INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 27

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

INFORME TECNICO No. 27

Diferenciabilidad

y

propiedades finas de funciones

LIC. MARTA A. CASAMITJANA

INMABB
UNS-CONICET
1991-1992

El objetivo de estas notas es brindar una recopilación y actualización, que pretendemos resulte una presentación ordenada y lo más completa posible, de trabajos sobre diferenciabilidad total, propiedades del Jacobiano y cambio de variable en la integral de Lebesgue (en $\mathbb{R}^2$) de R.Rademacher [Ra]; diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$ de A.Fadell [Fa] ; diferenciabilidad de funciones Lipschitz de J.Saint-Pierre [SP] y cambio de variable en la integral de Lebesgue ($\mathbb{R}^n$) de M.Tsuji [Ts]. (Este último en etapa de revisión).

Para tal fin ha sido necesario incluir nuevas definiciones y presentar en otra forma resultados útiles para el esclarecimiento de varias demostraciones. Además, se ha agregado como complemento abundante bibliografía, seguramente no exahustiva, sobre los temas mencionados y que se intenta completar.

Quiero manifestar mi agradecimiento al Dr. Rafael Panzone quien sugirió el tema de estudio, que merced a sus valiosas obsrevaciones y comentarios pudo concretarse en estas notas.
Además no puedo dejar de mencionar el apoyo prestado por la Directora del INMABB, Mg. Aurora G. de Pousa y por la Bibliotecaria Leticia Giretti, entusiasta experta en la búsqueda de material bibliográfico.

Los gastos originados por la confección de este Informe Técnico fueron costeados con fondos del Proyecto PID 3002700/88 que dirige el Dr.Panzone.-

EL TEOREMA DE RADEMACHER

§ 1.

Sea G un dominio (= abierto, conexo) acotado , $G \subseteq \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ una función definida en G y a valores reales.

DEFINICION 1.1

(1) $$W_f(x,y;\rho) = \sup \frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)|}{(h^2+k^2)^{1/2}} \qquad \text{para } 0<h^2+k^2 \leq \rho^2$$

(2) $$L_f(x,y) = \lim_{\rho \to 0} W_f(x,y;\rho) = \overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)|}{(h^2+k^2)^{1/2}}$$

Observemos que en (2) el límite existe pues para x e y fijos , W_f es una función de ρ monótona no decreciente.

Introduciremos la siguiente notación:

Sea $P(x,y)$ un punto del plano XY . Pondremos $z=(x,y)$, $d(P,O)=|z|=(x^2+y^2)^{1/2}$, $\Delta x=h$, $\Delta y=k$, $d(P,P')=|\Delta z|=(h^2+k^2)^{1/2}$, $P'(x+h,y+k)$.

$\Delta f=f(x+h,y+k)-f(x,y)$, $\Delta f_h=f(x+h,y)-f(x,y)$, $\Delta f_k=f(x,y+k)-f(x,y)$

Así

$$W_f(x,y;\rho)=\sup \frac{|\Delta f|}{|\Delta z|} \qquad 0<(\Delta z)^2 \leq \rho^2$$

$$L_f(x,y)=\overline{\lim_{\rho \to 0}} \frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}$$

Derivadas principales o derivadas de Dini de $f(x,y)$:

$${}_xD^+f = \overline{\lim_{h \searrow 0}} \frac{\Delta f_h}{h} \qquad {}_xD_+f = \underline{\lim_{h \searrow 0}} \frac{\Delta f_h}{h}$$

$${}_xD^-f = \overline{\lim_{h \nearrow 0}} \frac{\Delta f_h}{h} \qquad {}_xD_-f = \underline{\lim_{h \nearrow 0}} \frac{\Delta f_h}{h}$$

$${}_yD^+f = \overline{\lim_{k \searrow 0}} \frac{\Delta f_k}{k} \qquad {}_yD_+f = \underline{\lim_{k \searrow 0}} \frac{\Delta f_k}{k}$$

$$ {}_yD^-f = \overline{\lim_{k\to 0}} \frac{\Delta f_k}{k} \qquad {}_yD_-f = \underline{\lim_{k\to 0}} \frac{\Delta f_k}{k}. $$

Derivadas laterales :

$$ \frac{\partial^+ f}{\partial x} = {}_xD^+f = {}_xD_+ f \qquad \frac{\partial^- f}{\partial x} = {}_xD^-f = {}_xD_- f $$

$$ \frac{\partial^+ f}{\partial y} = {}_yD^+f = {}_yD_+ f \qquad \frac{\partial^- f}{\partial y} = {}_yD^-f = {}_yD_- f $$

Derivadas parciales :

$$ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^+ f}{\partial x} = \frac{\partial^- f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^+ f}{\partial y} = \frac{\bar{\partial} f}{\partial y} $$

<u>LEMA</u> <u>1.1</u>.Si

(H1) $L_f(x,y)$ es finita en G

entonces

a) $f(x,y)$ es continua en G

b) $L_f(x,y)$ es medible en G

Demostración:

a).Existe una constante $k>0$ tal que

$$ L_f(x,y)<k $$

luego,existe ρ_o tal que

$$ W_f(x,y)<k \qquad \text{para } |\Delta z|<\rho_o, $$

entonces

$$ |\Delta f|<k|\Delta z| \qquad \text{para } |\Delta z|<\rho_o $$

lo que prueba la continuidad de f en G.

b).Basta probar que $W_f(x,y;\rho)$ es medible en G.Sea $\varepsilon>0$,arbitrario,y $G_\varepsilon=\{z=(x,y)\in G:d(z,\partial G)>\varepsilon\}$.Si $\rho\le\varepsilon$,$W_f(x,y;\rho)$ está definida sobre el conjunto medible G_ε.Por a) f es continua,luego el supremo puede ser calculado sobre racionales h,k. Teniendo en cuenta que el supremo de una familia numerable de funciones medibles es medible, resulta W_f medible en G_ε, culquiera que sea ε, por consiguiente medible en G.–

<u>DEFINICION</u> <u>1.2</u>. Sea $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Una función $f: G \to \mathbb{R}$ se dice Lipschitz uniforme en G, si para todo h,k tal que $P(x,y)$, $P'(x+h, y+k)$ pertenezcan a G, existe una constante M>0 tal que

$$(1.1) \qquad |\Delta f| = |f(P)-f(P')| \leq M|\Delta z|$$

La menor constante M para la cual (1.1) se verifica para todo h,k se llama constante de Lipschitz para la función f y se nota

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup\{|\Delta f|/|\Delta z| : P,P' \in G\}.$$

<u>DEFINICION</u> <u>1.3</u>. Una función $f(x,y)$ definida en $G \subseteq \mathbb{R}^2$ se dice uniformemente Lipschitziana en cada una de las variables o separadamente uniformemente Lipschitz, si para todo $h,k \neq 0$ tales que $P'(x+h,y)$, $P''(x,y+k)$ pertenezcan a G, existe una constante M>0 tal que

$$(1.2) \qquad |\Delta f_h| \leq M|h| \qquad , \qquad |\Delta f_k| \leq M|k|$$

_Indicaremos con (H2) la hipótesis siguiente:

(H2) $L_f(x,y)$ sumable en G. (i.e. L medible en G e $\iint_G L_f \, dxdy < \infty$)

<u>PROPOSICION</u> <u>1.1</u>. Si $f(x,y)$ es uniformemente Lipschitz en cada una de las variables en un dominio acotado G entonces L_f verifica (H1) y (H2).

Demostración:

Probaremos que (1.2) implica

$$|\Delta f| \leq 2M|\Delta z|$$

En efecto,

$$\frac{|\Delta f|}{|\Delta z|} = \frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y+k)+f(x,y+k)-f(x,y)|}{|\Delta z|} \leq \frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y+k)|}{|\Delta z|} +$$

$$+ \frac{|f(x,y+k)-f(x,y)|}{|\Delta z|} = \frac{|\Delta f_h(x,y+k)|}{|\Delta z|} + \frac{|\Delta f_k(x,y)|}{|\Delta z|} \leq$$

$$\leq \frac{|\Delta f_h(x,y+k)|}{|h|} + \frac{|\Delta f_k(x,y)|}{|k|} \leq 2M$$

Entonces también $L_f \leq 2M$, por lo tanto L_f es finita y acotada en el dominio acotado G.--

<u>DEFINICION</u> <u>1.4</u>.Una función $f:G \longrightarrow \mathbb{R}$,$G\subseteq\mathbb{R}^2$,se dice Lipschitz sobre compactos en G,si para cada compacto $K \subset G$ existe una constante $M_K>0$ tal que

$$|\Delta f| \leq M_K|\Delta z| \tag{1.3}$$

para todo h,k tal que $P(x,y).P'(x+h,y+k)$ pertenezcan a K.

<u>DEFINICION</u> <u>1.4</u>′.Una función $f:G \longrightarrow \mathbb{R}$,$G\subseteq\mathbb{R}^2$,se dice localmente Lipschitziana si para todo $P \in G$ existe una esfera $K[P,r(P)]$,con $\bar{K}\subset G$,y una constante $M_P>0$ tal que si P′,P″ están en K entonces

$$|\Delta f|=|f(P')-f(P'')| \leq M_P|P'-P''|.$$

<u>OBSERVACION</u>:

De la demostración anterior (Prop.1.1)sigue que una función uniforme Lipschitziana en cada una de las variables (con cota M), satisface una condición de Lipschitz local ,con constante de Lipschitz $Lip(f)\leq 2M$.

<u>PROPOSICION</u> <u>1.2</u>.Las definiciones <u>1.4</u> y <u>1.4</u>′ son equivalentes.

Demostración.Es obvio que <u>Def.1.4</u> implica <u>Def.1.4</u>′.Probaremos la recíproca.Sea C un compacto de G , sea $\mathcal{K} = \{K[P,r]\}_{P\in\mathcal{K}}$ un cubrimiento de C y $\{K[P_i,r(P_i)\},i=1,\dots,n,$ un subcubrimiento finito de C.Por el Lema de Lebesgue [HY],existe un número positivo ε tal que si $P_1\in C$,toda esfera $K[P_1,r_1]$ con $r_1\leq \varepsilon$, está contenida en $K[P_j,r(P_j)]$ para algún j.

Sean P′,P″ pertenecientes a C. Si $|P'-P''|=|\Delta z| < \varepsilon$,entonces $P''\in K[P',\varepsilon] \subseteq K[P_j,r(P_j)]$para algún j.La Def.1.4′ implica que existe una constante $M_{P_j}>0$ tal que

$$|\Delta f|=|f(P')-f(P')| \le M_{P_j} |\Delta z| \le (\sup_j . M_{P_j})|\Delta z|=M|\Delta z|,$$

con $M=\sup_j . M_{P_j}$.

Si $|P'-P''|=|\Delta z| \ge \varepsilon$,como f es acotada en el compacto C,

$$|\Delta f| \le (2/\varepsilon)(\max_C . |f(x,y)|)\varepsilon \le (2/\varepsilon)(\max_C . |f(x,y)||\Delta z|=M'|\Delta z|$$

con $M'=(2/\varepsilon)\max_C . |f(x,y)|$.-

<u>COROLARIO</u> <u>1.2.1</u>.Sea G un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ y $f:G \longrightarrow \mathbb{R}$,f localmente Lipschitz.Dado $\eta>0$,sea $G_\eta=\{ P\in G ; d(P,\partial G)>\eta/2\}$. Entonces f es Lipschitz uniforme en cada G_η .-

<u>NOTA</u>.Nada puede decirse sobre la función en G.Por ejemplo,la función $f(x)=1/x$,en el intervalo (0,1) es localmente Lipschitz y no uniformemente Lipschitz .-

<u>PROPOSICION</u> <u>1.3</u>.Si f es acotada en G y para todo $\varepsilon>0$ dado verifica

(1.4) $$|\Delta f| \le M|\Delta z|$$

para todo h k tal que $|\Delta z| \le \varepsilon$, (1.4) vale también para todo h,k y otra constante M.Es decir f es uniformemente Lipschitziana.

<u>PROPOSICION</u> <u>1.4</u>.Sea G convexo.Si f es localmente Lipschitz con una misma constante M,entonces f es Lipschitz uniforme en G, con $Lip(f) \le M$.

Demostración.Consideremos el segmento $\overline{P'P''}\subseteq G$, con P',P" en G.Sea $\{K_j\}$ una familia finita de entornos cerrados con centro en un punto del segmmento $\overline{P'P''}$ y radios pequeños tal que $K_j\subseteq G$ y $\overline{P'P''}\subseteq \bigcup_j K_j$ .Existe una partición $\{Q_j\}$ de $\overline{P'P''}$ tal que $Q_o=P',Q_n=P''$ y tal que cada segmento $\overline{Q_jQ_{j+1}}$ está contenido en algún K_h.Puesto que f es localmente Lipschitziana con la misma constante M,

$$|f(P') - f(P'')| \le \sum_j |f(Q_{j-1})-f(Q_j)| \le M \sum_j |Q_{j-1}-Q_j| \le M|P'-P''|._$$

Para demostrar la proposición siguiente asumiremos el teorema para funciones de una variable real,que a continuación se enuncia.

TEOREMA. Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ tal que $D^{+}f\geq 0$ en casi todo punto de $[a,b]$. Supongamos que donde $D^{+}f<0$, $D^{+}f=-\infty$ en un conjunto a lo sumo numerable. Entonces f es monótona no decreciente y $D^{+}f\geq 0$ en todo punto de $[a,b]$ [cf.

PROPOSICION 1.5. Sea f definida en G, acotado y convexo. Las condiciones de Lipschitz separadas (1.2) son necesarias y suficientes para que las derivadas de Dini sean uniformemente acotadas en G.

Demostración. Es obvio que (1.2) implica que las derivadas son uniformemente acotadas.

Supongamos ahora que f tiene derivadas de Dini uniformemente acotadas en G. Entonces ellas son sumables en G, pues G es un dominio acotado. Sea $y_o \in \operatorname{proy}_y G$, E_{y_o} el conjunto de puntos de $\mathbb{R}$ tales que $(x,y_o)\in G$. Las secciones E_{y_o} son (linealmente) medibles y las derivadas de Dini sumables en E_{y_o}, como funciones de x.

Consideremos un intervalo $[c,d]\subset E_{y_o}$ y definamos

$$F(x) = \int_c^x |D^{+}f(t,y_o)|\, dt - [f(x,y_o)-f(c,y_o)]$$

$F(x)$ está bien definida en $[c,d]$. Pongamos

$$g(x) = \int_c^x |D^{+}f(t,y_o)|\, dt$$

$g(x)$ es monótona no decreciente en $[c,d]$, por lo tanto posee derivada finita en casi todo punto de $[c,d]$ [Na]. Entonces, en casi todo punto

$$D^{+}F(x)=D\,g(x)-D_{+}f(x,y_o)$$

Observemos que $D^{+}F \neq -\infty$ en $[c,d]$ ya que $g(x)$ es monótona no decreciente y por hipótesis las derivadas de f están uniformemente acotadas. Por otra parte, $Dg=|D^{+}f(x,y_o)|$ en casi todo punto [Nat]. Entonces

$$D^{+}F(x)=|D^{+}f(x,y_o)|-D_{+}f(x,y_o) \geq 0 \quad \text{c.d}\ .$$

En consecuencia, el teorema enunciado anteriormente permite asegurar que F^{+} es monótona no decrciente y $D^{+}F(x)\geq 0$ en $[c,d]$. Como $F(c)=0$, $F(x)\geq 0$ para todo $x\in[c,d]$. Luego,

$$f(x,y_{o})-f(c,y_{o}) \leq \int_{c}^{x}|D^{+}f(t,y_{o})dt \leq K\ |x-c| \tag{1.4}$$

para todo $x \in [c,d]$, ($K>0$ cota uniforme de $|D^{+}f|$).
Definamos ahora

$$F_{o}(x)= f(x,y_{o})-f(c,y_{o})+\int_{c}^{x}|D^{+}f(t,y_{o})|dt =$$

$$=f(x,y_{o})-f(c,y_{o})+g(x)$$

Entonces

$$D^{+}F_{o}(x)=D^{+}f(x,y_{o})+|D^{+}f(x,y_{o})|\geq 0$$

en casi todo punto de $[c,d]$.

$D^{+}F_{o}\neq-\infty$ porque $D^{+}f$ es acotada y $\Delta g \geq 0$.
Por lo tanto,

$$f(c,y_{o})-f(x,y_{o})\leq K\ |x-c| \tag{1.5}$$

para todo $x \in [c,d]$.

De (1.4) y (1.5) sigue que

$$|f(x,y_{o})-f(c,y_{o})| \leq K\ |x-c| \qquad \forall\ x\in [c,d].$$

Poniendo $c=x+h$, para todo h tal que $[x+h,d]\subseteq E_{y_{o}}$ se tiene que

$$|f(x,y_{o})-f(x+h,y_{o})| \leq K|h|$$

Esto implica que $f(x,y_{o})$ es Lipschitz en $E_{y_{o}}$, para toda sección.

Que f es Lipschitz en $y \in E_{x_{o}}$ para toda seccion, se demuestra en forma análoga y sigue que f es Lipschitz en cada variable. Por lo tanto f es localmente Lipschitz. De la Proposición 1.4 sigue la tesis.

<u>LEMA</u> <u>1.2</u>. Si L_{f} satisface las hipótesis H1) y H2), entonces las derivadas de Dini en (x,y) toman valores en el intervalo $[-L_{f},L_{f}](x,y)$.

Demostración. Se verifica, por ejemplo,

$$\sup.\frac{|f(x+h,y)-f(x,y)|}{|h|} \leq \sup\frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)|}{(h^{2}+k^{2})^{1/2}} \qquad \text{para } \begin{array}{l} 0\leq h^{2}+k^{2}\leq\rho^{2} \\ h\neq 0 \end{array},$$

Por consiguiente,

$$|_xD_+f| \leq |_xD^+f| \leq L_f$$

Luego la hipótesis implica que $_xD_+f$ y $_xD^+f$ son finitas y sumables en G.-

<u>LEMA</u> <u>1.3</u>.Si L_f verifica H1) y H2) la función $f(x,y_o)$ es absolutamente continua en E_{y_o} para casi todo $y_o \in proy_y G$.

Demosatración.En la demostración de la Proposición 1.5 se obtuvo que

$$|f(x,y_o)-f(c,y_o)| \leq \int_c^x |D^+f(t,y_o)|dt$$

Por consiguiente

$$|f(x,y_o)-f(c,y_o)| \leq \int_c^x L_f(t,y_o)dt$$

y de aquí sigue que f es absolutamente continua en E_{y_o} si L_f es sumable sobre ese conjunto.-

Entonces, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_o)$ existe en casi todo punto de E_{y_o}, luego en un subconjunto equimedible de G.

También $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y)$ existe en casi todo punto de E_{x_o}.

Esto es ,existen K_1,K_2 núcleos equimedibles de G donde las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son finitas,respectivamente.Si $K=K_1 \cap K_2$, hemos probado,en resúmen,el siguiente lema

<u>LEMA</u> <u>1.4</u>.Si L_f verifica H1) y H2),existe un núcleo equimedible K de G donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen , son finitas y sumables.

<u>LEMA</u> <u>1.5</u>.Si L_f verifica las hipótesis H1),H2) y K es el conjunto del lema anterior entonces, dado $\lambda>0$ existe un subconjunto medible compacto H de K y una constante M que depende de λ, $(M = M(\lambda))$, tal que $|H|>|K|-\lambda=|G|-\lambda$ y $L_f < M(\lambda)$ en H. Más aún, cualquiera que sea $\lambda > 0$, L_f no solo es finita, sino continua y acotada en un subconjunto compacto H de K de medida $|H|>|G|-\lambda$.

Demostración.Sigue del Teorema de Lusin [Na].

LEMA 1.6. Sea L_f verificando H1),H2), $\lambda>0$, **H** y **K** como en el lema anterior. Entonces existe un subconjunto S de **H** con $|S|> |\mathbf{H}|-\lambda > |G|-2\lambda$ tal que las convergencias

$$(1.6)\qquad \begin{cases} W_f(x,y,\rho)\longrightarrow L_f(x,y)\ , & (\rho\to 0) \\ \dfrac{\Delta f_h}{h} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} & \\ & (h,k\to 0) \\ \dfrac{\Delta f_k}{k} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} & h,k \text{ racionales.} \end{cases}$$

(que valen en **H**) , son uniformes en S y las derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas, lo mismo que L_f.

Demostración .Dado $\varepsilon>0$,podemos suponer que los puntos de **H** distan más de ε del contorno de G,pues $|\{P(x,y)\in \mathbf{H} : d(P,\partial G)<\varepsilon\}|\to 0$. La continuidad de f permite considerar los límites (1.6) con ρ,h,k recorriendo los racionales,y supongamos que $\rho+|h|+|k|<\varepsilon$.L_f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son funcines medibles en **H**.Por el teorema de Egorov [Na], existe un subconjunto S de **H** con $|S|>|\mathbf{H}|-\lambda>|G|-2\lambda$,tal que en todo punto de S las convergencias (1.6) son uniformes.Esto implica que las derivadas parciales de f son continuas en S por ser límite uniforme de funciones continuas.

De los lemas (1.5) y (1.6) sigue que existe $\rho_o=\rho_o(\lambda)$ tal que para todo $(x,y)\in S$

$$(1.7)\qquad W_f(x,y;\rho) < L_f + M(\lambda) < 2M(\lambda) \quad \text{para } 0<\rho<\rho_o(\lambda),$$

y dado $\varepsilon>0$,existe un número positivo $h_o=h_o(\lambda,\varepsilon)$ tal que para todo punto de S es

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} &\left| \frac{\Delta f_h}{h} - \frac{\partial f}{\partial x} \right| <\varepsilon \\ &\left| \frac{\Delta f_k}{k} - \frac{\partial f}{\partial y} \right| <\varepsilon \end{aligned} \qquad \text{para } \begin{aligned} &0<|h|\le h_o(\lambda,\varepsilon) \\ &0<|k|<h_o(\lambda,\varepsilon) \end{aligned}$$

Como la medida de Lebesgue es regular,dado $\lambda>0$,existe un conjunto perfecto $T \subseteq S$ tal que $|T|>|S|-\lambda \quad >|G|-3\lambda$.

Las derivadas parciales, continuas en S, son uniformemente continuas en T, pues T es compacto. .Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\bar{h}\ (\varepsilon)$ tal que

$$(1.9) \qquad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2)\right| < \varepsilon \\ &\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2)\right| < \varepsilon \end{aligned} \qquad \text{para } |x_1-x_2|+|y_1-y_2|<\bar{h}(\varepsilon)$$

Como casi todo punto de T es un punto de densidad de T, [WZ], si $P(x,y)\in T$ y $K[P,r]$ denota la esfera de centro en P y radio r, se verifica

$$\lim_{r\to 0} \frac{|T \cap K[P,r]|}{|K[P,r]|} = 1$$

en casi todo punto de T .Sea E el conjunto de puntos de T los cuales son puntos de densidad de T. Se verifica que

$$(1.10) \qquad |E| = |T| > |G| -3\lambda$$

Observemos que (1.7),(1.8),(1.9) valen en $E \subseteq T$.

<u>DEFINICION</u> <u>1.5</u>. Una función de dos variables, $F(x,y)$, se dice totalmente diferenciable, ó diferenciable Stolz, en (x_o,y_o) si

$$F(x_o+h,y_o+k)=F(x_o,y_o)+\frac{\partial f}{\partial x}\ (x_o,y_o)h + \frac{\partial f}{\partial y}\ (x_o,y_o)k + (h^2+k^2)^{1/2}R(h,k)$$

donde $R(h,k)\to 0$ cuando $(h^2+k^2)^{1/2}\to 0$.

Probaremos que f tiene diferencial total (ó en el sentido de Stolz) en todo punto de E, con lo que quedará probado el siguiente teorema de Rademacher [Ra]

<u>TEOREMA</u> <u>I</u>. Sea $f(x,y)$ definida en un dominio G ,acotado, de $\mathbb{R}^2$. Si $L_f(x,y)$ es finita y sumable en G entonces f es diferenciable Stolz en casi todo punto de G.-

Demostración.

Sea entonces $P_o(x_o,y_o) \in E$. Dadò un entero positivo $N>1$, existe un número positivo $r_N(P_o)$ tal que

$$\frac{|T \cap K[P_o,r]|}{|K[P_o,r]|} > 1-1/N^2 \qquad \text{para } r<r_N(P_o)$$

Por (1.10) es posible reemplazar T por E ,entonces

(1.11) $$\frac{|E \cap K[P_o,r]|}{|K[P_o,r]|} >1- 1/N^2 \qquad \text{para } r < r_N(P_o)$$

Sea ahora $r_o > 0$, tal que

(1.12) $$r_o < \inf.\{h_o(\lambda,\varepsilon),\bar{h}(\varepsilon),r_N(P_o),d(P_o,\partial G)\}$$

Sea la esfera $K[P_o,r_o] = K_o$ y $P_1(x_1,y_1) \in K_o$ tal que

$$x_1=x_o+h_1\cos\alpha_1$$

$$y_1= y_o+h_1\operatorname{sen}\alpha_1$$

donde

(1.13) $$0 < h_1=d(P_o,P_1) < \inf.\{r_o(N-1)/N,\rho_o(\lambda)(N-1)\}=:r_1$$

Observemos que P_1 puede no pertenecer a E,pero $P_1\in K[P_o,h_1N/(N-1)]$

Además $K[P_o,h_1N/(N-1)]\subseteq K_o\subseteq K[P_o,r_N(P_o)]$,por la elección de h_1.
(Ver Fig.1.1)

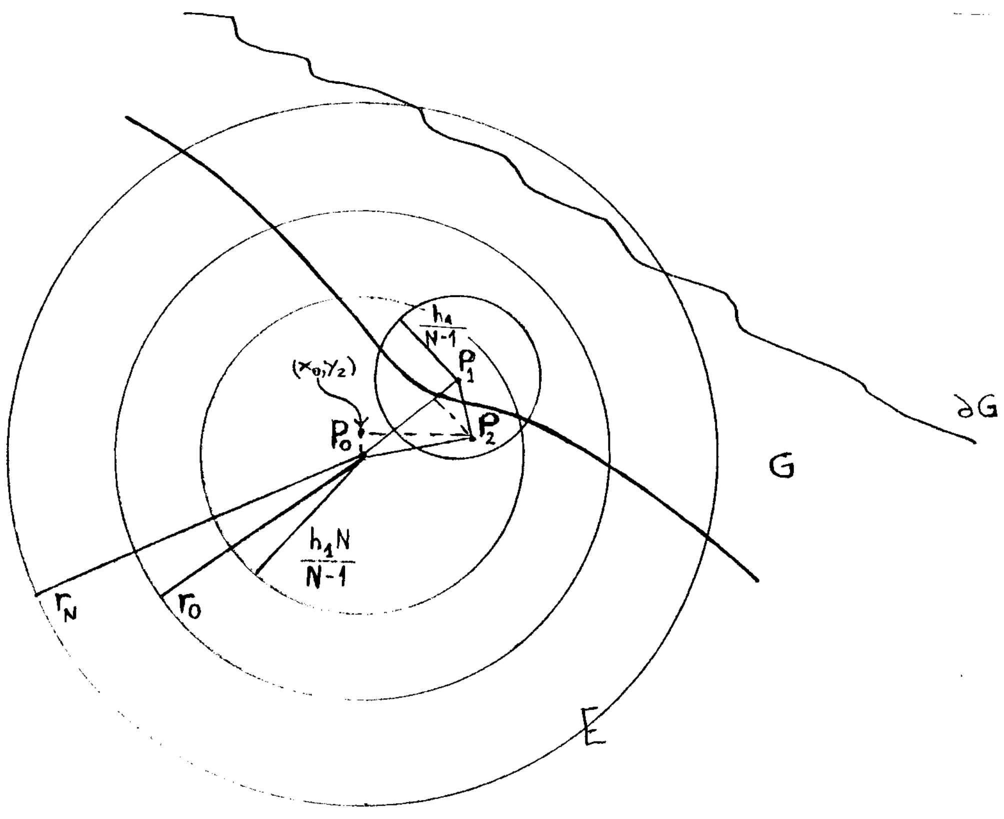

Figura 1.1

Por lo tanto,por (1.11)

$$\frac{|E \cap K[P_o,h_1N/(N-1)]|}{|K[P_o,h_1N/(N-1)]|} > 1-1/N^2$$

lo que implica

$$|E \cap K[P_o,h_1N/(N-1)]| > \pi(1-1/N^2)h_1^2\ N^2/(N-1)^2 = \pi h_1^2(N+1)/(N-1).$$

Entonces, la medida del complemento de E con respecto a $K[P_o,h_1N/(N-1)]$, $|\complement E|$,es

$$(1.14)\qquad |\ \complement E\ | = |K[P_o,h_1N/(N-1)]| - |E \cap K[P_o,h_1N/(N-1)]|$$
$$< \pi[h_1/(N-1)]^2 = |K[P_1,h_1/(N-1)]|$$

Observemos que

$$(1.15)\qquad K[P_1,h_1/(N-1)] \subseteq K_o$$

ya que $d(P_o,P_1) + h_1/(N-1) = h_1N/(N-1) < r_o$ (por la elección de h_1), y que (1.14) implica que $E \cap K(P_1,h_1/(N-1)) \neq \emptyset$.

Sea entonces $P_2(x_2,y_2) \neq P_1$,en $E \cap K[P_1,h_1/(N-1)]$.Se verifica

$$(1.16)\qquad 0 < d(P_1,P_2) = \left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]^{1/2} < h_1/(N-1).$$

Estimaremos ahora el cociente

$$(1.17)\qquad \frac{f(x_1,y_1)-f(x_o,y_o)}{h_1} = \frac{f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)}{h_1} + \frac{f(x_2,y_2)-f(x_o,y_2)}{h_1} +$$
$$+ \frac{f(x_o,y_2)-f(x_o,y_o)}{h_1}$$

De la definición de W_f y de (1.16) se tiene que

$$\frac{|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|}{\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]^{1/2}} \leq W_f(x_2,y_2;h_1/(N-1))$$

Luego,teniendo en cuenta (1.7) y (1.16) se obtiene la siguiente acotación para el primer sumando de (1.17)

$$(1.18)\qquad \frac{|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|}{h_1} < \frac{2M(\lambda)\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]^{1/2}}{h_1} <$$
$$< 2M(\lambda)/(N-1)$$

Si P_2 es de coordenadas

$$x_2 = x_o + h_2 \cos \alpha_2$$

$$y_2 = y_o + h_2 \operatorname{sen} \alpha_2$$

el segundo sumando de (1.17) es

$$(1.19) \qquad \frac{f(x_2,y_2)-f(x_o,y_2)}{h_1} = \frac{f(x_2,y_2)-f(x_o,y_2)}{(x_2-x_o)} \cdot \frac{h_2 \cos\alpha_2}{h_1}$$

De (1.15) se tiene que $P_2 \in K_o$.Por esto, y por la eleccion de r_o,

$$|x_2-x_o| < r_o < h_o(\lambda,\varepsilon) \quad , \quad |y_2-y_o| < r_o < \bar{h}(\varepsilon)$$

Además,$(x_o,y_2) \in K_o$.Por lo tanto (1.8) y (1.9) implican

$$(1.20) \left| \frac{f(x_2,y_2)-f(x_o,y_2)}{x_2-x_o} - \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_2) \right| < \varepsilon \qquad \text{para} |x_2-x_o| < h_o(\lambda,\varepsilon)$$

$$(1.21) \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o) \right| < \varepsilon \qquad \text{para } |y_2-y_o| < \vec{h}(\varepsilon).$$

En consecuencia,

$$(1.22) \qquad \frac{f(x_2,y_2)-f(x_o,y_2)}{x_2-x_o} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_o) + \eta_1 \quad \text{con } |\eta_1| < 2\varepsilon$$

Buscamos ahora una acotación para $(h_2/h_1)\cos \alpha_2$.De (1.16) sigue que $|h_2-h_1| < h_1/(N-1)$.Esto es,

$$(1.23) \qquad h_2/h_1 = 1+ \eta_2 \qquad \text{con } |\eta_2| < 1/(N-1)$$

Por otra parte ,

$$\text{(a)} \qquad |\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1| < 2|\operatorname{sen}(\alpha_2-\alpha_1)/2|.$$

Considerando el triángulo $P_oP_1P_2$ (ver Fig. 1.1), y (1.16) ,se tiene

$$h_1 \operatorname{sen}|\alpha_2-\alpha_1| \le d(P_1,P_2) < h_1/(N-1)$$

Esto es,

$$\operatorname{sen}|\alpha_2-\alpha_1| < 1/(N-1)$$

Luego,

$$|\operatorname{sen}[(\alpha_2-\alpha_1)/2]| = \operatorname{sen}|(\alpha_2-\alpha_1)/2| \le \operatorname{sen}|\alpha_2-\alpha_1| < 1/(N-1),$$

porque la diferencia $|\alpha_2-\alpha_1|$ será pequeña para P_o y P_1 cercanos.

Por lo tanto ,de (a) y (b)

$$|\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1| < 2/(N-1)$$

Esto es ,

(1.24) $\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 + \eta_3$ con $|\eta_3| < 2/(N-1)$

Volviendo a (1.19) y teniendo en cuenta (1.22),(1.23) y (1.24) podemos escribir

$$(1.25)\qquad \frac{f(x_2,y_2)-f(x_0,y_2)}{h_1} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + \eta_1\right][1+\eta_2][\cos\alpha_1 + \eta_3] =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\eta_2\cos\alpha_1 + \eta_1\eta_2\cos\alpha_1 + \eta_1\eta_2\eta_3 + \ldots =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos\alpha_1 + \vartheta(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$$

donde $\vartheta(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\eta_2\cos\alpha_1 + \eta_1\eta_1\cos\alpha_1 + \eta_1\eta_2\eta_3 + \ldots\right] \to 0$, para η_1,η_2,η_3 tendiendo a cero.

Para el tercer sumando de (1.17) se obtiene la siguiente estimación

$$(1.26)\qquad \frac{f(x_0,y_2)-f(x_0,y_0)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\operatorname{sen}\alpha_1 + \bar{\vartheta}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$$

tal que $\bar{\vartheta}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \to 0$ para η_1,η_2,η_3 tendiendo a cero.

Teniendo en cuenta (1.18),(1.25) y (1.26) ,podemos escribir (1.17) como sigue

$$(1.27)\qquad f(P_1)-f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)h_1\cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)h_1\operatorname{sen}\alpha_1 + h_1 v$$

con

$$(1.27a)\qquad 2M(\lambda)/(N-1) + \vartheta(\eta_1,\eta_2,\eta_3) + \bar{\vartheta}(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = v$$

para $\varepsilon > 0$, $N \to \infty$,donde

$$(1.27b)\qquad |\eta_1| < 2\varepsilon \quad ,|\eta_2| < 1/(N-1) \quad , \quad |\eta_3| < 2/(N-1).$$

Dado δ,para tener $|v|<\delta$,basta elegir N bastante grande y ε bastante chico y acotar (1.27b) y con lo que se acota en(1.27a).Por lo tanto (1.27) vale para todo $h_1 < r_1$ con $|v|<\delta$.

Poniendo $h_1\cos\alpha_1 = h_1$, $h_1\operatorname{sen}\alpha_1 = k$, entonces $(h^2 + k^2)^{1/2} = h_1$.

Volviendo a (1.30)

$$f(P_1) = f(P_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_o)h + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o)k + o[(h^2+k^2)^{1/2}]$$

lo que prueba que f es diferenciable en P_o, luego en E, por consiguiente, en casi todo punto de G.-

<u>COROLARIO</u> <u>I.1</u>.Sea $f:G \longrightarrow \mathbb{R}$,G dominio acotado de $\mathbb{R}^2$.Si f es Lipschitz uniforme en G , entonces f es diferenciable Stolz en casi todo punto de G.-

<u>COROLARIO</u> <u>I.2.</u> Sea $f:G \longrightarrow \mathbb{R}$,G dominio acotado y convexo de $\mathbb{R}^2$. Si todas las derivadas de Dini son uniformemente acotadas en G , entonces f es diferenciable en casi todo punto de G.

La demostración sigue de las proposiciones (1.1) y (1.5).-

<u>OBSERVACION.</u> Una función puede tener derivadas parciales acotadas en G y no ser diferenciable en *todo punto* de G.-

§2. PROPIEDADES DEL DETERMINANTE FUNCIONAL.

En §1 probamos el Teorema I(de Rademacher):Si $f:G \to \mathbb{R}$,G dominio acotado de $\mathbb{R}^2$, es tal que $L_f(x,y)$ es finita y sumable en G entonces f tiene diferencial total en casi todo punto de G.

Es decir ,si $P_o(x_o,y_o)$no pertenece a un cierto conjunto de medida nula en G,se verifica

$$(2.1)\quad f(x_o+h,y_o+k)-f(x_o,y_o)= \frac{\partial f}{\partial x}(P_o)h + \frac{\partial f}{\partial y}(P_o)k +(h^2+k^2)^{1/2}R(h,k)$$

con $R(h,k)\to 0$ para $h,k\to 0$.

Si en (2.1) hacemos la sustitución $h=at,k=bt$ obtenemos

$$(2.2)\quad \frac{f(x_o+at,y_o+bt)-f(x_o,y_o)}{t} =a \frac{\partial f}{\partial x}(P_o) + b \frac{\partial f}{\partial y}(P_o) + (a^2+b^2)^{1/2}R'(at,bt)$$

donde $R'(at,bt)\to 0$ si $t\to 0$.

Sean

$$(2.3)\quad \begin{cases} x=x(s) \\ y=y(s) \end{cases}$$

funciones diferenciables, (con derivadas no necesariamente acotadas), en el intervalo $s_1 \leq s \leq s_2$ tal que para esos valores de s el punto $P(x(s),y(s))$ pertenezca al dominio G de f.

Sea $\mathbf{E} = \{ P(x,y) \in G : f$ es diferenciable en $P. \}$; $P_0(x_0,y_0) \in \mathbf{E}$, $x_0=x(s_0)$, $y_0=y(s_0)$; y $x'(s_0)$, $y'(s_0)$ las derivadas de (2.3) en ese punto.

Entonces

$$x(s) = x(s_0) + [x'(s_0) + \delta_1](s-s_0)$$

$$y(s) = y(s_0) + [y'(s_0) + \delta_2](s-s_0)$$

donde $\delta_1,\delta_2 \to 0$ cuando $s \to s_0$.

Reemplazando en (2.2) se tiene

$$\frac{f(x(s),y(s))-f(x_0,y_0)}{s-s_0} = \left[x'(s_0) + \delta_1\right]\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + \left[y'(s_0) + \delta_2\right]\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) +$$

$$\left([x'(s_0)+\delta_1]^2+[y'(s_0)+\delta_2]^2\right)^{1/2} R'\left[\{x'(s_0)+\delta_1\}(s-s_0),\{y'(s_0)+\delta_2\}(s-s_0)\right]$$

Calculando el límite para $s \to s_0$ se tiene,

$$\frac{df(x(s),y(s))}{ds}\bigg|_{s=s_0} = x'(s_0)\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + y'(s_0)\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \tag{2.4}$$

Esta igualdad vale para toda función diferenciable $x(s),y(s)$ (cuyos valores esten en G), excepto para P_0 en un cierto conjunto $\mathbf{E}^*$ de medida nula .-

Si $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ son funciones definidas en una dominio G del plano XY, llamaremos T a la transformación de G en $\mathbf{U}$, ($\mathbf{U}$ dominio del plano UV), que ellas definen y escribiremos $\bar{z} = Tz$, $z=(x,y)\in G$.

Observemos que si u y v son Lipschitz en G con cota uniforme M, de

$$|f(x+h,y+k)-f(x,y)| \leq M(h^2+k^2)^{1/2}$$

$$|g(x+h,y+k)-g(x,y)| \leq M(h^2+k^2)^{1/2} \quad \text{, se obtiene}$$

$$|Tz-Tz'| \leq 2^{1/2}M(h^2+k^2)^{1/2} , \tag{2.4'}$$

esto es , la transformación T es Lipschitz con cota $2^{1/2}M$, y si T es Lipschitz lo son u y v con la misma cota.

TEOREMA II. Sea T definida en un dominio acotado G del plano **XY**, a valores en una dominio **U**, tal que las funciones $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ que la determinan verifican las hipótesis H1), H2) (§1).

Sea T^* definida en un dominio Γ del plano $\xi\eta$, a valores en G, por las funciones $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ y tal que existan todas las derivadas parciales de x e y respecto de ξ y η en Γ. Entonces, excepto en un conjunto **Z** de medida nula de valores (x,y) en G es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{vmatrix} =: \frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$$

donde **Z** depende solamente de las funciones f, g y no de la elección de $x(\xi,\eta)$ e $y(\xi,\eta)$.

Demostración.

Teniendo en cuenta (2.4), excepto para un subconjunto E^*, con $|E^*|$ nula, es

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \xi}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta) \\ (2.5)\quad & \\ &\frac{\partial f}{\partial \eta}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta) \end{aligned}$$

Las igualdades (2.5) valen con g en lugar de f, excepto en un subconjunto D^* de G, con medida de D^* nula.

Por lo tanto, de (2.5) y la igualdad análoga para g, sigue que, excepto para un cierto conjunto $(E^* \cup D^*)$, de medida nula, es

$$(2.6)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad .-$$

Observación. El conjunto de puntos (ξ,η) en Γ donde (2.6) no es válida será considerado más adelante.-

TEOREMA III. Sea T biunívoca ,definida en un dominio acotado G del plano XY a valores en un dominio **U** del plano **UV** ,tal que las funciones $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ que la determinan satisfacen las hipótesis H1),H2). Entonces en un núcleo equimedible G′ de G , donde f y g tienen diferencial total, el *coeficiente areolar* (u *orden de crecimiento*) de la transformación T es igual al *valor absoluto del determinante funcional* (ó *Jacobiano*) de la transformación.

Demostración.

Sea $P_o \in G'$.Entonces vale

$$(2.7)\quad \begin{aligned} u&=f(x_o+h,y_o+k)=f(P_o) + h\,\frac{\partial f}{\partial x}(P_o) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(P_o) + (h^2+k^2)^{1/2}R(h,k) \\ v&=g(x_o+h,y_o+k)=g(P_o) + h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P_o) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P_o) + (h^2+k^2)^{1/2}R'(h,k) \end{aligned}$$

donde $R,R'\to 0$ si $h,k\to 0$.

La transformación afin $\overline{T}$,definida por

$$(2.8)\quad \begin{aligned} \overline{u} &= f_o + h\,\frac{\partial f}{\partial x}(P_o) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}(P_o) & \qquad (f_o=f(P_o)) \\ \overline{v} &= g_o + h\,\frac{\partial g}{\partial x}(P_o) + k\,\frac{\partial g}{\partial y}(P_o) & \qquad (g_o=g(P_o)) \end{aligned}$$

aproxima a T para h,k pequeños y transforma el cuadrado Q (de centro en P_o y lado $2l$) $\subseteq$ G definido por

$$x_o-l \le x \le x_o+l \qquad\qquad y_o-l \le y \le y_o+l$$

en un rectángulo $\overline{\mathbf{V}} \subseteq \mathbf{U}$, esto es $\overline{T}Q = \overline{\mathbf{V}}$.

Sea $\mathcal{D}$ el determinante de la matriz de la transformación (2.7),

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} (P_o) = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(P_o).$$

a) Si $\mathcal{D} = 0$, entonces $\overline{T}Q = \overline{V} = \overline{EF}$ es un segmento imagen de una de las diagonales de Q, cuyo punto medio es $\overline{P}_o = \overline{T}P_o$ (Fig.2.1)

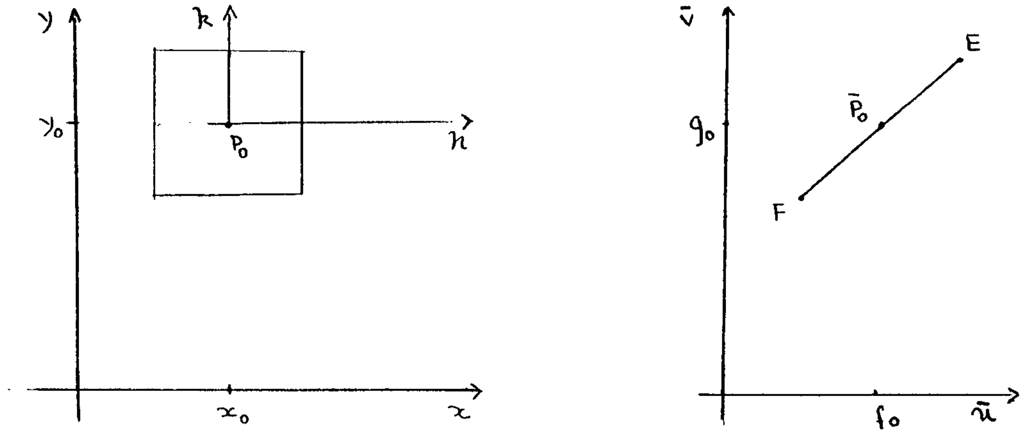

Figura 2.1

Sea $a = |\overline{EF}|$ .Considerando las coordenadas de los vértices de las diagonales y poniendo $h=k=l$ ($h=l, k=-l$) en (2.8) se obtiene en cada caso

$$a = 2\left[(\bar{u} - f_o)^2 + (\bar{v} - g_o)^2\right]^{1/2} = 2l\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}$$

ó bien

$$a = 2l\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right]^2\right]^{1/2}$$

De la demostración del Lema 1.2 (§1) sigue que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ están acotadas por L_f y L_g, respectivamente.

Por lo tanto, en ambos casos

$$\text{(2.9)} \qquad a \leq 2l\left((2L_f(P_o))^2 + (2L_g(P_o))^2\right)^{1/2} = 4l\left[L_f^2(P_o) + L_g^2(P_o)\right]^{1/2}$$

Sea P un punto de Q, $\overline{P}$ y P' las imágenes de P por $\overline{T}$ y T, respectivamente.Entonces , la distancia entre $TP=P'$ y $\overline{T}P=\overline{P}$ es

$$(2.10) \qquad d(\overline{P},P') = \left[(u-\overline{u})^2 + (v-\overline{v})^2 \right]^{1/2} =$$

$$= (h^2+k^2)^{1/2}\left[(R(h,k))^2+(R'(h,k))^2\right] \leq (2)^{1/2}(h^2+k^2)^{1/2}R^*(h,k)$$

donde $R^*(h,k)=\text{máx.}(|R|,|R'|)\to 0$,para $h,k\to 0$.Teniendo en cuenta que el mayor valor que toman h y k es l,se obtiene

$$(2.10a) \qquad d(TP,\overline{T}P) = d(P',\overline{P}) \leq 2l\, R^*_l$$

con $R^*_l = \sup_{|k|,|h|\leq l} R^*(h,k) \longrightarrow 0$ cuando $l \longrightarrow 0$.

Entonces, teniendo en cuenta (2.9) y (2.10a) se tiene,(ver Fig.2.2)

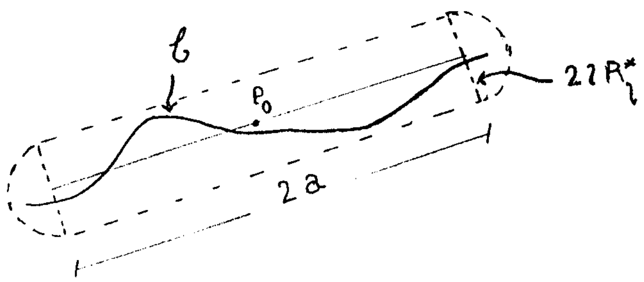

Figura 2.2

$$|TQ|=|V|\leq 4l\left(L_f^2 + L_g^2\right)^{1/2} 4lR^*_l + 4\pi l^2(R^*_l)^2 = 4l^2R^*_l\left(4\left(L_f^2 + L_g^2\right)^{1/2} + \pi R^*_l\right)$$

Luego,

$$\frac{|V|}{|Q|} \leq R^*_l\left[4\left[L_f^2 + L_g^2\right]^{1/2} + \pi R^*_l\right] \longrightarrow 0 \text{ , para } |Q| \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto , el coeficiente areolar de la transformación T en P_o, $\Delta(P_o)$,es

$$\Delta(P_o) = \lim \frac{|V|}{|Q|} = 0 = \mathcal{D} \qquad (|Q|\longrightarrow 0)$$

b)Supongamos ahora $\mathcal{D} \neq 0$.

En este caso la imagen de Q por $\overline{T}$ es un paralelogramo , $\overline{V}$, y $\overline{P}_o=(f_o,g_o)$ su punto central. La distancia más pequeña de un lado de $\overline{V}$ al punto central $\overline{P}_o$ es proporcional a l.Sean μ y ν los factores de proporcionalidad. Podemos elegir l suficientemente pequeño tal que $\mu,\nu > 4R_l^*$.

Sea $\mathbf{V}$ la imagen de $\mathbf{Q}$ por T y $\mathscr{C}$ la curva cerrada imagen del contorno de $\mathbf{Q}$ .Si P es un punto del contorno de $\mathbf{Q}$,entonces ,ó bien $|h|=l$ y $|k|\le l$,ó $|k|=l$ y $|h|\le l$ En ambos casos la distancia entre los puntos $P'=TP$ y $\bar{P}=\bar{T}P$ es,como en (2.10),

(2.11) $$d(P',\bar{P}) \le 2l\ R_l^* = d.$$

Entonces la curva $\mathscr{C}$ está contenida en una franja $\mathscr{W}$, de ancho 2d, que no contiene al punto central P_o,(ver Fig.2.3)

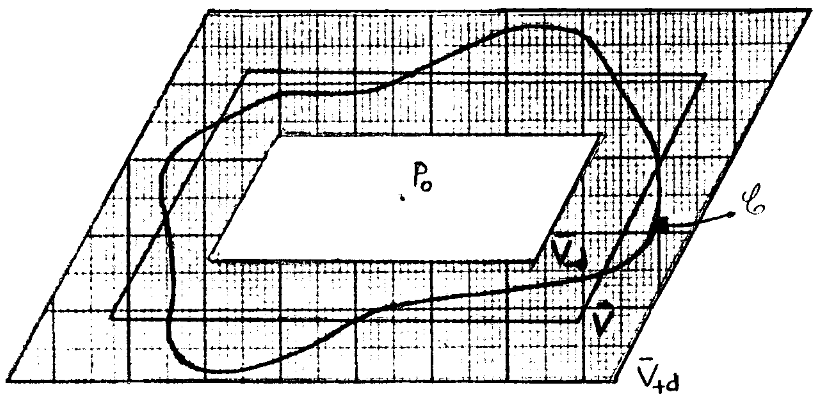

Figura 2.3

Consideremos ahora dos paralelogramos,$\bar{\mathbf{V}}_{-d}$ y $\bar{\mathbf{V}}_{+d}$,tales que $\bar{\mathbf{V}}_{-d} \subseteq \bar{\mathbf{V}}$ y $d(\partial\bar{\mathbf{V}}_{-d},\partial\bar{\mathbf{V}}) = d$; $\bar{\mathbf{V}} \subseteq \bar{\mathbf{V}}_{+d}$ y $d(\partial\bar{\mathbf{V}}_{+d},\partial\bar{\mathbf{V}}) = d$.

Entonces,como (2.11) vale para todo h y k,se tiene que

$$\bar{\mathbf{V}}_{-d} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \bar{\mathbf{V}}_{+d}$$

Por lo tanto,

(2.12) $$|\bar{\mathbf{V}}_{-d}| \le |\mathbf{V}| \le |\bar{\mathbf{V}}_{+d}|.$$

Por otra parte , como la transformación $\bar{T}$ es lineal,

$$|\bar{\mathbf{V}}|=|\mathbf{Q}|.|\mathscr{D}| =(2l)^2|\mathscr{D}| \quad ([WZ]\text{pág. }45)$$

Si μ y ν son los factores de proporcionalidad de crecimiento de los lados

$$|\bar{\mathbf{V}}_{\pm d}| = |\bar{\mathbf{V}}| \left[\frac{\mu l \pm \alpha d}{\mu l}\right] \left[\frac{\nu l \pm \beta d}{\nu l}\right]$$

donde $\dfrac{\mu l \pm \alpha d}{\mu l}$ y $\dfrac{\nu l \pm \beta d}{\nu l}$ son las razones de crecimiento de los lados.

Por lo tanto ,

$$|\bar{V}_{\pm d}| = 4l^2|\mathcal{D}| \left(1 \pm 2R_l^* \frac{\alpha}{\mu}\right)\left(1 \pm 2R_l^* \frac{\beta}{\nu}\right)$$

Volviendo a (2.12) se tiene entonces que

$$|Q|\,|\mathcal{D}|\left[1-2R_l^* \frac{\alpha}{\mu}\right]\left[1-2R_l^* \frac{\beta}{\nu}\right] \le |V| \le |Q|\,|\mathcal{D}|\left[1+2R_l^* \frac{\alpha}{\mu}\right]\left[1+2R_l^* \frac{\beta}{\nu}\right]$$

y en consecuencia,

$$\Delta(P_o) = \text{lím.} \frac{|V|}{|Q|} = |\mathcal{D}| \text{ .-}$$

<u>COROLARIO</u> <u>III.1</u> Con excepción de un conjunto de medida cero de G, el coeficiente areolar es localmente acotado si la transformación T es Lipschitz sobre compactos.

En efecto, esto sigue de la Proposición 1.5 y del teorema precedente.-

<u>NOTA.</u> Para transformaciones biunívocas el determinante funcional, aún cuando exista en *todo punto* de G, no tiene porque coincidir con el coeficiente areolar en *todo punto.*

Como la transformación continua T es biunívoca, entonces T es un homeomorfismo de G sobre TG y TG es un dominio [[HW] Teorema de Brover]. Por lo tanto, $T\partial Q = \partial TQ = \mathscr{C}$. Más aún, la imagen del punto central P_o, TP_o, es interior a $\mathscr{C}$, luego

$$W(TP_o, \mathscr{C}) = \pm 1,$$

donde $W(P,L)$ es el número de vueltas de la curva L alrededor de P. Existe un número fijo $e = \pm 1$ tal que para toda curva simple cerrada $L \subseteq G$ y todo punto P perteneciente al interior de L vale

$$W(P,L) = eW(TP,TL)$$

En particular ,

$$W(P_o, \partial Q) = eW(TP_o, T\partial Q) = 1$$

si ∂Q se recorre en sentido positivo [Ne].

Entonces,

$$W(\bar{T}P_o, \partial\bar{V}) = W(TP_o, \mathscr{C}) = \pm W(P_o, \partial Q) = \pm 1 \text{ .}$$

Obtenemos entonces el

<u>TEOREMA</u> <u>IV</u>. El determinante funcional de una transformación biunívoca T que verifica las hipótesis del Teorema III tiene en

todo punto de G donde es diferenciable , o bien signo no negativo ó bien signo no positivo.-

Nuestro objetivo es ahora probar el siguiente teorema.

TEOREMA V. Sea T Lipschitz en G(dominio acotado), a valores en un conjunto **U** del plano UV y M una cota uniforme de Lipschitz para las funciones $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ que la definen. Sea T^* Lipschitz en un dominio acotado Γ del plano $\xi\eta$, a valores en el dominio G del plano XY, definida por las funciones $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ ambas con cota uniforme de Lipschitz M. Entonces en casi todo punto de Γ vale

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} ,$$

ó

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)} = 0 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$$

en un conjunto de medida positiva de Γ.

Demostraremos primero las siguientes proposiciones auxiliares.

PROPOSICION 2.1. Sea T una transformación Lipschitz definida en un dominio acotado G a valores en una región **U**. Sea **W** un subconjunto cualquiera de G y $T\mathbf{W} = \mathbf{W}^*$, entonces

$$|\mathbf{W}^*|_e \le 8M^2 |\mathbf{W}|_e$$

donde M es una cota de Lipschitz para las funciones $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ que definen T.

Demostración. Sea $\mathbf{W} \subseteq G$ y $\varepsilon>0$. Es posible elegir una familia de círculos $\{K_j\}$ tal que

$$(2.14) \qquad \mathbf{W} \subseteq \bigcup_j K_j \qquad y \qquad \Sigma_j\ |K_j| < |\mathbf{W}|_e + \varepsilon$$

Sea $TK_j = K_j^*$ y δ_j = diam. K_j. Por (2.4'), la distancia entre dos puntos de K_j^* es menor que $2^{1/2}M\delta_j$. Entonces existe un círculo $\mathbf{B}_j$ de radio $r=2^{1/2}M\delta_j$ y centro en un punto de K_j^* tal que $K_j^* \subseteq \mathbf{B}_j$ y $|\mathbf{B}_j| = 2\pi M^2\delta_j^2 = 8M^2|K_j| \ge |K_j^*|_e$

Por lo tanto , de esta última desigualdad y (2.14) sigue que

(2.15) $$\sum_j |K_j^*|_e \le 8M^2\sum_j |K_j| \le 8M^2(|W|_e+\varepsilon)$$

Por otra parte
$$W^*=TW \subset T\bigcup_j K_j = \bigcup_j K_j^*$$

Luego,

(2.16) $$|W^*|_e \le |\bigcup_j K_j^*| \le \sum_j |K_j^*|_e.$$

Entonces, de (2.15) y (2.16)

$$|W^*|_e \le 8M^2(|W|_e + \varepsilon)$$

para todo ε arbitrariamente pequeño, lo que prueba la proposición.-

<u>COROLARIO</u> <u>2.1.1</u>. Si $T:G\to U$ es una transformación Lipschitz, T transforama conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero. (La demostración sigue de la Proposición 2.1, teniendo en cuenta que todo conjunto de medida exterior nula es medible.)

<u>COROLARIO</u> <u>2.1.2</u>. Si $T:G\to U$, (G acotado) es Lipschitz en G, T transforma conjuntos medibles en conjuntos medibles.

En efecto, W es medible si y solo si $W = \bigcup_j F_j \cup Z$, donde $F_j \subseteq G$, F_j cerrado y Z es tal que $|Z| = 0$ [WZ].

Como G es acotado, F_j es un conjunto compacto. Por lo tanto $TF_j=F_j^*$ es también un compacto, pues T es continua por ser Lipschitziana. Entonces $W^*=TW = \bigcup_j F_j^* \cup Z^*$ con $|Z^*| = 0$.-

<u>PROPOSICION</u> <u>2.2</u>. Sea T una transformación como en la Proposición 2.1, W ($\subseteq G$) medible, con medida positiva, y $TW = W^*$ tal que $|W^*|=0$. Entonces en casi todo punto de W se verifica que

$$\mathcal{D} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$$

Demostración. Como T es Lipschitz, las funciones f,g que la definen verifican las hipótesis de los teoremas I(§1) y III(§2).

Como casi todo punto de W es un punto de densidad de W, existe un subconjunto W_o con $|W_o|=|W|$, tal que la densidad en cada punto $P_o\in W_o$ es uno.

Los teoremas I y III implican que si f y g son diferenciables en

P_o, el coeficiente areolar ,ΔP_o,es igual a $|\mathcal{D}|$.Por otra parte,dado $\varepsilon>0$ existe un cuadrado Q_o con centro en $P_o \in W_o$ tal que

(2.17) $$\frac{|Q_o \cap W_o|}{|Q_o|} > 1-\varepsilon$$

Además $T(Q_o \cap W)=(Q_o \cap W)^* \subseteq W^*$ y $|W^*| = 0$,entonces

(2.18) $$|(Q_o \cap W)^*| = 0$$

Por (2.17)

$$|Q_o \setminus Q_o \cap W_o| = \big|\,|Q_o| - |Q_o \cap W_o|\,\big| < \varepsilon |Q_o|$$

De la Proposición 2.1 sigue que

(2.19) $$|(Q_o \setminus Q_o \cap W_o)^*| \leq 8M^2 |Q_o \setminus Q_o \cap W_o| \leq 8M^2 \varepsilon |Q_o|$$

De (2.18) y (2.19)

$$|TQ_o| = |Q_o^*| \leq 8M^2 \varepsilon |Q_o|$$

Luego

$$\frac{|Q_o^*|}{|Q_o|} \leq 8M^2 \varepsilon$$

cualquiera que sea $\varepsilon>0$,arbitrariamente pequeño,por lo que se concluye que $\Delta(P_o) = |\mathcal{D}| = 0$, lo que implica $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$ en P_o , por lo tanto $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$ en casi todo punto de W .-

Demostraremos ahora el Teorema V, y el siguiente de enunciado semejante.

<u>TEOREMA V'</u>: Sea T Lipschitz en G (dominio acotado),a valores en un conjunto U del plano UV y M una cota uniforme de Lipschitz para las funciones $u=f(x,y)$,$v=g(x,y)$ que la definen.Sea T^*Lipschitz en un dominio acotado Γ del plano $\xi\eta$,a valores en el dominio G del plano XY, definida por las funciones $x=x(\xi,\eta)$,$y=y(\xi,\eta)$ ambas con cota uniforme de Lipschitz M.Entonces en casi todo punto de Γ vale

$$\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)}\right| + \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| > 0,$$

y en este caso

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}, \tag{2.20}$$

ó bien, en un conjunto de medida positiva de Γ

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)} = 0 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$$

Demostración. Sea $T^*:\Gamma \longrightarrow G_1 \subseteq G$,T^* sobre.Por el Corolario I.1(§1) $x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)$ son diferenciables en $\Gamma\backslash Z'$,con $|Z'|=0$.El Corolario 2.1.1 implica que $|T^*Z'|=|Z'^*|=0$.Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta) \\ \frac{\partial f}{\partial \eta}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{2.21}$$

e igualdades análogas para g, siempre que $(\xi,\eta)\in\Gamma/Z'$ y $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ pertenezan a un conjunto $G\backslash Z''$, con $|Z''|=0$, donde f y g son diferenciables.Es decir ,en esta situación (2.21) y en consecuencia (2.20) valen en $G_1\backslash Z_o$, donde $Z_o=Z'^* \cup Z''$ y $|Z_o|=0$.
Sea $\bar{Z}_o = T^{*-1}Z_o$ entonces $\bar{Z}_o$ es la imagen inversa por una aplicación medible del conjunto medible Z_o, lo que implica que $\bar{Z}_o$ es medible.
Si $|\bar{Z}_o|=0$,como valen (2.21) y (2.20) en $\Gamma/\bar{Z}_o$, valen en casi todo punto de Γ.
Sea $|\bar{Z}_o| > 0$. Observemos que la transformación $T\circ T^*:\Gamma \longrightarrow \mathbf{U}$ es Lipschitz con cota $2M^2$.
Por la Proposición 2.2,en casi todo punto de $\bar{Z}_o$ vale

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = 0 \tag{2.22}$$

puesto que $T^*\bar{Z}_o = Z_o$ y $|Z_o| = 0$.
La imagen de $Z_o$en $\mathbf{U}$,$TZ_o= Z_o^*$,tiene medida cero. Luego Z^*_oes imagen de $\bar{Z}_o$por la transformación $T\circ T^*$, por lo tanto,nuevamente por la

Proposición 2.2, en casi todo punto de $\bar{\bar{Z}}_0$ es

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)} = 0 \tag{2.23}$$

O sea,(2.22) y (2.23) valen simultáneamente en casi todo punto de $\bar{Z}_0$ .Esto implica Teorema V y Teorema V'.-

§3. CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE.

TEOREMA VI. Sea τ una transformación biunívoca definida en un dominio **G** del plano XY sobre un dominio **U** del plano UV,(**G**,**U** acotados) Sean $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ las funciones que determinan la transformación. Si L_ϕ , L_ψ son finitas y sumables en **G**,(i.e. si ϕ y ψ verifican las hipótesis H1),H2)(§1)),y F(u,v) es una función positiva y medible en **U**, entonces

$$\iint_{\mathbf{U}} F(u,v)\ du\ dv = \iint_{\mathbf{G}} F(\phi(x,y),\psi(x,y))\ |\mathcal{D}|\ dx\ dy \tag{3.1}$$

donde $|\mathcal{D}| = \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right|$, entendiéndose la igualdad en el sentido que si una integral es infinita la otra también lo es [Ra]

Demostración. Bastará probar la igualdad (3.1) para $F(u,v)= \chi_{\mathbf{V}}(u,v)$, donde **V** es un subconjunto medible de **U** y $\chi_{\mathbf{V}}$ es la función característica de **V**. En tal caso, el miembro izquierdo de (3.1) es

$$|\mathbf{V}| = \iint_{\mathbf{U}} \chi_{\mathbf{V}}(u,v)\ du\ dv = \iint_{\mathbf{V}} du\ dv \tag{3.2}$$

y. el miembro derecho de (3.1) es, poniendo $\mathbf{W} = \tau^{-1}\mathbf{V}$

$$\iint_{\mathbf{G}} \chi_{\mathbf{W}}(x,y)\,|\mathcal{D}|\ dx\ dy = \iint_{\mathbf{W}} |\mathcal{D}|\ dx \tag{3.3}$$

Teniendo en cuenta (3.2) y(3.3) , el teorema estará probado si se demuestra que

(3.1a) $$|\tau W| = \iint_W |\mathcal{D}| \, dx \, dy$$

pues $\tau W = V$.

Definamos una medida $\nu(W) = |\tau W|$, ν es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, ya que si $|W| = 0$, como τ es Lipschitz, $\nu(W) = |\tau W| = 0$. Por el Teorema III(§2), si W es un cubo centrado en (x,y);

(3.5) $$\lim_{|W| \to 0} \frac{\nu(W)}{|W|} = \lim_{|W| \to 0} \frac{|\tau W|}{|W|} = |\mathcal{D}(x,y)|$$

para casi todo punto. Entonces, como la derivada de Radon-Nikodym de $\nu(.)$ respecto a la medida de Lebesgue $|.|$, d_{RN}, pertenece a L_1, $d_{RN} = |D|$ en casi todo punto y

$$\nu(W) = \iint_W |D(x,y)| \, dx \, dy$$

lo que implica (3.1a) .-

UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA DE RADEMACHER SOBRE DIFERENCIACION

§ 1.NOTACION

Sea S un dominio contenido en $\mathbb{R}^n$ y sea $p=(p_1,\ldots,p_n)\in S$. Para $n\geq 2$, $\Pi_n p$ denota la proyección $(p_1,\ldots,p_{n-1})$. La sección de S de dimensión $(k-1)$ se denotará $S(p_k,\ldots,p_n)$, $2\leq k\leq n$,

$$S(p_k,\ldots,p_n)=\{(x_1,\ldots,x_{k-1})\in\mathbb{R}^{k-1}:(x_1,\ldots,x_{k-1},p_k,\ldots,p_n)\in S\}$$

Si $q=(q_1,\ldots,q_n)$, pondremos,

$$d(p,q)=\left[\sum_{j=1}^{n}(p_j-q_j)^2\right]^{1/2}=|q-p|$$

La medida de Lebesgue n-dimensional de S se notará L_nS ó bien $|S|$. El término *medible* significará L_n-medible. Indicaremos

$$f'_j(p)=\frac{\partial f}{\partial p_j}=\text{lím}.\frac{1}{h_j}\left[f(p+h_j)-f(p)\right]=\text{lím}.\frac{\Delta f_{h_j}}{h_j},$$

$h_j\to 0$, donde $p+h_j=(p_1,\ldots p_{j-1},p_j+h_j,\ldots,p_n)$. Si indicamos con $\nabla f(p)$ la n-úpla $(f'_1(p),\ldots,f'_n(p))$,

$$\nabla f(p).(p-q)=\sum_{j=1}^{n}f'_j(p)(p_j-q_j)$$

§ 2.CONJUNTO ACCESIBLE

DEFINICION 2.1. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $p=(p_1,\ldots,p_n)\in S$. Con $A[p,S]$ denotaremos el *conjunto accesible de* p, que se define como sigue;

$A[p,S]=S$ si $n=1$. Si $n\geq 2$,

$$A[p,S]=\{(x_1,\ldots,x_n)\in S;(x_1,\ldots x_j,p_{j+1},\ldots,p_n)\in S,j=1,\ldots,n-1\}$$

En la Fig.1.(pág.2) se muestra $A[p,S]$ para $n=1,n=2$.

LEMA 2.1. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $p\in S$. Vale la siguiente fórmula inductiva

$$A[p,S]=\begin{cases}S \text{ si } n=1\\ (A[\Pi_n p,S(p_n)]\times\mathbb{R})\cap S \text{ ,si } n\geq 2.\end{cases}$$

Demostración. Es inmediata para $n=1$. Sea $n\geq 2$ cualquier número

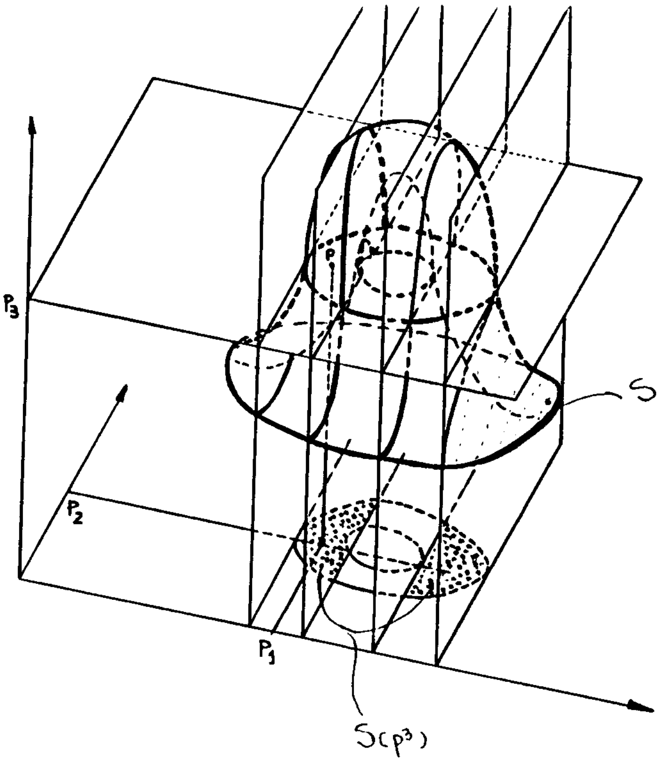

Fig.1

entero positivo y asumamos que la fórmula vale cuando se reemplaza n por n-1.Por esto,se verifica que

$$\mathcal{A}[\Pi_n p, S(p_n)] = (\mathcal{A}[\Pi_{n-1}\Pi_n p, S(p_n)(p_{n-1})]\times\mathbb{R}) \cap S(p_n) =$$

$$= (\mathcal{A}[\Pi_{n-1}\Pi_n p, S(p_{n-1}, p_n)]\times\mathbb{R}) \cap S(p_n).$$

Entonces para probar la fórmula para n≥2,bastará probar que

$$\mathcal{A}[p,S] = \{[(\mathcal{A}^*\times\mathbb{R}) \cap S(p_n)]\times\mathbb{R}\} \cap S \text{ , con } \mathcal{A}^* = \mathcal{A}[\Pi_{n-1}\Pi_n p, S(p_{n-1}, p_n)].$$

De la definición de conjunto accesible sigue que

$$\mathcal{A}^* = \{(x_1,\dots,x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2} : (x_1,\dots,x_j,p_{j+1},\dots,p_n) \in S, \quad j=1,2,\dots,n-2\} .$$

Por lo tanto,

$$(\mathcal{A}^*\times\mathbb{R}) \cap S(p_n) = \{(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1,\dots,x_j,p_{j+1},\dots,p_n) \in S, \quad j=1,2,\dots,\underline{n-2}, \text{ y } (x_1,\dots,x_{n-1}) \in S(p_n)\} .$$

entonces,

$$(\mathcal{A}^*\times\mathbb{R}) \cap S(p_n) = \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1,\dots,x_j,p_{j+1},\dots,p_n) \in S, \quad j=1,2\dots,\underline{n-1}\}.$$

Luego

$$\{[(\mathcal{A}^*\times\mathbb{R}) \cap S(p_n)]\times\mathbb{R}\} \cap S = \{(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) \in S \quad :$$

$(x_1,\dots,x_j,p_{j+1},\dots,p_n)\in S, j=1,\dots,n-1 \} = \mathcal{A}[p,S]$.—

<u>TEOREMA</u> <u>2.1</u>. Sea S L_n-medible (Borel) (cerrado) (abierto), $S\subseteq\mathbb{R}^n$. Sea $p=(p_1,\dots,p_n)\in S$ tal que, si $n\geq 2$, las secciones $S(p_k,\dots,p_n)$ son L_{k-1}-medibles (Borel) (cerradas) (abiertas) para $k=2,\dots,n$. Entonces el conjunto accesible $\mathcal{A}[p,S]$ es L_n-medible (Borel) (cerrado)(abierto).

Demostración. Probaremos por inducción el teorema para el caso S L_n-medible.

En vista de la fórmula inductiva del Lema 2.1, bastará probar que $\mathcal{A}[\Pi_n p, S(p_n)]$ es L_{n-1}-medible.

Si $n=1$, la tesis es cierta. Sea $n\geq 2$ y asumamos la validez del teorema para $n-1$. Por hipótesis. $S(p_n)$ es L_{n-1}-medible y, si $(n-1)\geq 2$, sus secciones $S(p_n)(p_k,\dots,p_{n-1}) = S(p_k,\dots,p_n)$ son L_{k-1}-medibles, para $k=2,\dots,n-1$. Entonces, por hipótesis inductiva, el conjunto accesible $\mathcal{A}[\Pi_n p, S(p_n)]$ es L_{n-1}-medible.—

<u>COROLARIO</u> <u>2.1.1</u>. Si S es Borel (cerrado) (abierto), $S\subseteq\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto accesible $\mathcal{A}[p,S]$ es Borel (cerrado) (abierto) para todo punto $p\in S$.

Demostración. Toda sección de un conjunto Borel (cerrado) (abierto) es Borel (cerrada) (abierta).—

<u>PROPOSICION</u> <u>2.1</u>. Si S es L_n-medible, $S\subseteq\mathbb{R}^n$, para casi todo punto $p\in S$, las secciones $S(p_k,\dots p_n)$ son L_{k-1}-medibles, $k=2,\dots,n$.

La demostración sigue del Teorema de Fubini.

<u>COROLARIO</u> <u>2.1.2</u>. Si S es L_n-medible, $S\subseteq\mathbb{R}^n$, el conjunto accesible $\mathcal{A}[p,S]$ es L_n-medible para casi todo punto $p\in S$.

Para demostrar el teorema siguiente asumiremos los resultados que se enuncian a continuación.

<u>LEMA</u> <u>2.2</u>. Si S_1,S_2 son subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$, un punto $p\in\mathbb{R}^n$ es de densidad de $S_1\cap S_2$ si y sólo si p es un punto de densidad

de S_1 y S_2.

<u>LEMA</u> <u>2.3</u> Sea $S \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, L_{n-1}-medible y $p=(p_1,\dots,p_n)$ un punto de $S\times\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n$, $n\geq 2$. Entonces p es un punto de densidad de $S\times\mathbb{R}$ si y solamente si $\Pi_n p$ es un punto de densidad de S.

<u>TEOREMA</u> <u>2.2</u>(de accesibilidad). Sea S un subconjunto L_n-medible de $\mathbb{R}^n$, y sea $p=(p_1,\dots,p_n)$ un punto de S tal que, si $n\geq 2$, las secciones $S(p_k,\dots,p_n)$, $k=2,\dots,n$, son L_{k-1}-medibles. Entonces p es un punto de densidad de $A[p,S]$ si y solamente si

(i) p es un punto de densidad de S,

(ii) si $n\geq 2$, las proyecciones $(p_1,\dots,p_{k-1})$ son puntos de densidad de las correspondientes secciones $S(p_k,\dots,p_n)$, $k=2,\dots,n$.

Demostración. Es obvia para $n=1$. Para $n=2$ es una consecuencia de los lemas 2.2 y 2.3, en vista de la fórmula $A[p,S]=(S(p_2)\times\mathbb{R})\cap S$.

Sea ahora $n\geq 3$ y supongamos el teorema válido para $n-1$.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, L_n-medible, $p\in S$ y las secciones $S(p_k,\dots,p_n)$ L_{k-1}-medibles para $k=2,\dots,n$. Por consiguiente la sección $S(p_n)$ es L_{n-1}-medible y sus secciones $S(p_n)(p_k,\dots,p_{n-1}) = S(p_k,\dots,p_n)$ son L_{k-1}-medibles para $k=2,\dots,n-1$.

Entonces, de acuerdo con la hipótesis inductiva, la proyección $\Pi_n p=(p_1,\dots,p_{n-1})$ es un punto de densidad de $A[\Pi_n p,S(p_n)]$ sii

(i') $\Pi_n p$ es un punto de densidad de $S(p_n)$,

($i'i'$) $(p_1,\dots,p_{k-1})$ es un punto de densidad de $S(p_n)(p_k,\dots,p_{n-1})= S(p_k,\dots,p_n)$, para $k=2,\dots,n-1$.

Por otra parte, de acuerdo con el Lema 2.3, p es un punto de densidad de $A[\Pi_n p,S(p_n)]\times\mathbb{R}$ si y solo si $\Pi_n p$ es de densidad de $A[\Pi_n p\ ,S(p_n)]$.

Por lo tanto, p es un punto de densidad de $A[\Pi_n p,S(p_n)]\times\mathbb{R}$ si y solo si (i') e ($i'i'$).

Observando que (i'), ($i'i'$) equivale a que las proyecciones $(p_1,\dots,p_{k-1})$ son puntos de densidad de sus respectivas secciones $S(p_k,\dots,p_n)$ para $k=2,\dots,n$, del Lema 2.2 se deduce que p es un punto de densidad de $(\mathcal{A}[\Pi_n p, S(p_n)]\times\mathbb{R})\cap S$ si y solo si p es un punto de densidad de S y $(p_1,\dots,p_{k-1})$ es un punto de densidad de $S(p_k,\dots,p_n)$ para $k=2,\dots,n$.Del Lema 2.1 sigue la tesis.—

<u>COROLARIO</u> <u>2.2.1</u> Casi todo punto de un conjunto medible es un punto de densidad de su conjunto accesible.

Demostración.Se deduce del teorema de densidad ([Sa] pág. 297) y del Teorema de Fubini que para casi todo punto p de un conjunto L_n-medible,$n\geq 2$, las proyecciones $(p_1,\dots,p_{k-1})$ son puntos de densidad de las correspondientes secciones $S(p_k,\dots,p_n)$,$k=2,\dots,n$, que son L_{k-1}- medibles. Esto y el teorema anterior completan la demostración.—

<u>COROLARIO</u> <u>2.2.2</u>.Sea S L_n-medible,$|S|>0$,$p\in S$. Salvo para p en un conjunto de medida cero ,$\mathcal{A}[p,S]$ es medible,p es un punto de densidad de $\mathcal{A}[p,s]$ y $|\mathcal{A}[p,S]|>0$.

En efecto,reemplazamos S por $S'=\{\, p\in S : 0 < \int \chi_S(p_1,\dots,p_n)dp_n\}$
Luego,por el Teorema de Fubini,$|S|=|S'|$.Casi todo punto p'de S' es tal que $\mathcal{A}[p',S']$ es medible,$|\mathcal{A}[p',S']|>0$ y p' es de densidad de $\mathcal{A}[p',S']$.Entonces ,como $\mathcal{A}[p',S]\supset\mathcal{A}[p',S']$,eliminando eventualmente un conjunto de medida nula de estos p',tenemos $\mathcal{A}[p',S]$ medible y $|\mathcal{A}[p',S]|>0$.-

§ 3. TEOREMA DE FADELL

<u>DEFINICION</u> <u>3.1</u>.Sea $f:S\longrightarrow\mathbb{R}$,$S\subseteq\mathbb{R}^n$.Se dice que f es diferenciable en $p_0\in S$,si existe $\nabla f(p_0)$ y

$$\frac{|f(p)-f(p_0)-\nabla f(p_0).(p-p_0)|}{|p-p_0|}\longrightarrow 0,\text{ cuando } p\longrightarrow p_0$$

<u>LEMA</u> <u>3.1</u> Sea $f:S\longrightarrow\mathbb{R}$,f continua ,S abierto acotado de $\mathbb{R}^n$.Si f tiene derivadas parciales f'_j ,$j=1,\dots,n$,en casi todo punto de S,entonces para todo $\varepsilon>0$ y $\gamma>0$, existe un conjunto cerrado

$E=E(\varepsilon)\subseteq S$ tal que

(*i*) $|S\setminus E|<\varepsilon$,

(*ii*) las derivadas parciales f'_j existen y son continuas en todo punto de E, y

$$|f(q)-f(p)-\nabla f(p).(q-p)| < \gamma|q-p|$$

si $q \in A[p,E]$ y $|q-p| < \varepsilon$.

Demostración. En casi todo punto de S los cocientes diferenciales parciales

$$\frac{\Delta f_{h_j}}{h_j} \longrightarrow f'_j \ , \qquad j=1,\ldots n$$

Considerando los h_j recorriendo los racionales, por el teorema de Egorov, para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto cerrado $E\subseteq S$ tal que

$$|S\setminus E|<\varepsilon, \text{ y } \frac{\Delta f_{h_j}}{h_j}\longrightarrow f'_j \ , \ j=1,\ldots n \ , \text{ uniformemente en todo}$$

punto de E. Como S es acotado, E es compacto. Por consiguiente f'_j es continua en el conjunto cerrado E, lo que implica f'_j uniformemente continua en E. Entonces cualquiera que sea $\gamma>0$, existe $\delta=\delta(\varepsilon,\gamma)$ tal que

(3.1) $$|f(x)-f(p)-f'_j(p)(x_j-p_j)| < \frac{\gamma}{2n}|x_j-p_j|$$

si $|x-p|=|x_j-p_j| < \delta$ y $x \in E$

(3.2) $$|f'_j(x)-f'_j(p)| < \frac{\gamma}{2n} \qquad \text{si } |x-p| < \delta$$

Sea $q \in A[p,E]$, $a_0=p$, $a_n=q$, $a_j=(q_1,\ldots,q_j,p_{j+1},\ldots,p_n)$, $j=1,\ldots,n-1$.

Observemos que $a_j\in E$ para $j=0,1,\ldots,n$. Sea $|q-p| < \delta$. Entonces $|a_j-a_i| <\delta$ y teniendo en cuenta (3.1) y (3.2), se verifica:

(3.3) $$|f(q)-f(p)-\nabla f(p).(q-p)|=|f(a_n)-f(a_0)-\sum_{j=1}^{n} f'_j(p)(q_j-p_j)|=$$

$$|\sum_{j=1}^{n}[f(a_j)-f(a_{j-1})] - \sum_{j=1}^{n}[f'_j(a_j)(q_j-p_j) + \sum_{j=1}^{n}[f'_j(a_j)(q_j-p_j)$$

$$-\sum_{j=1}^{n} f'_j(p)(q_j-p_j)| \leq \sum_{j=1}^{n}|f(a_j)-f(a_{j-1})- f'_j(a_j)(q_j-p_j)|$$

$$+\sum_{j=1}^{n} |f_j'(a_o)-f_j'(a_j)|\,|q_j-p_j| < \frac{\gamma}{2n}\sum_{j=1}^{n}(q_j-p_j) + \frac{\gamma}{2n}\sum_{j=1}^{n}(q_j-p_j)$$

$$\leq \gamma\ |q-p|$$

Lo que completa la demostración.-

LEMA 3.2. Sea f medible, definida sobre un conjunto medible y acotado S de $\mathbb{R}^n$. Si los cocientes diferenciales $\frac{|\Delta f_h(p)|}{|h|} = \frac{|f(p+h)-f(p)|}{|h|}$ están localmente acotados en casi todo punto de S, entonces para todo $\varepsilon>0$ existe un conjunto cerrado $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\varepsilon) \subset S$ y números positivos $M=M(\varepsilon)$ y $\delta=\delta(\varepsilon)$ tales que

(i) $L_n(S\backslash \mathbf{F})<\varepsilon$

(ii) f es Lipschitz sobre $\mathbf{F}$

(iii) si $p \in \mathbf{F}, q \in S$ y $|q-p|<\delta$, entonces

$$|f(q)-f(p)| < M|q-p|.$$

Demostración. Los cocientes diferenciales están localmente acotados en todo punto de un conjunto medible $S\backslash\mathbf{H}$, $|\mathbf{H}|=0$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon>0$, es posible elegir un conjunto cerrado $\mathbf{E} \subset S\backslash\mathbf{H}$, con $|S\backslash\mathbf{E}|<\varepsilon/2$, tal que para todo $p\in\mathbf{E}$ existe una esfera $K[p,r(p)]$ y una constante $k(p)>0$ tal que

$$|\Delta_h f(p)| \leq k(p)\,|h|$$

vale en $K[p,r(p)] \cap S$. Esto implica que f es continua en $\mathbf{E}$.

Para cada entero positivo k, sea

$\mathbf{E}_k=\{ p\in\mathbf{E} : |f(p)|\leq k$ y $|f(q)-f(p)|\leq k|q-p|$, si $q\in S$ y $|q-p|<1/k\}$

Por la continuidad de f, los conjuntos $\mathbf{E}_k$ son cerrados. Entonces $\mathbf{E}$ es una sucesión, obviamente creciente, de conjuntos cerrados. De la hipótesis obtenemos: $\mathbf{E}=\cup\mathbf{E}_k$. Por lo tanto, para para $k=K_o$ suficientemente grande, es $|\mathbf{E}\backslash\mathbf{E}_{K_o}|<\varepsilon/2$. Poniendo $\mathbf{F}=\mathbf{E}_{K_o}$, $M=K_o$ y $\delta=1/K_o$, claramente se verifican (i) y (iii).

Para probar (ii) tomemos q y p en $\mathbf{F}$ y considersmos dos casos:

(1) $|q-p|<1/K_o$, entonces, por (iii), $|f(q)-f(p)|<K_o|q-p|$.

(2) $|q-p|\geq 1/K_o$, entonces $|f(q)-f(p)| \leq |f(q)|+|f(p)| \leq 2K_o$

$$=2K_o^2 \,(1/K_o) \leq 2K^2|q-p|.$$

Entonces se verifica (*ii*) con constante de Lipschitz $2K^2$.–

<u>LEMA 3.3</u> Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, S medible, y $p\in S$ un punto de densidad de S. Entonces, para cada $\eta>0$, existe un número $\delta=\delta(\eta)$ tal que a cada $q \in \mathbb{R}^n$ con $|q-p| < \delta$, le corresponde un punto $q^* \in S$ satisfaciendo la siguiente desigualdad

$$|q-q^*| < \eta|q-p|.$$

Demostración. Sea p un punto de densidad de S y sea $K[p,r]$ la esfera de centro en p y radio r. Sea $N > 1$ tal que $1/(N-1)<\eta$.

Dado un número entero $N>1$, existe un número positivo $r_N(p)$ tal que

$$(3.4) \qquad \frac{|S\cap K[p,r]|}{|k[p,r]|} > 1-\frac{1}{N^n} \qquad \text{para } r < r_N(p).$$

Sea $r_o < r_N(p)$, $q \in K_o=K[p,r_o(N-1)/N]$ y $h=|q-p|$. Si $q \in S$, el teorema está probado tomando $q^*=q$, $\delta := r_o(N-1)/N$.

Supongamos que $q \notin S$. Obviamente $q \in K_1= K[p,\frac{hN}{N-1}]$.

Puesto que $h < r_o\frac{N-1}{N} = \delta$, tenemos

$$(3.5) \qquad h\frac{N}{N-1} < r_o < r_N$$

De (3.4) y (3.5) se tiene que

$$|S\cap K_1| > |K_1|(1 - \frac{1}{N^n}).$$

Por lo tanto, la medida del complemento de S respecto a K_1,

$$|C_{K_1}S| < |K_1|-|K_1|(1 - \frac{1}{N^n}) = |K_1| \frac{1}{N^n}$$

Como $|K_1| = |K^o|\left[\frac{hN}{N-1}\right]^n$, siendo $K^o=K[0,1]$, resulta que

$$(3.6) \qquad |C_{K_1}S| < |K^o| \left[\frac{h}{N-1}\right]^n$$

Consideremos ahora la esfera $K_2=K[q,\frac{h}{N-1}]$. En vista de que

$$h + \frac{h}{N-1} = \frac{hN}{N-1},$$

$K_2 \subset K_1$, luego, de (3.6), sigue que $K_2 \cap S \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $q^* \in S$ tal que $|q-q^*| < \frac{h}{N-1} = \frac{1}{N-1}|q-p| < \eta|q-p|$.-

En la demostración del resultado principal de esta sección se usará el siguiente teorema de extensión.

TEOREMA. Sea $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, f Lipschitz, $\mathrm{Lip}(f)=M$. Existe una función $\bar{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{f} = f$ en A, $\mathrm{Lip}(f)=\mathrm{Lip}(\bar{f})$

Demostración. Definamos

$$f(x) := \inf_{a \in \mathbf{A}} [f(a) + M|x-a|] .$$

Sea $b \in \mathbf{A}$. Como

$$f(a) + M|b-a| \geq f(b) \text{ resulta } \bar{f}(b) \geq f(b).$$

Pero obviamente,

$$f(b) \geq \bar{f}(b) \text{ .Por lo tanto } \bar{f} = f \text{ en } \mathbf{A}.$$

Sean x,y en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\bar{f}(x) \leq \inf_{a \in \mathbf{A}} [f(a) + M(|y-a| + |x-y|)] = \bar{f}(y) + M|x-y|$$

Luego,

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq M|x-y| \text{ .-}$$

TEOREMA 3.1 (de Fadell). Sea f medible definida sobre un conjunto medible, acotado $S \subset \mathbb{R}^n$, y a valores en $\mathbb{R}$. Entonces f es diferenciable en casi todo punto de S si y solo si los cocientes diferenciales de f están localmente acotados en casi todo punto de S [Fa].

Demostración. Obviamente los cocientes diferenciales están acotados localmente en todo punto donde f es diferenciable, lo que prueba que la condición es necesaria.

Supongamos entonces que los cocientes diferenciales estén localmente acotados en casi todo punto de S. Dado $\varepsilon > 0$, sean $\mathbf{F}$, M y $\delta = \delta_1$, con las propiedades enunciadas en el Lema 3.2. Como f es Lipschitz sobre $\mathbf{F}$, f puede ser extendida a $\mathbb{R}^n$ con la misma constante de Lipschitz y, en particular, a un abierto acotado $\mathbf{G} \supset \mathbf{F}$. Convenimos en seguir llamando f a la extensión de f a $\mathbf{G}$. Si

f es Lipschitz sobre G , f es Lipschitz en cada una de sus coordenadas $p_1,\ldots,p_n$. Luego, de variación acotada en cada coordenada. Por el teorema de diferenciación de Lebesgue [Na] existen las derivadas parciales primeras de f en casi todo punto de G.

Sea $\gamma > 0, M>\gamma$. Por el Lema 3.1, existe un conjunto cerrado $E \subset G$ y un número $\delta = \delta_2$ tal que $L_n(G\backslash E) < \varepsilon$ y tal que las derivadas parciales existen y son continuas en todo punto p de E, además se verifica

(3.7) $$|f(q)-f(p)-\nabla f(p).(q-p)| \leq \gamma|q-p|$$

si $q \in A[p,E]$ y $|q-p| < \delta_2$.

Sea $E^* = E \cap F \subset S, E^*$ es cerrado ,y $|S\backslash(E\cap F)|\leq|S\backslash F|+|G\backslash E|<2\varepsilon$.

Sea $p \in E^*$ tal que p es un punto de densidad de $A[p,E^*]$. Por el Lema 3.3 ,podemos elegir $\delta_3 > 0$ tal que para todo $q \in S$ con $|q-p| < \delta_3$, existe un punto $q^* \in A[p,E^*]$ tal que

(3.8) $$|q-q^*| < \frac{\gamma}{M} |q-p|$$

donde $\delta_3 = \delta_3(\gamma/M)$

Entonces

(3.9) $$|q^*-p| < 2|q-p|.$$

Sea $\delta = \min.(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, tomemos $q \in S$ tal que $|q-p| < \delta$, y elijamos $q^* \in A[p,E^*]$ verificando (3.8). Entonces ,por (iii) del Lema 3.2, (3.7) y (3.9)

$$|f(q)-f(p)-\nabla f(p).(q-p)|\leq|f(q)-f(q^*)|+|f(q^*)-f(p)-\nabla f(p).(q^*-p)$$

$$+|\nabla f(p)|\,|q-q^*|\leq M|q-q^*|+ \gamma|q^*-p|+nM|q-q^*|< \gamma(3+n)|q-p|.$$

Luego, f es diferenciable en p. Por el Corolario 2.2.1 esto vale en casi todo punto de E^*. Por lo tanto, vale en casi todo punto de S.-

EL TEOREMA DE RADEMACHER EN $\mathbb{R}^n$

PARA FUNCIONES LIPSCHITZ

§1. RESULTADOS PRELIMINARES

-Sobre una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ [Nat]

DEFINICION 1.1. Sea $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ una partición de I, $\mathcal{P}(I)$ la colección de todas las particiones posibles de I.
La variación de f sobre I se define como

$$V_I(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}(I)} \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1})-f(x_k)|$$

Si $V_I(f)<+\infty$ se dice que f es de variación acotada sobre I.

TEOREMA 1.1. Sea f definida en I. f es de variación acotada sobre I si y solo si f puede expresarse como diferencia de dos funciones crecientes acotadas.-

Las funciones lipschitzianas, (§1)[1], son evidentemente de variación acotada y el teorema de Rademacher, (§1)[2], para n=1 es una consecuencia del siguiente teorema;

TEOREMA 1.2 [Lebesgue]. Sea [a,b] un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$; $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, monótona. Entonces f tiene una derivada finita en casi todo punto de [a,b].-

TEOREMA 1.3. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, f no decreciente sobre [a,b]. Entonces $f'(x)$ es medible Lebesgue y

$$(1.1)\qquad \int_a^b f'(x)dx \le f(b)-f(a) \ .-$$

DEFINICION 1.2. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ se dice absolutamente continua sobre I si $\forall\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} (\beta_i-\alpha_i)<\delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} |f(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\varepsilon$$

para toda familia finita de intervalos abiertos (α_i,β_i) disjuntos dos a dos

TEOREMA 1.4. La igualdad en (1.1) se verifica para funciones absolutamente continuas.

(1) (pág.3) .(2) (pág.10)

TEOREMA 1.5. Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Entonces $F(x)$ es absolutamente continua y $F'(x)=f(x)$ en casi todo punto.—

TEOREMA 1.6. Si f es absolutamente continua sobre $[a,b]$, entonces $f'(x)\in L_1[a,b]$ y

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$$

para todo $x\in[a,b]$.—

La fórmula de integración por partes se verifica para funciones absolutamente continuas.

TEOREMA 1.7. Sean f y g funciones absolutamente continuas sobre $[a,b]$. Entonces f.g también es absolutamente continua y se tiene

$$(1.2) \qquad f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b f(t)g'(t)dt+\int_a^b f'(t)g(t)dt \ .—$$

—Derivadas direccionales. Diferencial total. [Ap]

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha\in\Omega$. Sea $\mathbf{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$. Cada punto del segmento que contiene a α y a $\alpha+\mathbf{v}$ es de la forma $\alpha+\lambda\mathbf{v}$, donde λ es un número real. Si α es interior a Ω, hay una esfera n-dimensional $B(\alpha;r)$ contenida enteramente en Ω. Si se elige λ tal que $|\lambda|\,\|\mathbf{v}\|<r$, el segmento desde α hasta $\alpha+\lambda\mathbf{v}$ está en Ω.

DEFINICION 1.3. Sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea α un punto interior a Ω, $\mathbf{v}$ un vector unitario de $\mathbb{R}^n$. Definimos la derivada direccional de f en α según la direccion $\mathbf{v}$, como

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\alpha)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\alpha+\lambda\mathbf{v})-f(\alpha)}{\lambda}$$

cuando este límite existe.

Si $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots\mathbf{e}_n$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, esta definición incluye la derivada parcial k-ésima cuando el vector unitario $\mathbf{v}$ es el vector $\mathbf{e}_k$.

_ El diferencial total.

Sea $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$. Sea α un punto interior a Ω y $B(\alpha;r)$ una esfera n-dimensional contenida en Ω. Sea $\mathbf{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{v}\|<r$, por consiguiente $\alpha+\mathbf{v}\in B(\alpha;r)$.

<u>DEFINICION</u> <u>1.4</u> Se dice que f es diferenciable en α si existe una transformación lineal

$$T_\alpha:\mathbb{R}^n \rightarrow\mathbb{R}$$

y una función escalar $E(\alpha;\mathbf{v})$ tal que

$$f(\alpha+\mathbf{v})=f(\alpha)+T_\alpha(\mathbf{v})+\|\mathbf{v}\|E(\alpha;\mathbf{v})$$

para $\|\mathbf{v}\|<r$, donde $E(\alpha;\mathbf{v})\rightarrow 0$ cuando $\|\mathbf{v}\|\rightarrow 0$. La transformación lineal T_α se llama la diferencial total de f en α.

-Distribuciones. [Sch]

Llamaremos $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio de las funciones de n variables reales, indefinidamente diferenciables sobre Ω y con soporte compacto.

<u>DEFINICION</u> <u>1.5</u>. Una distribución T es una funcional lineal y continua definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ denota el espacio de las distribuciones definidas sobre $D(\Omega)$.

Si f es una función medible y localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, f define una distribución T_f definida por

$$\langle T_f,\phi\rangle= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx,$$

para toda $\phi \in\mathcal{D}(\Omega)$.

<u>DEFINICION</u> <u>1.6</u>. Si $T\in\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathbf{v}$ es un versor de $\mathbb{R}^n$, se define la derivada $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}$ por

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} ,\phi \right\rangle=-\left\langle T,\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle$$

para toda $\phi\in\mathcal{D}(\Omega)$.

Es fácil ver que si $e_1,e_2,...e_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $v=v_1e_1+v_2e_2+...+v_ne_n$ entonces

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = v_1\frac{\partial T}{\partial e_1}+ v_2\frac{\partial T}{\partial e_2}+...+ v_n\frac{\partial T}{\partial e_n} \tag{1.3}$$

Observemos que si en la fórmula (1.2) de integración por partes se supone g con soporte compacto e indefinidamente diferenciable, con a,b $\notin$ sop.g se obtiene

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = -\int_a^b f(t)g'(t)dt \tag{1.4}$$

Por consiguiente si uno considera f como una distribución sobre (a,b), f′ es pues, su derivada en el sentido de las distribuciones.

Toda función localmente sumable tiene derivada de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones.Pero en general,la derivada no es una función.

TEOREMA 1.11 Dos funciones f y g definen la misma funcional $T_f = T_g$ si y solo si f=g en casi todo punto.—

§ 2. TEOREMA DE RADEMACHER

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}$ un versor de $\mathbb{R}^n$ y f una aplicación de Ω en $\mathbb{R}$. De acuerdo con la Definición 4.3

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\alpha) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\alpha+\lambda\mathbf{v})-f(\alpha)}{\lambda}$$

cuando este límite existe.

Sea $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω abierto de $\mathbb{R}^n$, una aplicación lipschitziana. Prolonguemos f asignándole el valor cero fuera de Ω y definamos la sucesión

$$f_n(x) = n\left[f(x+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(x)\right]$$

LEMA 2.1. Las funciones $f_n(x)$ son Borel medibles sobre $\mathbb{R}^n$ y $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\alpha)$, $\alpha \in \Omega$, existe si y solo si existe el $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\alpha)$.

Demostracón. Es claro que las f_n son Borel medibles y que si existe $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\alpha)$,existe también el $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial v}(\alpha)$.

Veamos la recíproca. Sea K una cota de Lipschitz para f y sea L el límite de $f_n(\alpha)$ cuando n tiende a infinito. Entonces ,dado $\varepsilon>0$ existe N_o tal que $\forall n \geq N_o$ es

$$|f_n(\alpha)-L| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.1}$$

Sea λ tal que $\frac{1}{n+1} \leq \lambda \leq \frac{1}{n}$,entonces

$$(2.2) \qquad |f(\alpha+\lambda\mathbf{v})-f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})| \leq K\left|\tfrac{1}{n} - \lambda\right| \|\mathbf{v}\| \leq \frac{K\|\mathbf{v}\|}{(n+1)n}$$

Por otra parte

(2.3)

$$\left|\frac{f(\alpha+\lambda\mathbf{v})-f(\alpha)}{\lambda} - L\right| \leq \left|\frac{1}{\lambda}\left[f(\alpha+\lambda\mathbf{v})-f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})\right]\right| + \left|\frac{1}{\lambda}\left[f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(\alpha)\right]-L\right|$$

Acotaremos cada uno de los sumandos de (2.3).Teniendo en cuenta que $\lambda(n+1) \geq 1$ y (2.2),

$$(2.4) \qquad \left|\frac{1}{\lambda}\left[f(\alpha+\lambda\upsilon)-f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})\right]\right| \leq \frac{K\|\mathbf{v}\|}{n}$$

Por otra parte,(2.1) y $0 \leq \frac{1}{\lambda} - n \leq 1$ implican que el segundo sumando

$$(2.5) \qquad \left|\frac{1}{\lambda}\left[f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(\alpha)\right]-L\right| = \left|\frac{1}{\lambda}\left[f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(\alpha)\right]+n\left[f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(\alpha)\right]-\right.$$

$$\left.-n\left[f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(\alpha)\right]- L\right| \leq \left|\frac{1}{\lambda}\left[f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(\alpha)\right]-n\left[f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(\alpha)\right]\right|$$

$$+\left|n\left[f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(\alpha)\right] - L\right| = \left(\frac{1}{\lambda} - n\right)\left| f(\alpha+\tfrac{1}{n}\mathbf{v})-f(\alpha)\right| + \left|f_n(\alpha)-L\right|$$

$$\leq \frac{K\|\mathbf{v}\|}{n} + \frac{\varepsilon}{3} .$$

De (2.3),(2.4) y (2.5) sigue que

$$\left|\frac{f(\alpha+\lambda\mathbf{v})-f(\alpha)}{\lambda} - L\right| \leq 2\frac{K\|\mathbf{v}\|}{n} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon,$$

si $n >$ máx.$(N_o, 3\frac{K\|\mathbf{v}\|}{\varepsilon})$,lo que prueba ,teniendo en cuenta la elección de λ,la existencia de $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\alpha)$.–

<u>LEMA</u> 2.<u>2</u>.Sea $f:\Omega\subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, f Lipschitz en Ω.El conjunto **K** de puntos $x \in \Omega$ donde $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ existe es un núcleo equimedible de Ω.

Demostración.Que **K** es medible sigue del Lema 2.1, ya que **K** es igual al conjunto de puntos de Ω donde la sucesión $f_n(x)$ es una sucesión de Cauchy.

Sea **A** el conjunto de puntos de Ω donde $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ no existe.Sea **d** una recta paralela a **v** y $\mathbf{d}_\mathbf{A}=\mathbf{d}\cap\mathbf{A}$,entonces $|\mathbf{d}_\mathbf{A}|=0$ (respecto a la medida lineal de Lebesgue).En efecto,la restricción de f a $\Omega\cap\mathbf{d}$ es también Lipschitziana por lo tanto $f/\Omega\cap\mathbf{d}$ es de variación acotada.De los teoremas 1.1 y 1.2 sigue que $|\mathbf{d}_\mathbf{A}|=0$.Aplicando el teorema de Fubini se obtiene que la medida de **A** (respecto a la medida n-dimensional de Lebesgue) es nula.

<u>COROLARIO 2.2.1</u>.Sea f Lipschitziana sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y **E** un conjunto numerable denso de puntos sobre la esfera S_{n-1}.Entonces existe un conjunto Lebesgue despreciable **N** $\subset$ Ω tal que $\forall$ $x \in \Omega\backslash\mathbf{N}$,$\forall$ $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ la derivada $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x)$ existe.

Para usar los resultados anteriores en la demostración del teorema que nos ocupa,es necesario probar que si $\mathbf{e}_1,\ldots\mathbf{e}_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}=\mathrm{v}_1\mathbf{e}_1+\ldots+\mathrm{v}_n\mathbf{e}_n$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x)=\mathrm{v}_1\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}+\ldots+\mathrm{v}_n\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_n} .$$

Esta última igualdad es fácil de probar vía las distribuciones. Como f es Lipschitz , f es localmente sumable y define una distribución T_f por

$$\langle T_f,\phi\rangle=\int_\Omega f(x)\phi(x)dx \quad , \forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La función $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ es medible puesto que es límite de funciones medibles(Lema 5.1) y acotada porque f es Lipschitz.Por lo tanto es localmente integrable sobre Ω y define una distribución $T_{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}}$,

$$\langle T_{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}},\phi\rangle=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x)\phi(x)dx \quad ,\forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Veamos que la distribución $T_{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}}$ es la derivada según **v** de la distribución T_f(en el sentido de las distribuciones).Para ello basta probar que

$$(2.6) \qquad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}}(x)dx \quad ,\forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Sea **d** una recta paralela a **v** que intersecta a Ω .Observemos que f es Lipschitz sobre $d\cap\Omega$,por lo tanto absolutamente continua allí.También ϕ restrngida a $d\cap\Omega$ es absolutamente continua .

En consecuencia $f\phi$ restringida a $d\cap\Omega$ es absolutamente continua.

Sea $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$(respecto a la norma euclídea) y sea $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{e}_n$.

Por (1.4) se tiene

$$\int_{\Omega \cap d} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x)\phi(x)dx_n = -\int_{\Omega \cap d} f(x)\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}}(x)dx_n \quad ,\forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Integrando sobre el espacio vectorial generado por $e_1,\dots e_{n-1}$ y aplicando el Teorema de Fubini,se obtiene la igualdad (2.6).-

En vista de este último resultado y la igualdad (4.3) ,

$$T_{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}} = \frac{\partial T_f}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}_1\frac{\partial \mathrm{T}_f}{\partial \mathbf{e}_1} + \dots + \mathbf{v}_n \frac{\partial \mathrm{T}_f}{\partial \mathbf{e}_n}$$

lo que implica ,según el Teorema 1.8,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}_1\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1} + \dots + \mathbf{v}_n \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_n}$$

en casi todo punto.

En resumen , hemos probado el siguiente lema,que mejora el resultado enunciado en el Corolario 2.2.1:

<u>LEMA 2.3</u>.Sea f una aplicación Lipschitz sobre un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,**E** un conjunto numerable denso de S_{n-1} y $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n \in \mathbf{E}$ una base de $\mathbb{R}^n$.Entonces existe un conjunto $\mathbf{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida nula tal que para todo $x \in \Omega\backslash\mathbf{N}$ y todo $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{v}_n\mathbf{e}_n$ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x)$ existe y $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}_1\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1} + \dots + \mathbf{v}_n \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_n}$.-

<u>TEOREMA DE RADEMACHER.</u> Sea f una aplicación Lipschitz de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,en $\mathbb{R}$.Entonces f es diferenciable en casi todo punto de Ω **[SP]**.

Demostración.Elijamos **E** , $\mathbf{e}_1,\dots\mathbf{e}_n$ y **N** como en el Lema 2.3 y $x \in \Omega\backslash\mathbf{N}$.De este último lema se deduce que existe una aplicación lineal T_x, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$,

$$T_x(\mathbf{v}) := \sum \mathbf{v}_i\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i} \quad , \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n ,$$

verificando que $\forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{E}$, $T_x(\mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x)$

Mostraremos que T_x es la diferencial total de f en x.Podemos suponer que $\forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{E}$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x) = 0$.(En efecto, si se reemplaza f(y) por la función Lipschitz $g(y) = f(y) - T_x(y-x)$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ es $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} = 0$,pues para x fijo

$$T_x(y-x) = (y_1-x_1)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1} + \dots + (y_n-x_n)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_n} = y_1\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1} + \dots + y_n \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_n} + C ,$$

donde la constante $C = \sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial e_k}(x)$.

Entonces, si $\mathbf{v} \in E$

$$\frac{\partial T_x(y-x)}{\partial \mathbf{v}}(x) = \mathbf{v}_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + \ldots + \mathbf{v}_n \frac{\partial f}{\partial e_n} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x)$$

Esto implica que

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}(x) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x) - \frac{\partial T_x(y-x)}{\partial \mathbf{v}}(x) = 0.).$$

En esta situación, teniendo en cuenta la Definición 1.4, para probar que $T_x = 0$ es la diferencial total de f en x, bastará probar que dado $\varepsilon > 0$, existe un número $\eta > 0$ tal que $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$ con $\|y\| < \eta$ es $x+y \in \Omega$ y $|\ f(x+y) - f(x)\ | \leq \varepsilon\ \|y\|$.

La compacidad de S_{n-1} implica que existe un conjunto finito $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ de E tal que si $\mathbf{v} \in S_{n-1}$ existe i, $1 \leq i \leq k$, tal que

(2.7) $$\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}\| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

donde K es la constante de Lipschitz para la función f.

Como $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_i} = 0$, existe $\eta > 0$, tal que la esfera de centro en x y radio η, $\overline{B}(x,\eta)$, está contenida en el abierto Ω, y $\forall\ \lambda$, $0 < \lambda < \eta$ $i = 1,2,\ldots k$, es $x + \lambda\ \mathbf{v}_i \in \Omega$ y

(2.8) $$|\ f(x + \lambda \mathbf{v}_i) - f(x)\,| < \frac{\varepsilon}{2}\ \lambda.$$

Sea $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \|y\| < \eta$, $\frac{y}{\|y\|} \in S_{n-1}$. Entonces existe $\mathbf{v}_i \in E$,

$1 \leq i \leq k$, tal que, por (2.7),

(2.9) $$\left\|\frac{y}{\|y\|} - \mathbf{v}_i\ \right\| < \frac{\varepsilon}{2k},$$

De la desigualdad triangular, la hipótesis f Lipstchiz y las relaciones (2.8) y (2.9) se tiene

$$|f(x+y) - f(x)| \leq |f(x+y) - f(x + \|y\|\mathbf{v}_i)| + |f(x + \|y\|\mathbf{v}_i) - f(x)| \leq$$

$$K\|y - \|y\|\mathbf{v}_i\| + \frac{\varepsilon}{2}\ \|y\| \leq \varepsilon\|y\|.-$$

REFERENCIAS

[Fa] FADELL,A. "A generalization of Rademacher theorem on complete difernential". Colloq. Mat. 27 (1973) p.125-131.

[HY] HOCKING,J-YOUNG,G. "Topología".Reverté SA 1966.

[HW] HUREWIKCZ-WALLMAN. "Dimension Theory". Princeton Univ. Press 1948 p.95.

[Na] SZ.-NAGY ,B. "Introduction to real functionsand orthogonal expansions".N.W. Oxford Univ.Press 1965.

[Nat] NATANSON,J.P. "Theory of functions of real variable".Vol.I. Frederick Ungar Pub. 1964.

[Ne] NEWMAN,M.H.A. "Elements of the topology of plane sets of points". Cambridge, Univ. Press (1954) p.193.

[Ra] RADEMACHER,R. "Uber partielle and totale Differenzierbarkeit von Funktionen meherer variablen". Math.Annalen 70 (1919) p.340

[Sa] SACKS,S. "Theory of the integral". Dover Pub. N.Y. (1964). p.129.

[SP] SAINT-PIERRE,J."Sur le theoreme de Rademacher". Travaux.Sem.Anal. Convexe 12 (1982) No.1.

[Sch] SCHWARTZ,L. "Theorie des distributions". Paris, Hermann. (1966).

[Ts] TSUJI,M."Change of variables in the multiple Lebesgue integrals".Journal of the Math.Society of Japon. Vol.2 No. 1-2 (1950)

[WZ] WHEEDEN,R-ZYGMUND,A."Measure and integral". Edit. Board, Inc. N.Y. (1977)

BIBLIOGRAFIA

-Sobre el Teorema de Rademacher:

[1]-RADEMACHER, .*Uber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen* :Math.Annalen 70 (1919).S.340.

[2]-MENCHOFF,D. *Sur les differentielles totales des fonctions univalentes*.Math.Ann.105 (1931) 75a78. [Generalización de los teoremas de Rademacher-Stepanoff].

[3]-U.S.HASLAM-JONES. *Derivate planes and tangent planes of a measurable function*. The Journal of math. (Oxford series) Vol.3,p.120.(1931). [Generaliza los resultados obtenidos por Denjoy-Young (sobre las derivadas de Dini) para funciones de dos variables. El teorema de Rademacher es un corolario de unos de los teoremas demostrados en este trabajo.]

[4]-BURKILL,J.C-HASLAM-JONES. *Notes on the differentiability of functions of two variables*.The Journal of the London Math.Society.Vol.VII (1932). [En §§2,3, los autores completan la teoría de Rademacher - Stepanoff, de diferenciabilidad de funciones de dos variables. En §§4,5 prueban que una funcion de dos variables, monótona,(de acuerdo a la definición apropiada)es diferenciable en casi todo punto.En §6 establecen la diferenciabilidad aproximada de funciones de variación acotada tipo Tonelli.]

[5]-SAKS,S.* *Theory of the integral*. Dover Publications. New York (1964)

[6]-FADELL,A. *A generalization of Radamacher theorem on complete differential*. Colloq.Mat.27 (1973) p.125-131(MR 48 #8709). [Se introduce el concepto de *conjunto accesible*. El *Teorema de accesibilidad* permite probar el Teorema de Rademacher para funciones de varias variables , modificando la demostración de Rademacher.]

[7]-OHTSUKA,M.*Area formula*.Bull.Inst.Math.Acad.Sinica 6(1978)núm.2, 599-636.(MR 80a:#28003) [El autor demuestra la siguiente fórmula:

$$\int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{f^{-1}\{y\}} g\ dH^{m-k}dH^k y = \int_{E} g\ J_k f\ dL^m$$

cuando $f:\mathbb{R}^m\rightarrow\mathbb{R}^n$es localmente Lipschitziana,$E\subseteq\mathbb{R}^m$,es L^m medible, F(E) es σ-finito con respecto a H^k; $g:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^+$,g L^mmedible.(L^m:medida L-dim. de Lebesgue, H^j:medida j-dim. de Haussdorff,$J_k f$:k-dim.Jacobiano) Incluye la demostración de una forma del Teorema de Rademacher.]

[8]-SAINT-PIERRE,J.*Sur le théorème de Rademacher*. Travaux.Sem.Anal. Convexe 12(1982)núm.1,exp.núm.2,p10(MR 84f:#26016). [Presenta en detalle la demostración del Teorema

de Rademacher,dada por Morrey,C.(Multiple Integrals in the calculus of variaciones. Springer. New York (1966))].

-Sobre diferenciabilidad en general:

[9]-STEPANOFF,W. *Uber totale Differenzierbarkeit.* Math. Annalen 90 (1923),S.318.

[10]STEPANOFF,W.

[11]-CACCIOPOLI,R. *Sulla differenziabilitá delle funzioni di più variabili.* Rend. Acc. Sci. Fisc.Mat.,Napoli III 34 (1928),p.152-159.
[Obtiene los siguientes resultados:-Una función de dos variables , diferenciable en casi todo punto respecto a un grupo de ellas, y uniformemente Lipschitziana en el resto,es diferenciable en casi todo punto. Introduce el concepto de *variación parcial uniformemente limitada* ,y demuestra :-Una función de dos variables a variación limitada, derivable en casi todo punto respecto de ambas, es diferenciable en casi todo punto. Introduce el concepto de *diferenciabilidad asintótica*, y prueba -Una función parcialmente derivable en casi todo punto es asintóticamente diferenciable en casi todo punto.]

[12]-SEVERI,F. *Sulla differenziabilià totale delle funzioni di più variabili reali.* Ann.Mat.Pura Appl. (4) 13 (1935) 1-35.
[El trabajo consta de los siguientes subtítulos : - Tangenti e cordi improprie in un punto di accumulazione d' un insieme. -Differenziali e derivate direzionali . -Condizione per la differenziabilità . - Condizione per l'iper differenziabilità . -La regola generale di derivazione delle funzioni composte . - Continuità delle iperderivate quando esistono in un dominio piano.-Condizione per la differenziabilità in un dominio piano.-Observazioni varie.]

[13]-CESARI,L. *Sulle funzioni assolutamente continue in due variabili.* Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa (2) 10 (1941)-p.91-101.
[El autor prueba que , si f es continua en [0,1]x [0,1] y ACT ,con derivadas parciales en L_p (p>2) entonces f es diferenciable Stolz en casi todo punto en [0,1]x[0,1].]

[14]-FEDERER,H. *Surface Area II.* Trans.Amer.Math.Soc.55 (1944),438 -456.

[15]-ALEXIEWICZ A. *On differentiation of vector valued functions.* Studie Math.11 (1949) 187-196.

[16]-CALDERON,A.. *On the differentiability of absolutely continuous functions.* Riv.Mat.Univ.Parma Vol.2 (1951)p.203-213.
[Generaliza un resultado de Cesari,L.[13].]

[17]-WHITNEY,H. *On totaly differentiable and smooth functions.*

[18]-DAVIES,R.O. *On accessibility of plane sets and approximate*

differentiation of functions of two real variables. Proc.Cambridge Phil.Soc.48 (1952).215-32.

[19]-CECCONI,J.*Sulla differenziabilità nel senso di Stolz , di una funzioni di più variabili.*Ricerche Mat.1 (1952)317 -324.(MR 14(8)).
[Obtiene una conclusión más fuerte que el clásico teorema de Rademacher, suponiendo f(x,y) Lipschitz en [0,1[x[0,1]y condiciones de continuidad de f_x, f_y]

[20]-LODIGIANI,B.*Sulla differenziabilità asintotica regolare delle funzioni di più variabili.*Rend.Sem.Mat.Univ.Padova 22(1953).251-257.(MR 15(4)).
[Trata un teorema sobre diferenciabilidad total que vale para n=2 y es generalmente falso para n>2. Obtiene, como principal resultado, una condición para que f(x,y,z) tenga diferencial aproximado regular.]

[21]-KUDRYAVCEV,L.D.*On summability of Jacobians.*Mat.Sbornik N.S.33 (75),389-398 (1953) (Russian).(MR 15(4)).
[Bajo ciertas condiciones sobre f prueba:-I) $|f(E)| = \int_E |J|\, dx$, $E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^2$, E medible, f monótona.-II)f compacta, E compacto, entonces la pseudo multiplicidad de E es finita y J es sumable.]

[22]-KUDRYAVCEV,L.D. *On propiertes of differentiable mapping of regions of Euclidean space.*Mat.Sbornik N.S.32 (74), 493-514 (1953)(Russian) (MR 15(1)).
[El autor establece un número de propiedades de transformaciones diferenciables y sus Jacobianos ó matrices Jacobianas.]

[23]-BONATI SAVORGNAN,C.*Sulla differenziabilità secondo Stlz delle funzioni composte.*Ann.Univ.Ferrara.Sez. VII(NS) 3 (1954),17-24.
[Se establecen condiciones suficientes para la diferenciabilidad (en el sentido ordinari ó en el sentido Stolz , respectivamente) de funciones compuestas.]

[24]-OSTROWSKY,A. *Note sur les deriveés uniformes de les differentielles totales.*Comment Math.Helv.29 (1955) 298-300.(MR 17(2))
[El autor hace referencia a las interrelaciones entre un trabajo de F.Severi[Ann.Mat.Pura Appl.(4) 13 (1934),1-35] sobre la existencia de diferencial total de una función f(x,y) y un trabajo propio Comment Math.Helv.15 (1943), 222-226] en el cual muestra la existencia de diferencial total bajo condiciones diferentes.]

[25]-SINDALOVSKII,G.H. *On the differential total.* (Russian). Mat. Sbornik (N.S)70 (112) (1966),347-367.(MR 33 #7469)
[Generaliza resultados de Rademacher ,Stepanoff y Haslam-Jones y resultados propios previos.]

[26]-VARBERG,D.E.*On differentiable tranformations in $\mathbb{R}^n$.*Amer.Math. Monthly 73 (1966) núm.4,parte II,111-114.(MR 33(4) #4216)
[Prueba que si $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $E \subseteq D$, E medible, f diferenciable en E,entonces f(E) es medible y

$$|f(E)| \leq \int_E |J(x)|\, dx \ .$$
(|.|:medida de Lebesgue.Obs:no pide f continuamente diferenciable).]

[27]-DZVARSEISVILI,A.G. *The total differential.* (Russian Georgian summary) Sakhart SSR Mec.Akad.Math.Inst. Srom 34 (1968) 13-21.(MR 40 (5)).
[Bajo ciertas condiciones sobre P(x,y), Q(x,y) definidas en R_o=[0,1]x[0,1], el autor prueba que existe F(x,y) sobre R_o tal que dF=Pdx+Qdy,c.d en R_o.]

[28]-MCEDLISVILI,S.A.*The existence of a total differential*(Russian Georgian english summaries)Sakharten SSR Mecn.Akad. Moambe 53 (1969)29-32.(MR 41 #409)
[Estudia condiciones suficientes para la existencia de diferencial total de una función de dos variables.]

[29]-DE LUCIA,P. *Sulla differenziabilità quasi ovunque di una funzioni misurabili.* Ricerche Mat. 19 (1970),79-92 (MR 44 #375)
[Supone f medible,definida sobre $X \subseteq \mathbb{R}^k$,X medible y acotado y prueba que las siguientes condiciones son equivalentes:I)fes diferenciable en casi todo punto de X.II)F puede ser aproximada (fuerte) en X por funciones $C^{(1)}$.III) f puede ser aproximada (fuerte) en X por funciones Lipschitz. IV) f es "strongly almost Lipschitz" sobre X. V) f es localmente Lipschitz en casi todo punto de X. Las Las equivalencias (I)y (V) fueron establecidas por Stepanoff(1923).]

[30]-DE LUCIA,P.*Sulla caratterizzazione delle funzioni numerichi di una variabili quasi qvunque derivabili rispeto ad un'altra.*Ricerche Mat.19 (1970),26-47.(MN 43 # 3406)

[31]-BONGIORNO,B. *Sulla differenziabilità quasi ovunque delle funzioni di più variabili.* (French summary).Rend. Circ.Mat.Palermo(2) 20 (1971),34-42.(MR 49(1) #496)
[Caracterización de las funciones de n variables diferenciables en casi todo punto, por condiciones de tipo variacional.]

[32]-VALENTI,S.*On the differentiability of functions whose values are assigned on 0-measures sets.*Rev.Roumanie Math. Pures Appl.18(1973),1283-1286.(MR 48(3) #5249).
[Para funciones de una ó más variables, el autor da algunas condiciones necesarias y suficientes para la diferenciabilidad en casi todo punto envolviendo solamente el comportamiento de la función sobre un conjunto de medida nula.]

[33]-HOFFMAN,J. *On the differentiability points of a functions of two real variables admitting partial derivatives.* Math.Scand.35(1974)259-266.(MR 41 #3375).
[Demuesta resultados sobre diferenciabilidad a lo largo de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$.]

[34]-DE LUCIA,P.*Sulla differenziabilità delle funzioni.* English summary.Boll.UN.Mat.Ital.(4) 11 (1975) núm.3 suppl. 56-69(MR
[Usando propiedades de los puntos de densidad de

de un conjunto , establece condiciones de diferenciabilidad en casi todo punto.]

[35]-DI BARI,C.M.*Su alcune condizioni di differenziabilità per la funzioni di piùvariabili.*Atti.Acad.Sci.Let.Arti Palermo Parte I (4) 34 (1974/75) (MR 54 #7719)
[El autor establece condiciones necesarias y suficientes para la diferenciabilidadparcial en casi todo punto,de una función medible Borel en $\mathbb{R}^n$ y para la diferenciabilidad asintótica en casi todo punto funciones medible Lebesgue.]

[36]-DE LUCIA,P.*On the differentiability of functions.*Rend.Circ. Palermo (2) 26 (1977) núm.1-3;7-16 (1978) (MR 81b #26008)
[Sobre los clásicos teoremas de Stpanoff (sobre diferenciabilidaden casi todo punto y dif. aproximada) para funciones de más de una variable.]

[38]-GUARIGLIA,E.*The summability of the partial derivative of a differentiable fonction.*(Italian) Ricerche Mat.27 (1978) núm.1,59-81.(MR 80c #26007)
[Establece condiciones necesarias y suficientes para que una función de k variables sea diferenciable en casi todo punto y con derivada parcial en L_1.]

[39]-BRUCKNER,A.* *Differentiation of real functions.*Lecture notes Math.,659. Springer-Verlag, Berlín-New York (1978) (MR 80h #26002)
[Esta colección de notas es lectura esencial para quien esta interesado en el desarrollo reciente de la teoría de diferenciación de funciones reales.D.Waterman (Bull.Amer.Math.Soc.(NS) 2 (1980)núm.1,232-237) y L.Misik (Zbl 382 : 26002) han realizado un resumen de cada uno de los capitulos.]

[40]-AVERSA,V. *On a condition of almost everywhere differentiability.* Italian English summary. Rend. Accad.Sci.Fis.Mat.Napoli (4) 47 (1980),55-60 (1981) (MR 82f #26011)
{Prueba una condición necesaria y suficiente para que una función f ,definida en $X\subseteq\mathbb{R}^2$,(X medible y acotado)sea diferenciable en casi todo punto de X y de allí derivauna condición necesaria y suficiente para que f sea aproximadamente diferenciable en casi todo punto de X.]

[41]-DI BENEDETO,M.*On the differentiability of continuous functions* (Italian).Atti.Accad.Sci.Let Arti Palermo Sec(5) 3 (1982/83)432-462 (1985) (MR 88d #26025)
[Extiende resultados anteriores propios y obtiene condiciones para que una función $f:E\to\mathbb{R}$,$E\subseteq\mathbb{R}^2$,sea diferenciable con respecto a cualquier grupo de m variables,$1\leq m\leq n$.También da una caracterización para funciones diferenciables en casi todo punto, en términos de una condición α-Lipschitz.]

-Sobre el cambio de variables en la integral múltiple.

[42]-RADEMACHER,H.*Uber partialle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen.I.* Math.Ann. Vol.

27 (1919) 340-359.

[43]-YOUNG,W.H.*On a change of the variables in a multiple integral*.Proc.R.S(A). Vol.26 (1921) 82-91.

[44]-YOUNG,W.H.*Integration over the area of a curve and transformations of the variables in a multiple integral*.Prc.London Math.Soc.Vol.21(1923) 161-190.

[45]-CACCIOPPOLI,R.*Teoria generale del cambiamento di variabili negli integrali doppi*.Atti Congreso Inter.Mat. Barcelona.Vol.2 (1928) 303-308.-

[46]-CACCIOPPOLI,R.*Teoria generale del cambiamento di variable negli integrali doppi. Math. Ann.*Vol.101 (1939) 672-685.

[47]-HELSEL,R.G.-RODO,T. *The transformations of double integrals.* Trans.Amer.Math.Soc.Vol.54 (1943) 83-102..

[48]-CESARI,L.*Sulla transformazione degli integrali doppi*.Annali di Mat.Pura Appl.(4) Vol.27 (1928) 321-327.

[49]-TSUJII,M.*Change of variable in the multiple Lebesgue integral*.J.Math.Soc.Japan 2 (1950) 48-56.(MR 12(9))
[

[50]-KUDRYAVCEV,L.D.-KASCENKO,J.D.*On change of variable in a integral*.Doklady Akad.Nauk SSSR(N.S) 84 (1952) 864-871.(Russian) (MR 14 (1)).
[Establece la fórmula de transformación para la integral múltiple,de *f.J* ,sobre un dominio n-dimensional,cuando *f* y *J* pertenecen a L_2.]

[51]-SEKI,S.*On the change of variable in the multiple integrals*.J.Soc.Japan (4) (1952) 218-230.(MR 14(9))
[Demuestra la fórmula de cambio de variable , suponiendo que f es un homeomorfismo de D sobre f(D),totalmente diferenciable en casi todo punto. Luego trata el caso donde f no es necesariamente biunívoca.]

[52]-SCHWARTZ,J.*The formula of change of variable in a multiple integral*.Amer.Math.Monthly 61 (1954) 81-85. (MR 15 (7)).

[53]-R.-SALINAS,B. *On change of variable in multiple integrals.* (Spanish)Collect.Math.12 (1960) 138-153.(MR 23 #A1764)
[Obtiene tres teoremas sobre el cambio de variables en las integrales múltiples.El último de ellos generaliza los dos anteriores,para el caso en que la transformación T sea diferenciable en casi todo punto del conjuntodonde está definida y transforme conjuntos de medida nula ,en cojuntos con la misma propiedad.]

[54]-BARABONOV,A.I.-KUPOV,N.P.*Change of variablesin an integral over a domain*.(Russian). Volz.Mat.Sb. Vyp 2 (1964) 195-200.(MR 33(5) #5806)

[56]-ZIEMER,W.P.*Change of variables of absolutely continuous functions*.Duke Math. J 36 (1969) (MR 38(6) #6006)
[Supone $G \subseteq E$. (G acotado). $H^1(G)$ ($p \geq 1$) (clase de

funciones definidas en G, de clase L_p y con derivadas parciales(en el sentido de las distribuciones) de clase L_p. Estudia el comportamiento de una función en $H^1_q(G)$, cuando compone con un homeomorfismo bi-medible cuya inversa es en $H^1_p(G)$,para apropiado p. De especial interes es la demostración de la fórmula *co-área* para transformaciones en H^1_p.]

[57]-VARBERG,D.E. *Change of variable in the multiple integrals* Amer.Math.Monthly 78 (1971) MR 42(6) #7843)
[Prueba el teorema clásico de cambio de variables pidiendo un mínimo de hipótesis:T diferenciable en casi todo punto de E,(E medible),T biunívoca en E.]

[58]-GUZMAN,M.*A change of variables formula whithout continuity.* Amer. Math. Monthly 87 (1980) núm.9 736-739.(MR 82c #26014)
[Muestra que es posible obtener una fórmula de cambio de variable satisfactoriasin requerir continuidad de la transformación.De esta fórmula general obtiene facilmenteotrasfórmulas clásicas y no tan clásicas.]

[58]-MONTALVO,D.*Change of variable in multiple integrals.* Colloquium 1985-86 (Badajoz,1985-86) 80-86. Publ. Dep.de Mat. Univ.Extremadura 15 (MR 89e #26027)
[El trabajo es una parte de un curso.Establece dos nuevos teoremas de cambio de variables y da solamente lineamientos de las demostraciones.]