es la única función holomorfa en C que coincide con e^x para $z = x \in R$. Lo mismo vale sen z y cos z, sh z y ch z. En efecto, esto sigue inmediatamente del teorema 11.

15. FUNCIONES ARMONICAS. i) Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfa en D dominio simplemente conexo. Sabemos que en D: $\Delta u = \Delta v = 0$. Es decir, u y v son funciones armónicas (*). Supongamos que $f' \neq 0$. Las curvas de nivel de u, $\{u = \text{cte.}\}$, son ortogonales a las curvas de nivel de v. En efecto, como $f' \neq 0$, $|u_y| + |v_y| \neq 0$. Supongamos que en $z_0 = a + ib$, $u_y(a,b) \neq 0$. Entonces la curva $u(x,y) = u(a,b)$ se puede describir en un entorno de z_0 como $y = y(x)$ y $\frac{dy}{dx} = - u_x/u_y$. Por otra parte $v_x \neq 0$ y la curva $v(x,y) = v(a,b)$ puede describirse por $x = x(y)$ con $\frac{dx}{dy} = - v_y/v_x = u_x/u_y$. Luego, las curvas de nivel son ortogonales en z_0.

ii) Dada u armónica en D existe v armónica tal que u + iv es holomorfa en D. Diremos que v es una **armónica conjugada** de u. Para probar su existencia observemos que $- u_y\, dx + u_x\, dy$ es una diferencial exacta (pues $\Delta u = 0$). Luego

$$v(x,y) := \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} - u_y\, dx + u_x\, dy \tag{43}$$

define una función tal que $v_x = - u_y$, $v_y = u_x$. Entonces u + iv es holomorfa pues v es diferenciable y se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. (43) determina la función potencial v salvo por un sumando constante. Las funciones de la forma v + c, $c \in C$, son todas las soluciones posibles de nuestro problema, pues si la parte real (imaginaria) de una función holomorfa es constante también lo es la parte imaginaria (real) (demostrarlo). En particular, una función holomorfa no puede ser real o imaginaria pura, salvo que sea una cons-

(*) Una función se dirá armónica en D si es dos veces continuamente diferenciable y en ella se anula idénticamente el operador de Laplace Δ.

tante.

iii) TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES ARMONICAS:

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\phi})\, d\phi. \tag{44}$$

Sea v una armónica conjugada a u. Entonces, si $f = u + iv$ y $C = \{|z - z_0| = R\} \subset D$:

$$f(z_0) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{u(z_0 + Re^{i\phi}) + iv(z_0 + Re^{i\phi})}{Re^{i\phi}}\, Re^{i\phi} i\, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(z_0 + Re^{i\phi}) + iv(z_0 + Re^{i\phi})]\, d\phi, \qquad \text{QED.}$$

iv) PRINCIPIO DE MAXIMO: si u es armónica y alcanza su máximo en D entonces u es constante.

Análogamente, si u es armónica no constante no puede alcanzar en D su mínimo. Este último es el principio de mínimo y se deduce del de máximo considerando la función -u. Estos se pueden deducir del **principio del módulo máximo para funciones holomorfas:**

TEOREMA 13. *Sea* $f(z)$ *holomorfa en el dominio* D. *Entonces la función* $|f(z)|$ *no alcanza su máximo en* D *salvo en el caso que* f *sea constante.*

DEMOSTRACION. Sea $C = \{|z - a| = \delta\} \subset D$. Como $(f(z))^n$ es holomorfa para $n = 1, 2, \ldots$:

$$(f(b))^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(f(z))^n}{z - b}\, dz\ , \quad b \in B_\delta(a) \subset D. \tag{45}$$

Derivando respecto de b resulta:

$$n(f(b))^{n-1}.f'(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f^n(z)}{(z - b)^2}\, dz. \tag{46}$$

Sea M el máximo de $|f(z)|$ en C. Entonces $|f(a)| \leq M$. Si $M = 0$ entonces f es igual a cero en un entorno de a. Si $M > 0$ y $|f(z)|$ alcanza su máximo en $z = a$ entonces $|f(a)| = M$. De (46) sigue que $n|f'(a)|.|f(a)|^{n-1} \leq M^n/\delta$. Luego $|f'(a)| \leq M/n\delta$ para todo n, y $f'(a) = 0$. Derivando (46) obtenemos en forma análoga $f^{(j)}(a) = 0$ si $j > 1$. En todos los casos resulta f constante en un entorno de a. La tesis sigue ahora del T.11, QED.

DEMOSTRACION DEL PRINCIPIO DE MAXIMO. Sea f(z) holomorfa en D tal que $Rf = u$. Entonces $e^{f(z)}$ es holomorfa en D y $e^{u(x,y)} = |e^{f(z)}|$. Si u alcanza su máximo en D entonces también lo hace el módulo de la función $e^{f(z)}$. Luego, esta función, y por tanto f(z), deben ser constantes. En consecuencia, u es constante, QED.

v) LAS FUNCIONES ARMONICAS SON INDEFINIDAMENTE DIFERENCIABLES. Dada una función real h(x,y) en un entorno U de (x_0,y_0) el teorema de Hefter y Young asegura que si h_x y h_y existen en un entorno de (x_0,y_0) y son diferenciables en (x_0,y_0) entonces $h_{xy}(x_0,y_0) = h_{yx}(x_0,y_0)$. Si u es armónica en U entonces u_x y u_y son diferenciables. En efecto, para v una armónica conjugada de u se tiene $u_x = R(f')$ si $f = u + iv$. Además $u_y = - v_x = - I(f')$. Como f' también es holomorfa, u_x y u_y son diferenciables y por tanto $u_{xy} = u_{yx}$. Por otra parte, $f'' = u_{xx} + iv_{xx} = -i(-if'_y)'_y = -(u_{yy} + iv_{yy})$. Repitiendo el proceso vemos que u(x,y) posee derivadas de cualquier orden. Más fácilmente se obtiene este resultando derivando la siguiente expresión para u.

vi) FORMULA DE POISSON. Sea u armónica en un abierto que contiene el disco de radio R con centro $z = 0$. Si $z_1 \in B_R(0)$ vale:

$$(47) \qquad u(z_1) = \frac{R^2 - |z_1|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\theta})}{|z_1 - Re^{i\theta}|^2} d\theta.$$

La validez de esta fórmula será probada más adelante. Si $z_1 = \rho e^{i\phi} = x + iy$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, (47) toma la forma

$$(48) \quad u(x,y) = u(\rho e^{i\phi}) = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\theta})}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \phi)} d\theta, \ \rho < R.$$

Obsérvese que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es indefinidamente diferenciable si $|x| + |y| > 0$, y por tanto lo mismo ocurre con u(x,y). Como la traslación de una función armónica es armónica, aplicando lo dicho a $U(x,y) = u(x+h,y+k)$ resulta que u es indefinidamente diferenciable en todo punto de su dominio de definición.

16. EL NUCLEO DE POISSON, Y SU CONJUGADO, EN EL CIRCULO UNITARIO. Por un **polinomio trigonométrico** de orden n entendemos una función de la forma $T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx)$, a_i, $b_i \in R$. Si $|a_n| + |b_n| \neq 0$ entonces T es estrictamente de orden n. Este polinomio trigonométrico puede interpretarse como la parte real de un polinomio ordinario evaluado en $z = e^{ix}$:

(49) $$T(x) = R(P(z)),\ P(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j - ib_j)z^j, \qquad z = e^{ix}.$$

Por una **serie trigonométrica** entendemos una expresión a coeficientes reales de la forma:

(50) $$S: \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \operatorname{sen} jx), \quad 0 < x < 2\pi \ (o\ -\pi < x < \pi),$$

de la que no se exige ningún tipo de convergencia. S es, formalmente, la parte real de

(51) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j - ib_j)z^j, \qquad z = e^{ix}.$$

A la parte imaginaria de (51) se la llama **serie conjugada** a S:

(52) $$\tilde{S}: \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \operatorname{sen} jx - b_j \cos jx).$$

De $(1 - z)^{-1} = \sum_{0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$, se deduce que

(53) $$\frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2} + z + z^2 + \dots, \qquad z = re^{ix},\ r < 1.$$

A las partes real e imaginaria de (53) se las llama **núcleo de Poisson** y **núcleo** conjugado de Poisson, respectivamente,

$$P(r,x) = R\left(\frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2}\,R\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2}\right) = \tag{54}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} r^j \cos jx,$$

$$Q(r,x) = I\left(\frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{r \operatorname{sen} x}{1-2r\cos x + r^2} = \sum_{j=1}^{\infty} r^j \operatorname{sen} jx. \tag{55}$$

En este caso ambas series son convergentes, y la última es la conjugada de la precedente.

17. LA TRANSFORMACION CONFORME. Una aplicación **conforme** de un dominio $D \subset C$ es una transformación inyectiva (uno a uno) definida por una función f holomorfa en D. De las consideraciones que siguen se deduce que $f'(z) \neq 0$ para todo z y que f(D) es un dominio en C. Y de estas propiedades que $f^{-1}: f(D) \to D$ es también una transformación conforme.

TEOREMA 14. *Sea* $w(z) \not\equiv 0$ *holomorfa en un entorno circular de* $z = 0$ *con* $w(0) = 0$. *Dado* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeño existe* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *tal que todo* w *perteneciente a un entorno reducido de* $w = 0$, $w \in B_\eta(0)\setminus\{0\} = B'_\eta(0)$, *es asumido por* $w(z)$ *en exactamente* m *puntos distintos de* $B_\varepsilon(0)$, *donde* $m \geq 1$ *es el orden del cero de* $w(z)$ *en el origen.*

Demostraremos este teorema más adelante (pág 67). La función $w(z)$ es desarrollable en serie de potencias y de la forma:

$$w(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots, \qquad c_m \neq 0,\ m \geq 1. \tag{56}$$

(Luego, la inyectividad de f(z) implica $m = 1$, $c_1 = f'(0) \neq 0$.)

Además $w(B_\varepsilon(0)) \supset B_\eta(0)$. (De aquí sigue que la transformación f es abierta, es decir, lleva abiertos en abiertos).

COROLARIO. *Si* $w(z)$ *es holomorfa en* $B_\varepsilon(z_0)$ *y no es constante entonces existe*

$B_\eta(w(z_0))$, $\eta = \eta(\varepsilon)$, *tal que* $w(B_\varepsilon) \supset B_\eta(w(z_0))$. *Y si* $w'(z_0) \neq 0$ *entonces hay un abierto* $G \subset B$, $z_0 \in G$, *tal que* G *es homeomorfo a* $B_{\eta'}(w(z_0))$, *para cierto* $\eta' \leqq \eta$.

DEMOSTRACION. La primera proposición fue demostrada en el teorema 1. Si $w'(z_0) \neq 0$, w asume en B_ε cada valor de B_η una sola vez. Podemos suponer que $w' \neq 0$ en $B_{\varepsilon'}$, $\varepsilon' \leqq \varepsilon$. Si necesariamente $\varepsilon' < \varepsilon$ entonces es posible que en lugar de B_η debamos conformarnos con cierto $B_{\eta'}$, $\eta' < \eta$. En esta situación $w^{-1}(z)$ es una función holomorfa en $B_{\eta'}(w(z_0))$ con derivada no nula y $w^{-1}(B_{\eta'})$ es un abierto G contenido en $B_{\varepsilon'}(z_0)$. Como w y w^{-1} son continuas, w define un homeomorfismo entre G y $B_{\eta'}$, QED.

Las aplicaciones holomorfas con derivada no nula llevan curvas regulares en curvas regulares (demostrarlo). En consecuencia la imagen de un dominio por una transformación tal es siempre un dominio. De hecho lo mismo ocurre para toda aplicación definida por una función holomorfa F no constante pues los ceros de F' son aislados.

CAPITULO 3.

Propiedades de la representación conforme. La transformación lineal. La transformación bilineal. El teorema de Riemann. La fórmula de Poisson. Campos armónicos planos.

1. PROPIEDADES DE LA REPRESENTACION CONFORME. Una transformación conforme de un dominio es una transformación invertible definida por una función holomorfa con derivada no nula. Ya vimos en el T. 14 del Cap. 2 que es superfluo pedir la no anulación de la derivada. Ese resultado básico será demostrado en el §6 del Cap. 4 y su lectura es independiente del material contenido en el presente capítulo.

El teorema fundamental de la representación conforme es debido a B. Riemann y una versión débil del mismo la da el siguiente

TEOREMA 1. *Sean* G_1, $G_2 \subset C$, *dos dominios acotados simplemente conexos y* a_i *un punto de* G_i, $i = 1, 2$. *Existe una transformación conforme* f *que lleva* G_1 *sobre* G_2 *y* a_1 *en* a_2.

(En realidad hay infinitas transformaciones con esas propiedades). Sabemos que la imagen conforme de un dominio es un dominio. Veamos que el dominio G_2 del teorema necesariamente es simplemente conexo si G_1 lo es. Si G_2 no fuera s.c. existiría una curva de Jordan regular J_2 con interior D_2 y un punto $a \in D_2$ tal que $a \notin G_2 \supset J_2$. Ella es imagen de una curva $J_1 \subset G_1$ con interior D_1 que por ser G_1 s.c. verifica $D_1 \subset G_1$.

La idea del argumento sigue así: se deforma continuamente J_1, manteniéndole dentro de G_1 y de manera que converja a un punto $z_1 \in G_1$. Su imagen $f(J_1)$ se deformará de tal manera que convergerá a $f(z_1)$. Pero en un momento la deformación pasará por el punto a, el que deberá ser entonces imagen de un punto de G_1, y por tanto, $a \in G_2$, contradiccón.

El adjetivo "conforme" se refiere a una propiedad de la transformación que se enuncia brevemente diciendo que respeta ángulos. Sea $C = a(t)$ un arco regular para $0 \leq t \leq 1$, y sea $t_0 \in (0,1)$, $a(t_0) = z_1$. $f(a(t)) = X(t) + iY(t)$ define un arco regular en G_2 si $C \subset G_1$. En este caso tenemos $z_2 := f(z_1)$ y

(1) $$\left.\frac{df(a(t))}{dt}\right|_{t=t_o} = f'(z_1).a'(t_o) = f'(z_1).[\dot{x}(t_o) + i\dot{y}(t_o)].$$

O sea, $\dot{X}(t_o) + i\dot{Y}(t_o) = re^{i\theta}[\dot{x}(t_o) + i\dot{y}(t_o)]$, $f'(z_1) = r.e^{i\theta} \neq 0$. En consecuencia, el vector tangente en la imagen cambia en módulo en un factor fijo que depende del punto y rota un ángulo θ. Luego, si dos curvas forman un ángulo en z_1 su imágenes forman el mismo ángulo en z_2. Además, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = |\dot{x} + i\dot{y}|$, si s es el parámetro longitud de arco para C. Si σ es el correspondiente parámetro longitud para f(C) tenemos

(2) $$\frac{d\sigma}{dt} = |\dot{X} + i\dot{Y}| = r|\dot{x} + i\dot{y}| = |f'(z_1)|.\frac{ds}{dt}.$$

O sea, un arco infinitesimal de longitud ds tiene por imagen un arco de longitud $d\sigma = |f'(z_1)|.ds$. Y un cuadrado de lados dx, dy, tiene entonces por imagen una región de área $|f'(z_1)|^2$ dx dy (salvo por un infinitésimo de orden superior). Es decir, el área varía localmente por un factor $|f'(z_1)|^2$, el **coeficiente areolar.** De otra forma:

(3) $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(z_1) = \begin{vmatrix} u_x(x_1,y_1) & u_y(x_1,y_1) \\ v_x(x_1,y_1) & v_y(x_1,y_1) \end{vmatrix} =$$

$$= u_x^2(x_1,y_1) + v_x^2(x_1,y_1) = |f'(z_1)|^2 > 0;$$

por tanto,

$$\iint_{f(D)} h(u,v)\,du\,dv = \iint_D h(u(x,y),v(x,y)) \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dx\,dy$$

si h es no negativa y, por ejemplo, continua en f(D).

2. LA TRANSFORMACION LINEAL $\zeta = az + b$, $a \neq 0$. De

$$\arg(\zeta_2 - \zeta_1) = \text{Arg } a + \text{Arg }(z_2 - z_1)$$

se deduce que transforma rectas en rectas, y de

$$\left|\frac{\zeta - b}{a} - c\right| = |z - c| = r$$

que lleva circunferencias en circunferencias. Una transformación lineal $z \to \zeta$ se obtiene componiendo una homotecia $z \to w = |a|z$, una rotación w $w \to \eta = e^{i\operatorname{Arg} a}w$ y una traslación $\eta \to \zeta = \eta + b$. Estas tres son las transformaciones lineales básicas.

3. LA INVERSION $\zeta = 1/z$. Sea p complejo y α, β reales con $\alpha\beta < |p|^2$. Si $\alpha \neq 0$, $|z - p/\alpha|^2 = |p|^2/\alpha^2 - \beta/\alpha$, o

$$(4) \qquad \alpha|z|^2 - \bar{p}z - p\bar{z} + \beta = 0,$$

representa una circunferencia. Sea $\alpha = 0$, entonces $R\bar{p}z = \beta/2$ y para esos z, $\zeta = \bar{p}z$ recorre una recta perpendicular al eje real. Luego, $z = \zeta/\bar{p}$ recorre una recta en el plano z. Es decir,

$$(5) \qquad -\bar{p}z - p\bar{z} + \beta = 0$$

es la ecuación de una recta. Por otra parte, toda circunferencia y toda recta pueden representarse por (4) con $\alpha \neq 0$, o $\alpha = 0$, respectivamente.
Bajo la transformación $\zeta = 1/z$, (4) se transforma en

$$(6) \qquad \beta|\zeta|^2 - p\zeta - \bar{p}\,\bar{\zeta} + \alpha = 0,$$

o sea, la inversión transforma circunferencias en circunferencias si admitimos entre las circunferencias a las de radio infinito (rectas).
Sea C la circunferencia dada por (4). Sea $\alpha \neq 0$. Su centro es p/α y su radio $\sqrt{|p|^2/\alpha^2 - \beta/\alpha}$. Dos puntos son **inversos** respecto de C si cumplen la siguiente relación

$$(7) \qquad (z_1 - p/\alpha)\overline{(z_2 - p/\alpha)} = |p|^2/\alpha^2 - \beta/\alpha.$$

O sea, si y sólo si

$$(8)\qquad \begin{cases} |z_1 - p/\alpha|\cdot|z_2 - p/\alpha| = |p|^2/\alpha^2 - \beta/\alpha, \\ \arg\,(z_1 - \frac{p}{\alpha}) = \arg\,(z_2 - p/\alpha), \end{cases}$$

y si y sólo si

$$(9)\qquad \alpha\, z_1\overline{z_2} - \bar{p}z_1 - p\overline{z_2} + \beta = 0.$$

Sea $\beta \neq 0$; aplicando la inversión $\zeta = 1/z$ obtenemos

$$(10)\qquad \beta\, \zeta_1\overline{\zeta_2} - p\zeta_1 - \bar{p}\,\overline{\zeta_2} + \alpha = 0.$$

En otras palabras, ζ_1 es inverso de ζ_2 respecto de la circunferencia C', imagen de C por $\zeta = z^{-1}$. Si $\beta = 0$ entonces ζ_1 y ζ_2 son inversos respecto de una recta. En efecto, sea $\alpha = 0$ en (9): $-\bar{p}z_1 - p\overline{z_2} + \beta = 0$. Luego, si $-\bar{p}z - p\bar{z} + \beta = 0$,

$$(11)\qquad z - z_1 = \frac{-p}{\bar{p}}\,\overline{(z - z_2)}.$$

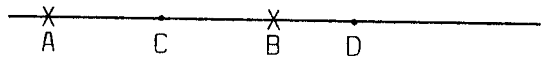
Entonces $|z - z_1| = |z - z_2|$ para todo $z \in C$, recta. Esto puede ocurrir solamente si z_1 y z_2 están ubicados sobre una perpendicular a C y equidistantes de C (que es la definición de inversión respecto de una recta). Veamos la recíproca. Sean z_1 y z_2 ubicados sobre una perpendicular $C^{\perp}$ a C y equidistantes de C. Luego de una traslación y una rotación reducimos el problema a C = eje real, $C^{\perp}$ = eje imaginario. La ecuación de $C^{\perp}$ es $\zeta + \bar{\zeta} = 0$ y la de C: $-\bar{i}\zeta - i\bar{\zeta} = 0$. Si $\zeta_k + \bar{\zeta}_k = 0$, $k = 1, 2$, y $\zeta_1 = \overline{\zeta_2}$ entonces $-\bar{i}\zeta_1 - i\overline{\zeta_2} = 0$. Rotando y trasladando para volver a la situación original vemos que $-\bar{p}z_1 - p\overline{z_2} + \beta = 0$ si $-\bar{p}z - p\bar{z} + \beta = 0$ es la ecuación de C.

TEOREMA 1. *a) La inversión transforma circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas y puntos inversos en puntos inversos.*
b) Las transformaciones lineales tienen la misma propiedad.

En efecto, cada transformación lineal básica lleva puntos inversos respecto de una circunferencia generalizada en puntos inversos respecto de la circunferencia imagen, y por tanto, lo mismo ocurre para su composición. Esto es, para toda transformación lineal.

NOTA: Dados sobre el eje real los puntos (números) A, B, C, D se dice que el par C, D separa armónicamente al par A, B si

$$\frac{A - C}{A - D} : \frac{B - C}{B - D} = -1,$$



Si $A = -B < 0$ entonces $C.D = B^2$. O sea, C es inverso de D respecto de la circunferencia de radio B. Si $A \to -\infty$ entonces en el límite C y D equidistan de B si separan armónicamente al par $-\infty$, B.

3. LA TRANSFORMACION BILINEAL O TRANSFORMACION DE MOEBIUS. Es de la forma $\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$. Si no es una transformación lineal entonces $c \neq 0$. En este caso la transformación puede reducirse a la composición de dos transformaciones lineales y una inversión:

$$z \to \zeta_1 = cz + d \to \zeta_2 = 1/\zeta_1 \to \zeta_3 = (b - \frac{ad}{c})\zeta_2 + \frac{a}{c}\ .$$

En consecuencia, las transformaciones bilineales transforman circunferencias (generalizadas) en circunferencias y puntos inversos respecto de una circunferencia en puntos inversos respecto de su imagen. Si $ad - bc = 0$, la transformación degenera en una aplicación constante, por eso hemos excluído ese caso. Las transformaciones bilineales (no degeneradas) forman **un grupo**. Sean $\zeta_1 = \frac{az + b}{cz + d}$, $\zeta = \frac{a'\zeta_1 + b'}{c'\zeta_1 + d'}$. Entonces $\zeta = (Az + B)/(Cz + D)$ y los coeficientes están relacionados entre sí como elementos de dos matrices con su producto:

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\ .$$

En particular tenemos $AD - BC \neq 0$. Para hallar la transformación inversa a $\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$ podemos suponer $ad - bc = 1$. Esto se obtiene dividiendo por $ad - bc$ los coeficientes de la transformación original. Sea entonces

$$(13) \qquad z = \frac{d\zeta - b}{-c\zeta + a}\ .$$

La matriz $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$. Luego, de (12) sigue que la matriz producto es la matriz identidad, y que $\zeta = z$.

NB. A las transformaciones bilineales también se las llama transformaciones **homográficas.**

*4. LAS TRANSFORMACIONES HOMOGRÁFICAS Y LA REPRESENTACION CONFORME. Enunciamos en este párrafo algunas propiedades de las aplicaciones conformes que no demostraremos por el momento. Del teorema de Liouville sobre funciones enteras se deduce inmediatamente que el plano C no puede transformarse conformemente sobre $B_1(0)$ (t. de Liouville). Lo mismo vale para el plano menos un punto $C\setminus\{z_0\}$ pues este conjunto no es simplemente conexo. Esto también puede deducirse del siguiente

TEOREMA 2. *Toda transformación conforme de C en C es una transformación lineal.*

5. ALGUNOS TRANSFORMACIONES HOMOGRAFICAS. La función $\zeta = \dfrac{az + b}{cz + d}$ depende de 3 parámetros. Podemos entonces esperar describir una transformación homográfica por sus valores en 3 puntos distintos:

(14)
$$\frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_3)}{(\zeta - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)} .$$

Se puede demostrar que esta es la única transformación homográfica que lleva z_i en ζ_i, $i = 1, 2, 3$. Como una circunferencia queda determinada por 3 puntos hay una transformación homográfica que la lleva en otra preasignada.
Tres resultados útiles:
a) La transformación bilineal

(15)
$$w = \frac{az + b}{\bar{a} + \bar{b}z}, \qquad |a| \neq |b|,$$

lleva $\{|z| = 1\}$ en $\{|w| = 1\}$. Si $|a| > |b|$ entonces $\{|z| \leq 1\} \to \{|w| \leq 1\}$, y recíprocamente. (Si $|a| < |b|$ entonces, y sólo entonces, $\{|z| \leq 1\} \to \{|w| \geq 1\}$.).
(15) es la forma general de la transformación homográfica que preserva la circunferencia unitaria.
b) La transformación homográfica más general que transforma $\{|z| = 1\}$ en $\{|w| = 1\}$ y lleva el punto c, $|c| \neq 1$, en el 0 es

(16) $$w(z) = e^{i\delta} \cdot \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}, \qquad \delta \in [0,2\pi).$$

c) La forma general de la transformación homográfica que lleva el semiplano $\{Iz > 0\}$ en $\{|w| < 1\}$ y $z = c$, $Ic \neq 0$, en $w = 0$ es

(17) $$w = e^{i\delta} \cdot \frac{z - c}{z - \bar{c}}, \ \delta \in [0,2\pi).$$

El lector puede completar por sí mismo los detalles de las demostraciones de a) - c) salvo, quizá, por una información contenida en el enunciado del siguiente teorema 3. Veamos, por ejemplo el caso b), y sin recurrir al caso a). Obviamente $|w(1)| = |w(-1)| = 1$. Además $|w(i)/(-i)| = 1$ por lo que también $|w(i)| = 1$, y la transformación (16) lleva la circunferencia unitaria del plano z en su homóloga del plano w. Por otra parte $w(c) = 0$ (y $|w(\infty)| = \frac{1}{|c|}$). Como $z \to w$ lleva dominios en dominios y en forma biunívoca: $w(B_1(0)) = B_1(0)$ o bien $w(B_1(0)) = \{w\colon |w| > 1\}$. Si $|c| < 1$ se presenta el primer caso, y si $|c| > 1$, el segundo. Si $z(t) = c + t$, $t > 0$, su imagen $\gamma(t) = w(z(t))$ tiene una tangente en $t = 0$ igual a $e^{i\delta}/(1 - |c|^2)$ que al variar δ en $[0,2\pi)$ recorre todas las direcciones posibles, qed.

d) La transformación

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z - \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

α, β, γ, δ reales, lleva el semiplano superior de C en sí mismo y cada transformación bilineal (normalizada) que lleva ese semiplano en sí mismo es de esta forma.

*6 EL TEOREMA DE RIEMANN.

TEOREMA 3. *Sea* G *un dominio simplemente conexo,* $G \subset C$, *tal que* $C \neq G$. *Entonces existe una transformación conforme definida por una función holomorfa* f *con dominio* G *tal que* $f(G) = B_1(0)$. *Más aún, existe una única* f *que satisface las siguientes condiciones adicionales: dados* $a \in G$, $\alpha \in B_1(0)$ *y* $\delta_i \in [0,2\pi)$, $i = 1, 2$, *entonces* $f(a) = \alpha$ *y la semirrecta de dirección* $e^{i\delta_1}$ *con vértice en* a *es llevada en un arco de curva cuya tangente en su origen* α *tiene dirección* $e^{i\delta_2}$.

Usando el teorema puede reenunciarse el mismo reemplazando $B_1(0)$ por un dominio simplemente conexo $H \subset C$ tal que $H \neq C$. No demostraremos aquí el teorema fundamental de Riemann sino la siguiente proposición de utilidad práctica. Su lectura debería ser precedida por la del párrafo 6 del Cap. 4. (Los §1 - 6 del Cap. 4 son independientes de los resultados del presente capítulo).

TEOREMA 4. *Sea* $f(z)$ *holomorfa en* G *dominio simplemente conexo y sea* C *una curva de Jordan regular contenida en* G. *Si* $f(G)$ *es acotado y* f *es biunívoca de* C *sobre* C' *entonces* $f(z)$ *transforma el interior de* C, D, *conformemente sobre el interior de* C', D'.

DEMOSTRACION. Podemos suponer G y $G' = f(G)$ acotados. $f(D)$ no puede contener puntos dentro y fuera de C' pues los puntos de D pueden unirse por arcos contenidos en D. Como f' se anula en C en a lo sumo un número finito de puntos, hay un punto $a \in C$ tal que C' tiene tangente (no nula) en $f(a)$. D queda a la izquierda de C (que por supuesto se recorre en sentido positivo). La conformidad en el entorno de a implica que C' será recorrida en un sentido tal que $f(D)$ quedará a la izquierda de su tangente en un entorno de $f(a)$. Luego, C' se recorre en sentido positivo y $f(D) \subset D'$. (En efecto, si P es una poligonal de Jordan muy próxima a C', que contiene a ésta en su interior, y que pasa por un punto $f(c)$, $c \in D$, $f(c)$ fuera de C', entonces $f^{-1}(P) \subset D$, y define una curva cerrada. Esta es contraíble a un punto en D sin tocar C mientras que su imagen no podrá simultáneamente deformarse continuamente a un punto.)
$f(z)$ es 1 - 1 en D. Si no fuera así existirían $z_1 \neq z_2$, $z_i \in D$, $i = 1, 2$, tales que $w = f(z_1) = f(z_2)$. Separando D en dos regiones, D_1, D_2, por un arco L interior a D salvo por sus extremos en C de manera que $z_1 \in D_1$, $z_2 \in D_2$, w pertenecerá a una de las regiones en que separa a D' la imagen de L. Y enseguida obtenemos una contradicción.
En consecuencia $f'(z) \neq 0$ en D y $f(D)$ es un conjunto simplemente conexo contenido en D'. Si $f(D) \neq D'$ existirá un punto $b \in D'$ en la frontera de $f(D)$ y una sucesión de puntos $w_n \subset D'$, $w_n \to b$, cuya contraimagen $z_n = f^{-1}(w_n)$ es también convergente, y necesariamente a un punto en C. Luego $b \in C'$, contradicción, QED.

7. LA FORMULA DE POISSON. Sean D un dominio simplemente conexo y $u(x,y)$ una función armónica allí. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\overline{B_R(0)} \subset D$, $z_1 \in B_R(0)$. La transformación homográfica

(18) $$\zeta = \frac{z - z_1}{z\bar{z}_1 - R^2} \frac{R(\bar{z}_1 - R)}{R - z_1}$$

lleva $\{|z| = R\}$ en $\{|\zeta| = 1\}$ y z_1 en 0. $U(\zeta) = u(z(\zeta))$ es entonces una función armónica en $B_1(0)$ y vale (cf. cap. 2):

$$u(z_1) = U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{d\theta}{d\phi}\, d\phi.$$

Pero $\frac{1}{R}\frac{d\theta}{d\phi} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \frac{R(R^2 - |z_1|^2)}{|z\bar{z}_1 - R^2|^2}$. Luego, si $z_1 = e^{i\theta}$,

(19) $$u(z_1) = \frac{R^2(R^2 - |z_1|^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\phi})}{|Re^{i\phi}\bar{z}_1 - R^2|^2}\, d\phi =$$

$$= \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\phi})}{|z_1 - Re^{i\phi}|^2}\, d\phi = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\phi})}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \phi)}\, d\phi,$$

y queda demostrada la fórmula (47) del Cap. 2.

*8. CAMPOS ARMONICOS PLANOS. Sea $f(x,y)$ una función armónica definida en un dominio simplemente conexo D tal que $|f_x| + |f_y| > 0$. Sea g una armónica conjugada y $w = F(z) = (f + ig)(x,y)$. Luego $|f_x| + |g_x| > 0$, o sea, $|F'(z)| > 0$. Luego, si $w_0 = F(z_0)$ entonces $z = F^{-1}(w)$ y $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{F'(z)} \neq 0$ al menos en un entorno de w_0. O sea, F^{-1} es localmente conforme. Por tanto, $\mathcal{R}w$ = cte., $\mathcal{I}w$ = cte., describen en el plano w dos rectas ortogonales. Sus imágenes en el plano z quedan definidas por las funciones $f(x,y)$ = cte., $g(x,y)$ = cte., que son ortogonales.

Por un **campo armónico plano** entenderemos una función vectorial $\underline{v} = \underline{v}(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))$ tal que $v_1 = \partial f/\partial x$, $v_2 = \partial f/\partial y$, f armónica. Definimos $W(z) = v_1 - iv_2$. W representa a $\underline{v}$ y

(20) $$W = \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{dF}{dz}.$$

F es el **potencial complejo** de $\underline{v}$. Las líneas de flujo del campo se definen por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{v_1} = \frac{dy}{v_2}$$

Entonces, $v_2\, dx - v_1\, dy = -\frac{\partial g}{\partial x} dx - \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$, y por tanto, $dg = 0$ y g es constante sobre las líneas de flujo. El **flujo** que atraviesa un arco σ de extremos A, B es

$$\int_\sigma \underline{v} \times \underline{N}\, d\sigma = \int_\sigma (v_1,v_2) \times (dy,-dx) = \int_\sigma v_1\, dy - v_2\, dx = \int_\sigma dg = g(B) - g(A),$$

donde $\underline{N}$ es el versor normal al arco.

El **trabajo** realizado por $\underline{v}$ a lo largo del mismo arco σ es

$$\int_\sigma \underline{v} \times \underline{t}\, d\sigma = \int_\sigma (v_1,v_2) \times (dx,dy) = \int_\sigma v_1\, dx + v_2\, dy = \int_\sigma df = f(B) - f(A).$$

La continuación analítica. Singularidades aisladas. Ceros y polos. El punto en el infinito. Teorema de los residuos. Principio del argumento. Teorema de Rouché. Teorema fundamental del álgebra. El comportamiento de una función holomorfa alrededor de un cero. El teorema de monodromía. La función analítica completa. El teorema de Abel.

1. LA CONTINUACION ANALITICA. Sean D_1 y D_2 dos dominios con $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, y f_i una función holomorfa en D_i, $i = 1, 2$. Si $f_1 = f_2$ en $D_1 \cap D_2$ podemos definir una función $f = f_1$ en D_1, $= f_2$ en $D_2 \setminus D_1$, holomorfa en $D_1 \cup D_2$. Diremos que esta función es la prolongación de f_1 en D_1 a $D_1 \cup D_2$. Si pasamos de D_2 a D_3, ..., de D_{n-1} a D_n y en este último paso resulta $D_n \cap D_1 \neq \emptyset$ no debemos esperar que allí $f_1 = f_n$. Por ejemplo, si $D_1 = B_1(1)$, $D_2 = B_1(i)$, $D_3 = B_1(-1)$, $D_4 = B_1(-i)$, $D_5 = B_1(1)$ y $f_1(z) = \sqrt{z} = |z|^{1/2}.e^{i\phi/2}$ entonces $f_5(z) = -|z|^{1/2}e^{i\phi/2}$, $(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2})$. Supongamos ahora $f(z)$ definida por la serie de potencias $\sum_0^\infty a_n(z - z_o)^n$ con $0 < R < \infty$. Entonces en $|z - z_o| = R$ hay un punto **singular** z_1. Singular en el sentido que no se puede definir una función analítica en un entorno $B_r(z_1)$ del mismo que coincida con f en $B_R(z_o) \cap B_r(z_1)$. En efecto, si en todo punto z_1 tal que $|z_1 - z_o| = R$ puede prolongarse f a un entorno $B_r(z_1)$ entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que f es prolongable a $B_{R+\varepsilon}(z_o)$ (demostrarlo). En consecuencia la nueva función tendrá radio de convergencia $\geq R + \varepsilon$ y por tanto f debe tener alrededor de z_o un desarrollo con radio de convergencia $> R$, contradicción. Es fácil ver entonces que un criterio para determinar si z_1 es o no singular es el siguiente: si $\sum_0^\infty f^n(b) \frac{(z - b)^n}{n!}$, con b en el segmento abierto de extremos z_o y z_1, tiene radio de convergencia $r = |b - z_1|$ entonces z_1 es singular y si $r > |b - z_1|$ entonces z_1 es **regular** (no singular). Al conjunto $\{z: |z - z_o| = R\}$ se lo denomina **frontera natural** si todos sus puntos son singulares.

EJEMPLOS. a) $1 + z + z^2 + \ldots = (1 - z)^{-1}$ posee una singularidad en $z = 1$ pero es continuable en todo otro punto del contorno $\{|z| = 1\}$.

b) $f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^m} + \ldots$ tiene a $\{|z| = 1\}$ por frontera natural.

En efecto, $R = 1$, y si $z_1 = e^{2\pi ip/2^q}$, p,q enteros, entonces la serie

$\sum_{n=q}^{\infty} r^{2^n} e^{2^n . 2\pi ip/2^q} = \sum_{q}^{\infty} r^{2^n} \to \infty$ para $r \uparrow 1$. O sea, $f(rz_1) \to \infty$ para $r \uparrow 1$. El conjunto de los puntos z_1 así definido es denso en la circunferencia unitaria, y como el límite de puntos singulares es singular, resulta que toda esa circunferencia está formada por puntos singulares.

c) $F(z) = \sum \frac{z^{n!}}{n^2}$ tiene por frontera natural a $\{|z| = 1\}$. $R = 1$ pues la serie converge en $z = 1$ y diverge en $z = x > 1$. Cada punto de la forma $e^{2\pi ip/q}$, p y q primos entre sí, es un punto singular. Esto es consecuencia del siguiente teorema sobre series a coeficientes positivos.

TEOREMA 1. *Sea* $f(z) = \sum a_n z^n$, $a_n \geqq 0$, $R = 1$. *Entonces en* $z = 1$ *hay un punto singular.*

DEMOSTRACION. Sea $0 < r < 1$. $f(r) = \sum a_n(\varepsilon + r - \varepsilon)^n = \sum b_n(r - \varepsilon)^n$, $\varepsilon > 0$. Este último es entonces el desarrollo en el punto $r = \varepsilon$. Si $z = 1$ fuera un punto regular para $f(t)$, $\sum b_n(1 - \varepsilon + \eta)^n$ convergería para cierto $\eta > 0$. Por tanto $\sum a_n(1 + \eta)^n < \infty$, y $R \geqq 1 + \eta$, contradicción, QED.

EJERCICIO 1. Si $f(z)$ es holomorfa en D_1 y prolongable a $D_1 \cup D_2$ mostrar que $f'(z)$ es prolongable a $D_1 \cup D_2$ y que esta prolongación es la derivada de la prolongación de f.

2. SINGULARIDADES AISLADAS. Una función $f(z)$ tiene una **singularidad aislada** en $z = a$ si en un entorno reducido de a, $B_r(a)\setminus\{a\}$, $f(z)$ es holomorfa. No siempre una sigularidad aislada es una verdadera singularidad. Si f es prolongable a $B_r(a)$ entonces la singularidad se dice **evitable.** Lo que interesa en esta situación es que $f(z)$ es regular alrededor de a y la cuestión es decidir qué ocurre en a.

TEOREMA 2 (Laurent). *Sea* $f(z)$ *holomorfa en* $A = \{R < |z| < R'\}$, $R \geq 0$. *Entonces* $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ *en esa región y la serie es casi uniformemente convergente. Para cualquier curva de Jordan regular* J *contenida en* A *con* $z = 0$ *en su dominio interior vale:*

$$(1) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\ , \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ *es la única serie de esa forma casi uniformemente convergente a* $f(z)$ *en* A.

DEMOSTRACION. Sea K un compacto contenido en el anillo A. Existen dos circunferencias con centro $z = 0$, C y C', de radios r y r', tales que $R < r < r' < R'$ y $K \subset \{z\colon r < |z| < r'\} = A_1$. Sea $h \in A_1$. Entonces

$$f(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-h}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-h}\,dz = \sum_0^{\infty} a_n h^n - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-h}\,dz$$

donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$, y la serie converge absoluta y uniformemente si $|h| \leqq r' - \varepsilon < R'$, (ver demostración T.8, Cap. 2). No obstante no tiene por qué tener sentido $f^{(n)}(0)$ y por lo tanto no es necesariamente $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Por otro lado tenemos:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-h}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{h-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left\{\frac{1}{h} + \frac{z}{h^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{h^n} - \frac{z^n}{h^n(z-h)}\right\}dz =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{h^m} - B_n\ , \quad b_m = a_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\, z^{m-1}\,dz,$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\, z^n}{h^n(z-h)}\,dz\ , \qquad |B_n| \leqq \frac{Mr}{\varepsilon}\left(\frac{r}{h}\right)^n ,$$

donde la última desigualdad vale en el supuesto que dist $(h, \{|z| = r\}) \geqq \varepsilon$. Para esos h, $B_n \nrightarrow 0$ si $n \to \infty$, y

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-h}\,dz = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}h^{-m}.$$

De las fórmulas (13) y (14) del capítulo 2 obtenemos

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=s} z^n\,dz \begin{cases} = 0 \text{ si } n \in Z,\ n \neq -1, \\ = 1 \text{ si } n = -1. \end{cases}$$

cualquiera que sea $s > 0$.

Supongamos que $\sum_{-\infty}^{+\infty} d_n z^n \rightrightarrows f(z)$ en A. Luego $\sum_{-\infty}^{+\infty} d_n z^{n-p-1} \rightrightarrows f(z)z^{-p-1}$. Por tanto

$$a_p = \frac{1}{2\pi i}\int_J f(z)z^{-p-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{+\infty} d_n \int_J z^{n-p-1}\,dz =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_n}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^{n-p-1}\,dz = d_p, \qquad \text{QED.}$$

Esto no se aplica a la función $\sqrt{z}$ ¿Por qué?

Si $f(z)$ tiene un desarrollo de Laurent en $B_R(a)\setminus\{a\}$:

$$(3)\qquad f(z) = \sum_0^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_1^{\infty} b_n(z-a)^{-n}$$

llamaremos **parte principal** de la singularidad en $z = a$ a la serie $\sum_1^{\infty} b_n(z-a)^{-n}$.

Si $b_n = 0$ para todo n diremos que la singularidad es **evitable;** si $b_n = 0$ para $n > m$ con $b_m \neq 0$ $(m > 0)$, diremos que f tiene un **polo de orden m** en a

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

En este caso la función $\phi(z) = (z-a)^m f(z)$ tiene una singularidad evitable en $z = a$. Como para $|z - a|$ bastante pequeño $0 < M = |b_m/2| \leq |z-a|^m.\ |f(z)|$ resulta $|f(z)| \geq M/|z-a|^m$. En particular, $|f(z)| \to \infty$ para $z \to a$. Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$: $\varepsilon|\phi(z)| > |z-a|^{m+1}.|f(z)|$ cerca de $z = a$, o sea,

$\varepsilon|2b_m|/|z - a|^{m+1} > |f(z)|$. Podemos decir entonces que "$|f(z)|$ crece como $|z - a|^{-m}$" para $z \to a$.

A b_1 se lo denomina el **residuo** del polo. Si el polo es de orden uno entonces $b_1 = \lim_{z \to a} (z - a)f(z)$. En todo caso (cf. (2)):

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\, dz. \qquad (4)$$

Si $z = a$ es una singularidad aislada para $f(z)$ que no es evitable ni es un polo entonces diremos que f tiene allí una **singularidad esencial.**

TEOREMA 3 (Gran teorema de Picard). *Si* $z = a$ *es una singularidad esencial para* $f(z)$ *entonces la función toma en todo entorno de* a *cualquier valor finito infinitas veces con una excepción a lo más.*

No demostraremos este teorema sino el siguiente

TEOREMA 4 (Cassorati - Weierstrass). *En todo entorno de una singularidad aislada esencial existe un punto en el cual la función difiere tan poco como se quiera de cualquier número preasignado.*

DEMOSTRACION. Sean $f(z)$ con una singularidad esencial en $z = a$ y $c \in C$. Queremos ver que dados $\varepsilon > 0$ y $r > 0$, existe $z_1 \in B'_r(a) = B_r(a)\setminus\{a\}$ tal que $|f(z_1) - c| < \varepsilon$. Supongamos que en B'_r no hay ningún cero de $f(z) - c$. Luego, $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - c}$ es holomorfa en B'_r. Bastará ahora ver que existe $z_1 \in B'_r$ tal que $|g(z_1)| > 1/\varepsilon$. Si no fuera así tendríamos $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$. Sea b_n el n-ésimo coeficiente de la parte principal de $g(z)$ en a. Entonces, de

$$|b_n| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_{|z-a|=\rho} g(z)(z - a)^{n-1}\, dz\right| \leq \frac{\rho^n}{\varepsilon}$$

sigue que $b_n = 0$ para todo n. O sea, $g(z) = \sum_0^\infty a_n(z - a)^n = (z - a)^m.\phi(z)$, con $\phi(z) \neq 0$ en $B_r(a)$ y $f(z) - c = \dfrac{\psi(z)}{(z - a)^m}$ en $B'_r(a)$ con ψ holomorfa y no nula en $B_r(a)$. En consecuencia, $f(z) = \dfrac{\psi(z) + c(z - a)^m}{(z - a)^m} = \dfrac{\sum_0^\infty A_n(z - a)^n}{(z - a)^m}$, $A_0 \neq 0$, y $f(z)$

tiene un polo de orden m si $m > 0$, o una singularidad evitable si $m = 0$, contradicción, QED.

EJERCICIO 2. Si a es un punto donde $f(z)$ tiene una singularidad aislada y a es límite de ceros de $f(z)$ entones la singularidad es esencial si $f(z) \not\equiv 0$. Pero si se verifica $f(z) = O(|z - a|^{-n})$, $n \in Z$, entonces la singularidad es evitable o bien es un polo de orden n a lo más (véase el párrafo siguiente).

EJERCICIO 3. Dar una demostración directa de (2) reemplazando z por $re^{i\theta}$ y usando como parámetro a $\theta \in [0,2\pi]$.

EJERCICIO 4. Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en $z = a$ y es acotada en un entorno de a entones la singularidad es evitable. En cambio, si $|f(z)| \to \infty$ para $z \to a$, la singularidad es un polo.

3. CEROS Y POLOS. EL PUNTO EN EL INFINITO. Si en $z = a$ la función $g(z)$ (holomorfa) tiene un cero de orden p y la función $f(z)$ tiene uno de orden q entonces $f.g$ tiene un cero de orden $p + q$. Pero si $f(z)$ tiene allí un polo de orden q entonces $f(z)g(z) = (z - a)^{p-q}h(z)$, $h(a) \neq 0$, y fg tendrá un cero o un polo según sea $p > q$ o $p < q$. Si $p = q$, $fg \neq 0$ en un entorno de a. Ceros y polos presentan un comportamiento semejante que se hace más claro al tratar el punto ∞. Sea $f(z)$ holomorfa en un **entorno circular del ∞** que por definición es es un conjunto de la forma:

$$B_R(\infty) = \{z: |z| > R\}.$$

El ∞ es entonces una "singularidad aislada" que será evitable, un polo o una singularidad esencial según lo sea en $w = 0$ la función $g(w)$ obtenida de f por la transformación $w = 1/z$: $g(w) = f(1/w)$, $w \in B_{1/R}(0)$. Si $g(w) = w^p.h(w)$, $h(0) \neq 0$, $p \in N$, diremos que $f(z)$ tiene un cero de orden p en el infinito.

TEOREMA 5. *Una función entera* $f(z)$ *con un polo de orden* n *en el infinito es un polinomio de orden* n.
grado

DEMOSTRACION. $g(w) = \dfrac{b_n}{w^n} + \dfrac{b_{n-1}}{w^{n-1}} + \dots + \dfrac{b_1}{w} + F(w)$, $b_n \neq 0$, F holomorfa en C.

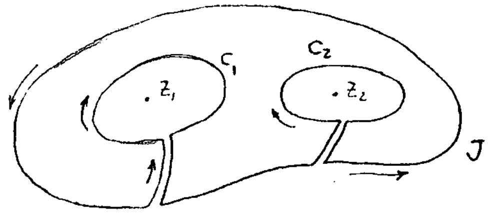
Luego, F es acotada en un entorno de $w = 0$. Entonces, $f(z) = b_n z^n + \dots + b_1 z + G(z)$; $G(z) = F(1/z)$ es acotada en un entorno del infinto, y por la hipótesis sobre f lo es en cualquier entorno del origen. Luego, G es constante (T. de Liouville), QED.

Recurriendo al Ej. 2 podemos reenunciar el teorema diciendo que una función entera que no crece más que una potencia en el infinito es un polinomio.

4. TEOREMA DE LOS RESIDUOS DE CAUCHY. PRINCIPIO DEL ARGUMENTO.

TEOREMA 6. *Sea* $f(z)$ *holomorfa en el dominio simplemente conexo* A *salvo en un número finito de puntos,* $z_1, \ldots, z_N$, *donde la función tiene polos. Sea* $a_{-1,r}$ *el residuo de* $f(z)$ *en* z_r. *Si* J *es una curva regular de Jordan que contiene en su interior* D *a los puntos* z_r *entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J f(z)\,dz = \sum_{r=1}^{N} a_{-1,r}.$$



1.

DEMOSTRACION. Sea $C_i = \{|z - z_i| = \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$ tan pequeño de manera que $C_i \subset D$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J f\,dz = \sum_1^N \frac{1}{2\pi i}\int_{C_i} f(z)\,dz = \sum_1^N a_{-1,i}, \qquad \text{QED.}$$

Sea $f(z)$ holomorfa sobre un arco regular C, abierto o cerrado. Entonces, si $f \neq 0$ sobre C:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'}{f}\,dz = \frac{1}{2\pi i}[\log f]_C = \frac{1}{2\pi i}[\log |f| + i \arg f]_C.$$

Si C es un arco cerrado

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'}{f}\,dz = [\arg f]_C/2\pi.$$

Esto se exprese diciendo que $\frac{1}{i}\int_C \frac{f'}{f}\,dz$ es igual a la variación del argumento de f sobre C. Si agregamos ahora las hipótesis que el arco sea una curva de Jordan y que f sea holomorfa en el interior D de J, salvo por un número finito de puntos donde la función presenta polos, vale el

TEOREMA 7. $\frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Z - P =$ *número de ceros (de* f *en* D*) - número de polos. O bien, variación del argumento de* f *a lo largo de* J $= 2\pi(Z - P)$.

DEMOSTRACION. Si a es un cero de orden r, $f(z) = (z - a)^r h(z)$, y en un entorno de a tenemos $h(z) \neq 0$, y por tanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{r}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}\,. \tag{5}$$

En cambio, si a es un polo de f de orden s

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-s}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}\,. \tag{6}$$

Luego, $\frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{f'}{f}\,dz = \sum_{i=1}^{M} r_i - \sum_{j=1}^{N} s_j = Z - P$, ($M$ es el número de puntos distintos dos a dos donde hay ceros y N el de puntos donde hay polos), QED.
En el teorema, Z es la suma de los órdenes de todos los ceros. El contar r veun cero de orden r aparece así como un hecho necesario y puede entenderse si observamos, por ejemplo, que la función $(z - a)^r$ es límite de $\prod_{i=1}^{r} (z - a_i)$ para $a_i \to a$.

COROLARIO. *Bajo las mismas hipótesis del 7.7, si* $F(z)$ *es holomorfa dentro de y sobre* J*:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J F(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum F(z_j) - \sum F(p_k).$$

Esto sigue inmediatamente de (5) y (6). Otra vez en la suma de $\sum F(z_j)$ cada sumando $F(z_j)$ se cuenta tantas veces como el orden del cero z_j. Idem $F(p_j)$.
Lo visto nos impulsa a acuñar un nombre para un nuevo tipo de función.

DEFINICION 1. *Una función se dice* ***meromorfa*** *en un dominio si es holomorfa en cada punto con excepción de un número (numerable) de singularidades aisladas donde presenta polos. Se dirá* ***meromorfa en*** z_0 *si en un entorno circular reducido del punto es holomorfa y en* z_0 *tiene una singularidad evitable o un polo.*

TEOREMA 8. *Una función meromorfa en la esfera de Riemann es una función racional.*

DEMOSTRACION. La hipótesis dice que la función tiene un número finito de polos en C y quizá uno en el ∞. Fuera de estos es holomorfa en toda la esfera. Sean $z_1, \ldots, z_n$ los puntos de C donde presenta polos de órdenes $r_1, \ldots, r_n$ y f(z) la función. Luego, $f(z).(z - z_1)^{r_1} \ldots (z - z_n)^{r_n}$ es una función holomorfa en C con a lo más un polo en el infinito. Por el teorema 5 debe ser un polionimio (sic) $P_1(z)$. Llamando $P_2(z) = \prod_1^n (z - z_i)^{r_i}$ tenemos ahora $f(z) = P_1(z)/P_2(z)$, QED.

5. TEOREMA DE ROUCHÉ. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA.

TEOREMA 9 (Rouché). *Sea* J *una curva de Jordan regular en un dominio* D *simplemente conexo. Supongamos que* f *y* g *son holomorfas en* D *y que sobre* J *verifican:*

$$|g(z)| < |f(z)|.$$

Entonces, f *y* f + g *tienen el mismo número de ceros dentro de* J.

DEMOSTRACION. Supongamos que el número de ceros de f, contados de acuerdo a sus órdenes, sea m, y el de f + g sea n. Sea $F(z) = 1 + (g/f) = (f + g)/f$. Por el principio del argumento: $2\pi(n - m)$ = incremento del arg f cuando z recorre J. Pero $RF = 1 + R(g/f) \geqq 1 - |g/f| > 0$ en J. Por tanto, el argumento vuelve a su valor original y $2\pi(n - m) = 0$, QED.

TEOREMA 10 (Gauss). *Sea* $P(z) = a_o z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$, $a_o \neq 0$, *tiene exactamente* m *ceros en* C, *y* $P(z) = a_o \prod_{i=1}^{m} (z - z_i)$.

DEMOSTRACION. Sean $f(z) = a_o z^m$, $g(z) = a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m$, y $J = \{|z| = R\}$, con R tan grande como para que fuera y sobre J, $|g/f| < 1$. Como f(z) tiene un cero de orden m en z = 0, por el T. de Rouché (f + g)(z) tendrá m ceros en $B_R(0)$. Sean $z_1, \ldots, z_m$ esos ceros (pueden repetirse) y sea

$$g(z) = \frac{a_o z^m + \ldots + a_m}{(z - z_1)\ldots(z - z_m)}$$

. Esta función sólo tiene en C singularidades evitables y es acotada. Por tanto, es constante, y necesariamente igual a a_o,QED.

TEOREMA 11. *Las raíces de* $P(z) \equiv a_0 z^m + \ldots + a_m = 0$ *son continuas en los coeficientes* a_j.

DEMOSTRACION. Sean $Q(z) \equiv (a_0 + \varepsilon_0)z^m + (a_1 + \varepsilon_1)z^{m-1} + \ldots + (a_m + \varepsilon_m)$, $f = P$, $g = Q - P = \varepsilon_0 z^n + \ldots + \varepsilon_m$. Sea z_j un cero de P de orden j y c_j una circunferencia con centro z_j y radio tan pequeño como para que los otros ceros de P estén fuera de ella. Sobre c_j, $|f| > 0$, y si $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m$ son bastante pequeños, $|f| > |g|$ allí. Luego, $Q = f + g$ tiene exactamente r_j ceros dentro de c_j, QED.

6. EL COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCION HOLOMORFA ALREDEDOR DE UN CERO. (Demostración del T.14 del Cap. 2). Supongamos que $w(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$ de la forma

$$w(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \ldots, \qquad m > 0,\ c_m \neq 0.$$

Existe un $\varepsilon > 0$ tal que en $B_\varepsilon(0)$ vale el desarrollo y tal que en $B'_\varepsilon(0)$: $w(z) \neq 0 \neq w'(z)$. Sean $S_\varepsilon = \{z: |z| = \varepsilon\}$ y

$$\eta = \inf\{|w(z)|: z \in S_\varepsilon\}.$$

Entonces $\nu > 0$. Sea $w_0 \in B'_\eta(0)$ y definamos $F(z) := w(z) - w_0$. En S_ε se tiene

$$|F(z) - w(z)| = |w_0| < \eta \leqq |w(z)|.$$

Luego $F(z)$ tiene en $B_\varepsilon(0)$ tantos ceros z_j como $w(z)$, es decir, m. Como $z_j \neq 0$, $F'(z_j) = w'(z_j) \neq 0$. En consecuencia estos son ceros simples, y por tanto dos a dos distintos. Conclusión: w toma el valor $w_0 \in B'_\eta(0) = B_\eta(0)\setminus\{0\}$ en exactamente m puntos de $B'_\varepsilon(0)$.

7. CALCULO DE UNA INTEGRAL POR RESIDUOS. Evaluar $\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt$, $0 < a < 1$. Con el cambio de variables $t = e^x$:

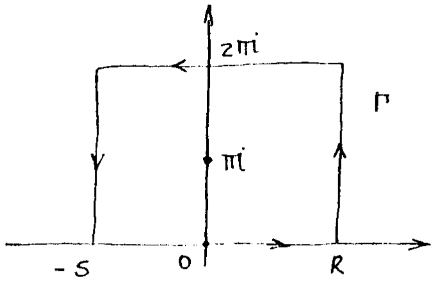
$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx, \tag{7}$$

y queremos mostrar que (7) = $\pi/\text{sen}\, a\pi$.

La función $f(z) = e^{az}/(1 + e^z)$ tiene por residuo en $z = \pi i$ a $e^{a\pi i}/\left.\frac{de^z}{dz}\right|_{\pi i} = -e^{a\pi i}$.

Sea (cf. figura 2)

$$I = \int_\Gamma \frac{e^{az}}{e^z + 1}\, dz.$$



2.

Entonces,

$$I = -2\pi i e^{a\pi i} =$$

$$= \int_{-S}^{R} \frac{e^{ax}}{e^x + 1}\, dx - e^{a2\pi i}\int_{-S}^{R} \frac{e^{ax}}{e^x + 1}\, dx + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{aR+iay}}{e^{R+iy} + 1}\, dy - i\int_0^{2\pi} \frac{e^{-aS+iay}}{e^{-S+iy} + 1}\, dy \xrightarrow[R,S \to \infty]{}$$

$$\to \quad (1 - e^{a2\pi i})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1}\, dx,$$

pues las dos últimas integrales tienden a 0.

8. EL TEOREMA DE MONODROMIA. Sea C una unión finita de arcos regulares consecutivos, o sea, una curva regular, que une a con b. Supongamos que en el orden de recorrido de C tenemos una sucesión $z_0 = a, z_1, \ldots, z_N = b$ de puntos (en C) y una familia de círculos $B_{r_0}(z_0), B_{r_1}(z_1), \ldots, B_{r_N}(z_N)$, cada uno con intersección no vacía con el precedente. Sean $(f_0,z_0), (f_1,z_1), \ldots, (f_n,z_n)$ elementos de funciones holomorfas definidas en los entornos indicados. Si $\widehat{z_{i-1}z_i} \subset B_{r_{i-1}}(z_{i-1})$, $f_i = f_{i-1}$ en $B_{r_i}(z_i) \cap B_{r_{i-1}}(z_{i-1})$, $i = 1, \ldots, N$, diremos que esa familia describe una **continuación analítica** de (f_0,a) a lo largo de C, (cf. § 14, Cap. 2). Esta nos lleva de (f_0,a) a (f_N,b). Como son elementos de funciones, ni el radio final r_N, ni el inicial, interesan para la descripción del elemento alcanzado. Dado que f_i queda determinada por los valores de f_{i-1} sobre $B_{r_i} \cap B_{r_{i-1}} \cap C$ se ve que si hubiéramos utilizado otra continuación sobre la misma curva, habríamos llegado a un (f_M,b) pero tal que $(f_M,b) = (f_N,b)$. O sea, la continuación es independiente del encadenamiento utilizado, aunque no de la curva C. Si C' une a con b la prolongación a lo largo de C' no necesariamente concluye

con (f_N,b) aún comenzando con (f_0,a). Sin embargo, una curva muy próxima a C dará lugar al mismo resultado final. Por ejemplo, una poligonal inscrita a C y muy próxima lleva (f_0,a) en (f_N,b), (demostrarlo). Sean D una región dominio, $a \in D$ y (f,a) un elemento analítico de una función holomorfa en a. Diremos que (f,a) es **arbitrariamente continuable** en esta región si (f,a) admite una continuación a lo largo de toda curva regular que emana de a y está contenida en D.

TEOREMA 12. *Sea* (f,a) *un elemento analítico en* $a \in D$ *dominio simplemente conexo. Si* (f,a) *es arbitrariamente continuable en* D *entonces queda definida una única función* F *holomorfa en* D *tal que* $(F,a) = (f,a)$.

DEMOSTRACION. Supongamos $D = B_1(0)$. La transformación $w = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ transforma D en $\{w: |w| < 1\} = B_1(0)$ y lleva $z = a$ en $w = 0$. El elemento (f,a) se transforma en el elemento analítico $(f(z(w)),0)$ que es arbitrariamente continuable en $B_1(0)$. Es decir, podemos suponer $a = 0$ en nuestro planteo original. En este caso, si no existiera una función F tal que $(f,0) = (F,0)$ entonces el radio de convergencia R del desarrollo de f alrededor de $z = 0$ sería menor que uno. En consecuencia, en $|z| = R$, f tendría un punto singular z_1 y no sería continuable a lo largo del segmento de longitud uno que sale de 0 y pasa por z_1, contradicción. En el caso general, en lugar de la transformación homográfica $w = w(z)$ se recurre a una de las funciones cuya existencia afirma el T.de Riemann de la transformación conforme, QED.

EJERCICIO 1. Sea D un dominio simplemente conexo con $1 \in D$, $0 \notin D$. Entonces existe en D una rama del logaritmo tal que $\log 1 = 0$. Es decir, hay una función holomorfa F en D tal que $F(z) = \log z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i$ para todo $z \in D$ y con $k = k(z)$, $k(1) = 0$.

*9. LA FUNCION ANALITICA COMPLETA. Esta se define a partir de un elemento de función (f,a) y es el conjunto de todos los valores funcionales $w = w(z)$ que se hacen corresponder a z por medio de todas las prolongaciones posibles. En general es una "función multiforme, o mulitvaluada". Como la palabra función se usa para aplicaciones que llevan un punto en otro, y sólo uno, conviene describir la función analítica por medio de los elementos analíticos que la forman y que se caracterizan por las siguientes condiciones:

1) dados dos elementos uno es continuación del otro,
2) todo elemento continuación de uno pertenece a la familia.

Este proceso no excluye ningún punto de la esfera de Riemann. El punto en el infinito se trata por inversión en el origen (ya que esta transformación hace corresponder al abierto no acotado $\{|z| > 1\}$ con el abierto acotado $\{|z| < 1\}$). Dado un dominio simplemente conexo D tal que un punto $b \in D$ sea alcanzable por la prolongación y en el elemento (F,b), si éste es arbitrariamente continuable en D queda definida allí una función holomorfa F. Pero quizá pueda llegarse, por otro camino, a (G,b) desde (f,a), con (G,b) también arbitrariamente continuable en D, y definiendo una función holomorfa $G \neq F$. G y F serán ramas distintas de (f,a) en D, un adecuado entorno de b.
La llamada **superficie de Riemann** es una construcción que trata de resolver el problema de la multiformidad de una función. Es una superficie sobre la cual los valores de la función definen una aplicación univaluada, y construída "adhiriendo los elementos analíticos" obtenidos por prolongación de uno dado cuando ellos "coinciden en un disco". Sobre la superficie de Riemann queda definida una función univaluada, o uniforme, a valores en la esfera de Riemann, que se llama la **figura analítica** (monógena) determinada por el elemento analítico de partida.

*10. EL TEOREMA DE ABEL. La serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$ tiene por frontera natural a $\{|z| = 1\}$.

Sin embargo converge en cada punto de la circunferencia unitaria y define una función continua sobre ~~cada diámetro de~~ $\overline{B_1(0)}$. En efecto, esto se deduce del siguiente teorema debido a Abel.

TEOREMA 13. *a) Sea* $f(z) = \sum a_n z^n$ *con* $R = 1$ *y con* $\sum a_n$ *convergente. Entonces*

$$\lim_{1 > r \to 1} f(r) = \sum a_n.$$

b) Más aún, si $\sum a_n e^{in\theta}$ *converge uniformemente en* $(-\theta_0, \theta_0)$ *entonces*

$$\lim_{r \to 1-} f(re^{i\theta}) \doteq \sum a_n e^{in\theta}.$$

La convergencia de $f(r)$ a A no implica que $A = \sum a_n$. Por ejemplo, $\sum (-1)^n z^n = 1/(1+z)$. Sin embargo, una recíproca parcial la suministra el siguiente teorema de Tauber.

TEOREMA 13. *Sea* $f(z) = \sum a_n z^n$ *con* $R = 1$, *y* $\lim_{n \to \infty} na_n = 0$. *Si* $f(r) \xrightarrow[r \uparrow 1]{} A$ *entonces* $\sum a_n$ *converge a* A.

Una forma de demostrar el teorema 13 es recurriendo a la importante **fórmula de sumación por partes** (transformación de Abel).

LEMA 1. *Sean* u_k, $v_k \in C$, $k = 1, \ldots, n$, $s_k = u_1 + \ldots + u_k$. *Entonces*

$$\sum_1^n u_k v_k = s_n v_n + \sum_1^{n-1} s_k(v_k - v_{k+1}).$$

DEMOSTRACION. $s_0 := 0$; $\sum_1^n u_k v_k = \sum_1^n (s_k - s_{k-1})v_k = \sum_1^n s_k v_k - \sum_1^n s_{k-1} v_k =$

$= \sum_1^n s_k v_k - \sum_1^{n-1} s_k v_{k+1} = s_n v_n + \sum_1^{n-1} s_k(v_k - v_{k+1})$, QED.

Sean ahora $\{u_n(x)\}$, $\{v_n(y)\}$, sucesiones de funciones complejas definidas en los subconjuntos del plano complejo X, Y, respectivamente.

LEMA 2. *La serie* $\sum u_j(x)v_j(y)$ *es uniformemente convergente en* $X \times Y$ *si alguno de los siguientes casos se presenta:*

a) $\sum u_n(x)$ *converge uniformemente en* X, *y* $\{v_n(y)\}$ *es uniformemente acotada en* Y *y decrece monótonamente en todo* $y \in Y$ *(o crece),*

b) $\sum_1^n u_n(x)$ *es uniformemente acotada en* X, $\{v_n(y)\}$ *crece uniformemente a cero (o decrece).*

c) $\sum u_n(x)$ *converge uniformemente en* X *y* $|v_1(y)| + \sum_1^\infty |v_n(y) - v_{n+1}(y)|$ *es acotada en* Y.

DEMOSTRACION. Está claro que en a) y b) se dice implícitamente que $v_n(y)$ es real para todo n y todo y. Sean $(q > m)$:

$$\varepsilon_m := \sup_{\substack{q > m \\ x \in X}} \left|\sum_{m+1}^q u_k(x)\right|; \quad \delta_{mn} := |v_n(y)| + \sum_{m+1}^{n-1} |v_k(y) - v_{k+1}(y)|.$$

Del lema 1 se deduce ahora que

$$\left|\sum_{k=m+1}^n u_k(x)v_k(y)\right| \leq \varepsilon_m . \delta_{mn}.$$

Si $\{v_i\}$ es monótona, $\delta_{mn} = |v_n(y)| + |v_n(y) - v_{m+1}(y)|$ y siguen a) y b). Por otra parte

$$|v_n(y)| \leqq |v_1(y)| + |v_n(y) - v_1(y)| \leqq |v_1(y)| + \sum_1^{n-1} |v_{k+1}(y) - v_k(y)| \leqq M$$

y c) resulta inmediatamente pues $\varepsilon_m \to 0$, QED.

EJERCICIO. Probar T. 13, b) usando lema 2, a).

11. PUNTOS CRITICOS. Diremos que un punto $z_0 \in C$ es un punto **crítico** aislado de una función analítica f si en un entorno reducido de z_0, $B_r'(z_0)$, hay un elemento de función (f,z_1), $z_1 \in B_r'(z_0)$, arbitrariamente continuable en ese entorno. Si hay un número n tal que para todo $z \in B_r'(z_0)$ el conjunto de valores tomados por la prolongación de f es finito y menor o igual a n, y si para $z \to z_0$, esos valores convergen a un número o bien a infinito, diremos que el punto es **algebraico**. En caso contrario diremos que z_0 es un punto crítico **trascendente**. Por ejemplo, 0 es un punto crítico algebraico para $\sqrt[n]{z}$ y es trascendente para log z. Un punto crítico algebraico se caracteriza por ser de la forma $\Phi(\sqrt[n]{z - z_0})$ donde Φ es meromorfa en $B_r(z_0)$, holomorfa en $B_r'(z_0)$, para cierto r. Estos puntos críticos serán llamados puntos de ramificación de la función analítica. También así denotaremos los puntos críticos de una función analítica donde ésta se comporta en forma semejante al logaritmo en $z_0 = 0$. En realidad, el concepto de punto crítico abarca más casos. (Los citados corresponden a singularidades en una rama de la función analítica completa). Nosotros no queremos discutirlos aquí sino sólo introducir una nomenclatura para aislar dos ideas: la de punto de **ramificación algebraica** y la de punto de **ramificación logarítmica**.

CAPITULO 5.

La función gamma. La fórmula de recurrencia. La función beta. La fórmula de duplicación de Legendre. La fórmula de Stirling. Productos infinitos. El teorema de Mitagg-Leffler y las funciones racionales.

1. LA FUNCION GAMMA. Se define, para $\mathcal{R}z > 0$, por medio de una integral:

$$(1) \qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad t^{z-1} = e^{(\mathrm{Log}\ t)(z-1)}.$$

Sean

$$(2) \qquad \phi(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad \psi(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

Entonces, $\Gamma(z) = \phi(z) + \psi(z)$. La segunda integral define en realidad una función entera. Y la primera también puede prolongarse de $\mathcal{R}z > 0$ a $\mathbb{C}\setminus\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$. En efecto, reemplazando e^{-t} por su serie de Taylor obtenemos

$$(3) \qquad \phi(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 (-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}\, dt = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

La última serie es absoluta y uniformemente convergente en cualquier conjunto compacto del plano que no contenga al cero o a un entero negativo. Luego, para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$, podemos definir

$$(4) \qquad \Gamma(z) = \psi(z) + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)},$$

función meromorfa con polos simples en los enteros no positivos que extiende a la función (1) holomorfa en $\mathcal{R}z > 0$.

2. LA FORMULA DE RECURRENCIA. Sea $x > 0$, entonces $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = \int_0^\infty (t^x/x) e^{-t}\, dt$,

y por tanto $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. Usando la continuación analítica obtenemos

(5) $$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \qquad z \neq 0, -1, -2, \ldots .$$

Como $\int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ sigue que

(6) $$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!\,\Gamma(1) = n!.$$

La función meromorfa $\Gamma(z)$ aparece así como un intento de extender a números no naturales el concepto de factorial. Por otra parte tenemos

(7) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}\,,$$

(8) $$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = (n-\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2}) = (n-\tfrac{1}{2})\ldots\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{3}{2}\ldots\frac{(2n-1)}{2} =$$

$$= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!\;2^{2n}}\,.$$

3. LA FUNCION BETA. Si $x,y > 0$, por definición

(9) $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Entonces $B(x,y) = B(y,x)$. La expresión que define a $B(x,y)$ puede simetrizarse con un cambio de variables obteniéndose

(10) $$B(x,y) = \int_{-1/2}^{1/2} (\tfrac{1}{2}+\tau)^{x-1}(\tfrac{1}{2}-\tau)^{y-1}\,d\tau.$$

Si $s > 0$ y $\tau = t/2s$, resulta

(11) $$(2s)^{x+y-1}B(x,y) = \int_{-s}^{s} (s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}\,dt,$$

e integrando en s, luego de multiplicar por e^{-2s}, obtenemos

$$(12)\quad B(x,y).\int_0^\infty e^{-2s}(2s)^{x+y-1}\,ds = \int_0^\infty ds \int_{-s}^{s} e^{-2s}\,(s+t)^{x-1}(s-t)^{y-1}\,dt.$$

Con la transformación $\sigma = s + t$, $\tau = s - t$, de jacobiano $\frac{\partial(s,t)}{\partial(\sigma,\tau)} = \frac{1}{2}$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\,B(x,y)\Gamma(x+y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\sigma \int_0^\infty e^{-\sigma-\tau}\sigma^{x-1}\tau^{y-1}\,d\tau = \frac{1}{2}\Gamma(x)\Gamma(y).$$

Por tanto

$$(13)\qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

Así como la función gamma está vinculada al n! la función beta lo está con el combinatorio $\binom{n+m}{n}$. En efecto, $\frac{1}{(x+y+1)B(x+1,y+1)}$ toma el valor $\frac{(n+m)!}{n!\;m!}$ si $x = m$, $y = n$. Si en (9) ponemos $t = \mathrm{sen}^2\, s$ resulta

$$(14)\qquad B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{2x-1}\, s\, \cos^{2y-1}\, s\, ds.$$

Luego,

$$(15)\qquad \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{\alpha}\, s\, ds = \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha}\, s\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\,,\quad \alpha > -1.$$

Sea ahora $1 > x > 0$. Entonces

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x,1-x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{dt}{1-t}\,.$$

Haciendo $y = t/(1-t)$, obtenemos (cf. §7, Cap. 4):

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{y^{x-1}}{1+y}\,dy = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,\pi x}\,.$$

Prolongando analíticamente se arriba a la siguiente importante fórmula:

$$(16)\qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,\pi z}\,,\qquad z \notin Z$$

Y de la msima manera, si $\mathcal{R}z$, $\mathcal{R}w > -1$, a

$$(17)\qquad B(z+1,w+1) = \int_0^1 t^z(1-t)^w\,dt = \frac{\Gamma(z+1)\,\Gamma(w+1)}{\Gamma(z+w+2)}\,.$$

De (16) se concluye que $\Gamma(z) \neq 0$ para todo z.

*4. FORMULA DE DUPLICACION DE LEGENDRE. Vale (cf. (8)):

$$(18)\qquad 2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z}.\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2).$$

DEMOSTRACION. Sea $p > 0$. Entonces

$$\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} = 2\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx = (x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{y}) = 2^{1-2p}\int_0^1 (1-y)^{p-1}\frac{dy}{\sqrt{y}} =$$

$$= 2^{1-2p}\int_0^1 (1-y)^{p-1}y^{\frac{1}{2}-1}\,dy = \frac{2^{1-2p}\,\Gamma(p)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(p+1/2)}\,.$$

5. LA FORMULA DE STIRLING. Esta fórmula permite expresar en forma sencilla el comportamiento asintótico del factorial de n, es decir, el comportamiento para grandes valores del argumento:

$$(19)\qquad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\,.$$

$\sim$ significa en esta situación que

$$(20)\qquad \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$

Equivalentemente, si $p = n$ vale que (verificarlo)

$$(21)\qquad \Gamma(p) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{p}}\left(\frac{p}{e}\right)^p\,.$$

Esta fórmula es correcta aún para p real positivo y es un caso particular del siguiente importante resultado.

TEOREMA 2. *Sea* z *tal que* $|\mathrm{Arg}\ z| < \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. *Entonces* $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}.e^{-z}\,z^{z-1/2}$, *uniformemente para* $|z| \to \infty$. *(Aquí* $z^{z-1/2}$ *es real para* z *real).*

6. PRODUCTOS INFINITOS. Sea $\{a_n\} \subset C$. Diremos que

$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)\ldots = \prod_1^\infty (1 + a_j)$ es un producto infinito convergente

si existe $p \neq 0$, $p \neq \infty$, tal que $\prod_1^n (1 + a_j) \to p$. En este caso $p := \prod_1^\infty (1 + a_j)$.

TEOREMA 1. *Si* $\sum_1^\infty |a_n| < \infty$ *entonces* $\prod_N^\infty (1 + a_n)$ *converge a partir de un* N.

DEMOSTRACION. Si $0 < |z| < 1/2$,

$$\left|1 - \frac{\mathrm{Log}\ (1 + z)}{z}\right| = \left|\frac{z}{2} - \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} - \ldots\right| < \frac{1}{2}.$$

Luego, $\frac{|z|}{2} \leq |\mathrm{Log}\ (1 + z)| < \frac{3}{2}|z|$, $|z| \leq 1/2$, y se tiene

$\sum_N^\infty |a_n| < \infty \Longrightarrow \sum_N^\infty |\mathrm{Log}\ (1 + a_n)| < \infty$ para $n \geq N$ tal que $|a_n| \leq 1/2$. En conse-

cuencia, $\log \prod_N^M (1 + a_n) = \sum_N^M \mathrm{Log}\ (1 + a_n) \to q$. Entones, $\exp\ (\log \prod_N^M (1 + a_n) \to$

$\to \exp q = p \neq 0$, y $\prod_N^M (1 + a_n) \xrightarrow[M \to \infty]{} p$, QED.

COROLARIO. *Sea* $\sum M_n$ *una mayorante de* $\sum |u_n(z)|$ *para* $z \in$ D *dominio. Si cada función* u_n *es holomorfa en* D *entonces* $\prod_N^\infty (1 + u_n(z))$ *converge uniformemente a una función holomorfa no nula en* D, *si* N *es suficientemente grande.*

DEMOSTRACION. $\sum_{P+1}^Q |\mathrm{Log}\ (1 + u_n(z))| \leq \frac{3}{2} \sum_{P+1}^Q |u_n(z)| \leq \frac{3}{2} \sum_{P+1}^Q M_n < \varepsilon$ para todo

P, Q, $P < Q$, $P \geq P_0(\varepsilon)$. Luego,

$$e^{\log \prod_N^P (1 + u_n(z)))} . e^{\log \prod_{P+1}^Q (1 + u_n(z))} = [\prod_N^P (1 + u_n(z))].e^{O(\varepsilon)} =$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)\int_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)\, dt =$$

$$= -\int_0^x \{J_\nu(\beta t)(t(J_\nu(\alpha t))')' - J_\nu(\alpha t)(t(J_\nu(\beta t))')'\}\, dt =$$

$$= -\int_0^x \{(J_\nu(\beta t)t(J_\nu(\alpha t))')' - (J_\nu(\alpha t)t(J_\nu(\beta t))')'\}\, dt =$$

$$= \int_0^x \frac{d}{dt}\{t(J_\nu(\alpha t)(J_\nu(\beta t))' - J_\nu(\beta t)(J_\nu(\alpha t))')\}\, dt =$$

$$= x[J_\nu(\alpha x)\frac{d}{dx}(J_\nu(\beta x)) - J_\nu(\beta x)\frac{d}{dx}(J_\nu(\alpha x))] - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon[\ldots](\varepsilon) =$$

$$= x[J_\nu(\alpha x)(J_\nu(\beta x))' - J_\nu(\beta x)(J_\nu(\alpha x))'],$$

pues utilizando el desarrollo en serie de $J_\nu(\alpha x)$ y de $(J_\nu(\alpha x))'$ se ve que $\varepsilon[\ldots](\varepsilon) \to 0$ para $\varepsilon \to 0$. Queda así demostrada a). Veamos b). Consideremos la expresión

$$\frac{x}{\alpha - \beta}\{J_\nu(\alpha x)(J_\nu(\beta x))' - J_\nu(\beta x)(J_\nu(\alpha x))'\} = (\text{cf. } (34)) =$$

$$= \frac{x}{\alpha - \beta}\{J_\nu(\alpha x)(\frac{\nu}{x}J_\nu(\beta x) - \beta J_{\nu+1}(\beta x)) - J_\nu(\beta x)(\frac{\nu}{x}J_\nu(\alpha x) - \alpha J_{\nu+1}(\alpha x))\} =$$

$$= \frac{x}{\alpha - \beta}\{\beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x) - \alpha J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x)\} \xrightarrow[\alpha \to \beta]{} A =$$

$$= -x[x\beta(J_\nu'(\beta x)J_{\nu+1}(\beta x) - J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}'(\beta x)) - J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\beta x)],$$

donde el límite puede calcularse con la regla de L'Hôspital para $\alpha \to \beta$. Reemplazando en A, $J_\mu'(\beta x)$ por su expresión equivalente obtenida de (33), resulta

$$A = -x[J_{\nu+1}(\beta x)(\beta x J_{\nu-1}(\beta x) - \nu J_\nu(\beta x)) - J_\nu(\beta x)(\beta x J_\nu(\beta x) - (\nu+1)J_{\nu+1}(\beta x)) -$$

$$- J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\beta x)] = -x[\beta x J_{\nu+1}(\beta x)J_{\nu-1}(\beta x) - \beta x J_\nu^2(\beta x)] =$$

$$= x^2\beta[J_\nu^2(\beta x) - J_{\nu+1}(\beta x)J_{\nu-1}(\beta x)].$$

Pero $J_{\nu+1}(z)J_{\nu-1}(z) = (\frac{\nu}{z} J_\nu - J_\nu')(J_\nu' + \frac{\nu}{z} J_\nu) = -(J_\nu'^2 - \frac{\nu^2}{z^2} J_\nu^2)$, y reemplazando en la última expresión obtenemos

$$A = \beta x^2[J_\nu^2(\beta x) - \frac{\nu^2}{\beta^2 x^2} J_\nu^2(\beta x) + J_\nu'^2(\beta x)].$$

De a) sigue que

$$(\alpha + \beta)\int_0^x tJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta t)\, dt =$$

$$= \frac{x}{\alpha - \beta}(J_\nu(\alpha x)(J_\nu(\beta x))' - J_\nu(\beta x)(J_\nu(\alpha x))') \xrightarrow[\alpha \to \beta]{} 2\beta^2\int_0^x tJ_\nu^2(\beta t)\, dt =$$

$$= A = \beta^2 x^2(J_\nu^2(\beta x) - \frac{\nu^2}{\beta^2 x^2} J_\nu^2(\beta x) + J_\nu'(\beta x)).$$

Luego,

$$2\beta^2 \int_0^x tJ_\nu^2(\beta t)\, dt = J_\nu^2(\beta x)(\beta^2 x^2 - \nu^2) + (x\ (J_\nu(\beta x))')^2, \qquad \text{QED.}$$

*9. LOS DESARROLLOS ASINTOTICOS. Sea $F(z)$ definida en un sector $S = \{z: a \leq \arg z \leq b, |z| > R\}$ donde $\infty > R > 0$. La expresión

(38) $$F(z) \sim A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_n}{z^n} + \dots$$

tiene el siguiente significado: para $z \to \infty$, $z \in S$ y todo n,

(39) $$F(z) - A_0 - \frac{A_1}{z} - \dots - \frac{A_n}{z^n} = \frac{o(1)}{z^n}; \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

O sea, $|F(z) - \sum_{0}^{n} A_i z^{-i}| < \varepsilon |z|^{-n}$ si $|z| > r = r(\varepsilon)$, $z \in S$. Es obvio que (39) para $n \geq 1$, equivale a

$$F(z) - \sum_{0}^{n-1} A_j z^{-j} = \frac{O(1)}{z^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{40}$$

y a $F(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} A_0$ para $n = 0$. Más aún,

$$\lim_{|z| \to \infty} z^n \{F(z) - \sum_{0}^{n-1} \frac{A_j}{z^j}\} = A_n. \tag{41}$$

Al miembro derecho de (38) se lo llama el **desarrollo asintótico de** $F(z)$ en $z = \infty$, O en S, y queda unívocamente determinado. Sin embargo, funciones distintas pueden tener el mismo desarrollo asintótico.
Puede suceder que $F(z)$ no tenga un desarrollo asintótico, o que sea dificil calcularlo, pero si $F(z)/G(z)$ tiene uno:

$$\frac{F}{G}(z) \sim A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots, \tag{42}$$

escribiremos

$$F(z) \sim G(z)\{A_0 + \frac{A_1}{z} + \dots\}. \tag{43}$$

$A_0 G(z)$ será ahora el término dominante. Una expresión como $F(z) \sim A_0 G(z)$ significará entonces que $F(z)/G(z) \to A_0$ si $|z| \to \infty$, $z \in S$.

EJERCICIOS. 1) Si $f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} A_m z^{-m}$, $g(z) \sim \sum_{0}^{\infty} B_m z^{-m}$ entonces $f.g \sim \sum_{0}^{\infty} C_m z^{-m}$, $C_m = A_0 B_m + \dots + A_m B_0$.

2) Si $f(x) \sim \sum_{2}^{\infty} A_m x^{-m}$ para $0 < R < x < \infty$ entonces

$$\int_x^{\infty} f(t)\, dt \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{A_{m+1}}{m x^m}. \tag{44}$$

Presentaremos a continuación algunos desarrollos asintóticos. Omitimos, por el momento, su demostración.

I) $S = \{z: |z| > 1, |\arg z| \leqq \pi - \delta\}$, $\delta > 0$:

(45) $$\Gamma(z) \sim e^{-z} z^{z} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 + \frac{1}{12\, z} + \frac{1}{288\, z^2} + \dots\right).$$

Esto significa que en S, $\frac{\Gamma(z)\, e^z}{z^z} \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \sim 1 + \frac{1}{12\, z} + \dots$; la dependencia de δ sólo se presenta en los o y O de las fórmulas (39) y (40). Vale también que

(46) $$|\Gamma(x+iy)| \sim \sqrt{2\pi}\, |y|^{x-1/2}\, e^{-\pi|y|/2}, \qquad x \in R,\ |y| > 1.$$

De (45) se deduce que (demostrarlo)

(47) $$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, e^{-n}\left(1 + \frac{O(1)}{n}\right). \qquad n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, e^{-n}.$$

II) En la misma región S, si $\nu > -1$:

(48) $$J_\nu(z) \sim$$

$$\sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left[\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(\nu,2r)}{(2z)^{2r}} - \operatorname{sen}\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(\nu,2r+1)}{(2z)^{2r+1}}\right]$$

donde $(\nu,r) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\ \dots\ (4\nu^2 - (2r-1)^2)}{r!\ 2^{2r}}$.

III) En la misma región S, $Y_\nu(z)$ tiene el desarrollo II) pero donde deben intercambiarse sen y cos.

EJERCICIOS. 3) Demostrar que en S, si $\nu > -1$:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|I_m\, z|}}{|z|^{3/2}}\right),$$

y deducir que $J_\nu(z)$ tiene infinitos ceros positivos que se aproximan a $\frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + (2k+1)\frac{\pi}{2}$ al tender k a infinito.

4) En $|z| < 1$, $|J_\nu(z)| \leq |z|^\nu . O(1)$.

IV) Sean $S' = \{z: |\arg z| \leq \pi/4 - \delta\}$, $\delta > 0$, y Erfc(z) la función error:

(49) $$\mathrm{Ercf}(z) = \int_z^\infty e^{-t^2}\, dt.$$

En S' vale que

(50) $$\mathrm{Ercf}\ z \sim e^{-z^2} \{ \frac{1}{2z} - \frac{1}{2^2 z^3} + \frac{1.3}{2^3 z^5} - \frac{1.3.5}{2^4\ z^7} + \dots \}.$$

*10. LAS FUNCIONES DE HANKEL DE ORDEN ν. Estas funciones, también llamadas funciones de Bessel de **tercera clase**, verifican las relaciones

(51) $$\begin{cases} 2J_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z), \\ 2J_{-\nu}(z) = e^{\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(z) + e^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z), \end{cases}$$

para $|\arg z| < \pi$. Este último resultado se reduce a $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ si n es un entero. Sin embargo, para todos los valores de ν, $\{H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)\}$ es un sistema fundamental de la ecuación (20) con wronskiano

(52) $$W(H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)) = \frac{4}{\pi i z}.$$

Vale, para todo valor del parámetro ν, que

(53) $$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i} \{H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\}.$$

Además,

(54) $$H_\nu^{(1)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (\nu, r)}{(2iz)^r}\right],$$

en la misma región utilizada para J_ν.

Para los valores del parámetro $\nu = \pm 1/2$ se tienen expresiones sencillas de las funciones de Hankel:

(55) $$H^{(1)}_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ \frac{e^{iz}}{i}, \quad H^{(2)}_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ \frac{e^{-iz}}{-i},$$

(56) $$H^{(1)}_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ e^{iz}, \quad H^{(2)}_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ e^{-iz}.$$

La ecuación diferencial de Legendre. Polinomios de Legendre, ceros. La fórmula de Rodrigues. Ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

1. LA ECUACION DE LEGENDRE. En el estudio de la ecuación $\Delta u = 0$ en R^3 se presenta el problema de hallar soluciones de la forma $r^n . S_n(\theta,\phi)$ el que induce a considerar la **ecuación de Legendre:**

(1) $$(1 - z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0, \quad \lambda \in R,$$

para los valores $n(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ del parámetro λ.

$S_n(\theta,\phi)$ es el llamado **armónico sólido.** Aquí $x \in R^3$ se representa por sus coordenadas polares

$$(r,\theta,\phi) \; ; \; 0 < r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} < \infty, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \phi \leqq 2\pi.$$

La ecuación (1) puede escribirse en su forma autoadjunta:

(2) $$((1 - z^2)w')' + \lambda w = 0$$

(Este problema es semejante al de buscar soluciones de $\Delta u = 0$ de la forma $u = A(Z)w(\rho)F(\phi)$ que conduce a la ecuación diferencial de Bessel: $(zw')' + (z - \nu^2/z)w = 0$, donde ρ, θ y Z son las coordenadas cilíndricas de un punto $x \in R^3$).

Entonces, para $n = 0, 1, \ldots, \lambda = n(n + 1)$, la ecuación es

(3) $$w'' - \frac{2z}{1 - z^2} w' + \frac{n(n + 1)}{1 - z^2} w = 0.$$

$z = 1$ es un punto singular regular de la ecuación y $p(z) = \dfrac{(2z)/(z + 1)}{z - 1}$, $q(z) = - \dfrac{\lambda/(z + 1)}{z - 1}$.

Entonces $p_0 = 1$, $f_0 = 0$, $F(\alpha) \equiv \alpha(\alpha - 1) + \alpha = \alpha^2 = 0$ es la ecuación indicial. Una solución es regular alrededor de $z = 1$, y toda otra linealmente independiente posee una singularidad logarítmica en el punto $z = 1$, (cf. T.3, Cap. 6). Conociendo el comportamiento cualitativo de las soluciones, en vez de calcular los coeficientes p_n y q_n que darían la solución según el método expuesto en el capítulo 6, ensayamos directamente en (2) la "solución"

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t - 1)^k, \qquad t \in R,$$

y obtenemos

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \{2(k + 1)^2 c_{k+1} + [-\lambda + (k + 1)k]c_k\}(t - 1)^k = 0.$$

Luego, $c_{k+1}/c_k = -((k + 1)k - \lambda)/2(k + 1)^2$, y por tanto,

$$(6) \qquad c_k = \frac{[k(k - 1) - \lambda].[(k - 1)(k - 2) - \lambda]\ldots[2 - \lambda].[-\lambda].(-1)^k}{(k!)^2\, 2^k}\, c_0$$

Usando el criterio de D'Alembert se ve que la serie (4) converge en $|t - 1| < 2$. Si $k + 1 > |\lambda| > 0$,

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| > \frac{1}{2} \cdot \frac{k - 1}{k + 1}, \qquad \operatorname{sgn} c_{k+1} = \operatorname{sgn} - c_k .$$

De esto sigue que la serie no se comportará bien al tender t a -1. Si pretendemos una solución que tenga también a -1 como punto regular debemos entonces elegir $\lambda = n(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. En este caso $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$ (cf. (5)) y (4) se reduce a un polinomio a coeficientes reales:

$$(7) \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n + k)!(z - 1)^k}{(n - k)!(k!)^2 2^k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$\lambda = n(n + 1)$, $z \in C$. Estos son los llamados **polinomios de Legendre.**

2. LA FORMULA DE RODRIGUES. Vale que

(8) $$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n.$$

Una manera de demostrar la fórmula de Rodrigues es calculando el desarrollo en serie de Taylor del miembro derecho de (8), que llamaremos Q, y observando que coincide con $P_n(z)$. En efecto, el coeficiente k-ésimo del desarrollo de Taylor de Q(z) alrededor de z = 1 es igual

$$\frac{1}{k!} \frac{1}{2^n.n!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n+k} [(z - 1)^n (z + 1)^n] \Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{n!\ k!\ 2^n} \sum_{j=0}^{n+k} \binom{n+k}{j} \left(\frac{d}{dz}\right)^j (z - 1)^n \left(\frac{d}{dz}\right)^{n+k-j} (z + 1)^n \Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{2^n.k!} \binom{n+k}{n} \left(\frac{d}{dz}\right)^k (z + 1)^n \Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{2^n.k!} \binom{n+k}{n} n(n - 1)\ldots(n - k + 1) 2^{n-k} = \frac{1}{2^k} \frac{(n + k)!}{(n - k)!(k!)^2} .$$

Los primeros polinomios de Legendre son

$P_0(z) = 1,$ $\qquad$ $P_2(z) = (3z^2 - 1)/2,$

$P_1(z) = z,$ $\qquad$ $P_3(z) = z(5z^2 - 3)/2.$

Vemos entonces que estos polinomios tienen, como funciones, la misma **paridad** que el índice (como número). Y esto vale en general. En efecto,

(9) $$P_n(z) = \frac{1}{2^n.n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} z^{2(n-r)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{N(n)} \frac{(-1)^r (2n - 2r)!}{2^n.r!(n - r)!\ (n - 2r)!} z^{n-2r},$$

donde N(n) = n/2 si n es par, N(n) = (n - 1)/2 si n es impar. Sea C una circunferencia alrededor de t = z. Vale entonces la siguiente **fórmula integral de Schläfli**, consecuencia inmediata de la fórmula de Rodrigues y de la de Cauchy:

(10) $$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n(t - z)^{n+1}} dt .$$

Sea $n > 0$. $(x^2 - 1)^n$ se anula en $x = \pm 1$ y tiene un máximo en $x = 0$. Por tanto, $\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^n$ se anula en $x = 0$, y también en $x = \pm 1$ si $n > 1$. Repitiendo el el argumento obtenemos el

TEOREMA 1. $P_n(z)$ *tiene* n *ceros reales y distintos en* (-1,1). *Estos son todos sus ceros.*

(En efecto, $P_n(z)$ es un polinomio de grado n).

Usando la fórmula de Rodrigues e integrando por partes obtenemos

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)\, dx = 0 \quad \text{si } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Luego

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0 \quad \text{si } m < n. \tag{12}$$

Análogamente,

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(t)\, dt = \frac{1}{2^{2n}.n!^2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^n}{dt^n}(1 - t^2)^n\right)^2 dt = \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}.n!^2}(2n)! \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n\, dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}.n!^2} \int_{-1}^{1} (1 - t)^n (1 + t)^n\, dt =$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}.n!^2} .2^{2n+1} B(n+1,n+1) = \frac{2}{2n + 1} .$$

$$\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)\, dt = \frac{2^{n+1}.n!^2}{(2n + 1)!}. \tag{14}$$

Funciones holomorfas en varias variables complejas. Lema de Hartogs. Teorema de preparación de Weierstrass. Teorema de las funciones implícitas.

1. FUNCIONES HOLOMORFAS EN VARIAS VARIABLES COMPLEJAS. Consideraremos funciones a valores complejos $F(z,w)$ con $(z,w) \in C \times C = C^2$ (aunque sin mayor dificultad hubiéramos podido tratar asimismo funciones $F(z_1,\ldots z_n)$ con $z_i \in C$). Sea G_i un abierto de C, $i = 1,2$. Diremos que $F(z,w)$ es **holomorfa** en $G_1 \times G_2$, $z \in G_1$, $w \in G_2$, si F es continua y para todo $z \in G_1$ es holomorfa en $w \in G_2$ y para todo $w \in G_2$ es holomorfa en $z \in G_1$

Brevemente, F es holomorfa si es continua y separadamente holomorfa.

Diremos que $F(z,w)$ es **holomorfa en un punto** $(z_o,w_o) \in C^2$ si en un entorno bicircular $B_{r_1,r_2}(z_o,w_o) = \{(z,w): |z - z_o| < r_1, |w - w_o| < r_2\}$ del punto, F es holomorfa. O sea, F es holomorfa en $G_1 \times G_2$ si y sólo si es holomorfa en cada uno de sus puntos. En esta situación, si Q es un cuadrado con centro z contenido en G_1, tenemos

$$F_z'(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q} \frac{F(s,w)}{(s - z)^2}\, ds \quad . \tag{1}$$

Luego, $F_z'(z,w)$ es holomorfa en $G_1 \times G_2$, y siguiendo así tenemos el

TEOREMA 1. *Si* $F(z,w)$ *es holomorfa en* $G_1 \times G_2$ *entonces todas sus derivadas* $\dfrac{\partial^{m+n}F(z,w)}{\partial z^m\, \partial w^n}$ *son holomorfas en* $G_1 \times G_2$.

La definición de holomorfía dada es sobreabundante pues vale el importante

TEOREMA 2 (Hartogs). *Sea* $f(z,w)$ *a valores en* C *con dominio* $G_1 \times G_2$. *Si* f *es separadamente holomorfa entonces es continua, y por tanto holomorfa en* $G_1 \times G_2$.

Aceptamos este resultado. Veamos que vale el

TEOREMA 3. *$F(z,w)$ es holomorfa en (z_0,w_0) si y sólo si es desarrollable en serie de potencias de la forma*

$$(2) \qquad F(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(w - w_0)^n.$$

absoluta y uniformemente convergente en $B_{\varepsilon,\varepsilon}(z_0,w_0)$, para cierto $\varepsilon > 0$, con $a_n(z)$ holomorfa en $B_\varepsilon(z_0)$ para todo n.

DEMOSTRACION. Sea $F(z,w)$ holomorfa en $B_{r,r}(z_0,w_0)$ y $z \in B_{r/2}(z_0)$. Entonces, si

$$(3) \quad a_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r/2}(w_0)} \frac{F(z,t)}{(t - w_0)^{n+1}}\,dt, \; C_{r/2}(w_0) = \{t: |t - w_0| = r/2\}.$$

obtenemos (2) con $|a_n(z)| \leq M(r/2)^{-n}$, $M = \sup\limits_{C_{r/2} \times C_{r/2}} |F|$. Si $\varepsilon = r/4$, la serie (2) es mayorada por la serie

$$M \sum 2^{-n}.$$

Recíprocamente, si $F(z,w)$ es desarrollable en una serie de portencias de la forma (2), uniformemente convergente, entonces sigue inmediatamente de la definición de holomorfía que ella define una función holomorfa en (z_0,w_0), QED.

2. LEMA DE HARTOGS. Sea G un dominio acotado en C. Sabemos que usando el teorema de Weierstrass puede construirse una función $f(z)$ holomorfa en G con ceros distribuídos de tal manera que se acumulen en todo punto del contorno de G. Luego, f no puede extenderse holomórficamente fuera de G. Sin embargo en varias variables complejas vale el

LEMA 1. *Sean $r > 0$, $D = B_{r,r}(0,0)\setminus\overline{B}_{r/2,r/2}(0,0)$ y $f(z)$ holomorfa en D. Entonces existe F holomorfa en $B = B_{r,r}(0,0)$ tal que $F|_D = f$.*

DEMOSTRACION. Para $z_1 \in B_r(0)$ fijo tenemos

$$f(z_1,z_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(z_1).z_2^k, \qquad a_k(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r'} \frac{f(z_1,t)}{t^{k+1}}\,dt,$$

donde $\frac{r}{2} < |z_2| < r' < r$. Por otra parte $a_k(z_1)$ es holomorfa en $z_1 \in B_r(0)$. Como $f(w_1,t)$ es holomorfa en $t \in B_r(0)$ si $\frac{r}{2} < |w_1| < r$, resulta que $a_k(w_1) = 0$ para $k < 0$. Luego, $a_k(z_1) \equiv 0$ si $k < 0$. Definiendo $F(z_1,z_2) = \sum_0^{\infty} a_k(z_1).z_2^k$ tenemos la tesis, QED.

COROLARIO. *Sea* f *holomorfa en el dominio* $D \subset C^2$. *Entonces* f *no posee ceros aislados.*

DEMOSTRACION. Supongamos que $P \in D$ sea un cero aislado en D. Sea $B_{r,r}(P)$ un entorno bicircular de P contenido en D donde f no se anula excepto por el punto P. Entonces, $g(z,w) := 1/f(z,w)$ es holomorfa en $B_{r,r}(P)\setminus B_{r/2,r/2}(P)$. Del lema de Hartogs sigue ahora que g es prolongable analíticamente a $B_{r,r}(P)$, y esto lleva a una contradicción, QED.

COROLARIO 2. *Si* f *es holomorfa en el dominio* $D \subset C^2$ *entonces el conjunto de los ceros de* f, *si no es vacío, se acumula en el contorno de* D.

Dicho de otra forma si $Z = \{P \in D: f(P) = 0\} \neq \emptyset$ entonces no es compacto. Esto puede verse usando el corolario 1. Preferimos aquí obtenerlo como consecuencia del teorema de Weierstrass que sigue, el cual, por otra parte, mejora al corolario 1.

3. EL TEOREMA DE PREPARACION DE WEIERSTRASS. Este teorema dice así

TEOREMA 4. *i) Si la función* $F(z,w)$ *holomorfa en* $B_{r_1,r_2}(z_0,w_0)$ *es tal que* $F(z_0,w_0) = 0$, $F \not\equiv 0$, *entonces en un entorno bicircular* $B_{s,r}(z_0,w_0) \subset B_{r_1,r_2}$, *la función es de la forma*

$$(4) \qquad F(z,w) = (z - z_0)^p.[(w - w_0)^k + A_1(z)(w - w_0)^{k-1} + \ldots + A_k(z)].F_1(z,w)$$

donde p *y* k *son enteros no negativos;* $A_i(z)$ *es holomorfa en* $B_s(z_0)$, $A_i(z_0) = 0$,

$i = 1, 2, \ldots, k$; $F_1(z,w) \neq 0$ *en* $B_{s,r}$.

ii) Si $F(z_o,w) \not\equiv 0$ *en un entorno de* w_o *entonces* $p = 0$ *y* k *es el orden del cero* $w = w_o$ *de la función* $F(z_o,w)$.

En la demostración del teorema recurriremos al siguiente importante teorema algebraico.

TEOREMA 5. *Sea* $F(w) = w^n + A_1 w^{n-1} + \ldots + A_n$, $A_i \in C$, *un polinomio de grado* n. *Los polinomios homogéneos de* n *variables:*

$$(5) \qquad S_j(z_1,\ldots,z_n) = z_1^j + \ldots + z_n^j\,, \qquad z_i \in C,\ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

tienen la propiedad que si $w_1, \ldots, w_n$ *son las raíces de* F *entonces los coeficientes* A_i *son polinomios en las funciones simétricas* $S_j(w_1,\ldots,w_n)$, $j = 0,1,\ldots,i$, *a coeficientes reales racionales.*

DEMOSTRACION. Como $F(w) = (w - w_1)\ldots(w - w_n)$, A_i es un polionomio homogéneo en las w_h de grado i a coeficientes enteros. El teorema dice que $A_i(w_1,\ldots,w_n) = P_i(S_1,\ldots,S_i)$, P_i con coeficientes en Q. Sea

$$(5) \qquad \frac{F(w)}{w - w_j} = w^{n-1} + B_1^{(j)} w^{n-2} + \ldots + B_{n-1}^{(j)}\,, \quad (B_o^{(j)} = 1).$$

Entonces, $A_k = B_k^{(j)} - B_{k-1}^{(j)} w_j$, $(A_o = 1)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
B_1^{(j)} &= A_1 + A_o w_j,\\
B_2^{(j)} &= A_2 + A_1 w_j + A_o w_j^2,\\
B_3^{(j)} &= A_3 + A_2 w_j + A_1 w_j^2 + A_o w_j^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
B_{n-1}^{(j)} &= A_{n-1} + A_{n-2} w_j + \ldots + A_o w_j^{n-1}.
\end{aligned}$$

Luego,

(6) $$F'(w) = \sum_{j=1}^{n} \frac{F(w)}{w - w_j} = A_o S_o w^{n-1} + (S_o A_1 + S_1 A_o) w^{n-2} +$$

$$+ (S_o A_2 + S_1 A_1 + S_2 A_o) w^{n-3} + \dots + (S_o A_{n-1} + S_1 A_{n-2} + \dots + S_{n-1} A_o) =$$

$$= n w^{n-1} + (n-1) A_1 w^{n-2} + \dots + A_{n-1}.$$

Tenemos entonces:

$$A_o = 1,$$
$$A_1 = -S_1 A_o = -S_1,$$
$$2A_2 = -(S_1 A_1 + S_2 A_o) = S_1^2 - S_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(n-1) A_{n-1} = -S_1 A_{n-2} - \dots - S_{n-1} A_o,$$

quedando solamente por determinar el coeficiente A_n, el que se obtiene de

(7) $$0 = \sum_{j=1}^{n} F(w_j) = S_n + A_1 S_{n-1} + \dots + n A_n,$$ QED.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4. Por el teorema 3, $F(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(w - w_o)^n$. Si $F(z_o,w) \equiv 0$ en un entorno de w_o entonces $a_n(z_o) = 0$ para todo n. Como $F(z,w) \not\equiv 0$ existirá un m tal que $a_m(z) \not\equiv 0$ y por tanto un $p \in N$ tal que $a_j(z) = (z - z_o)^p b_j(z)$ para todo j, con $b_q(z_o) \neq 0$ para algún índice q. O sea, $F(z,w) = (z - z_o)^p . G(z,w)$ con $G(z_o,w) \not\equiv 0$. Basta entonces probar ii). Podemos suponer $z_o = w_o = 0$ y por tanto que $F(0,w) \not\equiv 0$. Sea k el orden del cero $w_o = 0$ de esta última función y $Q = \overline{B_r(0)} \subset B_{r_2}(0)$ un disco donde $F(0,w)$ no tenga ceros no nulos. Como $F(z,w) \rightrightarrows F(0,w)$ al tender $z \to 0$, $w \in Q$, $F(z,w)$ tiene exactamente k raíces en el interior de Q, si $|z| \leq s < r_1$. Sean estas $w_i(z)$, $i = 1, \dots, k$. Consideremos la función

$$P(z,w) := (w - w_1(z)) \dots (w - w_k(z)) = w^k + A_1(z) w^{k-1} + \dots + A_k(z) .$$

Obviamente $A_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Sea $z \in B_s(0)$. Vale que

$$(8) \qquad S_j(z) = w_1(z)^j + \dots + w_k(z)^j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q} w^j \frac{F'_w(z,w)}{F(z,w)}\, dw \,.$$

$S_j(z)$ es entonces holomorfa en $z \in B_s(0)$. Como los coeficientes $A_m(z)$ son polinomios en las funciones simétricas elementales también son holomorfos en $B_s(0)$. Luego, $P(z,w)$ es holomorfa en $B_{s,r}(0,0)$. Definamos $F_1(z,w) = F(z,w)/P(z,w)$. Luego, $F_1 \neq 0$ en $B_{s,r}(0,0)$ y es holomorfa en w para cada $z \in B_s(0)$. Además, para esos z tenemos:

$$F_1(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q} \frac{F_1(z,t)}{t - w}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q} \frac{F(z,t)}{(t - w)P(z,t)}\, dt.$$

De aquí sigue que F_1 es holomorfa en z para cada $w \in B_r(0)$, QED.

4. EL TEOREMA DE LAS FUNCIONES IMPLICITAS. Sea $F(z,w)$ holomorfa en $B_{r,r}(z_0,w_0)$.

TEOREMA 6. *Sea* w_0 *un cero simple de* $F(z_0,w)$. *Si* ε *es bastante pequeño existe* $W(z)$ *holmorfa en* $B_\varepsilon(z_0)$ *tal que para* $(z,w) \in B_{\varepsilon,\varepsilon}(z_0,w_0)$ *las relaciones*

$$F(z,w) = 0 \quad y \quad w = W(z)$$

son equivalentes.

DEMOSTRACION. Aplicando el teorema 4 con $p = 0$, $k = 1$, resulta que $F(z,w) \equiv (w - w_0 + A_1(z)).F_1(z,w) = 0$ si $w = w_0 - A_1(z)$ en un entorno de z_0, y sólo en ese caso, QED.

CAPITULO 9.

La transformada de Laplace. El teorema de Lerch. Algunas transformadas útiles. Aplicación a las ecuaciones diferenciales ordinarias. La convolución. El teorema del valor inicial.

1. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE. Sea $f(t)$ una función (medible) definida en $(0,\infty)$ tal que $|f(t)| \leqq Ke^{Mt}$, K y M constantes reales. La transformada de Laplace de f, $\phi(s) = \mathcal{L}(f)$ se define, en $s > M$, por

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Sin embargo puede ocurrir que el integrando en (1) sea integrable aún para valores $s \leqq M$. Al número real, o $-\infty$, dado por

$$a(f) = \inf \{s: e^{-st}.|f(t)| \text{ es integrable en } (0,\infty)\} \tag{2}$$

lo llamaremos **abscisa de convergencia (absoluta)** de ϕ. Obviamente si (1) existe para $s > a$ entonces también existe para todo $s \in C$ tal que $\operatorname{Re} s > a$.
No cualquier función, aun muy regular, es la transformada de Laplace de otra pues del teorema de Lebesgue de la convergencia dominada se deduce que

$$\phi(s) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0. \tag{3}$$

La transformada de una función caracteriza a ésta. En efecto, puede demostrarse el siguiente teorema debido a Lerch:

TEOREMA 1. *Si para cierto* s_0 *y* $h > 0$, *y todo* $n \in N$, *vale que* $(\mathcal{L}f)(s_0 + nh) = (\mathcal{L}g)(s_0 + nh)$ *entonces* $f(t) = g(t)$ *c.d.* $t \in (0,\infty)$.

La transformación de Laplace es lineal:

$$\mathcal{L}(c_1f_1 + c_2f_2)(s) = c_1\mathcal{L}(f_1)(s) + c_2\mathcal{L}(f_2)(s), \quad s > \sup(a(f_1),a(f_2)), \tag{4}$$

donde $c_i \in C$, $i = 1,2$. A continuación presentamos una útil minitabla de tranformadas.

$f(t)$ $(t \in (0,\infty))$	$\mathcal{L}(f)$	s $(\in R)$
t^r, $r = 0, 1, 2, \ldots$	$\Gamma(r+1)/s^{r+1}$	$s > 0$
$t^r e^{at}$, $r = 0, 1, 2, \ldots, a \in R$	$\Gamma(r+1)/(s - a)^{r+1}$	$s > a$
$\cos bt$	$s/(s^2 + b^2)$	$s > 0$
$\lg t$	$(\Gamma'(1) - \lg s)/s$	$s > 0$
$J_0(t)$	$1/\sqrt{s^2 + 1}$	$s > 0$
$\text{sen } t/t$	$\text{arg tg } 1/s$	$s > 0$

TEOREMA 2. *Si* $u \in C^k(0,\infty)$ *y* $|u^{(k)}(t)| \leq Ke^{Mt}$ *entonces*

$$(5) \qquad \mathcal{L}(u^{(k)}) = s^k \mathcal{L}(u) - (s^{k-1}.u(0) + \ldots + u^{(k-1)}(0)).$$

DEMOSTRACION. Veámoslo para $k = 1$. Si $|f'(t)| \leq Ke^{Mt}$ entonces $f(t) = \int_0^t f'(x) + C$. Luego $f(t)$ admite una cota semejante. Entonces, si s es bastante grande, integrando por partes, obtenemos

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

O sea, $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$. El caso $k > 1$ sigue por iteración del proceso precedente, QED.

2. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES A COEFICIENTES CONSTANTES. La transformada de Laplace se utiliza con éxito para resolver prácticamente ciertas ecuaciones diferenciales. Algunas de éstas son las ordinarias a coeficientes constantes:

$$(7) \qquad P(u) \equiv u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u = \gamma(x),$$

$a_i \in C$, $-\infty < x < +\infty$. Vale el siguiente teorema de valores iniciales:

TEOREMA 3. *Sea* $p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ *el polinomio característico de la ecuación* $P(u) = 0$ *a coeficientes reales. Si* λ_j, $j = 1, \ldots, m$, *son los ceros distintos de* $p(\lambda)$ *entonces la ecuación homogénea* $P(u) = \gamma = 0$ *tiene* n *soluciones* *de la forma*

(8) $\quad x^r e^{\lambda_j x}$; $\quad j = 1, \ldots, m$; $\quad r = 0, 1, 2, \ldots$, (orden del cero λ_j) - 1.

Estas soluciones son linealmente independientes y toda otra solución de $P(u) = 0$ es combinación lineal de éstas. Si $P(f) = 0$ y $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ entonces $f \equiv 0$. Es decir, existe una y sólo una solución de $P(u) = 0$ con los valores de $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$ prefijados en un punto dado.
Para resolver la ecuación no homogénea puede recurrirse al siguiente teorema de existencia del núcleo de Green del problema:

TEOREMA 4. *Existe una función* $G(y)$ *nula en* $(-\infty,0)$ *tal que si* $\gamma(t)$ *se anula en* $\{t < a\}$ *y es continua en* $\{a \leq t\}$, *la función*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\gamma(\tau)\, d\tau = \int_a^t G(t-\tau)\gamma(\tau)\, d\tau =: \gamma * G \tag{9}$$

es la única solución de $P(u) = \gamma$ *en* $\{t > a\}$ *tal que* $u(a) = \ldots = u^{(n-1)}(a) = 0$. $G(s)$ *es una combinación lineal de las funciones (8) en* $\{s > 0\}$ *y además* $K(t,\tau) = G(t-\tau) \in C^{n-2}$. *(Si* $\gamma(a) \neq 0$ *entonces* $u^{(n)}(a)$ *no existe).*

No demostraremos aquí los teoremas 3 y 4.

3. APLICACION DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE. El problema de valores iniciales: $P(u) = \gamma$, $u(0) = \ldots = u^{(n-1)}(0) = 0$, de la ecuación (7) puede resolverse utilizando el

TEOREMA 5. *Para* s *suficientemente grande vale* $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(\gamma)/p(s)$ *si* $|\gamma(t)| \leq Ke^{Mt}$ *y* u *es solución del problema.*

DEMOSTRACION. Esto es consecuencia del teorema 4 si demostramos que u crece, a lo más, exponencialmente. Como $|G(t)| \leq ce^{dt}$ para $t \to \infty$ tenemos

$$|u(t)| \leq \int_0^t ce^{d(t-x)}.Ke^{Mx}\, dx \leq Qe^{qt}, \qquad \text{qed.}$$

Conocida $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(\gamma)/p(s)$ el problema de hallar u se reduce al de encontrar $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\gamma)/p(s))$. Si p(s) tiene raíces simples entonces

$$\frac{1}{p(s)} = \frac{b_1}{s - \lambda_1} + \ldots + \frac{b_n}{s - \lambda_n}, \quad b_j = 1/p'(\lambda_j).$$

En esta situación bastará hallar $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\gamma)/(s - \lambda_j))$ para resolver la ecuación no homogénea.

4. CONVOLUCION. Supongamos que f y g sean funciones definidas en $(-\infty,\infty)$, localmente integrables y nulas en $(-\infty,0)$. La convolución de f con g se define por

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt = (g * f)(x).$$

Si h es otra función con las propiedades de f y g, tenemos:

$$(f * g) * h = f * (g * h). \tag{10}$$

Si f(x) y g(x) son de la forma $O(e^{Kx})$ entonces $(f * g)(x) = O(e^{Kx})$ y por tanto:

$$\mathcal{L}(f * g) = \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(t)g(x - t)\,dt\right)dx = \tag{11}$$

$$= \int_0^\infty f(t)\,dt \int_t^\infty e^{-sx} g(x-t)\,dx = \int_0^\infty f(t)e^{-ts}\,dt \int_0^\infty g(v)\,e^{-vs}\,dv =$$

$$= \mathcal{L}(f).\mathcal{L}(g).$$

Sea H la función de Heaviside: = 1 en $[0,\infty)$, = 0 en $(-\infty,0)$. Entonces, $H * H = x$; $H * \overset{n}{\smile\!\!\ldots} * H = x^{n-1}/n-1!$ y $H * f = \int_0^x f(t)\,dt$ = primitiva de f nula en x = 0.

Luego

$$H * \overset{n}{\ldots} * H * f = \int_0^x \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} f(t_1)\,dt_1 \ldots dt_n = \tag{12}$$

[19] G. VALIRON, *Funtions Analytiques*, (1954).

[20] L.I. VOLKOVSKI, G.L. LUNTS, I.G. ARAMANOVICH, *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja*, (1972).