



INFORME TECNICO INTERNO

Nº 29

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina



INSTITUTO DE MATEMATICA—BAHIA BLANCA

(INMABB) — U.N.S. — CONICET

INFORME TECNICO No. 29

TEMAS DE LA TEORIA DE GRAFOS
I: NOCIONES BASICAS

INSTITUTO DE MATEMATICA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
N° INVENTARIADO (H) <i>ITI-29</i>

Raul A. CHIAPPA



INTRODUCCION

En los cursos tradicionales de Algebra o de Análisis estamos acostumbrados a considerar problemas de la vida diaria y a plantear su resolución mediante el estudio de un modelo matemático adecuado que implicará, salvo casos excepcionales, una simplificación de la realidad a estudiar. Con refinamientos sucesivos se podrán elegir otros que la representen cada vez más ajustadamente. Esto nos lleva, habitualmente, al análisis de funciones o de sistemas de ecuaciones en las cuales las magnitudes de las variables involucradas pueden tomar valores en determinados intervalos reales, son "problemas continuos".

En lo que sigue nos referiremos a cuestiones que están ligadas a conjuntos finitos, o más generalmente a conjuntos discretos. Observemos al respecto que en muchas oportunidades cabe la posibilidad de distinguir un número finito de "situaciones" y que aún cuando el paso de una a otra (eventualmente la misma) sea de índole continua, esto no interesa al usuario o al análisis que se efectúa. En tales casos, generalmente, el uso del Análisis Matemático es inadecuado y deben ensayarse otras herramientas. Entre éstas se incluyen las nociones y técnicas propias de la Teoría de Grafos.

La misma permite abordar y sistematizar el estudio de cuestiones muy diversas, algunas con origen en meros pasatiempos pero otras en importantes preguntas de la ciencia o de la técnica. Precisamente, la posibilidad de esquematizar dentro de ella situaciones muy distintas es una de las razones del ímpetu y desarrollo que dicha teoría presenta en la actualidad.

Suele convenirse que la Teoría de Grafos surgió como disciplina autónoma en 1936 con la publicación del libro de König (K.1); quien reunió en un todo orgánico numerosos resultados obtenidos en trabajos anteriores sin aparente conexión entre sí. El primero de ellos, en orden cronológico, y posiblemente el más conocido, data de 1736 y es debido a Euler (E.1)(E.2). Algunos de sus temas fueron estudiados como parte de la topología combinatoria por Veblen (V.1), en 1922.

Utiliza nociones vinculadas con diferentes aspectos de la labor matemática. En particular con relaciones, combinatoria, topología, grupos, espacios vectoriales, matrices, álgebra booleana, etc. Además de su importancia como rama de la matemática cabe destacarse la que resulta de sus aplicaciones, en ingeniería, economía, física, química, biología, ciencias sociales, investigación operativa, informática, etc.

La mayoría de éstas están referidas a problemas para cuyo estudio basta considerar un número finito de "estados" y por esto es habitual limitarse a los "grafos finitos".

Cuatro importantes capítulos de la teoría son los relacionados, respectivamente, con "camino euleriano", "camino hamiltoniano", "árboles" y "planaridad".

Referencias a problemas cuyo análisis llevó a introducir dichos conceptos serán dadas oportunamente. Al respecto pueden verse (CH.1), (H.1), (W.1), () o las introducciones de (H.2), (T.1). Para una breve información sobre motivos que impulsaron el estudio de algunos otros de los temas que abarca la teoría, ver (H.1), (H.3).

El número de textos dedicado a la Teoría de Grafos y Aplicaciones es razonablemente elevado. Entre los de carácter introductorio citaremos Busacker-Saaty (B.1), Kaufmann (K.2), Ore (O.1), Toranzos (T.1) y los trabajos de Berge (B.2) y de Nash-Williams (N.1).

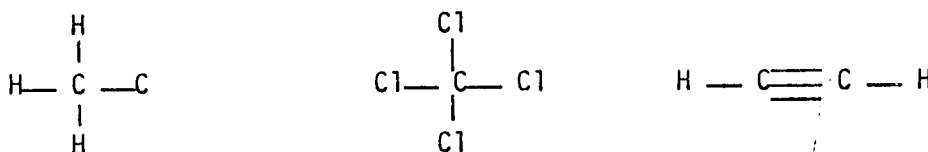
Una amplia y detallada variedad de aplicaciones puede hallarse en la segunda parte del libro (B.1). Con este mismo objetivo consultar, entre otros (CH.2), (CH.3), (M.1), (W.2), (D.1).

Destaquemos que el concepto "árbol" -que es quizás la más importante de las estructuras no lineales utilizadas en algoritmos -fue empleada en 1847 por Kirchhoff (K.3) para simplificar la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales que vinculan potenciales con intensidad de corriente eléctrica. En 1857, fue redescubierto por Cayley (C.1) en

el transcurso de sus investigaciones para determinar el número de isómeros de los hidrocarburos de la serie parafínica, es decir de aquellos con enlaces simples que satisfacen la fórmula C_nH_{2n+2}

Numerosas situaciones de la vida diaria pueden ser descritas adecuadamente, al menos en primera aproximación, por medio de diagramas constituidos por puntos y líneas que conecten ciertos pares de ellos y eventualmente alguno consigo mismo.

Así por ejemplo, si no se tiene en cuenta la disposición espacial de sus átomos cada molécula puede ser visualizada por un esquema en el cual los puntos correspondan a los átomos y las líneas a las ligaduras entre ellos. En particular, el metano (CH_4), el tetracloruro de carbono (CCl_4) y el acetileno (C_2H_2) pueden representarse, respectivamente, por:

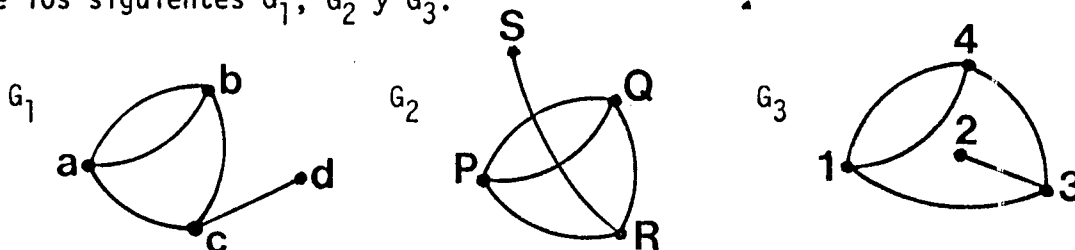


Algunas propiedades topológicas de esas representaciones bidimensionales reflejan propiedades químicas de la molécula. Por ejemplo, para cierta clase de hidrocarburos el Índice de Wiener - ligado al concepto de "distancia" - puede correlacionarse con el punto de ebullición o el de isomerización (W.3).

Por otra parte, obviamente, hay propiedades de las sustancias que no tienen correspondencia con los esquemas que nos ocupan. Así por ejemplo a temperaturas adecuadas el metano es un gas altamente combustible y el tetracloruro de carbono es un líquido no combustible.

Análogamente, haciendo caso omiso de características propias de cada tramo (existencia o no de resistencias, inductancias o fuentes de energía, etc) cada red eléctrica puede esquematizarse por un tal diagrama. El mismo ayudará a deducir relaciones entre las intensidades de los flujos de corriente que recorren sus distintos circuitos, pero no los de índole electromagnética que se crean por efecto de esa circulación.

Los diagramas de referencia tienen una estructura muy simple y no están unívocamente determinados. En ellos solo interesa cuales son los puntos (o vértices) conectados y no donde están ubicados o la forma que se asigna a la línea que los une. Tampoco interesan sus respectivas designaciones ni la eventual existencia de intersecciones entre las líneas. Pero, claro está, los que corresponden a una misma situación deben ser intercambiables y esto lleva al concepto de "grafos isomorfos". Tal el caso de los siguientes G_1 , G_2 y G_3 .



En G_2 no debe considerarse que existe vértice en la intersección de las curvas de extremos P, Q y R, S.

Los diagramas a que nos acabamos de referir facilitan la comprensión del problema a resolver y aparecen en disciplinas dispares bajo nombres diversos, a saber: redes (ingeniería, economía, física) ; sociograma (ciencias sociales) ; organigrama (economía, planificación, gestión) ; diagrama de flujo (programación) ; estructura molecular (química, biología) ; diagramas de transición (física, informática, química, teoría de lenguajes) ; etc.

Según indica Wilson (W.1) el primero en designarlos "grafos" fue Sylvester, en 1878 al publicar resultados de sus investigaciones en química.

Digamos de paso que toda relación binaria definida sobre un conjunto finito puede identificarse con uno de dichos esquemas, que puede interpretarse como una representación de la misma.

Las ideas subyacentes en muchas de las nociones propias de la teoría surgen de esos diagramas o "representaciones topológicas" y son fácilmente visualizadas en ellos. A los mismos recurriremos muy frecuentemente, pero destaquemos que solo son útiles si el número de elementos a considerar es reducido.

Frecuentemente será necesario hacer uso de otras representaciones, a saber: matriciales, tabulares, por listas, etc.

Aún cuando distintas representaciones de una misma configuración deben contener la misma información, determinadas propiedades pueden ser fácilmente detectables en las de cierto tipo pero no en las de otra clase. Así por ejemplo la "planaridad" y la "conexidad" resultan inmediatas en representaciones topológicas adecuadamente diagramadas pero difíciles de verificar en las tabulares o en las matriciales. En cambio las matriciales presentan ventajas de orden práctico y aún estético pues permiten inferir propiedades de los grafos mediante teoremas sobre matrices y recíprocamente.

Así entonces la elección de la representación a utilizar podrá depender del problema a estudiar o de los elementos disponibles. Algunas referencias más precisas se darán más adelante.

La elección del esquema adecuado a la situación que debe estudiarse suele ser fundamental y no siempre inmediata, a partir de los datos conocidos. Habitualmente, para construirlo será necesario tener un buen conocimiento del problema a resolver.

Esta información exterior a la teoría permitirá además una mejor interpretación de los resultados obtenidos. Frecuentemente a estos se llega mediante la aplicación de algoritmos, es decir de un conjunto de reglas que deben reiterarse en forma secuencial tanto como sea posible o necesario.

La cantidad de datos a considerar o el de operaciones a realizar hace necesario, casi indefectiblemente, que dichos algoritmos deban ser procesados en computadoras.

La eficiencia de ellos suele medirse en términos de la cantidad de memoria y de tiempo que requieren. Distintos algoritmos para un mismo problema genérico pueden presentar distintas ventajas relativas al aplicarlos a casos concretos, es decir a grafos con características particulares. Un capítulo a considerar sería el de la eficiencia de algoritmos.

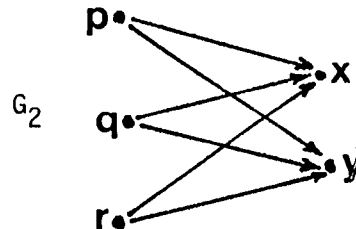
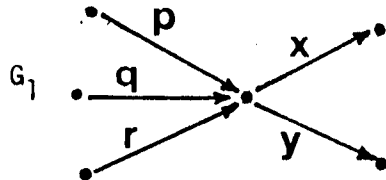
Para destacar la importancia y necesidad de contar con algoritmos adecuados observemos que en el caso de conjuntos finitos los problemas podrían resolverse por exhaustión, -es decir explorando todas las posibilidades- pero que esto es factible sólo si el número de datos a manejar es reducido. En efecto, la cantidad de "ensayos a prueba y error" puede ser inalcanzable. Por ejemplo, supuesto que la determinación de cada una de las permutaciones de un conjunto de 16 elementos

requiere de un segundo, para conocer las $16!$ permutaciones que admite ese conjunto serán necesarios más de 660.000 años. Si el conjunto tuviera 17 elementos y sin variar el tiempo necesario para determinar cada permutación, no alcanzarían once millones de años.

Para ejemplificar la importancia que puede tener la elección del esquema que se usará supongamos que debemos considerar la evolución de un proyecto que depende de una relación de precedencia. En este caso se presentan situaciones del siguiente tipo:

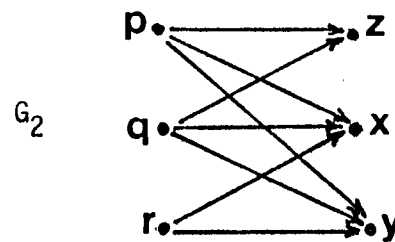
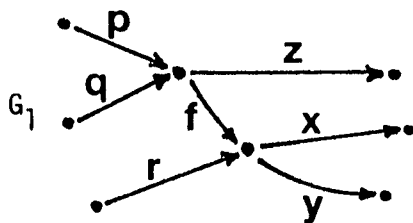
"Las tareas x,y pueden comenzarse inmediatamente después de terminar las tareas p,q,r; pero no antes".

Para visualizarlas puede recurrirse a cualesquiera de los diagramas siguientes:



En G_1 los vértices corresponden a las etapas del proyecto y en G_2 a las tareas que lo componen.

Si existiera además una tarea z para cuyo comienzo solo fuera necesario la finalización de p y de q, los esquemas anteriores deberán ser substituidos por los siguientes



En G_1 , f representa una "tarea ficticia". Obviamente la modificación que hemos efectuado a G_2 es más simple y directa que la exigida para G_1 .

Por otra parte, si el comienzo de las tareas x,y exige la adaptación de elementos utilizados en la ejecución de p,q,r y deben considerarse los tiempos necesarios para ello -no necesariamente iguales- será preferible G_2 pues permite asociar a cada par ordenado de tareas el tiempo que implica la adaptación a que hemos hecho referencia.

En algunas de las cuestiones a estudiar puede interesar el orden en que se dan, o se conectan, los **vértices** (o puntos). Por ejemplo, para graficar A es superior jerárquico de B; A es anterior a B; el sistema pasa del estado A al estado B;etc.

Diremos que el par ordenado A,B -eventualmente $A=B$ - define un **arco** (A,B).

En otros casos, en cambio, puede ser que dicho orden no exista o no interese. Por ejemplo: A es amigo de B; A es contemporáneo de B; el sistema pasa del estado A al B o recíprocamente (mediante una operación reversible). En tales situaciones se dice que el par A,B determina una **arista** [A,B] - no se prohíbe $A=B$.

Lo indicado induce al estudio de "nociones dirigidas (u orientadas)" y al de "nociones no dirigidas". Aún cuando la diferencia entre ellas podría eliminarse, se las estudia por separado por razones de comodidad. A casi toda noción dirigida corresponde otra que no lo está.

A veces el problema planteado impone que se lo estudie en un esquema dirigido, pero en otros casos esto puede ser sólo conveniente y depender del análisis que se efectúe. Por ejemplo, será necesario recurrir al caso dirigido para considerar la evolución de un sistema sometido a transformaciones irreversibles o para analizar la circulación de un fluido en una red cuyos tramos están provistos de válvulas que sólo permiten el deslizamiento en un sentido. Si en cambio, la circulación puede "a priori" efectuarse en ambos sentidos podríamos convenir en asignar a cada tramo una dirección arbitraria y en considerar que el caudal que lo recorre es positivo o negativo según que fluya en sentido coincidente o no con el que le fue fijado al tramo en cuestión. Así entonces, si el tramo de extremos A,B está orientado desde A hacia B y se deslizan 5 unidades desde B hacia A diríamos que al arco (A,B) lo recorren (-5) unidades.

Por otra parte, puede ser que para un problema determinado deba pensarse a cada elemento ligado consigo o con otros por a lo sumo una relación. Tal el caso de estructuras moleculares con sólo enlaces simples; situaciones que pueden o no ser simultáneas; organigramas de planificación o de funcionamiento, etc. En otras circunstancias podrán suponerse varias relaciones vinculantes. Por ejemplo: estructuras moleculares que admiten enlaces dobles o triples; ciudades conectadas por redes viales, férreas, aéreas, telefónicas, radiales, etc.

Para precisar a cual de las situaciones indicadas más arriba nos referimos las correspondientes configuraciones se dirán **grafo** o **multigrafo**, en el caso no dirigido, y **digrafo** o **multidigrafo** en el restante. Emplearemos los nombres de grafo y digrafo cuando existe una única relación entre los vértices.

Destaquemos que frecuentemente se incluyen bajo el vocablo grafo todas las configuraciones antedichas.

Creemos oportuno destacar que las consecuencias teóricas y aplicaciones más interesantes se obtienen al considerar configuraciones "etiquetadas" o "valuadas"; es decir aquellas a cuyos elementos se han asociado "etiquetas"; que incorporan información adicional, que son elegidas con vistas al problema por estudiar y que pueden tener significados muy diferentes. En particular, ellas pueden ser valores numéricos indicativos de los que pueden tomar ciertos parámetros propios del problema en estudio; a saber: peso, costo, tiempo, distancia, resistencia, capacidad, índice de eficiencia o de riesgo, desnivel, etc.

Por ejemplo, si al arco (x,y) se le asigna el valor 5 esto puede significar que el costo para ir desde x hasta y es de 5 unidades o bien que podría ser recorrido, desde x hasta y, por a lo sumo 5 unidades en cada unidad de tiempo.

En otras circunstancias valores asignados a los vértices pueden indicar: máxima capacidad de producción; mínima demanda a satisfacer; volumen horario que puede (o debe) recorrerlo en una unidad de tiempo, etc.

Por otra parte, la identificación de cada vértice con su nombre (o etiqueta) es usado, por ejemplo, en problemas de recuento o para el estudio de moléculas heteroatómicas; pues de tal forma será posible distinguir los vértices que representan átomos de diferentes clases.

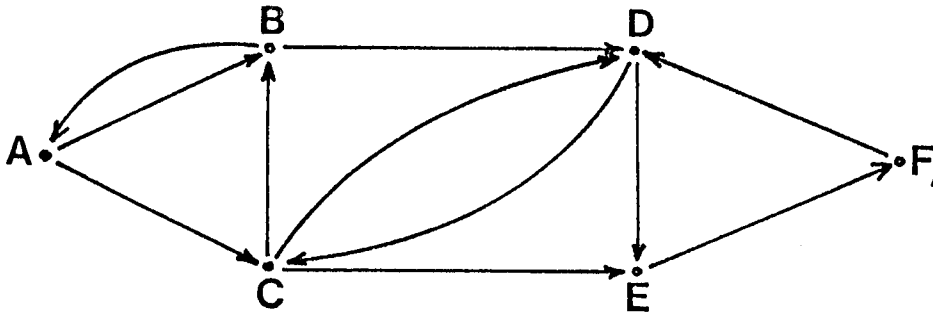
Notemos a este respecto que dos sistemas físicos pueden admitir un mismo esquema de interconexiones pero ser esencialmente distintos. Tal el caso de las moléculas de metano y de tetracloruro de carbono a que hemos hecho referencia o el de las redes viales y telefónicas que interconectan un mismo conjunto de ciudades.

Algunas de las cuestiones típicas que pueden abordarse con la teoría que nos ocupa son:

- A- Evaluar el número de configuraciones que respetan ciertas restricciones prefijadas.
- B- Analizar cuestiones relativas a problemas de comunicación, de distribución, de organización, de asignación, de planificación, etc.
- C- Considerar situaciones vinculadas a relaciones de preferencia, de prioridad, de compatibilidad, de accesibilidad, de jerarquía, de amistad, etc.
- D- Elegir de entre varias soluciones las optimales respecto de algún criterio, a saber: menor costo, menos tiempo, menor trayectoria, mayor ganancia, mayor eficiencia, mayor volumen, etc.

Así por ejemplo, si a continuación se representan un conjunto de ciudades y las rutas que las conectan -con sus respectivos sentidos de circulación- cabe preguntarse:

- 1- ¿cuáles son las ciudades accesibles desde A ? (idem desde F?)
- 2- ¿ puede irse desde A hasta E? ¿de cuántas formas?
- 3- ¿desde dónde puede llegarse a E? (idem a D)
- 4- ¿ cuál es el menor (mayor) número de tramos que requiere un viaje desde A hasta E?
- 5- ¿cuál es el menor número de tramos que es necesario inutilizar para incomunicar A con E?



Si a cada tramo se le asigna un valor no negativo (costo, longitud, tiempo, etc) podemos preguntarnos: ¿cuál es el camino de menor (mayor) valor que lleva desde A hasta E?; idem desde D hasta D?

Cuestionamientos similares pueden plantearse previa eliminación de la obligación de respetar el sentido de circulación.

Otros problemas de la clase D son los siguientes:

- Dada una red de distribución de cierto fluido y conociendo las capacidades máxima y mínima de cada tramo ¿cuál es el mayor volumen que puede enviarse desde un punto f hasta otro s?; ¿como hacerlo a costo mínimo si además se conoce el costo de circulación por unidad de volumen en cada tramo?
- Dada una red de comunicación entre ciudades y asignado a cada uno de los tramos un costo ¿cómo elegir de entre todos los conjuntos de tramos que aseguran la posibilidad de comunicar cualquier par de ciudades -aunque no necesariamente en forma directa- aquellos que impliquen menor costo total?

CAPITULO 1

CONJUNTOS Y RELACIONES

Supondremos que el lector tiene un conocimiento básico de la teoría de conjuntos.

No obstante creemos conveniente recordar algunos de sus conceptos y fijar las respectivas notaciones.

1.1 CONJUNTOS

Dado un conjunto X se indica con $x \in X$ ($x \notin X$) que el elemento x pertenece (no pertenece) al conjunto X y con $A \subseteq X$ que todo elemento de A es también elemento de X . Si $A \subseteq X$, A está incluido en X o A es subconjunto de X . Si además $A \neq X$ la inclusión es propia.

Cada elemento de $x \in X$ determina un conjunto unitario $\{x\}$, que está incluido en X .

Aún cuando $\{x\}$ debe distinguirse de su elemento x es habitual identificarlos. Así lo haremos siempre que esto no lleve a confusión.

Reservaremos el símbolo \emptyset para el conjunto vacío y pondremos $|X|$ para indicar la cardinalidad del conjunto X . Un conjunto es finito si contiene un número finito de elementos. Ellos y solo ellos pueden darse por enumeración de sus elementos.

Dado un conjunto X indicaremos con $P(X)$ su conjunto de partes, es decir: el conjunto de sus subconjuntos. $P(X)$ contiene a los conjuntos \emptyset y X .

En particular, si $X = \emptyset$, $P(X) = \{\emptyset\}$; $|X| = 0$; $|P(X)| = 1$
Se demuestra que si X es finito $|P(X)| = 2^{|X|}$.

Dado $A \subseteq X$, su complemento en X es el conjunto de los elementos de X que no pertenecen a A . Lo notaremos $\overline{X - A}$. Si X se da por sobreentendido, en lugar de $X - A$ pondremos \overline{A} y diremos que \overline{A} es el complemento de A .

Dados los conjuntos A y B (eventualmente $A=B$) se tiene que:

C es **unión** de A y B ($C = A \cup B$) si los elementos de C son aquellos que pertenecen a al menos uno de los conjuntos A, B .

C es **intersección** de A y B ($C = A \cap B$) si los elementos de C son los que pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos A y B .

C es **producto cartesiano** de A con B ($C = A \times B$) si C es el conjunto de los pares ordenados (a, b) con $a \in A$; $b \in B$.

C es **diferencia simétrica** de A y B ($C = A \Delta B$) si $C = (A \cup B) - (A \cap B)$.

La unión, la intersección, el producto cartesiano y la diferencia simétrica son operaciones asociativas; la unión, la intersección y la diferencia simétrica son conmutativas. Además, para la unión y la intersección cada una de ellas es distributiva respecto de la otra y se cumplen

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

La unión, la intersección y el producto cartesiano pueden definirse para familias arbitrarias de conjuntos A_i - $i \in I$ - poniendo:

$C = \bigcup_{i \in I} A_i$ si los elementos de C son los que pertenecen a algún A_i

$C = \bigcap_{i \in I} A_i$ si los elementos de C son los que pertenecen a todos los A_i

$C = \prod_{i \in I} A_i$ si los elementos de C son las n-uplas (a_1, a_2, \dots) con $a_i \in A_i$

Una n-upla es una sucesión de elementos y no debe ser confundida con un conjunto, pues para estos no interesa el orden en que se enumeran sus elementos. Además, al considerar una sucesión cabe la posibilidad de que un mismo elemento sea reiterado en distintas posiciones dentro de ella.

Otras nociones importantes son las siguientes:

I) Una **partición** de un conjunto X es una familia $X_i - i \in I$ - de subconjuntos de X tales que:

$$a) X_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in I$$

$$b) X_i \cap X_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j$$

$$c) X = \bigcup X_i$$

Cuando a la familia de los X_i solo se les pide el cumplimiento de b), c) la partición se dice impropia. Los X_i son las "clases de la partición".

El número de particiones que admite un conjunto de n elementos está dado por:

$$\Pi_0 = 1; \quad \Pi_n = \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} \Pi_{n-j}$$

En particular para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ se tienen, respectivamente, 1; 2; 5; 15; 52; 203; 876.

II) Dados los conjuntos A, B; una ley f que hace corresponder a cada elemento a de A un único elemento b en B (pondremos $b = f(a)$) es una **función** (o **aplicación unívoca**) de A en B. Notaremos $f: A \rightarrow B$.

Si en cambio a cada elemento de A la ley le hace corresponder un subconjunto de B (eventualmente el vacío) diremos que f es una **aplicación multívoca** de A en B.

Una aplicación multívoca de A en B es también una aplicación unívoca de A en $\mathcal{P}(B)$.

Frecuentemente, por "aplicación" se sobreentiende aplicación unívoca, como en general las que consideramos no gozarán de la propiedad de univocidad convendremos en utilizar el vocablo en cuestión en el sentido más amplio.

III) Una **clausura** en $\mathcal{P}(X)$ es una función $\psi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ que es:

$$\text{idempotente, } \psi = \psi^2$$

$$\text{monótona: } A \subseteq B \text{ implica } \psi(A) \subseteq \psi(B)$$

$$\text{dilatante: } A \subseteq \psi(A)$$

De la definición resulta que si ψ es clausura en $\mathcal{P}(X)$ entonces $\psi(X) = X$.

Las clausuras topológicas son las que conservan el vacío y la unión de un número finito de conjuntos. Algunas otras que juegan un rol importante en la teoría que nos ocupa y en Algebra serán consideradas más adelante.

Si ciertas restricciones definen una clausura $\psi, \psi(A)$ se interpreta como el "más pequeño" de los conjuntos que contienen A y satisfacen las restricciones en cuestión.

1.2- RELACIONES

Una **relación binaria** definida en $X \times Y$ es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ o equivalentemente, un elemento del conjunto de partes $\mathcal{P}(X \times Y)$.

Si $X = Y$ diremos que la relación está definida en X.

Para indicar que x,y están relacionados por R -en ese orden- pondremos según es habitual, $(x,y) \in R$ o también xRy .

Una manera alternativa de introducir el concepto "relación binaria" es la que resulta recurriendo al de "aplicación multívoca". Consideraciones al respecto pueden verse en Roy (R.I Chap III).

Con este enfoque a cada relación binaria R definida en $X \times Y$ se asocia la aplicación $R: X \rightarrow Y$ definida por $y \in R(x)$ si y solo si xRy .

La asociación indicada permite pasar de una noción a otra conservando sus respectivas connotaciones subjetivas. En particular, la de "relación" atiende al carácter de estar o no ligados los pares ordenados de elementos y la de "aplicación" conlleva la idea de asignar a un elemento, un conjunto.

Los conceptos a introducir en Cap.II nos permitirán dar de dichas nociones representaciones de manejo más cómodo que el que resulta de la forma conjuntista.

Relaciones particulares en $X \times Y$ son:

- la relación vacía: no existen pares $(x,y) \in R$, o equivalentemente $R(x) = \emptyset$
- la relación universal: cualesquiera sean x,y se tiene xRy , o equivalentemente $R(x) = Y$.

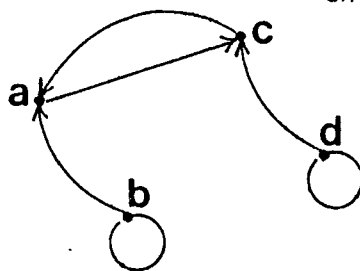
Si además $X=Y$ cabe considerar también la relación identidad (o diagonal) donde xRy equivale a $x=y$; es decir $R(x) = x$. La notaremos I.

Toda relación binaria sobre conjuntos finitos puede ser visualizada mediante tablas, matrices 0y1 o configuraciones geométricas constituidas por puntos y líneas que representen, respectivamente, a los elementos del conjunto y a los que están vinculados por ella.

Ejemplo 1:

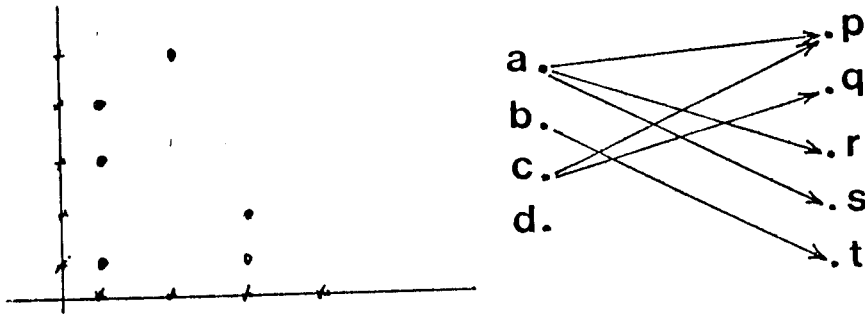
Si $V = \{a,b,c,d,e\}$ y $R = \{(a,c), (b,a), (b,b), (c,a), (d,c), (d,d)\}$ pueden utilizarse los siguientes diagramas o matrices de 0 y 1. (Pondremos . en vez de 0)

	a	b	c	d	e
a
b			.	.	.
c	
d	.	.			.
e



Ejemplo 2:

Si $X = \{a, b, c, d\}$; $Y = \{p, q, r, s, t\}$ y $R = \{(a, p), (a, r), (a, s), (b, t), (c, p), (c, q)\}$ tendríamos,



Si $R \subseteq X \times Y$ su **primera proyección** (o proyección según Y) es el conjunto de los elementos $x \in X$ para los cuales existe y tal que $(x, y) \in R$ y su **segunda proyección** (o proyección según X) es el de los elementos $y \in Y$ tales que existe $(x, y) \in R$.

En el ejemplo 1 ambas proyecciones coinciden con el conjunto $\{a, b, c, d\}$. En el ejemplo 2 la primera proyección es $\{a, b, c\}$ y la proyección según X coincide con Y .

Una relación $R \subseteq X \times Y$ es **unívoca** si para cada $x \in X$ existe a lo sumo un $y \in Y$ tal que xRy ; es **inyectiva** si supuestos $x_1 \neq x_2$ no existe y tal que satisfaga simultáneamente x_1Ry ; x_2Ry ; es **sobreyectiva** si su segunda proyección es Y ; es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Así entonces, toda relación unívoca $R: X \rightarrow Y$ define una función con dominio en el conjunto que constituye su primera proyección.

Dada la relación $R \subseteq X \times Y$ ($R: X \rightarrow Y$) y supuesto $A \subseteq X$ se dice **imagen de A** al conjunto $R(A) = \cup R(a)$; es decir al conjunto de los y tales que existe $a \in A$ que satisface aRy .

Si los A_i son subconjuntos de X se verifican:

$$R(\cup A_i) = \cup R(A_i)$$

$$R(\cap A_i) \subseteq \cap R(A_i); \quad \text{la igualdad solo puede afirmarse si}$$

la relación es inyectiva.

Una relación R definida en X se dice:

reflexiva: si xRx para todo $x \in X$

arreflexiva: si no es reflexiva

antirreflexiva: si ningún $x \in X$ satisface xRx .

simétrica: si $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \in R$.

antisimétrica: si $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \notin R$.

antisimétrica débil: si supuesto $x \neq y$, $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \notin R$;

transitiva: si xRy ; yRz implican xRz .

circular: si xRy ; yRz implican zRx .

total: si para todo par $x \neq y$ se tiene al menos xRy ó yRx (eventualmente ambos).

Frecuentemente las relaciones que hemos denominado antisimétricas (antisimétricas débiles) son designadas asimétricas (antisimétricas). Además a veces las relaciones totales se dicen conexas, pero este concepto no debe ser confundido con el de conexidad que veremos oportunamente.

Se deja al lector ver que:

- antisimétrica equivale a antisimétrica débil y antirreflexiva.
- circular y reflexiva implican simétrica y transitiva.
- simétrica y transitiva implican circular.

La relación de inclusión así como las operaciones de unión, intersección y complementación entre conjuntos pueden aplicarse directamente a relaciones binarias, pues basta considerarlas como subconjuntos de un producto cartesiano.

En particular, si R y S son relaciones definidas en $X \times Y$ tendremos:

$R \subseteq S$: si aRb implica aSb (también se dice R implica S)

$(x,y) \in \bar{R}$ si y solo si $(x,y) \in X \times Y$ pero $(x,y) \notin R$.

$T = R \cup S$ si aTb cuando aRb ó aSb .

$T = R \cap S$ si aTb cuando aRb y aSb .

La intersección y la unión de relaciones puede extenderse, en forma natural, a una familia arbitraria de relaciones $R_i, i \in I$.

Verifique que la intersección de familias arbitrarias de relaciones reflexivas definidas en cierto conjunto X , es reflexiva y que lo mismo cabe afirmar si se substituye reflexiva por simétrica o por transitiva.

A su vez la unión de relaciones reflexivas (simétricas) es reflexiva (simétrica). En cambio no siempre la unión de relaciones transitivas goza de este carácter (Ej. $R = \{(a,b), (b,s), (a,c)\}$; $S = \{(c,d)\}$)

Frecuentemente es útil operar las matrices de 0 y 1 en Z_2 , es decir con las operaciones dadas por las tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Dichas operaciones corresponden, respectivamente, a las booleanas de adjunción y conjunción lógica. En lugar de $+$ (\cdot) pondremos \vee (\wedge) y las denominaremos supremo (ínfimo).

Es inmediato que si $M(R)$ y $M(S)$ son las matrices de las relaciones R y S entonces, las de \bar{R} ; $R \cup S$; $R \cap S$ son:

$$(M(\bar{R}))_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ si } (M(R))_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$(M(R \cup S))_{ij} = (M(R))_{ij} \vee (M(S))_{ij}$$

$$(M(R \cap S))_{ij} = (M(R))_{ij} \wedge (M(S))_{ij}$$

A continuación consideraremos dos operaciones definidas en el conjunto de las aplicaciones, que no tienen similares al considerarse conjuntos.

Dada una relación R notaremos R^{-1} la definida por; $(a,b) \in R^{-1}$ si y solo si $(b,a) \in R$. o equivalentemente por $R^{-1}(y) = \{x/y \in R(x)\}$.

La relación R^{-1} es la inversa (o recíproca, o traspuesta u opuesta) de R .

Nótese que:

- la operación R^{-1} es involutiva, es decir $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R = R^{-1}$ si y sólo si R es simétrica.
- Si $R \subseteq X \times Y$ es unívoca e inyectiva y sus primera y segunda proyecciones son, respectivamente, X' , Y' entonces R es una función de dominio X' rango Y' cuya inversa es $R^{-1} \subseteq Y' \times X'$.

A cada relación R definida en X pueden asociarse las relaciones simétricas $R^{SY} = R \cup R^{-1}$; $R_{sy} = R \cap R^{-1}$.

Toda relación simétrica que contiene a R también contiene a R^{SY} . Si es simétrica contenida en R también lo está en R_{sy} .

Así entonces R^{SY} es minimal (R_{sy} es maximal) entre las relaciones simétricas que contienen a R (contenidas en R).

Dadas las relaciones $R \subseteq X \times Y$; $S \subseteq Y \times Z$ la **composición de R con S** es la relación $T \subseteq X \times Z$ definida por: aTb si y sólo si existe w tal que aRw y wSb .

La notaremos $T = R \circ S$ y en lugar de "existe un w tal que aRw y wSb " pondremos " $aRwSb$ ".

A ella corresponde en términos de sus matrices, operadas en Z_2 , la definida por $(M(R \circ S))_{ij} = \bigvee_k (M(R))_{ik} \wedge (M(S))_{kj}$

Al interpretar las relaciones como aplicaciones, en lugar de $x(R \circ S)$ y habitualmente pondremos $y \in (R \circ S)(x)$ o también $y \in S(R(x))$.

Recordemos que la composición de relaciones no es conmutativa, pero sí asociativa (supuesto que las respectivas composiciones son factibles).

Si R está definida en X y convenimos que $R^0 = I$ (identidad) la composición reiterada de R consigo misma lleva a las potencias

$$R^h = R \circ R^{h-1} = R^{h-1} \circ R, \text{ para } h > 1$$

Se deja al lector verificar los siguientes resultados (supuesto que las operaciones involucradas son posibles).

- 1- Si R es simétrica también lo son \bar{R} y R^{-1} .
- 2- R es antisimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \emptyset$
 R es antisimétrica débil si y sólo si $R \cap R^{-1} \subseteq I$
- 3- Si $R \subseteq S$ entonces $\bar{S} \subseteq \bar{R}$; $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.
- 4- $\overline{R \cap S} = \bar{R} \cup \bar{S}$; $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
 $\overline{R \cup S} = \bar{R} \cap \bar{S}$; $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
- 5- $R \circ S \subseteq (R \cup S)^2$; $(R \cap S)^2 \subseteq R^2 \cap S^2$
- 6- R es transitiva si y sólo si $R^2 = R$
- 7- Si ambas relaciones $R; S$ son transitivas y $R \circ S = S \circ R$ entonces $R \circ S$ es transitiva.
- 8- R es de equivalencia si y sólo si es reflexiva y circular.
- 9- Si en $\{a, b, c\}$ se definen las relaciones $R = \{(a, b), (b, a)\}$ y $S = \{(b, c), (c, b)\}$ es claro que $R \circ S = \{(a, c)\}$ por lo tanto el conjunto de las relaciones simétricas no es cerrado (o estable) para el producto de composición. Además $(a, c) \notin R \cup S$.

- 10- Si R y S son simétricas entonces:
- $R \circ S$ es simétrica si y sólo si $R \circ S = S \circ R$
 - Si $R \circ S \subseteq R \cup S$ entonces $S \circ R \subseteq R \cup S$.
- 11- Si R y S son reflexivas entonces:
- $R \cup S \subseteq R \circ S$
 - $R = R \circ S$ implica $S \subseteq R$.
 - $S = R \circ S$ implica $R \subseteq S$.
- 12- Si R y S son reflexivas y simétricas $R \cup S = R \circ S$ implica $R \circ S = S \circ R$.
En particular, si además $R \circ S = R$ ó $R \circ S = S$ entonces R y S conmutan.

De las relaciones definidas en un conjunto las más frecuentemente estudiadas son las de:

semejanza (o analogía) : reflexivas y simétricas.

preorden: reflexivas y transitivas

preorden estricto: antirreflexivas y transitivas.

orden: reflexivas, antisimétricas débiles y transitivas; o equivalentemente: preorden antisimétrico débil.

equivalencia (o preorden simétrico): reflexivas, simétricas y transitivas o equivalentemente: reflexivas y circulares.

orden estricto: antisimétricas y transitivas; o equivalentemente: preorden estricto antisimétrico.

Si R es una relación de preorden, una de equivalencia asociada canónicamente a R es la siguiente E definida por: aEb si y solo si aRb y bRa

Recordemos que toda relación de equivalencia determina una partición del conjunto en el cual está definida y que recíprocamente, cada partición define una relación de equivalencia, la de estar en la misma clase.

Según veremos, a cada clase de relaciones binarias corresponde un tipo de dígrafo y en cada multidígrafo puede introducirse -en forma canónica- una relación de preorden; que eventualmente será estricto. Además para cierta clase de dígrafos los preordenes serán órdenes.

1.3 CLAUSURAS ALGEBRAICAS

Dada una relación R su **clausura respecto de la propiedad P** es la intersección de todas las relaciones que contienen R y satisfacen P . Si no hay tales relaciones su clausura es vacía. Las más frecuentemente estudiadas son:

1- su clausura reflexiva, la notaremos R^{re} .

2- su clausura simétrica, la notaremos R^{sy}

3- su clausura transitiva, la notaremos R^*

4- su clausura reflexiva-transitiva, la notaremos \widehat{R}

5- su clausura de equivalencia, la notaremos R^{eq}

6- su clausura de orden, la notaremos R^{or}

Las clausuras "reflexivo-transitivas" son también designadas "de preorden". En Berge (B.2), (B.3) y en Kaufman (K.4) (K.5) se las designa "fermeture transitive" y se las denota también con \widehat{R} .

Por otra parte, en la traducción de (K.6) las clausuras transitivas y las reflexivo-transitivas de R son denominadas, respectivamente de conectividad y accesibilidad.

De la definición es inmediato que R está contenida en cada una de sus clausuras no vacías y que coincide con ellas si y solo si satisface las propiedades tomadas en cuenta para definirla. Así por ejemplo:

$$R = R^{re}$$

cuando todo elemento está relacionado consigo mismo.

Toda relación definida en un conjunto X está incluida en la relación universal, que es reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto y puesto que el conjunto de las relaciones reflexivas es cerrado respecto de la intersección y que lo mismo puede afirmarse para las simétricas y las transitivas, resulta que las clausuras 1 a 5 que acabamos de citar son no vacías.

En cambio, no toda relación admite clausura de orden no vacía. En particular, la relación universal no es de orden y si R contiene un "circuito no trivial" es decir, un conjunto de elementos x_i con $1 < i \leq k$

tales que $x_1 R x_2, x_2 R x_3, \dots, x_k R x_1$ no hay relación de orden que la contenga. Para las que carecen de dichos circuitos se tiene que R^* es transitiva y antisimétrica débil. Por lo tanto para ellas su clausura de orden es $R^{or} = I \cup R^*$

Puede verificarse que para una dada relación R se tiene:

$$R^{re} = R \cup I; R^{sy} = R \cup R^{-1}; \widehat{R} = (R^*)^{re} = (R^{re})^*$$

$$\text{equivalentemente } \widehat{R} = R^* \cup I = (R \cup I)^*; R^* = \widehat{R} \circ R = R \circ \widehat{R}$$

Nótese que si R es reflexiva y solo entonces, $\widehat{R} = R^*$

Se demuestra que R^* puede obtenerse calculando las distintas potencias de R . Mas precisamente:

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^j \cup \dots = \bigcup_i R^i, \text{ para } i \geq 1.$$

Interpretando R como aplicación multívoca tendremos que:

$y \in R^*(x)$ si y solo si existe al menos un índice $j \geq 1$ tal que $y \in R^j(x)$

De $\widehat{R} = R^* \cup I$ y lo antedicho resulta que $\widehat{R} = \bigcup_i R^i, i \geq 0$

Si R está definida sobre un conjunto de n elementos, para calcular R^* bastará considerar solo las n primeras potencias. En este caso:

$$R^* = \bigcup_i R^i, 1 \leq i \leq n.$$

Si además R es reflexiva bastará considerar solo las $n-1$ primeras potencias, y entonces es claro que

$$R^* = \widehat{R}$$

Si una relación es simétrica también lo es su clausura transitiva. Por lo tanto y atento a la monotonía de las clausuras se tiene que para calcular la clausura simétrico-transitiva de R puede determinarse la clausura transitiva de R^{sy} .

Nótese que para el mismo objetivo no sería lícito intercambiar el orden y calcular

$$(R^*)^{sy}.$$

En efecto, si $X = \{a, b, c\}$ y $R = \{(a, c); (b, c)\}$ se tiene que R es transitiva pero que su clausura simétrica no lo es.

Como la clausura simétrico-transitiva de una relación es reflexiva se deduce que:

$$R^{eq} = (R^{sy})^* = (R \cup R^{-1})^*$$

Más adelante volveremos a considerar algunas de las clausuras presentes, a dar aplicaciones de ellas y métodos para calcularlas, distintos de los ya indicados.

Para economizar el espacio de memoria que requiere el almacenaje de una relación que sea clausura, será útil recurrir al concepto de "especificación incompleta".

Más precisamente, si $T = R^*$, R es una **especificación transitiva incompleta de T** .

Además R es **minimal** si no existe otra relación S con $|S| < |R|$ y tal que también T sea su clausura transitiva.

En forma similar se procedería con otras clausuras.

Así por ejemplo, dada $T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$ las siguientes R_1 y R_2 son especificaciones reflexivo-transitivas incompletas; de ellas R_2 es minimal

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}; \quad R_2 = \{(1,2), (2,3)\}$$

La correspondencia entre relaciones binarias, matrices de 0 y 1 y ciertos resultados que indicaremos en Cap.3-6 nos permitirán indicar un método matricial para hallar especificaciones transitivas incompletas minimales de relaciones que no contienen circuitos.

Se deja al lector verificar:

- Si R y S son reflexivas, $R \cup S \subseteq R \circ S \subseteq (R \cup S)^* = \widehat{(R \cup S)}$
- Si R y S son reflexivas, transitivas y conmutan $R \circ S = \widehat{(R \cup S)}$
- Si R y S son relaciones de equivalencias, $R \circ S$ es de equivalencia si y sólo si $R \circ S = S \circ R$. En tal caso $R \circ S = (R \cup S)^{Eq}$

2.1 NOCIONES BASICAS

La Teoría de Grafos es una parte de la matemática en la cual el número de definiciones a manejar parece, al profano, superior al de resultados interesantes. Además, lamentablemente, la designación de sus diversas nociones varía notoriamente con los autores, y no sólo una misma noción suele recibir nombres distintos sino que, a veces, con un mismo vocablo se designan conceptos diferentes. Por ello nos será preciso definir, a continuación, varias de las nociones de uso más frecuente. Daremos también algunos resultados que ayudarán al lector, así esperamos, a introducirse en temas y formas de razonamiento habitual en esta teoría.

Nosotros seguiremos, en líneas generales, la terminología de la escuela francesa. No obstante, y de acuerdo con lo adelantado en la Introducción, siguiendo lo que es habitual en autores de lengua inglesa diremos "dígrafo" o "multidígrafo" cuando interese el orden en que se vinculan los vértices y reservaremos el de "grafo" o "multígrafo" para cuando dicho orden no interese o no exista.

Las ideas subyacentes en muchas de las nociones a considerar surgen de los esquemas o diagramas que dan las "representaciones topológicas" y son fácilmente visualizadas en las mismas. De muchas de ellas, y puesto que la bibliografía de mayor uso en nuestro ambiente está en lengua inglesa o francesa, daremos también los nombres más frecuentes con los cuales las designan autores en dichas lenguas.

2.1.1

Las dos formas más frecuentes de introducir las estructuras que estudiaremos son las siguientes:

- a) Un **multidígrafo** (**multígrafo**) es un par ordenado $G=(V,U)$ donde V es su conjunto de **vértices** y U es una familia de pares ordenados (pares no ordenados) de vértices -no necesariamente distintos entre sí-. Los elementos de U son los **arcos** (las **aristas**) de G .

Si cada par de vértices está incluido a lo sumo una vez en U entonces G se dirá **dígrafo** (**grafo**).

Si $V = \emptyset$; G se dirá **vacio**.

- b) Dados los conjuntos disjuntos V,U ; con $V \neq \emptyset$; una aplicación

$$\alpha: U \rightarrow V \times V$$

y una aplicación

$$\tilde{\alpha}: U \rightarrow (V \times V) / \sim$$

donde \sim denota la relación de equivalencia definida en $V \times V$ por $(a,b) \sim (b,a)$; diremos que:

$G = (V,U,\alpha)$ es el **multidígrafo** -no vacío- de vértices V , de arcos U y aplicación de incidencia α .

$G = (V,U,\tilde{\alpha})$ es el **multígrafo** -no vacío- de vértices V , de aristas U y aplicación de incidencia $\tilde{\alpha}$.

Un **multidígrafo** (**multígrafo**) es **dígrafo** (**grafo**) si su aplicación de incidencia es inyectiva.

Observaciones respecto de ventajas e inconvenientes que conlleva a admitir los grafos vacíos pueden verse en Harary - Read (H.4). Algunas serán indicadas oportunamente.

A cada aplicación de incidencia $\alpha: U \rightarrow V \times V$ pueden asociarse las aplicaciones $\alpha_i; \alpha_f$ tales que si $\alpha(u) = (a, b)$ -eventualmente $a=b$ - entonces $\alpha_i(u) = a; \alpha_f(u) = b$.

Así entonces $\alpha = \alpha_i \times \alpha_f$.

Este enfoque permite afirmar que la teoría que nos ocupa estudia pares de aplicaciones simultáneas. Propiedades particulares de éstas dan lugar a cierta clasificación de las configuraciones obtenidas.

Lo que hemos denominado multígrafo, también es designado "grafo"; "grafo general" o "pseudo-grafo" y en estos casos nuestra noción de grafo suele recibir el nombre de "grafo puro" o "grafo propiamente dicho".

Las designaciones anteriores también se utilizan, a veces, para el caso dirigido. Otros autores agregan el calificativo de dirigido o no dirigido, según corresponda.

Otros de los nombres asignados a las configuraciones en cuestión es el de "redes".

En topología combinatoria se estudian ciertos entes del espacio euclídeo n -dimensional, designados "k-simplex" $-0 \leq k \leq n$; que se dicen "incidentes de grado h " si contienen un h -simplex común. En relación con lo precedente los grafos pueden interpretarse como representaciones del caso más simple, es decir, el de aquel en que dos 1-simplex (o segmentos) son incidentes si tienen un 0-simplex (o punto) común. Por ello los grafos son también designados "grafos lineales" y dentro de este contexto los vértices se dicen "0-simplex" y las aristas "1-simplex". Algunas otras observaciones al respecto pueden verse en (M.1). Digamos, de paso, que los grafos fueron estudiados dentro de la topología combinatoria, entre otros, por Veblen (V.1) y Zykov (Z.1). Por otra parte, en (B.1) se puntualizan ciertas conexiones entre dichas especialidades matemáticas y en Massey (M.2) se consideran los grafos como espacios topológicos, estudiándose su grupo fundamental y sus espacios cubrientes. Al respecto ver también (K.12).

Ocasionalmente, los **vértices** también se dirán **puntos** o **nodos**. Aquellos en los cuales no inciden arcos (o aristas) son **vértices aislados**.

Al pié de página damos una lista de vocablos usados, en lengua inglesa o francesa, en lugar de vértice, arco o arista.

En general, pero no siempre, a cada noción que requiera del orden en que se dan los vértices puede asociarse otra para la cual dicho orden sea irrelevante, a ellas nos referiremos respectivamente, bajo el nombre global de "noción orientada" o "noción dirigida" y al de "noción no dirigida".

Suponiendo que cada arco (a, b) se ha substituido por una arista a, b es posible aplicar nociones no dirigidas en multígrafos.

Análogamente, el reemplazo de cada arista a, b con $a = b$ por un par de arcos $(a, b) (b, a)$ hace posible el empleo de nociones dirigidas en multígrafos.

vértice: sommet; node; point; vertex; junction

arco: arc; edge; branch; directed-edge; directed-branch; directed-line

arista: arete; line; edge; branch; undirected-edge; undirected-branch

Muy frecuentemente haremos uso de lo antedicho, sin indicación expresa.

Según observa Roy (R.1) el procedimiento anterior hace innecesario el estudio de las configuraciones mixtas.

La identificación de cada arista $[a,b]$ a \neq b con un par de arcos $(a,b);(b,a)$ puede hacer creer que el análisis del caso no dirigido es superfluo. No obstante, Berge (B.4 Cap 1) destaca la conveniencia de estudiar tanto el caso dirigido como el no dirigido.

Si $a \neq b$ se tiene que $[a,b] = \{a,b\}$; caso contrario $[a,b] = \{a\} = \{b\}$. Es decir, las aristas pueden identificarse con conjuntos de dos o de un vértice.

La admisión de otras con tres o más vértices lleva al concepto de "hipergrafo" que no consideraremos.

Por razones de brevedad al referirnos simultáneamente a cuestiones del caso dirigido y del no dirigido en lugar de "Multidigrafo (multigrafo)" pondremos "multi-di-grafo".

Obviamente, las nociones se definirán con referencia a cierto multi-di-grafo G pero habitualmente -supuesto no haya lugar a confusión- al referirnos a ellas omitiremos la mención explícita de G .

Un multi-di-grafo $G = (V,U)$ es **finito** si ambos conjuntos V,U son finitos y en este caso **de orden n** si contiene n vértices ($|V|=n$). Si $U \neq \emptyset$, **G es discreto** (o de vértices aislados) y **trivial** si además es de orden uno.

Salvo mención explícita solo nos referiremos al caso finito.

Una interesante recopilación de resultados en grafos infinitos es la de Nash-Williams (N.2).

En Ore (O.2) se dice finito todo multi-di-grafo (V,U) tal que U es finito.

Nótese que si no se admiten vértices aislados la finitud de U implica la de V y que aún cuando V sea finito la familia U puede ser infinita.

Destaquemos que nuestro concepto de "grafo vacío" no es admitido en ninguno de los siguientes libros: Busacker-Saaty (B.1); Bondy-Murty (B.5); Deo (D.1); Harary (H.2); Wilson (W.4); corresponde al "empty-graph" de Sahni (S.1) y al "nul-graph" de Swamy-Thulasiraman (S.2) y de Marshall (M.1).

En cambio nuestro "grafo discreto" es designado "empty-graph" en Bondy-Murty (B.5) Swamy-Thulasiraman (S.2); Zykov (Z.1); "degenerated-graph" en (B.1) y en (Ch.2), "null-graph" en Deo (D.1); Ore (O.2); Wilson (W.4) y "vertex graph" en (M.1).

Si bien los grafos discretos, los vértices aislados y el grafo vacío pueden carecer de interés intrínseco, son particularmente útiles al considerar "algoritmos constructivos" que mediante el agregado o la supresión de elementos generan una estructura a partir de otra. Destaquemos que la eliminación de un vértice implica la de todos los arcos (todas las aristas) incidentes en él.

2.1.2

Creemos oportuno destacar que cada elemento de U tiene dos extremos. Estos pueden incidir en vértices distintos o no. Más precisamente, dado el arco $u = (a,b)$ -no necesariamente $a \neq b$ - diremos que a es su **vértice inicial** o **extremo inicial** y que b es su **vértice (extremo) final**. También se dirá que u **incide positivamente** en a y **negativamente** en b .

Si $u = [a,b]$ con $a \neq b$, cada uno de los vértices de incidencia de la arista u puede identificarse con uno de sus extremos, pero si $u = [a,a]$ será necesario distinguir entre "extremo de u " y "vértice de incidencia de u ". No obstante, por abuso de lenguaje y siguiendo la costumbre no haremos caso, en general, de dicha distinción. En la diferencia que acabamos de indicar se basa la existente entre los conceptos de "e-simetrización" y "v-simetrización" que definiremos más adelante.

Si ambos extremos del arco (o arista) u inciden en un mismo vértice o sea si u es de la forma (a,a) (o $[a,a]$) se dirá que u es **bucle, de soporte a** .

Otros nombres asignados a los bucles son: "lazos" (L.1), (T.1); "boucles" (B.3), (R.1), "loops" (B.5), (O.2), (H.2); "self-loops" (D.1), (S.2) "self-edges" (S.1). Las aristas distintas de bucles se designan "links" en (B.5) y "slings" en (R.2).

Algunos autores, entre otros (H.2) (S.1), para indicar que se admiten bucles anteponen el prefijo "pseudo" al vocablo que determina la estructura en estudio.

Gran parte de la teoría está dedicada a los multi-di-grafos sin bucles. A estos se los denomina "simples" en (G.1) pero más frecuentemente esta designación es reservada a los grafos sin bucles (B.5), (D.1), (M.1), (S.2).

Este nombre también es usado por otros autores para los grafos que diremos "bipartidos". A cada uno de estas dos últimas nociones corresponde el concepto "graphe simple" de Berge, respectivamente en (B.4) y en (B.3).

Es claro que mediante la incorporación de un vértice z es posible substituir cada arco (x,y) por un par de arcos $\{(z,y)\}$ y que reiterando esta operación tanto como sea necesario se tiene: $\{(x,z)\}$

- A cada multi-di-grafo puede asociarse, en forma canónica, un di-grafo sin bucles.

No obstante y aún cuando muchas de las afirmaciones válidas para di-grafos pierden parte de su interés al extenderse a multi-di-grafos la consideración de éstos es conveniente y aún necesaria.

Si existe al menos un arco (a,b) diremos que b es **consecutivo** de a o que a **precede inmediatamente** b o que b es **sucesor inmediato** de a . Si $a = b$ la precedencia y la consecutividad es impropia. Si no interesa considerar el orden entre los vértices del arco (a,b) diremos que a, b son **adyacentes**.

Los mismos calificativos se aplicarán a los arcos u, v -eventualmente $u=v$ -supuesto que el extremo final de u coincide con el extremo inicial de v .

Si existe al menos una arista $[a, b]$ -se admite $a=b$ - los vértices a, b son **adyacentes** (o **vecinos**).
 Dos aristas distintas que tengan al menos un vértice extremo en común se diran **aristas adyacentes**.

Así entonces, si u, v son bucles de soporte a tendremos que: u es consecutivo de si mismo; y es consecutivo y adyacente de v ; v es consecutivo y adyacente de si mismo.

Dos vértices (o dos aristas) no adyacentes son **independientes**.

El número máximo de aristas que puede contener un grafo sin bucles en función del número de las que son independientes fue determinado por Erdős y Gallai (E.3).

si existe $u = (a, b)$ o $u = [a, b]$ tambien diremos que u **conecta** (o **liga**, o **vincula**) **directamente** los vértices a, b .

Diremos **arcos paralelos** a los que tienen un mismo vértice inicial y un mismo vértice final. Análogamente, **aristas paralelas** son aquellas que coinciden en sus vértices extremos.

Identificando en G todos sus arcos paralelos de la forma (x, y) por un único arco (x, y) se obtiene un dígrafo que diremos **simplificado de G** . Idem para el caso no dirigido.

Es claro que un arco de G queda bien determinado por sus vértices extremos solo si G carece de arcos paralelos; es decir solo si G es dígrafo.

Si hay $k \geq 1$ arcos de la forma (x, y) -eventualmente $x=y$ - y no hay condicionamientos que exijan distinguir entre ellos los indicaremos (x, y, t) con $t \in 1, 2, \dots, k$

El valor k es la **multiplicidad del par ordenado** (x, y) . Análogamente para el caso no dirigido.

Un multi-di-grafo es un **p-di-grafo** si p es la mayor de las multiplicidades de sus pares ordenados.

Así entonces, todo grafo es un 1-grafo y recíprocamente.

Si $u = (p, q)$ y $v = (q, p)$ -se admite $p=q$ - los arcos u, v son **opuestos** (o **inversos**). Obviamente, esta noción carece de similar en el caso no dirigido.

Substituyendo cada arco de G por uno opuesto se construye el **multi-dígrafo opuesto** (o **inverso**) de G . Lo notaremos G^{-1} .

Algunos autores denominan "oriented graphs" a los que según nuestra terminología son dígrafos sin pares de arcos opuestos (D.1); (H.2); (H.5).

Es fácil ver que si no se toma en cuenta el orden de los vértices extremos a cada par de arcos opuestos o de arcos paralelos puede asociarse un par de aristas paralelas incidentes en los mismos vértices que los arcos en consideración. Por tal motivo, en (B.1) y en (Ch.2) los arcos opuestos (paralelos) se dicen "parallel arcs"

("strictly parallel arcs").

2.1.3

Es natural que dos multi-di-grafos $G = (V, U)$; $G' = (V', U')$ se digan iguales si $V=V'$ y $U=U'$. Por otra parte, es claro que si se cambian las designaciones de los respectivos elementos no se altera, en esencia, la configuración en estudio. Todas las materializaciones así obtenidas representan al mismo objeto matemático pues tienen igual comportamiento respecto de propiedades gráficas y por lo tanto son equivalentes en algún sentido. Mas precisamente:

Dos multidi-grafos $G = (V, U)$; $G' = (V', U')$ son **isomorfos** si existen biyecciones $h^0: V \rightarrow V'$; $h^1: U \rightarrow U'$ tales que cualquiera sea el arco $u = (a, b) \in U$ resulta que

$$h^1(u) = (h^0(a), h^0(b))$$

En tal caso $h = (h^0, h^1)$ definen un isomorfismo $h: G \rightarrow G'$. Si además $V=V'$ h es un **automorfismo**. Notaremos $G' = h(G)$ ó $G' \cong G$ ó también $G' = G$

Notemos que, si G es di-grafo y solo entonces h^1 está definida por h^0 . En cambio h^1 define h^0 cuando G carece de vértices aislados.

Análogamente para el caso no dirigido.

De manera más informal, los grafos G y G' son isomorfos si y solo si los vértices adyacentes de G se corresponden biyectivamente con los adyacentes de G' .

Si por alguna razón interesa tomar en cuenta la designación de los elementos nos referimos a "multi-di-grafos etiquetados" (ver 2.1.4) y en este caso aún cuando sean isomorfos serán considerados distintos.

Es fácil ver que la relación de isomorfismo es de equivalencia. Pero multi-di-grafos isomorfos pueden corresponder a problemas distintos y aún contrapuestos. Por ejemplo: un arco (a, b) puede significar "a menor que b" o "a mayor que b".

Puesto que las propiedades intrínsecas de los multi-di-grafos no dependen de la designación de sus elementos, las de los isomorfos son coincidentes.

Toda función que tome el mismo valor en un multi-di-grafo G y en sus isomorfos es un **invariante de G**.

Entre ellos se encuentran, obviamente, el número de vértices y el de arcos (aristas).

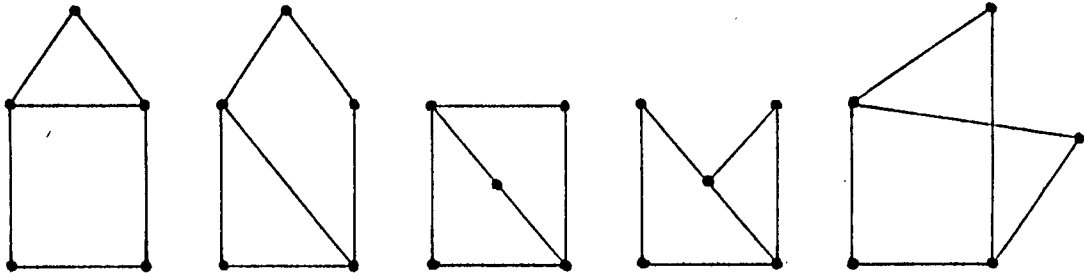
Un conjunto de invariantes que determina unívocamente -a menos de isomorfismo- a un multi-di-grafo se dice **conjunto completo de invariantes**.

Tal el caso del par n, m donde $n(m)$ es el número de vértices (aristas) para grafos sin bucles de orden menor que cuatro. Para $n=4$, no lo es.

El problema de decidir sobre el isomorfismo de multi-di-grafos es difícil.

Para el caso general no se conocen criterios simples, ni conjuntos

completos de invariantes, ni algoritmos eficientes. La dificultad en cuestión puede vislumbrarse considerando los esquemas siguientes:



2.1.4

Hemos observado, en la Introducción, que dado un multi-di-grafo puede ser de interés identificar sus elementos con su designación o incorporarle información adicional asignando a sus elementos una "etiqueta". Esto permite extender algunos de los resultados y aplicaciones propios de la teoría de grafos. A las ya mencionadas agregaremos la siguiente: A cada "autómata finito" puede asociarse un "digrafo etiquetado". En efecto, si al "leer" el símbolo de entrada S la "máquina" pasa del estado p al estado q y da como salida el símbolo T , en el digrafo asociado al autómata se etiquetará el arco (p,q) con $S-T$. A los efectos indicados se introduce la siguiente noción:

Dado un conjunto E (de marcas, nombres, símbolos, valores numéricos, signos, operadores, etc.) y supuesto que a ciertos elementos del multi-di-grafo G se les asignó un subconjunto de E se obtiene el **multi-di-grafo etiquetado** G_E .

En particular G_E se dirá **valuado** si E está constituido solo por valores numéricos; y **signado** si $E = \{ +; - \}$ o equivalentemente

$$E = \{ +1; -1 \}$$

De las definiciones respectivas resulta que excepto si $V=V'$; $U=U'$ los multi-di-grafos isomorfos $G=(V,U)$; $G'=(V',U')$ serán dados por multi-di-grafos etiquetados distintos. Tal el caso de los G_1, G_2, G_3 de pág. i-2 o los siguientes.



Notemos que todo multigrafo G puede darse por un grafo valuado G' que tenga el mismo conjunto de vértices y tal que a cada una de sus aristas $[x,y]$ se le asigna como valor el número de aristas $[x,y]$ que hay en G .

Recíprocamente, un grafo con todas sus aristas valuadas con un número entero positivo puede pensarse como representante de un multigrafo.

Análogamente para el caso dirigido.

Reservaremos el nombre multi-di-grafo etiquetado (o valuado) para cuando sea esencial tomar en cuenta el nombre o etiquetas de sus elementos (los valores dados a sus elementos).

El empleo de grafos etiquetados es frecuente en problemas de recuento. Así por ejemplo, identificando cada vértice con su designación es posible deducir en forma directa que hay 2^{n^2} dígrafos etiquetados de orden n y que 2^{n^2-n} de ellos carecen de bucles. Por otra parte, hay $2^{n(n+1)/2}$ grafos etiquetados con n vértices y $2^{n(n-1)/2}$ son sin bucle.

En el recuento anterior se consideran distintos todos aquellos que son isomorfos. Por ejemplo, todos los que tienen un único arco o solo dos aristas.

La construcción de todos los grafos de orden n con m aristas solo puede llevarse a cabo, sin recurrir al uso de computadoras, para valores pequeños de n y m . Interesantes referencias a este problema pueden verse en Heap (H.6).

La siguiente tabla da el número de grafos sin bucles con n vértices, para $n \leq 9$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº	1	2	4	11	34	156	1.044	12.346	308.168

Otras tablas, esquemas o datos relativos a grafos de orden pequeño que satisfacen propiedades particulares pueden verse en Harary (H.2) Heap (H.6).

Restringiéndose a grafos sin bucles y sin vértices aislados pueden construirse 113 con a lo sumo 6 aristas y 177 con 7 aristas. Datos referentes a ellos pueden verse en (H.7) y (B.6).

En Discrete Mathematics Vol.31 (1980) pág.224, se informa que en la Univ. de Waterloo -Canadá- se han generado mediante computadoras los 12.005.168 grafos de orden 10. Informes relativos a ellos y a otras configuraciones se han reunido en catálogos.

2.1.5

Diremos **submultigrafo** de $G = (V, U)$ a todo multigrafo $G' = (V', U')$ tal que $V' \subseteq V$ y $U' \subseteq U$.

También diremos que G' **esta contenido** en G y lo notaremos $G' \subseteq G$.

Si no se admitiera el grafo vacío tendríamos que suponer $V' \neq \emptyset$.

Si $G' \subseteq G$ y $V' = V$ se dirá que G' es **submultigrafo cubriente** de G .

Si para toda arista $u \in U$ cuyos dos extremos inciden en vértices de V' se tiene que $u \in U'$ diremos que G' es el **submultigrafo inducido** (o **generado**) por V' .

Por otra parte, dado $U' \subseteq U$ el **submultigrafo inducido por U'** es el constituido por las aristas de U' y los vértices en los cuales ellas inciden.

Los submultigrafos inducidos están definidos, respectivamente, por V' y por U' . Los notaremos G/V' ; G/U' .

Un submultigrafo G' se dirá **maximal respecto de la propiedad P** (o **P-maximal**) si verifica la propiedad P y no hay otro G'' que lo contenga y también la satisfaga.

Cuando la propiedad P sea la de "estar incluido en G" diremos simplemente que **G' es maximal en G**.

En forma similar si maximal se substituye por minimal+

Así entonces:

- G' es submultigrafo de G cubriente e inducido equivale a $G'=G$.
- Todo multigrafo no vacío con $m \geq 0$ aristas admite 2^m submultigrafos etiquetados cubrientes no vacíos, uno de ellos es discreto.
- Todo multigrafo de orden $n \geq 1$ admite $2^n - 1$ submultigrafos etiquetados inducidos, no vacíos.
- G/V' es maximal entre los que solo contienen los vértices de V' .
- G/U' es minimal entre los que contienen todas las aristas de U' .

Dos operaciones que aplicadas reiteradamente llevan a la construcción de submultigrafos son: la de eliminación de vértices y la de eliminación de aristas.

Más precisamente, dado un multigrafo $G = (V, U)$ y conjuntos $V' \subseteq V$; $U' \subseteq U$ notaremos:

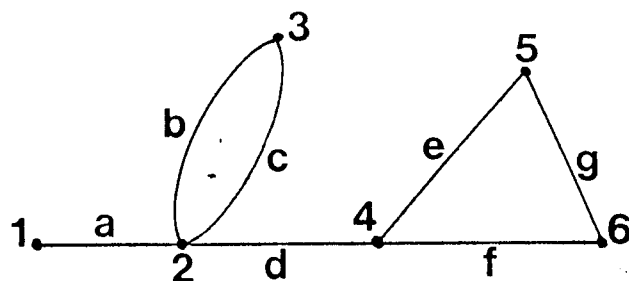
- $G - V'$ al que resulta de eliminar en G los vértices de V' y las aristas que tienen al menos uno de sus extremos en vértices de V' .
- $G - U'$ al que se obtiene quitando a G las aristas de U' .
- $G \div U'$ al que resulta de $G - U'$ luego de quitarle sus eventuales vértices aislado.

En particular: si $x \in V$; $G - x = G/(V - x)$
 $G - U$ es discreto y cubriente; $G \div U$ es vacío.

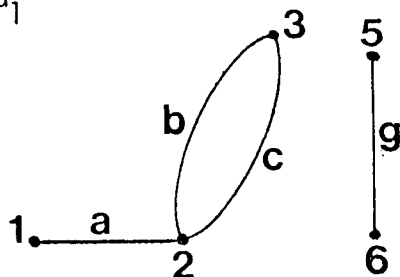
Todo $G' = (V', U')$, submultigrafo de $G = (V, U)$, puede obtenerse eliminando vértices y/o aristas de G.

En particular, si $G' = G/V'$ entonces $G' = G - V''$ donde $V'' = V - V'$;
 si $G' = G/U'$ entonces $G' = G \div U''$ donde $U'' = U - U'$;
 si G' es cubriente puede ponerse $G' = G - U''$ con $U'' = U - U'$.

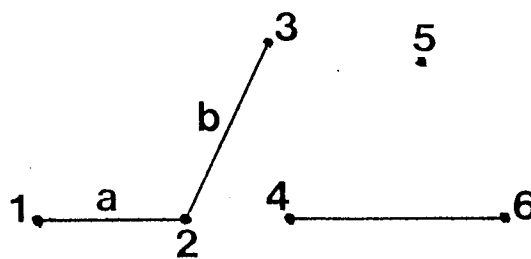
Ejemplo
 Dado G



sea G_1



sea G_2



En este caso $G_1 = G - \{4\}$ es inducido por $\{1,2,3,5,6\}$ y por $\{a,b,c,g\}$. A su vez $G_2 = G - \{c,d,e,g\}$ es cubriente pero no inducido.

Nociones y propiedades similares caben para el caso dirigido.

En autores de lengua inglesa o francesa designaciones frecuentes de los conceptos que acabamos de introducir son:

subgrafo: "subgraph" (B.5), (H.2), (S.2);
 "sous-graphe partiel" (B.3), (R.1)
 "graphe partiel" (K.7)

subgrafo cubriente: "spanning subgraph" (B.5), (H.2), (S.2);
 "graphe partiel" (B.3), (B.4), (R.1), (K.7)

subgrafo inducido por vértices: "vertex induced subgraph" (H.2), (S.2);
 "section-graph" (M.1), (O.2);
 "sub-complex" (Z.1);
 "sous-graphe" (B.3);
 "sous-graphe engendrê" (B.4) (R.1)

subgrafo inducido por aristas: "edge induced subgraph" (B.5), (S.2).

Ore (O.2) designa "cover subgraph" a todo subgrafo cubriente sin vértices aislados.

Notemos que la terminología adoptada por Berge y Roy permite dar una forma más elegante a la afirmación: Todo subgrafo es subgrafo cubriente de cierto subgrafo inducido por vértices:

Una amplia clase de submultigrafos es la de los incluidos bajo el nombre genérico de "factores". No siempre existen. Una extensa recopilación de resultados relativos a ellos fue dada por Akiyama - Kano (A.1).

Más precisamente, H es **k-factor** de G si es submultigrafo cubriente de G , carece de bucles y en cada uno de sus vértices conserva exactamente k de las aristas de G allí incidentes.

En particular, los **1-factores** están constituidos por aristas independientes entre si y existen solo si G tiene un número par de vértices.

Tutte (T.2) dedujo el siguiente e importante resultado, del cual fueron luego dadas diversas demostraciones:

Un grafo (V,U) admite un 1-factor si y solo si cualquiera sea $A \subseteq V$, el subgrafo $(V-A, U')$ inducido por $V-A$ contiene a lo sumo $|A|$ componentes de orden impar.

Otro tipo importante de subgrafos es el de los constituidos por aristas distinta de bucles e independientes dos a dos. Serán designados **acoplamientos** y corresponden a los que en lengua inglesa (francesa) se designan "matching" ("couplage").

Los acoplamientos perfectos son aquellos que además son cubrientes, coinciden con los 1-factores.

Para el caso dirigido H es un **1-difactor** de G si es subdigrafo cubriente tal que cada uno de sus vértices es extremo final y extremo inicial de un único arco.

Los arcos $u_i = (u'_i, u''_i)$ de cada 1-difactor en $G = (V,U)$ determinan una

partición $\Pi: V \rightarrow V$ definida por $\Pi(u'_i) = u''_i$.

Los distintos 1-difactores obtenidos a partir de uno cualquiera mediante la substitución de un arco por otro paralelo están asociados a una misma partición.

Mas adelante veremos otra forma de introducir esta noción y su similar para el no dirigido.

2.2 GRAFOS, DIGRAFOS, RELACIONES

La correspondencia biyectiva entre los subconjuntos de $V \times V$ y las relaciones binarias definidas en V permite introducir de manera distinta la noción de digrafo (grafo) y por extensión la de multidigrafo (multigrafo).

Si convenimos que $(x,y) \in U$ -eventualmente $x=y$ - equivale a $y \in \Gamma(x)$, el conjunto de arcos del digrafo $G=(V,U)$ define una relación binaria en V y recíprocamente. En tal caso Γ se dirá **relación de precedencia de G** y pondremos $G=(V,U)$ o tambien $G=(V, \Gamma)$.

En forma análoga, los grafos (V,U) están en correspondencia biyectiva con las relaciones binarias simétricas definidas en V . Ellas serán dichas **relaciones de adyacencia**.

De las definiciones respectivas es fácil ver:

1: El digrafo opuesto (o inverso) de $G=(V, \Gamma)$ es $G^{-1}=(V, \Gamma^{-1})$.

2: x es vértice aislado de $G=(V, \Gamma)$ equivale a $\Gamma(x) = \Gamma^{-1}(x) = \emptyset$.

3: Dados $G_1=(V_1, \Gamma_1)$ y $G_2=(V_2, \Gamma_2)$ se tiene que:

- a- G_1 es subdigrafo de G_2 si y solo si $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$
- b- G_1 es el subdigrafo de G_2 inducido por V_1 si y solo si Γ_1 es la restricción de Γ_2 a V_1 .

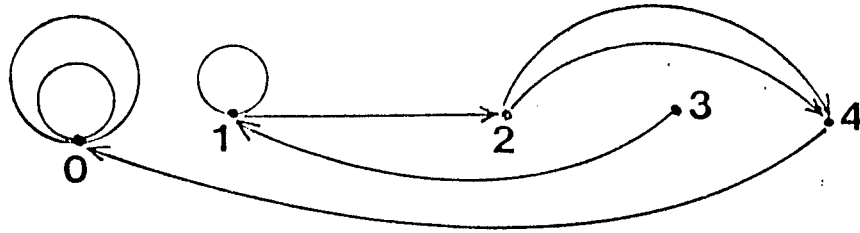
Notemos que no obstante la equivalencia indicada poco más arriba la noción de di-grafo no es redundante frente a la relación binaria. En particular, las preocupaciones de la teoría algebraica de relaciones no coinciden con las que motiva a la teoría de grafos. Además, la introducción de conceptos particulares, especialmente en el caso de los valuados (o etiquetados) faculta a ésta última para abordar problemas que no tienen cabida en la de relaciones.

Cada "representación topológica" de un digrafo (grafo) puede interpretarse como una enumeración "in extenso" de su relación de precedencia (de adyacencia) o como una visualización de todos los pares que la satisfacen. Aún cuando en el caso finito este es siempre posible, no siempre es cómodo. Tal el caso de las relaciones de orden, para las cuales en lugar del digrafo G correspondiente se utiliza el diagrama de Hasse H que lo implica.

En realidad H es el subdigrafo cubriente de G que resulta de eliminarle todos sus bucles y los arcos (x,y) para los cuales existen arcos $(x,z); (z,y)$.

Si G es un p -grafo pueden determinarse p relaciones de adyacencia que reunidas permitan dar una descripción alternativa de G . En general, las p relaciones no estarán unívocamente determinadas. Análogamente para el caso dirigido.

Así por ejemplo el 2-digrafo esquematizado



puede darse por (V, Γ_1, Γ_2) donde $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\Gamma_1(x) = x^2 \pmod{8}$; $\Gamma_2(x) = 2x$ si $x \in \{0, 1, 2\}$.

También hubieramos podido elegir $\Gamma_1 = \{(0,0); (1,2); (2,4); (4,0)\}$ y $\Gamma_2 = \{(0,0); (1,1); (2,4); (3,1)\}$.

Distintas relaciones pueden definir configuraciones isomorfas.

En efecto, $G_1 = (V, \Gamma)$ con $V = \{1, 2, 3, 6\}$; $y \in \Gamma(x)$ si x es divisor entero de y es isomorfo con $G_2 = (V', \Gamma')$ donde V' es el conjunto de partes de un conjunto de dos elementos y $z \in \Gamma'(w)$ si w es subconjunto de z .

La estrecha conexión entre los grafos, los digrafos y las relaciones que los definen lleva a clasificarlos de acuerdo con las características de éstas.

Un digrafo (V, Γ) es **inyectivo** si Γ es una relación inyectiva y **funcional** si Γ es una función con dominio en $V \subseteq V$.

Así entonces, G es inyectivo si y solo si G^{-1} es funcional.

Algunos autores denominan antifuncionales a los digrafos inyectivos.

La composición de una relación consigo mismo permite construir a partir de un digrafo $G = (V, \Gamma)$ otros dos de sumo interés.

Ellos son: su **clausura transitiva** $G^* = (V, \Gamma^*)$ y su **clausura reflexivo-transitiva** $\widehat{G} = (V, \widehat{\Gamma})$.

Si $G = (V, \Gamma)$ la relación $\widehat{\Gamma}$ determina el preorden asociado a G .

Recordemos que, de acuerdo con lo visto en Cap.1, $\widehat{\Gamma} = I \cup \Gamma^*$; que si

$$\Gamma^* = \bigcup_{i=1}^r \Gamma^i$$

$|V| = n$ $i=1$ y que nuestra noción de clausura reflexivo-transitiva coincide con la de "closure transitive" de Berge (B.3), (B.4); Kaufmann (K.5), (K.7).

De las definiciones respectivas se tiene:

- $G \subseteq G^* \subseteq \widehat{G}$. Más precisamente, G es subdigrafo cubriente de G^* y \widehat{G} se obtiene, a partir de G^* , incorporándole un bucle en cada vértice que no sea ya soporte de bucle.
- G^* es el digrafo transitivo con menor número de arcos que contiene a G como subdigrafo cubriente.

Observemos que la no distinción precisa entre G, G^* y \widehat{G} puede ser fuente de confusiones.

Más adelante ciertos conceptos y/o métodos propios de la Teoría de Grafos nos llevarán a considerar éstas clausuras y a dar nuevas formas de obtenerlas.

2-3 ALGUNAS OPERACIONES Y CONFIGURACIONES PARTICULARES

A las pocas ya vistas agregaremos otras.

Un multidigrafo (V, U) es **simétrico** si contiene tantos arcos de la forma (a, b) como arcos (b, a) ; o equivalentemente si es posible elegir una involución $\sigma: U \rightarrow U$ que asocie a cada arco uno de sus opuestos. Los arcos u, u^* se dirán **recíprocos**.

Como solo los bucles son opuestos de si mismos, para una tal involución (que diremos **involución de opuestos**) sólo los bucles pueden ser arcos unidos ($u=u^*$). No siempre todo bucle es unido en una involución de opuestos. En particular, dos bucles de igual soporte pueden ser recíprocos uno del otro o bien cada uno recíproco de si mismo.

Una involución de opuestos en G está unívocamente determinada si y solo si G es digrafo. En este caso todo bucle es arco unido.

Fracuentemente el concepto de multigrafo se confunde con el de multidigrafo simétrico. Para destacar que dicha identificación no siempre es lícita basta notar que la simetría de arcos no implica la de eventuales valores asignados a los mismos.

A continuación indicaremos varias formas de relacionar multidigrafos con multigrafos; ambos definidos sobre un mismo conjunto de vértices.

I) Dado un multidigrafo G diremos **multigrafo sosten o subyacente de G** al que resulta de substituir en G cada uno de sus arcos (a, b) por una arista $[a, b]$. Lo notaremos G^{\sim} .

De tal manera a cada arco de G corresponde una arista de G^{\sim} , que por comodidad también se dirá "arista de G ".

Es claro que en G^{\sim} podremos analizar todas las cuestiones relativas a G que no involucren la orientación de sus arcos.

Puesto que arcos opuestos y arcos paralelos de G se transforman en aristas paralelas de G^{\sim} , éste es un multigrafo propiamente dicho excepto si G es digrafo sin pares de arcos opuestos.

Multidigrafos isomorfos tienen sus respectivos sostenes isomorfos. La recíproca es falsa, pues la correspondencia $G \rightarrow G^{\sim}$ no es inyectiva

Más precisamente, cada multigrafo H con m aristas distintas de bucle puede considerarse sosten de los 2^m etiquetados H_i que se obtienen asignando orientaciones distintas a las m aristas. Los H_i así obtenidos se dicen "orientaciones de H " y entre ellos puede haber pares de isomorfos.

La determinación de cuantas orientaciones esencialmente distintas admite un grafo prefijado (es decir de cuantos digrafos no isomorfos es sostén) fue resuelta por Harary y Palmer (H.8), en 1966.

Nuestro concepto de grafo sosten corresponde al "associated indirected graph" de (O.2), (B.1); al "underlying graph" de (B.5),(W.4); al "underlying undirected graph" de (S.2) y al "undirected graph corresponding" de (D.1).

A su vez, el "simple underlying graph" de (B.5) equivale a nuestro: sosten simplificado de G reducido de sus bucles.

II) La identificación de todos los arcos de la forma (a,b) o (b,a) en una única arista $[a,b]$ hace corresponder a cada multidigrafo un grafo que es su **sosten simplificado**.

Obviamente esta correspondencia no es inyectiva.

III) Si el multidigrafo G es simétrico cabe aún otra forma de asociarle uno no dirigido.

Basta para ello elegir en G una involución de opuestos y substituir cada par de arcos recíprocos con una arista incidente en los mismos vértices que los arcos reemplazados.

Según sea la involución elegida puede suceder que la aplicación de III) lleve o no a identificar dos bucles de un mismo soporte.

Si cada vértice de G es soporte de a lo sumo un bucle las distintas involuciones que es posible elegir llevan a multigrafos isomorfos.

IV) Conservando los vértices y los bucles pero substituyendo cada arista distinta de bucle por un par de arcos opuestos, incidentes en los mismos vértices que la arista reemplazada, a cada multigrafo G se le asocia un multidigrafo simétrico que diremos **v-simetrizado de G** y notaremos G_V^S .

Si también cada bucle de G es reemplazado por dos, de igual vértice soporte, obtiene otro que diremos **e-simetrizado de G** y notaremos G_e^S .

Es inmediato que G_V^S y G_e^S coinciden si y solo si G carece de bucles; que G_V^S puede construirse a partir de G_e^S identificando pares de bucles de igual soporte y que las correspondencias $G \rightarrow G_V^S$; $G \rightarrow G_e^S$ son inyectivas.

Todo multidigrafo simétrico puede considerarse de la forma G_V^S ; si además en cada vértice incide un número par o nulo de bucles también puede ser considerado de la forma G_e^S .

Si G es un p -grafo, G_V^S es un p -digrafo y recíprocamente.

Podemos ahora reformular la observación de Berge citada en pág. , en los siguientes términos.

Cada noción no orientada referida a un multidigrafo G se pensará aplicada al correspondiente multigrafo sosten G^\sim y cada noción orientada referida a un multigrafo H se aplicará a su v -simetrizado H_V^S .

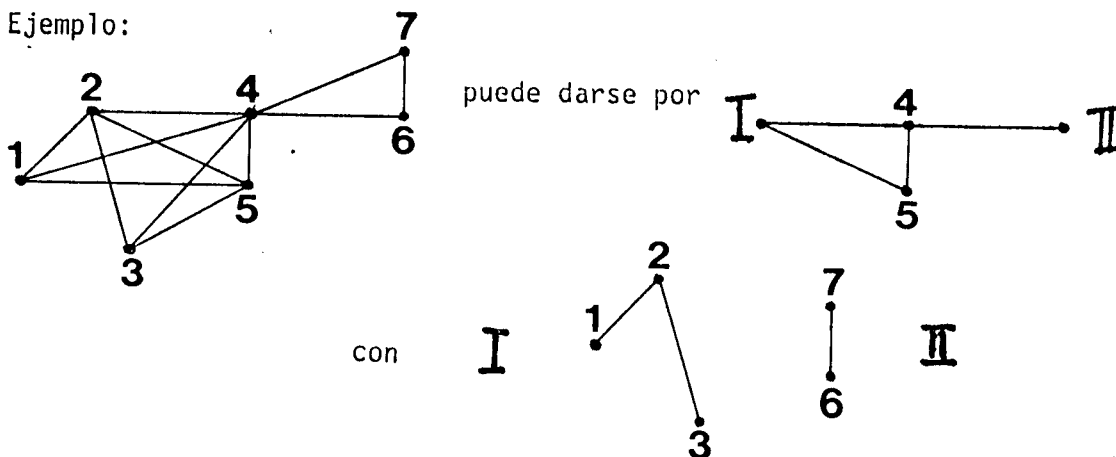
Así lo haremos, sin indicación expresa, cuando lo creamos conveniente.

Si R es una relación de equivalencia definida sobre el conjunto de vértices del multidigrafo G , su **cociente** G/R tiene por vértices las clases de equivalencia que determina R y tantos arcos (A,B) como arcos de la forma (a,b) , con $a \in A, b \in B$, hay en G .
En forma similar para el caso no dirigido.

Esta operación será utilizada explícitamente al considerar las nociones de conexidad y de fuerte conexidad. Aplicándola con relación al concepto de "parte homogénea", que introducimos seguidamente, permitiría disminuir la capacidad de memoria necesaria para almacenar los datos que definen un cierto grafo $G = (V,U)$.

$A \subseteq V$ es **parte homogénea** si todos los vértices de A tienen en \bar{A} un mismo conjunto de adyacentes.

Ejemplo:



Dos multigrafos son **p-complementarios** (es decir complementarios en la clase de los p-grafos) si ambos están definidos sobre un mismo conjunto de vértices y el número de aristas $[a,b]$ eventualmente $a=b$ - que hay en uno más el de las que tiene el restante es p .

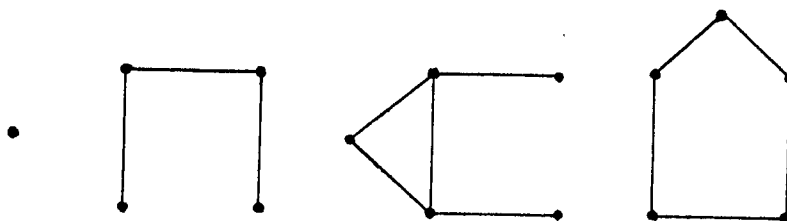
La operación de p-complementaridad es involutiva.

Para el caso $p=1$ vale la siguiente definición alternativa.

Dos grafos son **complementarios** si tienen un mismo conjunto de vértices y sus respectivos conjuntos de aristas son complementarios. Los notaremos $G; \bar{G}$.

G es **autocomplementario** si es isomorfo a su complemento.

Los cuatro autocomplementarios carentes de bucles con menor número de vértices son:



Tres operaciones binarias de uso frecuente son las siguientes:

Dados los multi-di-grafos $G_1 = (V_1, U_1); G_2 = (V_2, U_2)$ se dice:

intersección de G_1 y G_2 al multi-di-grafo $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, U_1 \cap U_2)$

unión de G_1 y G_2 al multi-di-grafo $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, U_1 \cup U_2)$

diferencia simétrica de G_1 y G_2 al multi-di-grafo inducido por $U_1 \Delta U_2$.

Si no se admite el grafo vacío la intersección solo queda definida si V_1 y V_2 son no disjuntos.

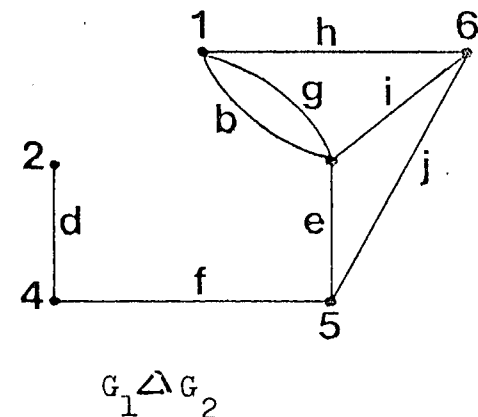
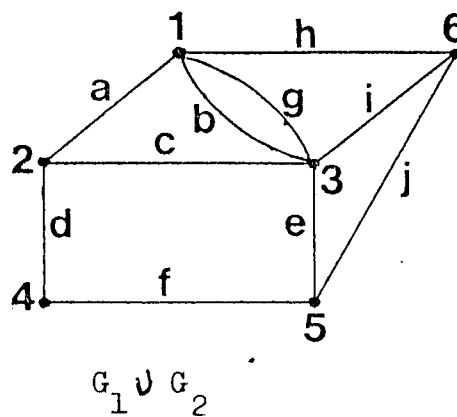
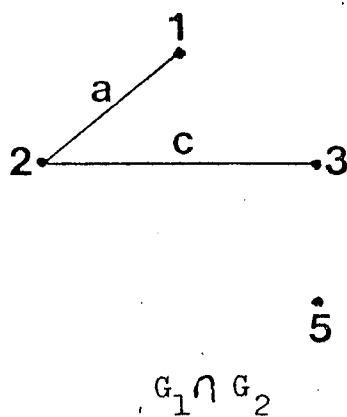
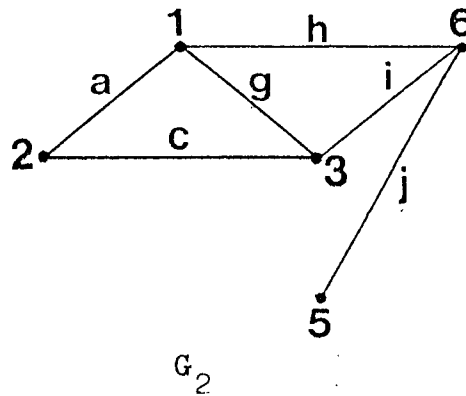
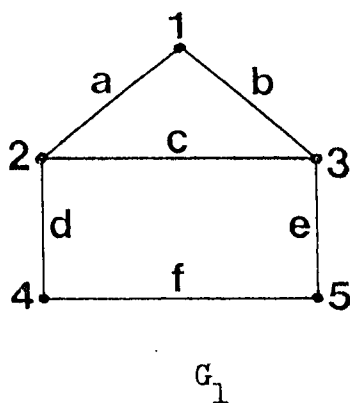
En (D.1) se define $G_1 \Delta G_2 = ((V_1 \cup V_2), (U_1 \Delta U_2))$ y de tal manera $G_1 \Delta G_2$ puede tener vértices aislados.

De las definiciones se tiene:

- Las operaciones \cap, \cup, Δ son conmutativas y asociativas. Pueden extenderse a familias arbitrarias de multi-di-grafos.
- Si G_1 y G_2 son vértice disjuntos, $G_1 \cap G_2$ es vacío, caso contrario si son arista disjuntos $G_1 \cap G_2$ es discreto.
- Si H está contenido en el grafo G entonces: $G \cap H = H$, $G \cup H = G$, $G \Delta H$ es el subgrafo de G que resulta de eliminar las aristas de H y los eventuales vértices aislados.

En particular, si $u \in U$, $G \Delta u = G - u$

Ejemplo



2-4 NOCIONES LOCALES

Incluiremos en este parágrafo un grupo de conceptos que reflejan la "manera" en que los arcos (las aristas) inciden en los vértices.

Un vértice x de G es **entrada (salida)** si G carece de arcos con extremo final (inicial) en x . Los restantes vértices de G son **interiores**.

Un **arco es de entrada (de salida)** si su vértice inicial (final) es entrada (salida).

Todo vértice que sea entrada y salida es aislado.

Dado un multidigrafo $G = (V, U)$ y fijado $A \subseteq V$ notaremos $U_A^+(G)$ al conjunto de arcos cuyo extremo inicial incide en algún vértice de A .

El de aquellos de $U_A^+(G)$ con vértice final en $A = V - A$ se indicará $U_A^{++}(G)$

En forma análoga, substituyendo final por inicial, deben entenderse las notaciones

$$U_A^-(G) \text{ y } U_A^{--}(G)$$

Cuando no haya lugar a confusión omitiremos indicar G y habitualmente en lugar de U_A^{++} y U_A^{--} pondremos, respectivamente, (A, \bar{A}) ; (A, A) .

Nótese que $U_A^{++} = U_A^{--}$ y que de $A \subseteq B$ no puede deducirse que U_A^{++} y U_A^{--} son disjuntas, ni que son no disjuntas, ni tampoco relaciones de inclusión entre ellas.

Observemos que en (B.3); (B.4); (R.1) la notación U_a^+ corresponde a nuestro U_a^{++} .

Si $A = \{a\}$ el conjunto $U_a^+ = U_a^{++}$ es la **semiestrella positiva, de soporte a** al natural $d_a^+(G) = |U_a^+(G)|$ es el **semigrado positivo** del vértice a .

Análogamente el **semigrado negativo** de a es la cardinalidad de la **semiestrella negativa** de soporte a ; es decir $d_a^-(G) = |U_a^-(G)|$.

En particular, en $G = (V, \Gamma)$ $d_x^+ = |\Gamma(x)|$; $d_x^- = |\Gamma^{-1}(x)|$. Además G es inyectivo si $d_x^- \leq 1$ y funcional si $d_x^+ \leq 1$, cualquiera sea $x \in V$.

Es habitual notar $\mathcal{J}^+(\mathcal{J}^-)$ al mínimo semigrado positivo (negativo) y Δ^+ , Δ^- al máximo semigrado positivo (negativo) de G .

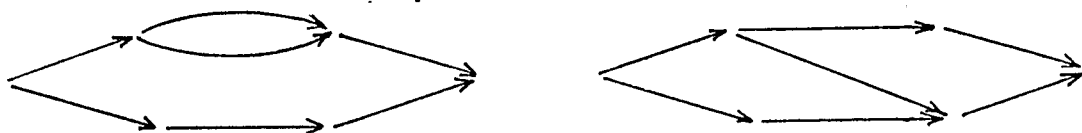
Cualquiera sea el multidigrafo $G = (V, U)$:

- $U_a^+ = \emptyset$ ($U_a^- = \emptyset$) si y solo si a es salida (entrada).
- $U_x^- \cap U_x^+ \neq \emptyset$ equivale a decir que x es soporte de al menos un bucle.
- $G = \bigcup U_x^+ = \bigcup U_x^-$, si la unión se extiende a todos los vértices de G .
- $\sum d_x^- = \sum d_x^+ = |U|$, si la suma se extiende a todos los vértices.

Es claro que los semigrados correspondientes a los vértices de multidigrafos isomorfos pueden ordenarse de forma que constituyan una misma sucesión, que es invariante gráfico.

Pero del ejemplo que sigue resulta que aún cuando haya correspondencia biyectiva entre los pares d_x^-, d_x^+ y $d_{x'}^-, d_{x'}^+$ de dos digrafos, dicho invariante

riante no alcanza para implicar isomorfismo.



Un multidigrafo G es **balanceado (arco-balanceado)** si para todo vèrtice x (arco (a,b)) se tiene $d_x^- = d_x^+$ ($d_a^- = d_b^+$).

Si además todo vèrtice tiene un mismo semigrado G es **di-regular (arco-regular)**.

Si interesa destacar que $d_x^- = d_x^+ = k$ diremos que G es **k -di-regular**.

Los siguientes esquemas demuestran que un digrafo puede ser balanceado (arco-balanceado) sin ser arco balanceado (balanceado).



Puede deducirse que:

-Si G es simétrico es balanceado. La recíproca es falsa.

-Si G es k di-regular entonces es k arco-regular. La recíproca solo afirmarse si $k \geq 1$ y G carece de vèrtices aislados.

La noción multidigrafo balanceado se designa "graphe pseudosymétrique" en (B.3), (R.1).

Para el caso no dirigido se introducen nociones análogas a las precedentes.

Se dice **estrella de soporte** a al conjunto de aristas con al menos uno de sus extremos incidentes en a . Por **grado (o valencia)** del vèrtice x se entiende el número d_x de aristas incidentes en x , pero conviniendo -segun lo habitual- en contar doble cada bucle incidente en x .

Con la convención indicada se tiene:

- $d_x(G \sim) = d_x^-(G) + d_x^+(G)$; siendo $G \sim$ el sosten de G

- Cualquiera sea $G = (V, U)$, $\sum_{x \in V} d_x(G) = 2|U|$

- Todo multigrafo finito tiene un número par (o nulo) de vèrtices de grado impar.

En efecto, si $V_p(V_i)$ es el conjunto de vèrtices de grado par (impar) entonces

$$2|U| = \sum_{x \in V} d_x(G) = \sum_{x \in V_p} d_x(G) + \sum_{x \in V_i} d_x(G) \quad (1)$$

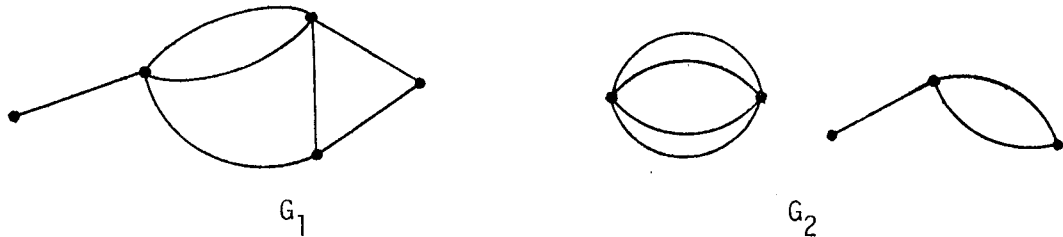
y es fácil ver que (1) se cumple solo si $\sum_{x \in V_i} d_x(G)$ es par.

Si G tiene un número infinito de vèrtices pero cada uno de éstos es de grado finito G es **localmente finito**. Ejemplo: Red de puntos del plano con coordenadas enteras.

Un vértice (una arista) es **pendiente** si es de grado uno (si tiene un extremo de grado uno).

En particular a cada vértice (arco) entrada de G corresponde en su sostén un vértice (arista) pendiente.

En forma similar a la indicada para el caso dirigido los grados de multigrafos isomorfos ordenados por su magnitud determinan una misma sucesión numerica. Que este invariante no es completo resulta del siguiente ejemplo:



Es fácil verificar:

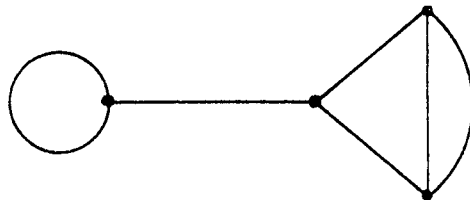
- 1- si se admiten bucles cualquier sucesión de enteros no negativos con cantidad par de impares puede interpretarse como la de los grados de algún multigrafo.
- 2- si no se admiten no hay multigrafos cuyos grados sean 1,1,4; ni grafos con la sucesión 1,2,3.

Un multigrafo es **regular** si todos sus vértices tienen un mismo grado. Si interesa destacar que en todos su grado es k diremos que es **k -regular**.

Los grafos definidos por los vértices y aristas de los cinco poliedros platónicos (cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro) son regulares y el multigrafo sosten de un k -di-regular es $2k$ -regular.

Hay exactamente 250 grafos regulares sin bucles con a lo sumo 10 vértices. Una tabla con información correspondiente a ellos puede verse en (C.2).

Si G es grafo de orden n , sin bucles y K -regular cada uno de sus vértices tiene k adyacentes y $(n-1-k)$ no adyacentes. El siguiente multigrafo 3-regular muestra que lo anterior no puede extenderse al caso general.



Para el caso de grafos sin bucles cabe considerar la siguiente noción.

Un grafo sin bucles, de orden n y k -regular tal que además cada par

de vértices adyacentes tiene p adyacentes comunes y cada par de no adyacentes tiene q adyacentes comunes se dice **fuertemente regular** de parámetros $k; n-1-k, p, q$.

Los grafos fuertemente regulares se reencuentran al considerar los esquemas de incidencia de los diseños en bloques incompletos parcialmente balanceados (PBIB) con dos clases asociadas. Además están vinculados con las "partial geometries" introducidas por Bose (B.7), y las "nets" estudiadas por Bruck (B.8), entre otros.

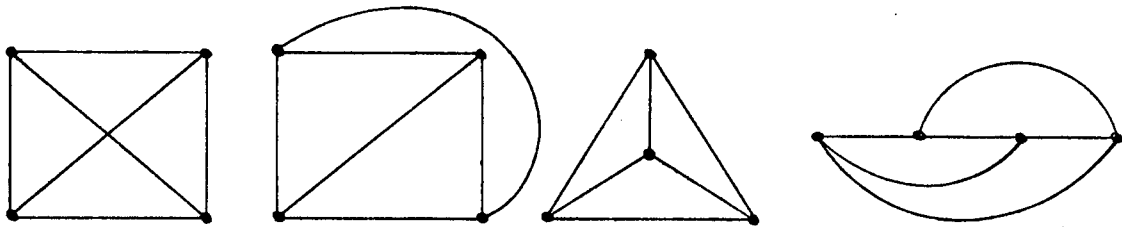
Una interesante recopilación de resultados relativos a estos grafos fué dada, en 1975, por Hubaut (H.9).

2.5 MULTI-DI-GRAFOS SIN BUCLES DE USO FRECUENTE

Un grafo es **completo** si carece de bucles y cada vértice es adyacente de todos los restantes. Es único a menos de isomorfismo y el de orden n se nota K_n .

El grafo vacío podría notarse K_0 , todo vértice aislado es k_1 ; toda arista distinta de bucle es K_2 y todo "triángulo" es K_3 .

El completo K_4 puede visualizarse por cualesquiera de los siguientes esquemas.



Es claro que $k_n - n \geq 1$ - es $(n-1)$ -regular y que K_n y el discreto con n vértices son complementarios en la clase de los grafos sin bucles.

Si convenimos que $1(0)$ significa "existe arista" ("no existe arista") todo grafo sin bucles de orden n puede determinarse por el completo K_n valuado con $0,1$.

Todo subgrafo sin bucles, de G , que sea completo maximal (en sentido conjuntista) se dice **clan de G** .

La búsqueda de ellos puede reducirse a la de conjuntos maximales de vértices no adyacentes entre si en el complemento de G .

Los problemas que pueden llevar a la consideración de subgrafos completos son muy variados. Podrían representar conjuntos de estados incompatibles dos a dos o por el contrario de estados intercambiables.

Rosenfeldt (R.3) determinó que el número de grafos sin bucles de orden

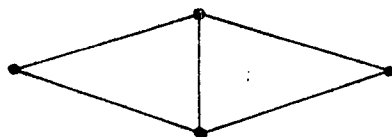
n con exactamente dos clanes es $\lfloor n^2/4 \rfloor$. Moon y Moser (M.3) evaluaron el número máximo de clanes que admite un grafo de orden n y caracterizaron aquellos para los cuales se alcanza la cota. En (M.3), además se acotaron superiormente e inferiormente el número máximo de tamaños distintos de los clanes que puede contener un grafo. La cota inferior fue mejorada por Erdos (E.4).

Asociando a cada arista todos los clanes que la contienen y a cada vértice el completo K_1 se tiene:

-Si el multigrafo G carece de bucles puede determinarse en forma unívoca una familia de completos maximales cuya unión da G .

El hecho de limitarse a considerar solo subgrafos completos maximales permite asegurar la unicidad de la descomposición, pero no que los completos en cuestión carezcan de aristas comunes.

Ejemplo



Para el caso dirigido hay dos nociones ligadas con la de grafo completo.

Un digrafo es **completo simétrico** si para cada par de vértices $x, y -x \neq y$ existe un arco (x, y) y otro (y, x) y es **completo antisimétrico (o torneo)** si para cada par de vértices distintos existe a lo sumo un arco con extremos en ellos.

De otra forma: G es completo simétrico si es el simetrizado de algún completo y es torneo si su sosten es completo.

Todo certamen en el cual no se admiten empates y cada equipo compite con todos los restantes corresponde a un torneo. Estos gozan de interesantes propiedades. El lector interesado puede consultar al respecto, Moon (M.4), Harary-Moser (H.10).

Un multigrafo $G=(V, U)$ es **bipartido** si existe una partición de V en dos clases V_1 y V_2 tales que toda arista de G tiene un extremo en V_1 y el restante en V_2 .

Habitualmente lo notaremos $G = (V_1 \cup V_2, U)$.

Un grafo bipartido en el cual cada vértice de V_1 es adyacente a todos los de V_2 es un **bipartido completo**. Si V_1 y V_2 tiene, respectivamente, p y q vértices lo notaremos $K_{p,q}$.

Así entonces, si a no es soporte de bucles y tiene grafo p , la estrella de soporte a es el bipartido completo $K_{1,p}$.

El grafo definido por los vértices y aristas de un cuadrado es $K_{2,2}$. El constituido por los vértices y aristas de un cubo es bipartido, no completo.

En la clase de los grafos sin bucles $\overline{K_{p,q}} = K_p \cup K_q$.

Erdos () probó que para obtener un grafo bipartido a partir de otro carente de bucles basta eliminar a lo sumo la mitad de sus aristas.

El mismo problema para el caso de grafos que no contienen "triángulos" y algunas otras generalizaciones fue estudiado en (E.5).

Los grafos bipartidos que además son de permutación se muestran útiles para la formalización de algoritmos. En (S.3) se dan varias caracterizaciones de ellos.

A cada grafo $G=(V,U)$ puede asociarse el bipartido $G_b=(V \cup V', W)$ donde V' es copia de V (es decir: $x' \in V'$ equivale a $x \in V$) y $[ab'] \in W$ si y solo si $[a,b] \in U$. G_b se dirá **bipartido representante de G** .

La correspondencia indicada es inyectiva y suele ser muy útil.

Un grafo bipartido $(V_1 \cup V_2, U)$ con $|V_1|=p$; $|V_2|=q$ se dice de tipo **(p,q,r,s)** si al agregarle una arista aumenta el número de los bipartidos completos $K_{r,s}$ que contiene.

Bollobas (B.9) (ver tambien B.10) demostró que ellos contienen al menos $(r-1)q + (s-1)p - (r-1)(s-1)$ aristas. Este valor había sido conjeturado por Erdos-Hajnal-Moon (E.6) en ocasión de resolver el problema análogo que se plantea al considerar la inclusión de grafos completos en grafos arbitrarios.

Los grafos bipartidos se dicen "bigraph" "pair graph", "even graph" y "simples" pero este último nombre es usado tambien y muy frecuentemente para los que carecen de bucles.

Sabemos que a cada grafo (V,U) puede asociarse una relación binaria simétrica definida en $V \times V$. Para el caso de los bipartidos, con $V=V_1 \cup V_2$, tambien puede asociarse otra definida en $V_1 \times V_2$ tal que contiene al par (x,y) si y solo si $[x,y] \in U$. En ambos casos la relación en cuestión puede representarse por una matriz booleana; cuadrada de orden n o de dimensión $p \times q$ si $|V_1|=p$; $|V_2|=q$ según corresponda.

Se dice **r-partido** a todo grafo $G=(V,U)$ tal que $V=\bigcup_i V_i$; $V_i \neq \emptyset$; $V_i \cap V_j = \emptyset$ $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ y donde toda arista tiene extremos en distintos V_i . Si además cada vértice de V_i es adyacente de todos los de V_j , cualquiera sean $i \neq j$, es **r-partido completo**.

Un r-partido completo en el cual todas las clases de la partición tienen s vértices será notado K_r^s .

De tal forma $K_n = K_n^1$; $K_{n,n} = K_2^n$

Tomando conjuntos unitarios todo grafo de orden n carente de bucles puede pensarse como un n -partido. A su vez, el bipartido completo $K_{2,2}$ es tambien un 3-partido no completo.

Un problema abierto que presenta grades dificultades es el siguiente: ¿Supuestos $m \geq 2$, $n \geq 2$ cual es el menor número $R=r(m,n)$ tal que cualquier grafo con R vértices contiene como subgrafo al completo K_m o al complemento (en la clase de los sin bucles) de K_n ?

Del mismo problema es frecuente encontrar tambien la siguiente formulación.

¿Dados $m \geq 2$, $n \geq 2$ cuál es el menor entero $R=r(m,n)$ tal que si cada arista del completo de orden R es coloreada, arbitrariamente, de rojo o de azul queda determinado un K_m de aristas rojas o un K_n de aristas azules? Es fácil verificar:

$$r(2,n) = n \qquad r(m,n) = r(n,m)$$

En Ejercicio 2.23 se propone demostrar que $r(3,3) = 6$

Greenwood y Gleason (G.2) dieron la cota

$$r(k,m) \leq r(k-1,m) + r(k,m-1)$$

De ella se obtiene $r(k,m) \leq \binom{k+m-2}{k-1}$ deducida ya por Erdos y Szekeres (E.7).

Otras cotas fueron encontradas posteriormente por diversos autores.

El "principio del encasillamiento" (pigeon-hole principle) establece que si n objetos deben colocarse en m casillas y m es menor que n al menos dos objetos deben ubicarse en una misma casilla. Se usa inadvertidamente en muchos razonamientos.

En 1930 y como resultado de sus investigaciones en fundamentación de la matemática, Ramsey (R.4) enunció un teorema que puede considerarse como una profunda generalización de dicho principio. El problema indicado más arriba queda comprendido como caso particular de la versión finita del citado teorema y de este mismo resulta que siempre admite solución.

El Teorema de Ramsey como así también información suplementaria puede hallarse en Hall (H.11), Ryser (R.5), Van Lint (L.2), Luchessi y otros (L.1).

Los números $r(3,4)$, $r(3,5)$ y $r(4,4)$ fueron determinados en 1955, por Greenwood y Gleason (G.2). En 1968 Graver y Yackel (G.3) reencontraron el valor de $r(3,6)$ evaluaron $r(3,7)$ y acotaron algunos otros. Las dificultades propias de este trabajo llevaron a Sheehan (S.4) a observar que la obtención de resultados parece ser más dificultosa para el problema planteado que para ciertas generalizaciones del mismo.

Sheehan dice además conocer, por comunicación personal, que Grinstead ha determinado que $r(3,6) = 36$ y que $27 \leq r(3,8) \leq 29$; esto mejora algunos de los logros de (G.3).

Los órdenes de los grafos que satisfacen el problema planteado se denominan Números de Ramsey. A nuestro entender, y excluyendo los triviales, los únicos conocidos hasta 1980 están indicados en la siguiente tabla. Varios de los restantes $r(m,n)$ están acotados superiormente e inferiormente.

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9
3		6	9	14	18	23		36
4			18					

Con relación al caso $r(3,3) = 6$, y como corolario de un resultado más general Goodman (G.4) (ver también Schwenk (S.5)) demostró que en toda bicoloración de las aristas de K_6 se tienen al menos dos triángulos monocromáticos. Harary (H.12) determinó todas las coloraciones que llevan a exactamente dos triángulos monocromáticos. Para resultados más precisos y bibliografía al respecto ver Harary (H.13), van Lint (L.2).

Del problema anterior se han estudiado generalizaciones de diferentes tipos. Una de ellas considera la situación cuando las aristas pueden colorearse con más de dos colores. Otra es la siguiente:

Dados los grafos (sin vértices aislados) A y B determinar el menor entero $r(A,B)$ tal que si el grafo G contiene al menos $r(A,B)$ vértices entonces A es subgrafo de G o B es subgrafo del complemento de G .

En Burr (B.11) se da una extensa bibliografía y recopilación de resultados concernientes a esta generalización. Ver también Harary (H.13) (H.14).

Los números de Ramsey diagonales e información suplementaria respecto de los grafos sin vértices aislados con 7 aristas y de aquellos con a lo sumo 6 aristas fueron dadas por Hendry (H.7) y Burr (B.6), respectivamente.

La tabla incluida en este último trabajo puede verse también en Gardner (G.5).

2.6 DISTINTAS FORMAS DE REPRESENTACION

Lo esencial para definir un multi-di-grafo es dar su conjunto de vértices e indicar para cada uno de sus arcos (aristas) cuales son sus vértices extremos. En general esto puede hacerse de diferentes maneras, por ejemplo:

- a- mediante esquemas geométricos.
- b- enunciando un conjunto de relaciones adecuadas.
- c- por tablas o por matrices, que reflejen la adyacencia (precedencia) entre vértices o la multiplicidad de sus aristas (arcos) o la incidencia de vértices y aristas (arcos).

En determinadas circunstancias podrán ser útiles otras formas.

Las distintas representaciones de un mismo G pueden presentar, respecto de ciertas propiedades o características, ventajas y/o desventajas relativas entre sí.

La elección de la que se utilizará dependerá, en general, de la envergadura de G , de sus particularidades (existencia o carencia de vértices aislados, de bucles, de aristas paralelas, etc) del problema a tratar o de los medios de cálculo disponibles.

Las representaciones mediante diagramas son posibles sólo en el caso finito, pero inmanejables si el número de elementos a considerar es elevado. Por otra parte, para la resolución de problemas es frecuente tener que operar con computadoras y en tal caso, obviamente, ellos carecen de utilidad.

Las representaciones mediante matrices permitan vincular propiedades de éstas con otras propias de la teoría que nos ocupa, dando lugar así a una fructífera interacción. Destaquemos que a cada multi-di-grafo, y según cual sea el problema a considerar, suelen asociarse diferentes matrices. No todas ellas permiten reconstruirlo, pues no para todas la asociación es inyectiva.

Por otra parte, las representaciones matriciales llevan implícito una numeración de los elementos que componen los conjuntos utilizados para definirlos. Así por ejemplo, dado un multigrafo G y asignados a sus vértices una numeración $1, 2, \dots, n$ su matriz de adyacencia $A(G) = (a_{ij})$

es aquella con a_{ij} = número de aristas $[i, j]$ si G' es un isomorfo de G que resulta de j renumerar sus vértices entonces $A(G')$ se obtiene a partir de $A(G)$ permutando adecuadamente sus filas y sus columnas.

Ejemplo

Dado G



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para G'



$$A(G') = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que las filas y columnas se han movido de acuerdo con la permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

En lo puntualizado está latente la diferencia entre multigrafo y multigrafo etiquetado.

2.6.1

Se dice **representación topológica** (o geométrica) de un multigrafo $G = (V, U)$ a todo esquema constituido por un conjunto \underline{V} de puntos de \mathbb{R}^n - $n \geq 2$ - en correspondencia biyectiva con V y un conjunto \underline{U} de curvas de Jordan (es decir: continuas, que no se intersectan consigo mismas) en correspondencia biyectiva con U tales que:

- si u es la curva asociada a la arista $u = [a, b]$ los extremos de u inciden en los puntos de \underline{V} que corresponden a los vértices a, b .
- solo los extremos de u inciden en puntos de \underline{V} .

Para el caso dirigido se procede en forma similar pero conviniendo, además en asignar a cada curva un sentido coincidente con el orden en que se dan sus vértices extremos.

Se demuestra que todo multi-di-grafo finito puede ser representado topológicamente.

Obviamente, los diagramas en cuestión no están determinados unívocamente y dos de ellos son representaciones de una misma configuración solo si es posible fijar entre los respectivos conjuntos involucrados correspondencias biyectivas que preserven la relación de incidencia y la orientación.

Diremos **representación topológica limpia** a aquella en la cual las curvas asociadas a sus aristas (arcos) no se intersecten - es decir, tienen en común a lo sumo sus extremos -.

- Todo multi-di-grafo finito admite una representación topológica limpia en \mathbb{R}^3 .

En efecto, basta para ello identificar los vértices con puntos de una recta R y asignar, en forma inyectiva, a cada arista (arco) una curva en un simiplano del haz con soporte en R .

El resultado anterior puede extenderse a todo (V, U) donde V y U tienen ambos, potencia menor o igual que la del continuo.

Un **multi-di-grafo es planar** si admite una representación limpia en R^2 ; o lo que es equivalente, en una esfera.

Para verificar la correspondencia biyectiva entre las representaciones topológicas limpias en el plano y en la esfera basta considerar proyecciones estereográficas.

Para destacar la importancia del concepto "planaridad" basta observar que solo las redes que gozan de esta propiedad pueden ser esquemas de circuitos eléctricos impresos.

No siempre el esquema elegido permite visualizar fácilmente que un dado multi-di-grafo es planar.

Cada representación topológica limpia en R^2 (o en la esfera) de un multi-di-grafo planar es un **multi-di-grafo plano**.

Tal el caso de G_1 y de G_3 , pero no el de G_2 , de pàg.i-2.

Notemos además que los citados G_1, G_2, G_3 no son diagramas equivalentes en estricto sentido topológico, pues no es posible definir una transformación continua de G_2 en G_1 o G_3 .

Así entonces, dos esquemas geométricos pueden ser equivalentes para la Teoría de Grafos pero no para la Topología. Por otra parte, más adelante veremos que dos multigrafos planos representantes de un mismo planar pueden no ser equivalentes para ciertas cuestiones que estudia la Teoría de Grafos.

Como consecuencia de un célebre resultado de Kuratowsky (K,8) las "configuraciones no planares esenciales" son K_5 y $K_{3,3}$.

Se demuestra que para toda superficie existen grafos que no pueden ser representados limpiamente en ella.

Para el caso de los grafos no planares pueden buscarse "representaciones óptimas" es decir, con el menor número de cruzamientos. Según se observa en (G.6) no siempre subgrafos de representaciones óptimas gozan también de esta propiedad.

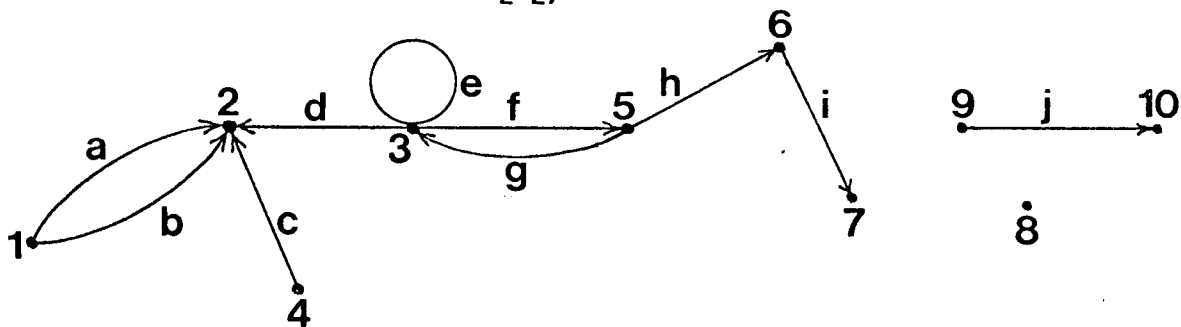
2.6.2

Hemos observado que distintos motivos pueden llevar a la elección de representaciones diferentes.

A título de ejemplo y sin entrar en los detalles de las respectivas definiciones consideraremos varias de ellas para un mismo multidigrafo y explicitaremos algunas de sus ventajas y/o desventajas relativas.

Sea $G = (V, U)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$U = \{ (1, 2, a); (1, 2, b); (4, 2); (3, 2); (3, 3); (3, 5); (5, 3); \\ (5, 6); (6, 7); (9, 10) \}$$



Tablas de incidencia

arco	vértices
a	(1,2)
b	(1,2)
c	(4,2)
d	(3,2)
e	(3,3)
f	(3,5)
g	(5,3)
h	(5,6)
i	(6,7)
j	(9,10)

T₁

Vértice x	U _x ⁻	U _x ⁺
1	-	a,b
2	a,b,c,d	--
3	e,g	d,e,f
4	--	c
5	f	g,h
6	h	i
7	i	--
8	--	--
9	--	j
10	j	--

T₂

En T₂ es fácil reconocer cuales son los vértices entrada o salida y en particular que 8 es aislado. En cambio, para reconocer los vértices entrada (salida) en T₁ debe recorrerse toda la tabla y si no se ha especificado que hay 10 vértices no será posible detectar, con ella, que hay uno aislado.

Por otra parte, en T₁ es fácil determinar cuales son los arcos paralelos y cuales los opuestos. Esto es más arduo en T₂. En ambas es rápido ver que e es bucle.

Tablas de precedencia

vértice	vértice
1	2 (doble)
2	---
3	2,3,5
4	2
5	3,6
6	7
7	--
8	--
9	10
10	--

T₃

arco	arco
a	--
b	--
c	--
d	--
e	d,e,f
f	g,h
g	d,e,f
h	i
i	--
j	--

T₄

En T_3 (T_4) quedan bien definidos los vértices (arcos) de entrada. Para los de salida es necesario recorrer toda la tabla y almacenar información. La existencia de arcos paralelos queda bien explicitada en T_3 pero es irrecuperable en T_4 .

La **matriz de precedencia** (entre vértices) de un multidigrafo G es $P(G) = P_{ij}$ con P_{ij} = número de arcos de la forma (i,j) .

En nuestro caso y poniendo . en lugar de 0 ella es

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.	2
2
3	.	1	1	.	1
4	.	1
5	.	.	1	.	.	1
6	1	.	.	.
7
8
9	1
10

Es fácil ver que cualquiera sea G se tiene:

- G es simétrico si y solo si $P(G)$ coincide con su traspuesta.

- $\sum_j p_{ij} = d_i^+$; $\sum_i p_{ij} = d_j^-$

- $\sum_{ij} p_{ij} =$ número de arcos de G

- $p_{ii} \neq 0$ si y solo si i es soporte de bucle.

Proposición 2.6.1

Toda matriz cuadrada de enteros no negativos es matriz de precedencia de algún multidigrafo G . Si solo tiene componentes 0 y 1 entonces G es dígrafo.

Para ciertos problemas puede ser interesante considerar la **matriz de precedencia de los arcos**, con componentes $q_{ij} = 1$ si el arco j es consecutivo del arco i y $q_{ij} = 0$ en caso contrario.

Si G carece de bucles puede estudiarse su **matriz de incidencia** (vértice-arco) $M(G) = (m_{ij})$ definida por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es vértice inicial de } j \\ -1 & \text{si } i \text{ es vértice final de } j \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

En nuestro ejemplo y excluido su bucle e se tendría

	a	b	c	d	f	g	h	i	j
1	1	1
2	-1	-1	-1	-1
3	.	.	.	1	1	-1	.	.	.
4	.	.	1
5	-1	1	1	.	.
6	-1	1	.
7	-1	.
8
9	1
10	-1

Ahora arcos paralelos (opuestos) corresponden a vectores columna idénticos (opuestos) además

$$\sum_i m_{ij} = 0, \quad \sum_j m_{ij} = d_i^+ - d_i^-$$

Para incluir multidigrafos con bucles podría elegirse $m_{jj} = 2$ si j es bucle de soporte pero esto afectaría la validez de las propiedades citadas.

Para el caso no dirigido se introducen tablas o matrices análogas. Aplicándolas al multigrafo sosten del que acabamos de considerar tendremos.

Tablas de incidencia

arista	vértices
a	1,2
b	1,2
c	2,4
d	2,3
e	3
f	3,5
g	3,5
h	5,6
i	6,7
j	9,10

T'_1

vértice	aristas
1	a,b
2	a,b,c,d
3	d,e,f,g
4	c
5	f,g,h
6	h,i
7	i
8	--
9	j
10	j

T'_2

En T_1' es inmediato que tanto a,b como f,g son aristas paralelas y que es bucle. Lo mismo es más difícil de detectar usando T_2' . Con esta última es fácil evaluar el grado de cada vértice y en particular que 8 es vértice aislado. Esta circunstancia no es deducible de T_1' sin previa aclaración del número de vértices existentes. Para hallar los vértices adyacentes de uno prefijado sería necesario recorrer toda la tabla T_1' o toda la T_2' .

Tablas de adyacencia

vértice	vértice
1	2(es doble)
2	1,3,4(es doble con 1)
3	2,3,5(es doble con 5)
4	2
5	3,6(es doble con 3)
6	5,7
7	6
8	--
9	10
10	9

T_3'
3

arista	arista
a	b,c,d (es doble con b)
b	a,c,d (es doble con a)
c	a,b,d
d	a,b,c,e,f,g
e	d,f,g
f	d,e,g,h (es doble con g)
g	d,e,f,h (es doble con f)
h	f,g,i
i	h
j	--

T_4'
4

En T_3' quedan claramente indicados los vértices de grado 1, pero en T_4' no se reflejan las aristas pendientes.

La **matriz de adyacencia** (vértice-vértice) es

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.	2
2	2	.	1	1
3	.	1	1	.	2
4	.	1
5	.	.	2	.	.	1
6	1	.	1	.	.	.
7	1
8
9	1
10	1	.

Si i no es soporte de bucles $\sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji} = \text{grado de } i$, caso contrario se obtiene su grado menos el número de bucles con soporte i .

Proposición 2.6.2

Toda matriz cuadrada simétrica de enteros no negativos es matriz de adyacencia de algún multigrafo.

La matriz de incidencia (vértice arista) $M = (m_{ij})$ se define por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } j \text{ tiene uno de sus extremos en el vértice } i. \\ 2 & \text{si la arista } j \text{ tiene ambos extremos en el vértice } i. \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Para esta matriz y cualquiera sea G se tiene:

- aristas paralelas corresponden a columnas idénticas
- $\sum_i m_{ij} = 2$; $\sum_j m_{ij} = d_i$

Hemos indicado solo algunas de las numerosas matrices que pueden asociarse a un multi-di-grafo. No todas lo representan cabalmente, pues no todas dan información completa respecto de la configuración. Por lo tanto, para ellas no valen, en general afirmaciones similares a las hechas en las proposiciones 2,6,1 y 2,6,2.

Para numerosos problemas, que no impliquen la necesidad de contar, en lugar de considerar las matrices de adyacencia o de precedencia que hemos indicado suelen usarse las llamadas **matrices de adyacencia (de precedencia) booleanas**. Tienen componentes 0,1 y se las opera en Z_2 (es decir con "operaciones booleanas"). Esto presenta notables

ventajas de manejo respecto de las operaciones en el cuerpo real.

2.6.3

Hemos indicado varias de las formas en que es posible representar un multi-di-grafo. Sus respectivos "grados de bondad" dependen, habitualmente, de las particularidades de los datos a considerar, de los problemas a tratar, de los algoritmos a utilizar, de los elementos de cálculo disponibles, etc.

A continuación haremos algunas breves referencias concernientes a la representación (o codificación) de datos con vistas a su tratamiento por computación.

Aquellas dadas por tablas son razonablemente concisas y las matriciales requieren, en general, mayor capacidad de memoria.

Si el tiempo requerido para procesar un algoritmo aplicado a un grafo de orden n está dado por $C \cdot f(n)$ donde C es constante, se dice que su "tiempo de complejidad es del orden de $f(n)$ " y se lo nota $O(f(n))$.

Habitualmente, la matriz de incidencia -que para el caso dirigido está definida solo si G carece de bucles- ocupa más memoria que la de adyacencia (idem de precedencia).

Presenta poco interés para procesos de cálculo pero es útil para deducciones teóricas.

Para el caso de digrafos los componentes de su matriz de precedencia son 0 o bien 1 y en consecuencia, para los de orden n su almacenamiento ocupa n^2 bits, independientemente del número de arcos. Para el caso de los que carecen de bucles alcanzan $(n^2 - n)$ bits y para los simétricos- lo mismo que para la de adyacencia de grafos- son suficientes $n(n+1)/2$.

Si G es de orden n y tiene m aristas (arcos distintos de bucles) su matriz de incidencia requiere $n \cdot m$ ($2 \cdot n \cdot m$) bits.

Utilizando la matriz de adyacencia los tiempos para determinar los adyacentes de un cierto vértice o las aristas del grafo son, respectivamente, del orden $O(n)$; $O(n^2)$.

Si las dimensiones lo permiten cada matriz de ceros y unos puede almacenarse identificando cada una de sus filas (o de sus columnas) con un "vector" o "palabra binaria".

Esto permite economizar memoria y además facilita el manipuleo de los datos.

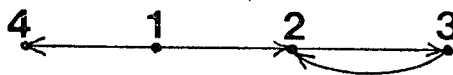
En general, para el almacenamiento de datos recurriendo al uso de arreglos unidimensionales hay, además del "vector binario", dos formas básicas; a saber: el de "lista secuencial" (packed list) y el de "lista direccional" (linked list).

Así por ejemplo, los datos D_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pueden almacenarse en n "casillas consecutivas" respetando el orden inducido por los índices o en forma arbitraria, pero indicando con una segunda componente en donde se encuentra el dato que sigue y cual es el dato inicial.

El almacenamiento secuencial permite un acceso directo a cualesquiera de los datos, pero insertar algún otro exige el corrimiento de

todos los que le deben seguir. En cambio, al adoptarse la forma direccional el acceso a un dato obliga a pasar por todos sus anteriores. Para el agregado de alguno basta incorporarlo al final de la lista y modificar el indicador del que le debe preceder.

A título de ejemplo esbozaremos como podríamos incorporar mediante "listas" el digrafo.



En la forma secuencial utilizaríamos dos arreglos unidimensionales. Uno de ellos para los vértices y el restante para indicar cuales son sus respectivos precedidos (o adyacentes en el caso no dirigido). En nuestro caso tendríamos

1	2	3	4
2,4	3	2	.

La listas empleadas al recurrir a la forma direccional se construyen y operan de acuerdo con lo ejemplificado a continuación

1	2	3	4	5	6	7	8	9
				2	4	3	2	0
5	7	8	9	6	0	0	0	0

El 5 de la primera columna nos lleva a la quinta columna cuyo 2 indica que en G existe el arco (1,2). El 6 de la quinta columna nos lleva a la sexta, cuyo 4 informa que otro de los arcos con vértice inicial 1 es el (1,4). El 0 de la sexta columna significa que todos los arcos de vértice inicial 1 han sido considerados y que debe darse a la segunda columna. El 7 de ésta permite deducir, al considerarse la séptima columna, que el único arco con vértice inicial 2 es el (2,3).

Procediendo en forma similar, de las columnas tercera y octava se deduce la existencia del arco (3,2) y de las columnas cuarta y novena que 4 es vértice de salida.

El almacenamiento de la tabla de adyacencia de un grafo de orden n con m aristas, utilizando tanto la forma secuencial como la direccional, ocupa una capacidad de memoria del orden $O((n+m) \log_2 n)$.

La incorporación (o eliminación) de una arista utilizando la forma secuencial lleva un tiempo de orden $O(n+m)$; es menor si se emplea la forma direccional y se reduce a $O(1)$ con la matriz de adyacencia.

Afirmaciones similares caben para el caso dirigido y referencia más precisa pueden hallarse en (S.1) pag. 350,354).

Que la eficacia del método elegido para operar con los datos puede depender de éstos y no del problema a tratar quedará ejemplificado con las siguientes consideraciones.

Las mismas resumen lo deducido en Kolman-Busby (K.6) al plantearse el problema de verificar la transitividad de una relación.

Suponiendo, en primera aproximación, que todas las operaciones a efectuar requieren un mismo tiempo de ejecución se indican con T_M y T_L los que son necesarios para constatar la transitividad de una relación según se haya empleado, respectivamente, su matriz o cierta lista direccional. Se ve que si n es el número de vértices, cuando el número de aristas "es grande" frente al de vértices el almacenamiento matricial es n veces más rápido que el restante. Si por el contrario el número de aristas "es pequeño" frente a n^2 es más conveniente recurrir al de la lista direccional adoptada.

Otras consideraciones relativas a vinculaciones entre grafos y computadoras pueden verse en Heap (H.6), Kolman-Busby (K.6), Sahni (S.1), Roy (R.1), Doe (D.1), Aho-Hopcroft-Ullman (A.2), Knuth (K.8).

Para el caso de grafos con características particulares podrán estudiarse otras formas de representación. Así por ejemplo, Turán (T.3) estudió la codificación de grafos planares, Hiz (H.15) la de aquellos correspondientes a ciertas moléculas químicas.

Por otra parte, los "árboles" y los "árboles con raíz" constituyen clases de configuraciones muy importantes. Respecto de sus formas habituales de representación pueden consultarse, entre otros, Knuth (K.8), Aho-Hopcroft-Ullman (A.2).

En (R.6) se propone un lenguaje, denominado GRAAL (graph algorithmic lenguaje); para implementar algoritmos en computadoras y se desarrollan algunas aplicaciones del mismo. Posteriormente, en (R.7) se lo considera con relación a problemas que presuponen multigráficos representados atendiendo a su relación de incidencia y sin referencia explícita a los vértices.

Otros de los lenguajes propuestos para abordar problemas en grafos son: el desarrollado en Yugoslavia por el grupo que dirige Cvetkovic (C.2) (C.4) y el elaborado por King (K.10), (K.11) como extensión del FORTRAN.

En las respectivas bibliografía puede hallarse más información sobre esta cuestión.

EJERCICIOS

- 2-1 : a) Supuesto que A habla castellano, inglés y francés, que B habla alemán, castellano e inglés; que C habla castellano y alemán; que D habla solamente francés, esquematize las distintas conversaciones que pueden mantener entre ellos.
- b) Idem a) si además E entiende pero no habla francés.
- 2-2 : Un proyecto se compone de las tareas: m,n,o,p,q,r,s,t; para cuyas ejecuciones deben respetarse las siguientes restricciones:
- m,n,q pueden iniciarse inmediatamente.
 - o,p pueden desarrollarse simultáneamente pero ambas exigen la terminación de m y de q.
 - para comenzar r debe terminarse o
 - para el inicio de s es necesaria la terminación de o y de n.
 - t sólo puede comenzarse una vez concluidas p,q,r
 - el proyecto termina cuando s y t han sido realizadas.

Dibuje un esquema que represente la situación indicada y determine si se han enunciado restricciones superfluas.

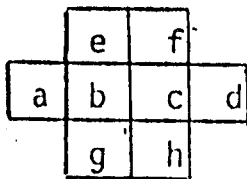
- 2-3 : Horacio celebra el fin de año cenando con sus amigos Pablo, Diego, Fernando, Gaspar, Julián y Nicolás. Horacio está en buenas relaciones con los seis, pero:

- Pablo y Fernando están enemistados.
- Gaspar, Pablo y Diego suelen discutir.
- Julián le debe dinero a Nicolás.
- Gaspar le quitó la novia a Fernando
- Julián es socialista y Fernando es conservador.
- Nicolás y Gaspar se han enemistado por problemas de trabajo

¿ puede Horacio sentar a sus amigos alrededor de una mesa redonda de forma que cada comensal tenga a ambos lados personas con las cuales está en buenas relaciones? ¿ de cuántas maneras?.

- 2-4 : Construya un grafo auxiliar que le permita resolver el siguiente problema:

Dado



ubique en cada uno de los cuadros a,b,c,d,e,f,g,h un entero del 1 al 8 de forma que no correspondan naturales consecutivos a cuadros que tienen lados o vértices comunes.

¿Cuántas soluciones hay?

- 2-5 : De una representación topológica del digrafo $G = (V, U) = (V, \Gamma)$ definido por:

a)

x	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\Gamma(x)$	a,b,d	c,d	b,d	-	f	e,g	-	d	-

b) $V =$ naturales divisores enteros de 30 y $U =$ arcos $(0,2)$; $(0,3)$; $(0,5)$ o de la forma (a,b) con $b = a \cdot p$ con p número primo y $a \neq 0$.

c) $V =$ subconjuntos de un conjunto de tres elementos.

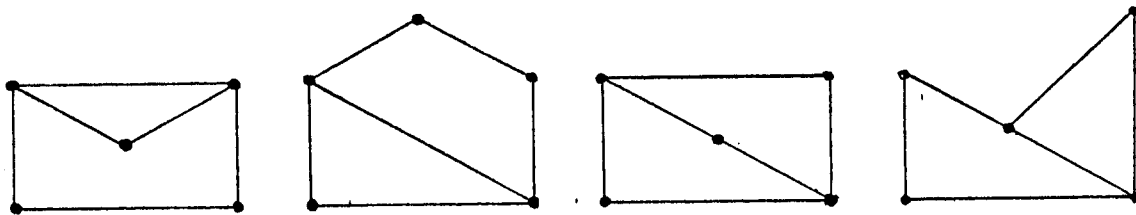
$(a,b) \in U$ si $a \leq b$ y no existe c -distinto de ellos - tal que $a \leq c \leq b$.

d) $V =$ conjunto de ternas $a = (a_1, a_2, a_3)$ con $a_i \in \{0,1\}$; $i = \{1,2,3\}$

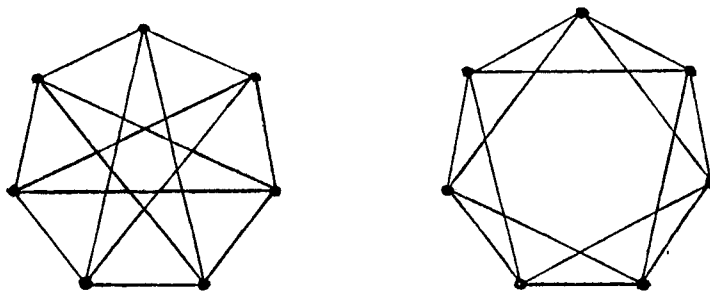
$(a,b) \in U$ si las ternas a, b solo se diferencian en una de sus componentes y en ella $a_i < b_i$.

Verifique que los digrafos definidos en b), c), d) son isomorfos.

2-6 : Determine cuales de los siguientes diagramas representan un mismo grafo.



2-7 : Verifique que los siguientes grafos admiten 14 isomorfismos.



2-8 : Vea que si G_1 y G_2 son multigrafos isomorfos tambien lo son sus respectivos sostenes. ¿Vale tambien la recíproca?

2-9 : Verifique que dado el multidigrafo $G = (V, U, \mathcal{D}) = (V, U, \mathcal{D}_i, \mathcal{D}_q)$

a- u, v son arcos paralelos si y solo si $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}(v)$

b- u, v son arcos opuestos equivale a $\mathcal{D}_i(u) = \mathcal{D}_q(v)$ y $\mathcal{D}_q(u) = \mathcal{D}_i(v)$

c- si x no es soporte de bucle entonces

$$d_x^+ = |\mathcal{D}_i^{-1}(x)| ; d_x^- = |\mathcal{D}_q^{-1}(x)|$$

d- G es p -digrafo si y solo si

$$p = \max. |\mathcal{D}^{-1}(a,b)| ; (a,b) \in U.$$

e- G carece de salidas si y solo si \mathcal{D}_i es sobreyectiva.

2-10: Dado el digrafo $G = (V, U, \nu_i, \nu_q) = (V, r)$ vea que:

a- $r = \nu_q \circ \nu_i$

b- G es inyectivo si y solo si $|\nu^{-1}_q(x)| \leq 1$ y funcional si y solo si $|\nu^{-1}_i(x)| \leq 1$.

2-11: Vea que si $G_1 = (V, \Gamma_1)$; $G_2 = (V, \Gamma_2)$ entonces $G_1 \cup G_2 = (V, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ y $G_1 \cap G_2 = (V, \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

2-12 : Represente:

a) los 6 multigrafos que pueden construirse con 3 vértices y 2 aristas.

b) los 10 multigrafos de orden 3 con 2 arcos.

c) todos los digrafos de orden 3 posibles de definir por una relación antisimétrica.

d) todos los digrafos sin bucles de orden 3.

e) todos los digrafos funcionales de orden 4, sin vértices aislados

2-13 : Represente los 28 grafos posibles de definir con $n=1,2,3$ vértices y los 11 sin bucles de orden 4.

2-14 : Verifique que existen 34 grafos sin bucles de orden 5.

2-15 : Demuestre que:

a- K_n y $K_{p,q}$ tienen, respectivamente, $\binom{n}{2}$ y $p \cdot q$ aristas.

b- cualquier grafo bipartido de orden n tiene a lo sumo $\lfloor n^2/4 \rfloor$ aristas y que la cota anterior no es mejorable

2-16 : Demuestre que en toda fiesta en que cada persona tiene exactamente $K \geq 1$ amigos del otro sexo hay tantos hombres como mujeres.

2-17 : Los esquemas que representan un cuadrado o un cubo son grafos bipartidos regulares. Vea que lo mismo puede afirmarse respecto de los representan hipercubos (sus vértices son las n -uplas de 0 y 1 y son adyacentes aquellos cuyas n -uplas se diferencian en solo una de sus componentes).

2-18 : Vea que para todo $n \geq 3$ existe al menos un grafo sin bucles de orden $2n$ y 3-regular que no contiene K_3 como subgrafo.

2-19 : a) represente los 7 subgrafos no vacíos de K_3

b) determine cuantos subgrafos etiquetados no vacíos tiene K_3 .

c) determine cuantos subgrafos etiquetados cubrientes admite K_j .

d) vea que K_n tiene $\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} 2^{\binom{j}{2}}$ subgrafos etiquetados no vacíos

2-20 : Explique porqué en todo grafo no trivial sin bucles hay al menos dos vértices de igual grado. Demuestre que lo anterior es falso si se admiten bucles o aristas paralelas.

2-21 : Sean E, S y T los conjuntos de vértices de un multigrafo G en los

cuales se tienen, respectivamente, $d_x^+ > d_x^-$, $d_x^+ < d_x^-$, $d_x^+ = d_x^-$

Vea que: a- G es balanceado si y sólo si E y S son vacíos.

b- E es vacío si y solo si S es vacío

$$c- \sum_{x \in E} (d_x^+ - d_x^-) = \sum_{x \in S} (d_x^- - d_x^+)$$

2-22: Vea que en la clase de los grafos sin bucles

a) dos grafos son isomorfos si y solamente si también lo son sus respectivos complementarios.

b) los grafos dados en pág. 2-15 son los únicos autocomplementarios, de orden menor que 6

c) el orden de los grafos autocomplementarios es congruente con 0 o con 1 módulo 4.

d) para todo $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ existen grafos autocomplementarios de orden n.

2-23: Vea que existen 8 grafos regulares, sin bucles, de orden 6.

2-24: Verifique que la relación de isomorfismo de grafos es una relación de equivalencia y que la composición de los automorfismos de un grafo determina un grupo.

2-25: Vea que todo grafo puede identificarse con el subgrafo inducido por ciertos vértices de algún grafo regular.

2-26: Vea que:

a- cualquier subgrafo inducido por vértices de un completo (bipartido) es completo (bipartido).

b- cualquier grafo sin bucles de orden n es isomorfo a un subgrafo de K_n

2-27: Demuestre que si en una reunión cada par de presentes tiene un amigo común en la reunión entonces existe alguien que es amigo de todos los presentes.

2-28: Recordando que al definir el grado de un vértice de un multigrafo los bucles cuentan doble vea que:

a: la suma de los grados da el doble del número de aristas.

b: hay un número par de vértices de grado impar.

c: todo multigrafo k-regular con k impar tiene un número par de vértices.

2-29: Si G es de orden n y d_i es el grado del vértice x_i vea que:

a) una sucesión de enteros no negativos d_1, \dots, d_n es la sucesión de grados de algún multigrafo si y solo si $\sum_{i=1}^n d_i$ es par.

b) que lo afirmado en a) no es válido si nos restringimos a grafos o a multigrafos sin bucles.

2-30: Verifique que toda matriz cuadrada (cuadrada y simétrica) de enteros no negativos es la matriz de precedencia (de adyacencia) de algún multigrafo (multigrafo).

2-31: Demuestre que:

a) el número de digrafos etiquetados de orden n es 2^{n^2} y que $2^{n(n-1)}$ de ellos carecen de bucles

b) hay $2^{n(n+1)/2}$ grafos etiquetados de orden n y que de ellos $2^{n(n-1)/2}$ no tienen bucles.

c) que los 8 grafos etiquetados sin bucles de orden tres corresponden a solo 4 esquemas esencialmente distintos.

2-32: Demuestre que si cada arista de K_6 se pinta de rojo o de blanco queda determinado, necesariamente, un "triángulo rojo" o un "triángulo blanco" o equivalentemente.

Demuestre que todo grafo G de orden 6 es tal que G o su complemento contiene al menos un conjunto de tres vértices adyacentes dos a dos.

Vea además que $n=6$ es el menor de los órdenes para los cuales es válido lo afirmado precedentemente.

BIBLIOGRAFIA

- A.1 - AKIYAMA, J., KANO, M.: *Factors and factorizations of graph*. A survey. *J. of Graph Theory* 9 (1985), 1/42.
- A.2 - AHO, A.V., HOPCROFT, J.E., ULLMAN, J.D.: *The designs and analysis of computer algorithms*. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1974.
- B.1 - BUSACKER, R.G., SAATY, T.L.: *Finite graphs and networks. An introduction with applications*. Mc.Graw Hill Co. 1965.
- B.2 - BERGE, C.: *Graph Theory*. *The Amer. Math. Monthly* 71 (1964), 471/481.
- B.3 - BERGE, C.: *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, 1958-63-67. *Teoría de las redes y sus aplicaciones*. CECSA. 1967.
- B.4 - BERGE, C.: *Graphes et hypergraphes*. Dunod. 1970-73.
- B.5 - BONDY, J.A., MURTY, U.S.R.: *Graph theory with applications*. Amer. Elsevier. 1976.
- B.6 - BURR, S.A.: *Diagonal Ramsey numbers for small graphs*. *J. of Graph Theory* 7 (1983), 57/69.
- B.7 - BOSE, R.C.: *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*. *Pacific J. Math.* 13 (1963), 389/419.
- B.8 - BRUCK, R.H.: *Finite nets II. Uniqueness and imbedding*. *Pacific J. Math.* 13 (1963), 421/457.
- B.9 - BOLLOBAS, R.: *On a conjecture of Erdős-Hajnal and Moon*. *The Amer. Math. Monthly* 74 (1967), 178/179.
- B.10 - BOLLABAS, R.: *Extremal graph theory*. Acad. Press, 1978.
- B.11 - BURR, S.A.: *Generalized Ramsey theory of graphs. A survey*. *Lect. Notes in Mathematics*. 406 - Springer-Verlag (1974), 52/75.
- C.1 - CAYLEY, A.: *On the theory of the analytical forms called trees*. *Philos. Magaz.* 13 (1857), 172/176.
- C.2 - CVETKOVIC, D., RADOSAVLJEVIC, Z.: *A table of regular graphs on at most ten vertices*. *Graph Theory. Proc. 6th. Yugosl. Seminar Dubrovnik 1985 - Novi Sad Univ.* (1986), 71/105.
- C.3 - CAPOBIANCO, M., MOLLUZZO, J.C.: *Examples and counter-*

examples in graph theory. North Holland, 1978.

- C.4 - CVETKOVIC, D.M.: *Discussing graph theory with a computer IV. Knowledge organization and examples of theorem proving.* Graph Theory. Proc. 4th Yugosl. Seminar Novi Sad 1983 - Novi Sad Univ. (1984), 43/68.
- Ch.1 - CHIAPPA, R.A.: *Algunas motivaciones históricas en la Teoría de Grafos.* Rev. de Educación Matemática. 4 (1989), 37/54.
- Ch.2 - CHACHRA, V., GHAVE, P., MOORE, J.: *Applications of graph theory.* North Holland, 1979.
- Ch.3 - CHEN, W.K.: *Applied graph theory.* North Holland, 1975 (2 Edit.).
- D.1 - DEO, N.: *Graph theory with applications to engineering and computer science.* Prentice Hall, 1974.
- E.1 - EULER, L.: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Commnt. Academiae Sci. I, Petropolitanae 8 (1736), 128/140.
- E.2 - EULER, L.: *Leonhard Euler and the Königsberg bridges.* Sci. Amer. 189, July (1953), 66/70.
- E.3 - ERDOS, P., GALLAI, T.: *On maximal paths and circuits of graphs.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar 10 (1959), 337/356.
- E.4 - ERDOS, P.: *On cliques in graphs.* Israel J. Math. 4 (1966), 233/234.
- E.5 - ERDOS, P., FAUDREE, R., PACH, J., SPENCER, J.: *How to make a graph bipartite.* J. Combin. Theory Ser. B 45 (1988), 86/98.
- E.6 - ERDOS, P., HAJNAL, A., MOON, J.W.: *A problem in graph theory.* The Amer. Math. Monthly 71 (1964), 1107/1110.
- E.7 - ERDOS, P., SZEKERES, A.: *On a combinatorial problem in geometry.* Compositio Math. 2 (1935), 463/470.
- G.1 - GERSTING, J.L.: *Mathematical Structures for Computer Science.* W.H. Freeman 1982.
- G.2 - GREENWOOD, R.E., GLEASON, A.M.: *Combinatorial relations and chromatic graphs.* Canad. J. Math. 7 (1955), 1/7.
- G.3 - GRAVER, J.E., YACKEL, J.: *Some graph theoretic results associated with Ramsey's theorem.* J. Combin. Theory 4 (1968), 125/175.
- G.4 - GOODMAN, A.W.: *On sets of acquaintances and strangers*

at any party. The Amer.Math.Monthly 66
(1959) - 778/783.

- G.5 - GARDNER, M.: *In which joining sets of points by lines leads into diverse (and diverting) paths.* Sci.Amer. 237, November (1977), 18/28.
- G.6 - GUY, R.K.: *Crossing numbers of graphs.* Lect.Notes in Mathematics 303 - Springer-Verlag, (1972), 111/124.
- H.1 - HARARY, F.: *Some historical and intuitive aspects of graph theory.* SIAM Review 2 (1960), 123/131.
- H.2 - HARARY, F.: *Graph Theory.* Addison Wesley, 1969.
- H.3 - HARARY, F.: *New directions in the theory of graphs.* Academic Press. 1973.
- H.4 - HARARY, F., READ, R.: *Is the null graph a pointless concept?* Lect. Notes in Mathematics 406, Springer-Verlag (1974), 37/44.
- H.5 - HARARY, F., NORMAN, R., CARTWRIGHT, D.: *Structural models. An introduction to the theory of directed graphs.* J.Wiley (1965).
- H.6 - HEAP, B.R.: *The production of graphs by computer.* Graph theory and Computing (Edit.R.Read) Academic Press 1972, 47/62.
- H.7 - HENDRY, G.R.T.: *Diagonal Ramsey numbers for graphs with seven edges.* Utilitas Math.32 (1987), 11/34.
- H.8 - HARARY, F., PALMER, E.: *On the number of orientations of a given graph.* Bull.Acad.Polon.Sci.XIV (1966), 125/128.
- H.9 - HUBAUT, X.L.: *Strongly regular graphs.* Discrete Mathematics 13 (1975), 357/381.
- H.10 - HARARY, F., MOSER, L.: *The theory of round robin tournaments.* The Amer.Math.Monthly 73 (1966), 231.
- H.11 - HALL, M.(Jr): *Combinatorial Theory.* Blaisdell Publ.Co. 1967.
- H.12 - HARARY, F.: *The two-triangle case of the acquaintance graph.* Math.Mag.45 (1972), 130/135.
- H.13 - HARARY, F.: *A survey of generalized Ramsey theory.* Lect.Notes in Mathematics 406 - Springer-Verlag - (1973) - 10/17.
- H.14 - HARARY, F.: *Recent results on generalized Ramsey theory for graphs.* Lect.Notes in Mathematics 303, Springer-Verlag (1972), 125/138.
- H.15 - HIZ, H.: *A linearization of chemical graphs.* J.of

- K.1 - KONIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig (1937) *Theorie der Graphen*. Chelsea, (1950).
- K.2 - KAUFMANN, A.: *Des points et des flèches. La théorie des graphes. Puntos y Flechas. Teoría de Grafos*. Ed. Boixareu - Marcombo España (1976).
- K.3 - KIRCHOFF, G.: *Über die Auflösung der Gleichungen auf welche man bei der untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*. Ann.Phys.Chem.72 (1847), 497/508.
- K.4 - KAUFMANN, A., COSTER, D.: *Exercices de combinatoire avec solutions (I-II-III)*. Dunod 1970. *Ejercicios de combinatoria con soluciones (I-II-III)*. CECSA - 1971.
- K.5 - KAUFMANN, A.: *Introduction à la combinatoire en vue des applications*. Dunod. 1968. *Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones*. CECSA, (1971).
- K.6 - KOLMAN, B., BUSBY, R.C.: *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*. Prentice Hall (1984). *Estructuras de Matemáticas discretas para la computación*. Prentice Hall Hispanoamérica (1986).
- K.7 - KAUFMANN, A.: *Méthodes et modèles de la Recherche opérationnelle (I-II-III)*. Dunod 1962.
- K.8 - KNUTH, D.E.: *The art of computer programming (I-II-III)*. Addison-Wesley (1969).
- K.9 - KURATOWSKI, G.: *Sur le problème des courbes gauches en topologie*. Fund.Math. 15-16 (1930), 271.
- K.10 - KING, C.A.: *A graph-theoretic programming language*. Doctoral thesis. Univ.of West Indies (1970).
- K.11 - KING, C.A.: *A graph-theoretic programming language*. Graph Theory and Computing (Edit.R.Read) Academic Press (1972) 63/75.
- K.12 - KAINEN, P.C.: *Some recent results in topological graph theory*. Lect.Notes in Mathematics 406 - Springer-Verlag (1973) - 76/108.
- L.1 - LUCCHESI, C.I., SIMON, I., SIMON, J, KOWALTOWSKI, T.: *Aspectos teóricos da computação*. IMPA (Inst.Mat.Pura e Aplicada) Brasil (1979).
- L.2 - van LINT, J.H.: *Combinatorial theory seminar*. Lect. Notes in Mathematics - 382, Springer-Verlag (1974).

- M.1 - MARSHALL, C.W.: *Applied graph theory*. J.Wiley (1971).
- M.2 - MASSEY, W.S.: *Algebraic topology. An introduction*. Harcourt, Brace and World Inc. (1967).
- M.3 - MOON, J.W., MOSER, L.: *On cliques in graphs*. Israel J. of Math. 3 (1965), 23/28.
- M.4 - MOON, J.W.: *Topics on tournaments*. Holt Rinehart. 1968.
- M.5 - MOON, J.W.: *On independent complete subgraphs in a graph*. Canad.J.Math. 20 (1968), 95/102.
- N.1 - NASH-WILLIAMS, C.St.J.A.: *A glance at graph theory I-II*. Bull.London Math.Soc. 14 (1982), 177/214 - 294/328.
- N.2 - NASH-WILLIAMS, C.St.J.A.: *Infinite graphs. A survey*. J.of Combin. Theory 3 (1967), 286/301.
- O.1 - ORE, O.: *Graphs and their uses*. Random House. (1963).
- O.2 - ORE, O.: *Theory of graphs*. Amer.Math.Soc.Colloquium Publications (1962).
- R.1 - ROY, B.: *Algèbre moderne et théorie des graphes (I-II)*. Dunod (1969-70).
- R.2 - RIORDAN, J.: *An introduction to combinatorial analysis*. J.Wiley and sons (1958). Reprint (1980).
- R.3 - ROSENFELD, M.: *How many graphs have n vertices and k cliques*. The Amer.Math. Monthly 78 (1971), 49/50.
- R.4 - RAMSEY, F.P.: *On a problem of formal logic*. Proc. London Math. Soc. 30 (1930), 264/286.
- R.5 - RYSER, H.J.: *Combinatorial mathematics*. The Carus Math.Monographs. The Math. Association of America (1963).
- R.6 - RHEINBOLDT, W.C., BASILI, V.R., MESZTENYI, Ch.: *On a programming language for graph algorithms*. BIT 12 (1972), 220/241.
- R.7 - RHEINBOLDT, W.C., MESZTENYI, Ch.K.: *Arc graphs and their possible application to sparse matrix problems*. BIT 14 (1974), 227/239.
- S.1 - SAHNI, S.: *Concepts in discrete mathematics*. The Camelot Publishing Co. (1981).
- S.2 - SWAMY, M.N.S., THULASIRAMAN, K.: *Graphs, networks and algorithms*. J.Wiley (1981).
- S.3 - SPINRAD, J., BRANDSTADT, A., STEWART, L.: *Bipartite permutation graphs*. Discrete Appl.Math. 18 (1987), 279/292.
- S.4 - SHEEHAN, J.: *Finite Ramsey theory is hard*. Lect.Notes

in Mathematics 884 - Springer-Verlag -
(1981) - 99/106.

- S.5 - SCHWENK, A.J.: *Acquaintance graph party problem*. The Amer.Math.Monthly 79 (1972) - 1113/1117.
- T.1 - TORANZOS, F.A.: *Introducción a la teoría de grafos*. O.E.A. Serie Matemática Monografía 15 (1976).
- T.2 - TUTTE, W.T.: *The factorization of linear graphs*. J. London Math.Soc.XXII (1947), 107/111.
- T.3 - TURAN, G.: *On the succinct representation of graphs*. Discrete Applied Math. 8 (1984), 289/294.
- V.1 - VEBLEN, O.: *Analysis situs*. Amer.Math.Soc.Colloquium Publ. (1922) reprint (1931).
- W.1 - WILSON, R.J.: *200 years of graph theory. A guided tour*. Lectures Notes in Mathematics 642, Springer-Verlag (1978), 1/9.
- W.2 - WILSON, R.J., BEINEKE, L.W.: (Edit): *Applications of graph theory*. Academic Press (1979).
- W.3 - WIENER, H.: *Structural determination of paraffin boilings points*. J.Am.Chem.Soc.69 (1947), 17/20.
- W.4 - WILSON, R.J.: *Introduction to graph theory*. Oliver-Boyd (1972). Reprint Longman Group 1975.
- Z.1 - ZYKOV, A.A.: *On some properties of linear complexes*. Math.Sbornik 24 (1949), 163/188. (Translations Ser I - Vol.7 - Amer.Math.Soc. 1962 - 418/449.
- Z.2 - ZELINKA, B.: *On the number of independent complete subgraphs*. Publ.Math. Debrecen 13 (1966)-95/97.