INFORME TECNICO INTERNO

N°. 36

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

INFORME TÉCNICO N° 36

Sobre Algebras de Boole Monádicas Libres

por

M. Abad L. Monteiro S. Savini J. Sewald

INMABB

UNS - CONICET

AÑO 1994

Sobre álgebras de Boole Monádicas libres

Manuel Abad, Luiz F. Monteiro, Sonia Savini y Julio Sewald

INMABB-UNS-CONICET y Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur - Bahía Blanca - Argentina

1 Introducción

El primer trabajo sobre la determinación de Algebras de Boole Monádicas libres se debe a Carnap [4], en 1946 y utiliza el cálculo proposicional, pero en su trabajo no incluye las demostraciones para obtener la cardinalidad. Luego H. Bass [3] en 1958 utiliza otro método para su determinación. Posteriormente P. Halmos [6], también en 1958, indica otra construcción, (ver también [7]). En 1963, Héng-Shan Gao [5] indica una nueva construcción, (trabajo publicado en chino). En 1970, A. Masse [9] expone en un Seminario sobre Lógica Algebraica, realizado en la Universidad de Lyon, un trabajo denominado *Anneaux monadiques libres sur un ensemble fini (I) et (II)*, en el cuál esencialmente reproduce el trabajo de Bass. En 1971, L. Henkin, D. Monk y A. Tarski, en el libro *Algebras cilíndricas*, [8] determinan las álgebras de Boole Poliádicas libres.
L. Monteiro durante la realización de su tesis doctoral [11], sobre Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas, generalización del concepto de Algebras de Boole monádicas, determinó las Algebras de Boole Monádicas libres por un método diferente a los indicados en los trabajos previamente citados. Su tesis fue presentada en 1970, y aprobada en 1971. En 1973 L. Monteiro, en un seminario dirigido por el Dr. Antonio Monteiro [10], hace una exposición diferente de las anteriores sobre este tema. En 1978, aparece publicado en *Algebra Universalis* [12] el trabajo de L. Monteiro, que fuera expuesto en 1973, pero con demostraciones totalmente diferentes a las indicadas en 1973. El referee de este trabajo hace el siguiente comentario: *Monteiro gives a new determination of the cardinalities of the finitely-generated, free monadic algebras. There are at least four different proofs of this result already in the literature (haciendo referencia a [3], [5], [6], [8]). All of them, including Monteiro's, are based on some kind of detailed analysis of the structure of free monadic algebras (by metalogical, topological, or combinatorial algebraic methods). It is the nature of the particular analysis that is the focal point of all these proofs, and Monteiro's is definitely novel. It is much closer to the spirit of universal algebra than the others, and is in my opinion the most natural and perspicous.* El referee agrega *The cardinality was apparently first obtained by Carnap.*
Estas notas están inspiradas en el trabajo de H. Bass, pero se diferencian del mismo, en notaciones y demostraciones más acordes con la teoría del álgebra universal. Además se

indican otros resultados, se generalizan algunos de los indicados por Bass, y esencialmente la construcción de las álgebras de Boole monádicas con un número finito de generadores libres es a nuestro entender mucho más sencilla que la indicada por Bass. Si designamos con $FB(2^n - 1)$ el álgebra de Boole con $2^n - 1$ generadores libres y con $\mathbf{P}(2^n)$ el producto cartesiano de 2^n álgebras de Boole iguales a $FB(2^n - 1)$ entonces $\mathbf{P}(2^n)$ es un álgebra de Boole. Sobre $\mathbf{P}(2^n)$ se define un cuantificador existencial $\exists$ vía una subálgebra de Boole de $\mathbf{P}(2^n)$ relativamente completa. Se prueba que $(\mathbf{P}(2^n), \exists)$ es el álgebra de Boole monádica con n generadores libres. Cada elemento de $\mathbf{P}(2^n)$ es una 2^n-upla cuyas coordenadas son elementos de $FB(2^n - 1)$, en particular los n generadores de $\mathbf{P}(2^n)$ son 2^n-uplas cuyas coordenadas son elementos de $FB(2^n - 1)$. En este trabajo indicamos las coordenadas de cada uno de los n generadores de $\mathbf{P}(2^n)$. En ninguno de los trabajos citados anteriormente se indican las coordenadas de los generadores del álgebra de Boole monádica con n generadores libres.
Algunos de los resultados indicados en la sección 2 ya fueron expuestos en [13].

2 Nociones Previas

En este párrafo vamos a fijar las notaciones y a demostrar algunos resultados que serán necesarios mas adelante.
Si X es un conjunto finito con n elementos, notaremos $N[X] = n$.

Definición 2.1 *Sea* $(R, \wedge, \vee, 0)$ *un reticulado con primer elemento* 0, $X \subseteq R$, $N[X] = t$, *notaremos:*

$$\mathrm{s}_0(X) = \{0\} \qquad ; \qquad \mathrm{s}_1(X) = X,$$

$$\mathrm{s}_j(X) = \{\bigvee y : y \in Y, \;\; Y \subseteq X, N[Y] = j\}, \;\; 1 < j \leq t,$$

$$\mathrm{s}(X) = \bigcup_{j=0}^{t} \mathrm{s}_j(X).$$

Sea $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ un álgebra de Boole, como es habitual la notaremos muchas veces B. En estas notas, salvo indicación en contrario, sólo consideraremos *álgebras de Boole finitas no triviales*, esto es, finitas y con más de un elemento. Si B es un álgebra de Boole, notaremos con $\mathcal{A}(B)$ el conjunto de todos los átomos de B. Si $x \in B, x \neq 0$ sea $\mathcal{A}(x) = \{a \in \mathcal{A}(B) : a \leq x\}$, es bien conocido que: $x = \bigvee\{a : a \in \mathcal{A}(x)\}$.

Si $x, y \in B$, pongamos: $x + y = (-x \wedge y) \vee (x \wedge -y)$. Es claro que $x + 0 = x$ y $x + 1 = -x$.

Sea $\mathbf{B}(B, n) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) : b_i \in \{0, 1\} \subseteq B, 1 \leq i \leq n\}$, esto es, el conjunto $\mathbf{B}(B, n)$ está formado por todas las n-uplas de elementos $0, 1 \in B$. $\mathbf{B}(B, n)$ es el producto cartesiano de n álgebras de Boole iguales a $\{0, 1\} \subseteq B$, luego es un álgebra de Boole con n átomos, que son precisamente las n-uplas que tienen una única coordenada igual a 1 y las restantes iguales a 0.

Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq B$ y $b \in \mathbf{B}(B,n)$ notaremos con $m_b(G)$ o mas sencillamente m_b al elemento:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}(g_i + b_i).$$

Observemos que de acuerdo con la definición precedente $g_i + b_i = g_i$ o $g_i + b_i = -g_i$.

Sea $m(G) = \{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n)\}$, como $N[\mathbf{B}(B,n)] = 2^n$ entonces $N[m(G)] \leq 2^n$.
Notaremos $\mathbf{B}(B,n,i) = \{b \in \mathbf{B}(B,n) : b_i = 0\}$, $1 \leq i \leq n$.

Lema 2.1 *1) Si $b, c \in \mathbf{B}(B,n)$ y $b \neq c$ entonces $m_b \wedge m_c = 0$.*

2) $\bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n)\} = 1$.

3) Si $b, c \in \mathbf{B}(B,n)$, ; $b \neq c$ y $m_b \leq m_c$ entonces $m_b = 0$.

4) $g_i = \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n,i)\}$, $1 \leq i \leq n$.

Dem. 1) Como $b \neq c$ entonces existe por lo menos una coordenada $i, 1 \leq i \leq n$, tal que $b_i \neq c_i$, y como $b_i, c_i \in \{0,1\} \subseteq B$, entonces "$b_i = 0$ y $c_i = 1$" o "$b_i = 1$ y $c_i = 0$". En el primero de los casos tenemos: $m_b \wedge m_c = (\cdots \wedge g_i \wedge \cdots) \wedge (\cdots \wedge -g_i \wedge \cdots) = 0$. Análogamente en el segundo caso.

2) Por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces : $m(G) = \{m_0 = g_1 + 0, m_1 = g_1 + 1\} = \{g_1, -g_1\}$, luego $\bigvee\{m_b : b \in B(B,1)\} = g_1 \vee -g_1 = 1$.
Supongamos que la propiedad enunciada vale para todo conjunto G con $(n-1)$ elementos, y probemos que vale para todo conjunto G con n elementos.
Observemos que $\mathbf{B}(B,n,i) = \{b \in \mathbf{B}(B,n) : b_i = 0\} = \mathbf{B}(B,n) - \{b \in \mathbf{B}(B,n) : b_i = 1\}$, cualquiera que sea i, $1 \leq i \leq n$. Luego $\bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n)\} = \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n),$ $b_n = 0\} \vee \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n),\ b_n = 1\} = s_1 \vee s_2$. Como los elementos que aparecen en el primer supremo verifican $b_n = 0$, entonces $m_b = \bigwedge_{i=1}^{n-1}(g_i + b_i) \wedge (g_n + 0) = m_{b'} \wedge g_n$, donde $b' = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbf{B}(B, n-1)$. Observemos que $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{B}(B,n)$ si y solo si $b' = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbf{B}(B, n-1)$ y $b_n \in \{0,1\}$, luego $s_1 = g_n \wedge \bigvee\{m_{b'} : b' \in \mathbf{B}(B, n-1)\}$, y por lo tanto teniendo en cuenta la hipótesis de inducción $s_1 = g_n \wedge 1 = g_n$. Análogamente se prueba que $s_2 = -g_n$, y por lo tanto $s_1 \vee s_2 = 1$.

3) Por hipótesis $m_b = m_b \wedge m_c = [por\ 1)] = 0$.

4) $g_i = g_i \wedge 1 = [por\ 2)] = g_i \wedge \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n)\} =$
$(g_i \wedge \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n),\ b_i = 0\}) \vee (g_i \wedge \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n), b_i = 1\}) =$
$(\bigvee\{g_i \wedge m_b : b \in \mathbf{B}(B,n), b_i = 0\}) \vee (\bigvee\{g_i \wedge m_b : b \in \mathbf{B}(B,n), b_i = 1\})$.
Si $b_i = 0$ entonces $m_b = g_i \wedge (\bigwedge_{j \neq i}(g_j + b_j))$, luego $g_i \wedge m_b = m_b$ y si $b_i = 1$ entonces $m_b = -g_i \wedge (\bigwedge_{j \neq i}(g_j + b_j))$, luego $g_i \wedge m_b = 0$. Por lo tanto $g_i = \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n,i)\}$.
□

Si G es un subconjunto del álgebra de Boole B, notaremos con $BS(G)$ la subálgebra booleana de B generada por G. Es claro que $BS(\emptyset) = \{0, 1\}$, y es bien conocido el siguiente resultado:

Lema 2.2 *Si G es un subconjunto finito, con n elementos del álgebra de Boole B, entonces:*

a) $BS(G) = \mathrm{s}(m(G))$.

b) $\mathcal{A}(BS(G)) = \{m_b : m_b \in m(G), m_b \neq 0\}$.

Luego $N[\mathcal{A}(BS(G))] \leq N[m(G)] \leq 2^n$ y por lo tanto $N[BS(G)] \leq 2^{2^n}$.

Observación 2.1 *Si B es un álgebra de Boole con un conjunto $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ de generadores libres, entonces $m_b \neq 0$, para todo $m_b \in m(G)$, ya que B tiene 2^n átomos.*

Lema 2.3 *Si B es un álgebra de Boole y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq B$ entonces $BS(G) = BS(m(G))$.*

Dem. Como $m(G) = \mathrm{s}_1(m(G)) \subseteq \bigcup_{j=0}^{2^n} \mathrm{s}_j(m(G)) = \mathrm{s}(m(G)) = BS(G)$, entonces $BS(m(G)) \subseteq BS(G)$.
Sea $y \in BS(G) = \mathrm{s}(m(G))$ entonces $y \in \mathrm{s}_j(m(G))$, para algún j, $0 \leq j \leq 2^n$.
Si $j = 0$, ello equivale a $y = 0$, y por lo tanto $y \in BS(m(G))$.
Si $j = 1$, ello equivale a $y = m_b$, $m_b \in m(G)$. Si $2 \leq j \leq 2^n$, entonces $y = \bigvee\{z : z \in Z\}$, donde $Z \subseteq m(G)$, $N[Z] = j$. Como $m(G) \subseteq BS(m(G))$, entonces en ambos casos $y \in BS(m(G))$. □

Definición 2.2 *(H. Bass, [3]) Un subconjunto $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ de un álgebra de Boole B se dice una partición del elemento $1 \in B$, si:*

P1) $p_i \wedge p_j = 0, \; i \neq j, \; 1 \leq i, j \leq t$.

P2) $\bigvee_{j=1}^{t} p_i = 1$.

Ejemplos 2.1 *1) Los átomos de un álgebra de Boole finita forman una partición de 1.*

2) Si B es un álgebra de Boole con tres átomos $\{a_1, a_2, a_3\}$, $p_1 = a_1$ y $p_2 = a_2 \vee a_3$ entonces $\mathcal{P} = \{p_1, p_2\}$ y $\mathcal{Q} = \{0, p_1, p_2\}$ son particiones de 1.

3) Si B es un álgebra de Boole con cuatro átomos $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $p_1 = a_1 \vee a_2$ y $p_2 = a_3 \vee a_4$ entonces $\mathcal{P} = \{p_1, p_2\}$ es una partición de 1, y ninguno de sus elementos es un átomo de B.

4) Si G es un subconjunto finito no vacío de B, entonces de acuerdo con los lemas 2.1, 2.2 el conjunto $m(G)$ forma una partición de 1, que contiene a los átomos de $BS(G)$.

Observación 2.2 *a) Sea B un álgebra de Boole. Si $\mathcal{P}$ es una partición de 1 tal que $\mathcal{A}(B) \subset \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P} - \mathcal{A}(B) = \{0\}$.*
En efecto, por hipótesis existe $x \in \mathcal{P} - \mathcal{A}(B)$. Si $x \neq 0$, entonces como $x = \bigvee\{a : a \in \mathcal{A}(x)\}$, cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}(x)$ se tiene $a \wedge x = a \neq 0$, lo que contradice P1.

b) Si $\mathcal{P}$ es una partición de 1, sea $\mathcal{P}_0 = \{p \in \mathcal{P} : p \neq 0\}$. Si p_i, $p_j \in \mathcal{P}_0$, donde $i \neq j$, entonces $p_i \neq p_j$, pues si $p_i = p_j$ entonces $p_i = p_i \wedge p_i = p_i \wedge p_j = 0$. Absurdo.
Observemos además, que el conjunto $\mathcal{P}_0$ es una partición de 1.

Lema 2.4 *Si B es un álgebra de Boole, $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ una partición de 1, y $G_0 = \{g \in G : g \neq 0\}$ entonces $G_0 = \mathcal{A}(BS(G))$.*

Dem. Observemos en primer lugar que $G_0 \neq \emptyset$, pues si $G_0 = \emptyset$, entonces $G = \{0\}$ y este conjunto obviamente no es una partición de 1.
Sabemos que $\mathcal{A}(BS(G)) = \{m_b : m_b \neq 0,\ b \in \mathbf{B}(B,n)\}$. Sea $g_j \in G_0$, esto es $g_j \in G$ y $g_j \neq 0$.
Como $g_j \wedge g_i = 0$, para todo $i \neq j$, entonces $g_j \leq -g_i$ para todo $i \neq j$, en consecuencia $g_j \leq \bigwedge_{i=1}^{n} \{-g_i : i \neq j\}$, esto es $g_j = g_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \{-g_i : i \neq j\}$.
Si $b \in \mathbf{B}(B,n)$ verifica $b_j = 0$ y $b_i = 1$, para todo $i \neq j$, entonces $m_b = g_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \{-g_i : i \neq j\} = g_j$. Acabamos así de probar que $G_0 \subseteq \mathcal{A}(BS(G))$.
Sea $m_b \in \mathcal{A}(BS(G))$, luego $m_b \neq 0$ y $m_b = \bigwedge_{i=1}^{n} (g_i + b_i)$. Si $b_i = b_j = 0$ para algún par de índices i,j tales que $i \neq j$, entonces $m_b = g_i \wedge g_j \wedge \bigwedge_{h=1}^{n} \{(g_h + b_h) : h \neq i,j\} = 0$. Absurdo.
Por lo tanto si $m_b \neq 0$, no puede existir más de una coordenada b_i de b, igual a cero, luego $b_i = 1$ para todo i o $b_j = 0$ para algún j, $1 \leq j \leq n$ y $b_i = 1$ cualquiera que sea i, $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$.
En el primer caso $m_b = \bigwedge_{i=1}^{n} -g_i = -\bigvee_{i=1}^{n} g_i = -1 = 0$. Absurdo. Luego sólo puede ocurrir el otro caso, y por lo tanto $m_b = \bigwedge_{i=1}^{n} (g_i + b_i) = g_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \{-g_i : i \neq j\} =$ (por lo visto precedentemente) $= g_j$, con $g_j \in G$. Observemos que $g_j \neq 0$, esto es $g_j \in G_0$, pues $g_j = m_b \neq 0$. □

Observación 2.3 *$BS(G) = BS(G_0)$. Si $G_0 = G$, es obvio. Supongamos que $G_0 \subset G$, luego $BS(G_0) \subseteq BS(G)$. Como $G_0 \subseteq BS(G_0)$ y $\{0\} \subseteq BS(G_0)$, entonces $G = G_0 \cup \{0\} \subseteq BS(G_0)$, y por lo tanto $BS(G) \subseteq BS(G_0)$.*

Lema 2.5 *Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t, g_{t+1}, g_{t+2}, \ldots, g_{2t}\}$ es un subconjunto de un álgebra de Boole B, tal que:*

a) $g_i \leq g_{i+t}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

b) $G_t = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ *es una partición del elemento* 1 *de* B.

Si $1 \leq k \leq t$, *notaremos*

$\mathbf{B}(B, 2t, k, k+t) = \{b \in \mathbf{B}(B, 2t) : b_k = 0, b_j = 1, 1 \leq j \leq t, j \neq k, b_{k+t} = 0\}$,
$\mathcal{P} = \{m_b(G) : b \in \bigcup_{k=1}^{t} \mathbf{B}(B, 2t, k, k+t)\}$, *y*
si $b \in \mathbf{B}(B, 2t)$, $m_b^*(G) = \bigwedge_{i=t+1}^{2t} (g_i + b_i)$, *entonces:*

1) $\mathcal{A}(BS(G)) \subseteq \mathcal{P}$.

2) $\mathcal{P}$ *es una partición de* 1.

3) $N[\mathcal{A}(BS(G))] \leq t \times 2^{t-1}$.

4) $g_i = \bigvee\{g_i \wedge m_b^*(G) : b \in \mathbf{B}(B, 2t, i, i+t)\}$, $1 \leq i \leq t$.

5) $m_b^*(G) = \bigvee\{g_i \wedge m_b^*(G) : 1 \leq i \leq t \ , \ b_{t+i} = 0\}$.

Dem. Por lema 2.2 , b), sabemos que $\mathcal{A}(BS(G)) = \{m_b(G) \ : \ m_b(G) \neq 0, \ b \in \mathbf{B}(B, 2t)\}$. Sea $a \in \mathcal{A}(BS(G))$, es decir, $a = m_b(G)$, $b \in \mathbf{B}(B, 2t)$, $m_b(G) \neq 0$. Como G_t es una partición de 1, entonces por lo visto en lema 2.4, b debe verificar $b_k = 0$, $1 \leq k \leq t$ y $b_j = 1$, cualquiera que sea j, $1 \leq j \leq t$, $j \neq k$, luego $m_b(G) = g_k \wedge m_b^*(G)$, donde $b \in \mathbf{B}(B, 2t, k)$. Como $g_j \leq g_{j+t}$, $1 \leq j \leq t$, equivale a $g_j \wedge -g_{j+t} = 0$, $1 \leq j \leq t$, entonces de $b_k = 0$ resulta que debe ser $b_{k+t} = 0$, pues caso contrario $m_b(G) = g_k \wedge -g_{k+t} \wedge \cdots = 0$. Absurdo. Luego $a = m_b$, donde $b \in \bigcup_{k=1}^{t} \mathbf{B}(B, 2t, k, k+t)$.

De 1) resulta que

$$1 = \bigvee\{x : x \in \mathcal{A}(BS(G))\} \leq \bigvee\{m_b(G) : m_b(G) \in \mathcal{P}\},$$

y por lo tanto $\bigvee\{m_b(G) : m_b(G) \in \mathcal{P}\} = 1$. Como $\mathcal{P} \subseteq m(G)$, entonces $m_b \wedge m_c = 0$ para $b, c \in \bigcup_{k=1}^{t} \mathbf{B}(B, 2t, k, k+t)$, $b \neq c$. Por lo tanto $\mathcal{P}$ es una partición de 1.

De acuerdo a la definición de $\mathcal{P}$, sus elementos son los $m_b(G)$, donde los b verifican: *una de sus primeras* t *coordenadas es igual a* 0 *y las otras iguales a* 1, *y en las restantes una debe ser igual a* 0 *y las otras iguales a* 0 *ó* 1, luego es claro que $N[\mathcal{P}] \leq t \times 2^{t-1}$, y por lo tanto $N[\mathcal{A}(BS(G))] \leq t \times 2^{t-1}$.

Como $\bigvee\{m_b(G) : b \in \mathbf{B}(B, 2t)\} = 1$, fijado i, $1 \leq i \leq t$, tenemos $g_i = \bigvee\{g_i \wedge m_b(G) : b \in \mathbf{B}(B, 2t)\}$. Pero vimos que si $b_j = 0$, donde $1 \leq j \leq t$, $j \neq i$ entonces $g_i \wedge m_b(G) =$

$g_i \wedge g_j \wedge \cdots = 0$, si $b_i = 1$, $g_i \wedge m_b(G) = g_i \wedge -g_i \wedge \cdots = 0$ y si $b_{t+i} = 1$, luego $g_i \wedge m_b(G) = g_i \wedge -g_{t+i} \wedge \cdots = 0$, luego $g_i = \bigvee\{g_i \wedge m_b(G) : b \in \mathbf{B}(B, 2t, i, t+i)\}$.
Como $\bigvee_{i=1}^{t} g_i = 1$, entonces $m_b^*(G) = \bigvee_{i=1}^{t} (g_i \wedge m_b^*(G))$ cualquiera que sea $b \in \mathbf{B}(B, 2t)$. Ahora bien si $b_{t+i} = 1$ entonces $g_i \wedge m_b^*(G) = g_i \wedge -g_{t+i} \wedge \cdots = 0$, luego $m_b^*(G) = \bigvee\{g_i \wedge m_b^*(G) : 1 \leq i \leq t\ ,\ b_{t+i} = 0\}$. $\square$

Estos resultados generalizan los indicados por H. Bass [3] en los Corolarios 1 y 2.

Ejemplo 2.2 *Sea B un álgebra de Boole con 4 átomos a_1, a_2, a_3, a_4, y consideremos los elementos $g_1 = a_1 \vee a_3$, $g_2 = a_2 \vee a_4$, $g_3 = a_1 \vee a_3 \vee a_4$, $g_4 = a_1 \vee a_2 \vee a_4$, luego tenemos que $g_1 \leq g_3$, $g_2 \leq g_4$, $\{g_1, g_2\}$ es una partición de 1, $\mathbf{B}(B,4,1,3) = \{b_1 = (0,1,0,0),\ b_2 = (0,1,0,1)\}, \mathbf{B}(B,4,2,4) = \{b_3 = (1,0,0,0), b_4 = (1,0,1,0)\}$, luego $m_{b_1} = g_1 \wedge g_4 = a_1$, $m_{b_2} = g_1 \wedge -g_4 = -g_4 = a_3$, $m_{b_3} = g_2 \wedge g_3 = a_4$, $m_{b_4} = g_2 \wedge -g_3 = -g_3 = a_2$. En este caso $\mathcal{A}(BS(G)) = \mathcal{P}$. Sean $q_1 = a_1$, $q_2 = a_2 \vee a_3 \vee a_4$, $q_3 = a_1 \vee a_2$ y $q_4 = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4 = 1$. Luego tenemos $q_1 \leq q_3$, $q_2 \leq q_4 = 1$ y $\{q_1\ ,\ q_2\}$ es una partición de 1. En este caso $m_{b_1} = a_1\ , m_{b_2} = 0\ , m_{b_3} = a_2$ y $m_{b_4} = a_3 \vee a_4$, luego $\mathcal{A}(BS\{q_1, q_2, q_3, q_4\}) = \{a_1, a_2, a_3 \vee a_4\} \subset \mathcal{P}$.*

Sea $(B, \vee, \wedge, -, \exists, 0, 1)$ un álgebra de Boole monádica. Salvo indicación en contrario, consideraremos solamente álgebras de Boole monádicas, no triviales. Si G es un subconjunto de B notaremos con $MS(G)$ la subálgebra monádica de B generada por G.

Lema 2.6 *Si B es un álgebra de Boole monádica y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\} \subseteq B$, es una partición de 1 sea:*

$$H = G \cup \exists G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t, \exists g_1, \exists g_2, \ldots, \exists g_t\},$$

entonces $MS(G) = BS(H) = BS(G \cup \exists G)$.

Dem. Pongamos $h_i = g_i$, $1 \leq i \leq t$ y $h_i = \exists g_{i-t}$, $t+1 \leq i \leq 2t$. Entonces el conjunto H verifica las condiciones a) y b) del lema 2.5.
Como $MS(G)$ es una subálgebra booleana de B, probando que $H \subseteq MS(G)$, tendremos (i) $BS(H) \subseteq MS(G)$.
Como $G \subseteq MS(G)$ entonces $\exists G \subseteq \exists MS(G)$, y como $MS(G)$ es una subálgebra monádica, entonces $\exists MS(G) \subseteq MS(G)$, luego $\exists G \subseteq MS(G)$ y por lo tanto $H = G \cup \exists G \subseteq MS(G)$.
Como $G \subseteq G \cup \exists G = H \subseteq BS(H)$, si probamos que la subálgebra booleana $BS(H)$ es monádica, tendremos (ii) $MS(G) \subseteq BS(H)$.
Por el lema 2.5, $BS(H)$ es finita, entonces para probar que es monádica, basta demostrar que: "*Si* $a \in \mathcal{A}(BS(H))$, entonces $\exists a \in BS(H)$".
Por el lema 2.5, si $a \in \mathcal{A}(BS(H))$ entonces $a = m_b$, donde $b \in \bigcup_{k=1}^{t} \mathbf{B}(B, 2t, k, k+t)$, esto es: $a = h_i \wedge \bigwedge_{j=t+1}^{2t} (h_j + b_j) = g_i \wedge \bigwedge_{j=t+1}^{2t} (\exists g_{j-t} + b_j)$, para algún i , $1 \leq i \leq t$.

Como $\exists g_{j-t} + b_j = \exists g_{j-t}$ ó $\exists g_{j-t} + b_j = -\exists g_{j-t}$, entonces $\exists g_{j-t} + b_j \in \mathcal{K}(B) = \exists B$, $t+1 \leq j \leq 2t$, y por lo tanto $r = \bigwedge_{j=t+1}^{2t} (\exists g_{j-t} + b_j) \in \mathcal{K}(B) = \exists B$. Luego $\exists a = \exists g_i \wedge r$.

Como $b_{t+i} = 0$, entonces $\exists g_{(t+i)-t} + b_{t+i} = \exists g_i$, luego $r \leq \exists g_i$ y en consecuencia $\exists a = r$.

Por otro lado $\exists g_j \in \exists G \subseteq BS(G \cup \exists G) = BS(H)$, $1 \leq j \leq t$, luego $-\exists g_j \in BS(H)$, $1 \leq j \leq t$, de donde resulta que $r \in BS(H)$, esto es $\exists a \in BS(H)$. □

Lema 2.7 *Si B es un álgebra de Boole monádica y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ entonces $MS(G) = MS(m(G))$.*

Dem. Como $MS(G)$ es una subálgebra monádica de B, si probamos que $m(G) \subseteq MS(G)$, entonces: (i) $MS(m(G)) \subseteq MS(G)$.
Sea $m_b \in m(G)$, esto es :

$$m_b = \bigwedge_{i=1}^{t} (g_i + b_i), \quad \text{donde} \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_t) \in \mathbf{B}(B, t).$$

Como $G \subseteq MS(G)$ entonces si $g \in G$, resulta $-g \in MS(G)$, luego $g_i + b_i \in MS(G)$, $1 \leq i \leq t$, por lo tanto $m_b \in MS(G)$.
Probemos (ii) $MS(G) \subseteq MS(m(G))$. Por el lema 2.1 sabemos que:

$$g_j = \bigvee \{m_b : b \in \mathbf{B}(B, t), \;\; b_j = 0\}, \;\; 1 \leq j \leq t.$$

Luego como $m_b \in m(G) \subseteq MS(m(G))$, tenemos que $G \subseteq MS(m(G))$, de donde resulta (ii). □

Lema 2.8 *Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ es un subconjunto de un álgebra de Boole monádica B, entonces:*

a) $MS(G) = BS(m(G) \cup \exists m(G))$.

b) $N[\mathcal{A}(MS(G))] \leq 2^t \times 2^{2^t} - 1$.

Dem. Sea $H = m(G) \cup \exists m(G)$.
Sabemos que el conjunto $m(G)$ es una partición de 1. Entonces por el lema 2.6 : $MS(m(G)) = BS(m(G) \cup \exists m(G))$, luego aplicando el lema 2.7 se concluye a) .
Como $N[m(G)] \leq 2^t$ entonces aplicando el lema 2.5, se concluye b). □

Este lema generaliza los resultados indicados por H.Bass [3] en la página 261, y del mismo resulta que toda álgebra de Boole monádica finitamente generada es finita.

Observación 2.4 *Por conveniencia consideremos numerados los elementos de $\mathbf{B}(B,t)$ y esta numeración fija, $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(2^t)}$. Entonces poniendo $h_i = m_{b^{(i)}}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^t$ y $h_i = \exists m_{b^{(i)}}$, $i = 2^t+1, 2^t+2, \ldots, 2^{t+1}$ tenemos que:*

$$m(G) \cup \exists m(G) = \{h_1, h_2, \ldots, h_{2^t}, h_{2^t+1}, \ldots, h_{2^{t+1}}\}.$$

Entonces los posibles átomos de $MS(G)$ son (ver lema 2.5) los elementos:

$$m_c = \bigwedge_{i=1}^{2^{t+1}} (h_i + c_i), \quad \textit{donde } c \in \bigcup_{k=1}^{2^{t+1}} \mathbf{B}(B, 2^{t+1}, k, k+2^t).$$

Esto es, son los elementos de la forma:

$$m_{b(i)} \wedge \bigwedge_{j=2^t+1}^{2^{t+1}} (\exists m_{b(j-2^t)} \ + \ c_j), \ \ 1 \leq i \leq 2^t,$$

donde $m_{b(i)} \neq 0$ *y* $c_{2^t+i} = 0$.

Sea $t \in \mathbf{N}$, $t \geq 2$, y $FB(t-1)$ el álgebra de Boole con $t-1$ generadores libres, luego $FB(t-1)$ tiene 2^{t-1} átomos. Sea $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}$ un conjunto de generadores libres de $FB(t-1)$ y $\mathbf{P}(t)$ el siguiente producto cartesiano de t álgebras de Boole:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{P}(t) = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_t \ , \\[1em] \text{donde } \ E_i = FB(t-1), \ 1 \leq i \leq t. \end{array}}$$

Como los átomos de $\mathbf{P}(t)$ son las t-uplas tales que una de sus coordenadas es un átomo de $FB(t-1)$ y las restantes son todas iguales a cero, tenemos así que $\mathbf{P}(t)$ es un álgebra de Boole con $t \times 2^{t-1}$ átomos y por lo tanto:

$$N[\mathbf{P}(t)] = 2^{t \times 2^{t-1}}.$$

Si $\mathbf{x} \in \mathbf{P}(t)$, notaremos $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_t)$, donde $\mathbf{x}_i \in FB(t-1)$, $1 \leq i \leq t$. Representemos con $\mathbf{0}$ (respectivamente $\mathbf{1}$) el primer (último) elemento de $\mathbf{P}(t)$, esto es $\mathbf{0}$ (respectivamente $\mathbf{1}$) es la t-upla cuyas coordenadas son todas iguales a $0 \in FB(t-1)$ (respectivamente $1 \in FB(t-1)$).

Sean $\mathbf{v}^{(i)} = (\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)}, \ldots, \mathbf{v}_t^{(i)})$, $1 \leq i \leq t$, los elementos de $\mathbf{P}(t)$ definidos del siguiente modo:

$$\mathbf{v}_h^{(i)} = \begin{cases} 1 & si \ \ h = i \\ \\ 0 & si \ \ h \neq i \end{cases} \qquad , \qquad 1 \leq h \leq t \, ,$$

y sea $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}^{(i)} : 1 \leq i \leq t\}$.

Como $1 \in FB(t-1)$ es supremo de 2^{t-1} átomos de $FB(t-1)$, entonces cada $\mathbf{v}^{(i)}$ es supremo de 2^{t-1} átomos de $\mathbf{P}(t)$.

Consideremos ahora los siguientes elementos de $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{w}^{(i)} = (\mathbf{w}_1^{(i)}, \mathbf{w}_2^{(i)}, \ldots, \mathbf{w}_t^{(i)}), \;\; 1 \leq i \leq t$$

definidos del siguiente modo:

$$\mathbf{w}_h^{(i)} = \begin{cases} g_{t-(i-h)} & si \;\; h < i \\ 1 & si \;\; h = i \\ g_{h-i} & si \;\; i < h \end{cases} \quad , \qquad 1 \leq h \leq t\,.$$

Observación 2.5 *Si* $h < i$ *entonces* $1 \leq i - h$, *y por lo tanto* $t - (i - h) \leq t - 1$. *De* $1 \leq i \leq t$ *y* $1 \leq h \leq t$ *resulta que* $i - h \leq t - h \leq t - 1$ *luego* $1 \leq t - (i - h)$, *y por lo tanto* $1 \leq t - (i - h) \leq t - 1$.
Si $i < h$ *entonces* $1 \leq h - i$. *Como* $1 \leq h \leq t$, *entonces* $h - i \leq t - i$, *luego como* $1 \leq i \leq t$ *tenemos* $t - i \leq t - 1$, *y por lo tanto* $1 \leq h - i \leq t - 1$.

Lema 2.9 *a) Si* i *es un elemento fijo,* $1 \leq i \leq t$, *entonces:*

$$\{\mathbf{w}_h^{(i)} : 1 \leq h \leq t\} = \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}.$$

b) Si h *es una coordenada fija,* $1 \leq h \leq t$, *entonces:*

$$\{\mathbf{w}_h^{(i)} : 1 \leq i \leq t\} = \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}.$$

Dem.

a) De la definición de $\mathbf{w}_h^{(i)}$ y la observación 2.5:

$$\mathbf{w}_h^{(i)} \in \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\} = X, \;\; \text{para} \;\; 1 \leq h \leq t.$$

Sea $x \in X$. Si $x = 1$ entonces $1 = \mathbf{w}_i^{(i)}$. Supongamos que $x = g_j$, $1 \leq j \leq t - 1$.

a1) Si $i = t$, entonces $j < i = t$ y de acuerdo con la definición $\mathbf{w}_j^{(t)} = g_{t-(t-j)} = g_j$.

a2) Si $1 \leq i < t$. Sea $r = t - i$, luego $r > 0$.

a21) Si $j \leq r = t - i$, entonces $1 \leq i < j + i = h \leq t$, esto es, $i < h$ y por lo tanto $\mathbf{w}_h^{(i)} = g_j$.

a22) Si $j > r = t - i$ entonces $h = j + i - t \geq 1$. Por otro lado $2 \leq j + i \leq 2t$ y por lo tanto $h = j + i - t \leq t$. Como $j \leq t - 1 < t$ entonces $j - t < 0$, por lo tanto $h = j + i - t < i$, luego $\mathbf{w}_h^{(i)} = g_j$.

b) Por lo visto en la observación 2.5:

$$\mathbf{w}_h^{(i)} \in \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\} = X, \;\; \text{para} \;\; 1 \leq i \leq t.$$

Sea $x \in X$. Si $x = 1$, entonces $\mathbf{w}_h^{(h)} = 1$. Supongamos ahora que $x = g_j$, $1 \leq j \leq t - 1$.

b1) Si $j = h$, como $h \leq t-1 \leq t$ entonces $\mathbf{w}_h^{(t)} = g_j$.

b2) Si $j < h$, entonces $1 \leq h - j \leq h \leq t$ y por lo tanto $\mathbf{w}_h^{(h-j)} = g_j$.

b3) Si $h < j$, sea $i = t + h - j$. Como $1 \leq j \leq t - 1 < t$ entonces $t - j > 0$ y por lo tanto $h < i = t + h - j$. De $h < j$ resulta $h - j < 0$ y en consecuencia $i = t + h - j < t$. Tenemos así que $\mathbf{w}_h^{(i)} = g_j$.

□

Como es habitual la operación unaria $\forall x = -\exists - x$ definida en un álgebra de Boole monádica B, se denomina *cuantificador universal.*

Es bien conocido que [7], [10] :

1) Una subálgebra S de un álgebra de Boole B se denomina *relativamente completa* si para todo $p \in B$ el conjunto $\{s \in S : p \leq s\}$ tiene un ínfimo en S.

2) Si $\mathcal{K}(B) = \{x \in B : \exists x = x\} = \{x \in B : \forall x = x\}$, entonces $\mathcal{K}(B) = \exists B$ es una subálgebra booleana de B que es relativamente completa, esto es, si $x \in B$, $\{k \in \mathcal{K}(B) : x \leq k\}$ tiene un ínfimo en $\mathcal{K}(B)$; y además $\exists x = \bigwedge\{k \in \mathcal{K}(B) : x \leq k\}$.

3) Si S es una subálgebra relativamente completa de un álgebra de Boole B entonces existe un único cuantificador existencial $\exists$ en B, denominado *cuantificador existencial inducido por* S, tal que $\exists B = S$. El mismo se define del siguiente modo: *Si* $x \in B$, $\exists x = \bigwedge\{s \in S : x \leq s\}$.

Sea $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}^{(i)} : 1 \leq i \leq t\}$ y $\mathbf{K} = BS(\mathbf{W})$ la subálgebra booleana de $\mathbf{P}(t)$ generada por $\mathbf{W}$.
Como $\mathbf{K}$ es finita, es relativamente completa, y por lo tanto induce un cuantificador existencial $\boldsymbol{\exists}$ sobre $\mathbf{P}(t)$ tal que $\boldsymbol{\exists}\mathbf{P}(t) = \mathbf{K}$.

De acuerdo con la notación introducida previamente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t) = \{\mathbf{b} = (\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}^{(t)}) : \mathbf{b}^{(h)} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \subseteq \mathbf{P}(t),\ 1 \leq h \leq t\}.$$

Como $\mathbf{b}^{(h)} \in \mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{b}^{(h)} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ entonces cada $\mathbf{b}^{(h)}$ es a su vez una t-upla $(\mathbf{b}_1^{(h)}, \mathbf{b}_2^{(h)}, \ldots, \mathbf{b}_t^{(h)})$ cuyas coordenadas son todas iguales al primer elemento de $FB(t-1)$ o al último elemento de $FB(t-1)$.
Representemos con $\boldsymbol{\Phi}$ y $\boldsymbol{\Gamma}$ al primer y último elemento del álgebra de Boole $\mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t)$.

Lema 2.10 $N[\mathcal{A}(BS(\mathbf{W}))] = 2^t - 1$.

Dem. De acuerdo con el lema 2.2,

$$\mathcal{A}(BS(\mathbf{W})) = \{m_{\mathbf{b}} : m_{\mathbf{b}} \in m(\mathbf{W}),\ m_{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}\}.$$

Como $N[\mathbf{B}(\mathbf{P}(t),t)] = 2^t$, si probamos que existe un único elemento $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t),t)$ tal que $m_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$, el lema quedará probado. Si $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t),t)$ es tal que $\mathbf{b}^{(h)} = \mathbf{1}$, para todo h, $1 \leq h \leq t$, entonces:
$m_{\mathbf{b}} = \bigwedge_{i=1}^{t}(\mathbf{w}^{(i)}+\mathbf{b}^{(i)}) = \bigwedge_{i=1}^{t} -\mathbf{w}^{(i)} = (\bigwedge_{i=1}^{t} -\mathbf{w}_1^{(i)}, \bigwedge_{i=1}^{t} -\mathbf{w}_2^{(i)}, \ldots, \bigwedge_{i=1}^{t} -\mathbf{w}_t^{(i)})$, y como $-\mathbf{w}_i^{(i)} = 0$, $1 \leq i \leq t$, tenemos que $m_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$.

Si $\mathbf{b} = (\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}^{(t)}) \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t),t) - \{\mathbf{\Gamma}\}$, entonces existe h, $1 \leq h \leq t$, tal que $\mathbf{b}^{(h)} = \mathbf{0}$, y por lo tanto $\mathbf{b}_j^{(h)} = 0$ para todo j, $1 \leq j \leq t$. Probemos que la coordenada h-ésima de $m_{\mathbf{b}}$ es diferente de $0 \in FB(t-1)$, de donde resultará que $m_{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}$.
Como $m_{\mathbf{b}} = \bigwedge_{i=1}^{t}(\mathbf{w}^{(i)}+\mathbf{b}^{(i)}) = (\bigwedge_{i=1}^{t}(\mathbf{w}_1^{(i)}+\mathbf{b}_1^{(i)}), \bigwedge_{i=1}^{t}(\mathbf{w}_2^{(i)}+\mathbf{b}_2^{(i)}), \ldots, \bigwedge_{i=1}^{t}(\mathbf{w}_t^{(i)}+\mathbf{b}_t^{(i)}))$, entonces la coordenada h-ésima, de $m_{\mathbf{b}}$ es $(m_{\mathbf{b}})_h = \bigwedge_{i=1}^{t}(\mathbf{w}_h^{(i)} + \mathbf{b}_h^{(i)})$. Como $\mathbf{b}_j^{(h)} = 0 \in FB(t-1)$, para todo j, $1 \leq j \leq t$, y $\mathbf{w}_h^{(h)} = 1$, entonces $\mathbf{w}_h^{(h)} + \mathbf{b}_h^{(h)} = 1 + 0 = 1$ y por lo tanto $(m_{\mathbf{b}})_h = \bigwedge\{\mathbf{w}_h^{(i)} + \mathbf{b}_h^{(i)} : 1 \leq i \leq t,\ i \neq h\}$. Por el lema 2.9, b) $\{\mathbf{w}_h^{(i)} : 1 \leq i \leq t,\ i \neq h\} = \{g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}$, y como los elementos $\mathbf{b}_h^{(i)} \in \{0,1\} \subseteq FB(t-1)$, $1 \leq i \leq t$, $i \neq h$, entonces $(m_{\mathbf{b}})_h \in m(G)$. Luego como $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}$ es un conjunto de generadores libres de $FB(t-1)$, entonces por lo visto en la observación 2.1 todos los elementos de $m(G)$ son diferentes de $0 \in FB(t-1)$, y por lo tanto $m_{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}$. □

Observación 2.6 *Vamos a precisar algo más sobre el resultado anterior. Sea* $T = \{1, 2, \ldots, t\}$ *y* $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t),t)$. *Pongamos* $T_0(\mathbf{b}) = \{h \in T : \mathbf{b}^{(h)} = \mathbf{0}\}$ *y* $T_1(\mathbf{b}) = T - T_0(\mathbf{b})$, *luego si* $N[T_0(\mathbf{b})] = k$, *entonces* $N[T_1(\mathbf{b})] = t - k$.
Observemos que $T_0(\mathbf{b}) = \emptyset$, *equivale a* $\mathbf{b} = \mathbf{\Gamma}$, *y entonces por lo visto precedentemente* $m_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$. *Supongamos que* $T_0(\mathbf{b}) \neq \emptyset$. *Si* $T_0(\mathbf{b}) = T$, *esto es* $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi}$ *entonces* $m_{\mathbf{\Phi}} = \bigwedge_{i=1}^{t} \mathbf{w}^{(i)}$, *y por lo tanto* $(m_{\mathbf{\Phi}})_j = \bigwedge_{i=1}^{t} \mathbf{w}_j^{(i)}$, $1 \leq j \leq t$.
Por el lema 2.9 : $\{\mathbf{w}_h^{(i)} : 1 \leq i \leq t\} = \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}$, *y como* $\mathbf{w}_j^{(j)} = 1$ *tenemos que* $(m_{\mathbf{\Phi}})_j = \bigwedge_{i=1}^{t-1} g_i$, *cualquiera que sea* j, $1 \leq j \leq t$.
Por lo tanto todas las coordenadas de $m_{\mathbf{\Phi}}$ *son iguales a un mismo átomo de* $FB(t-1)$.
Supongamos ahora que $T_0(\mathbf{b}) \neq \emptyset$, $T_1(\mathbf{b}) \neq \emptyset$, *y* $N[T_0(\mathbf{b})] = k$. *Luego* $N[T_1(\mathbf{b})] = t - k$, *y* $m_{\mathbf{b}} = \bigwedge\{\mathbf{w}^{(h)} : h \in T_0(\mathbf{b})\} \wedge \bigwedge\{-\mathbf{w}^{(h)} : h \in T_1(\mathbf{b})\}$ *y por lo tanto* $(m_{\mathbf{b}})_j = \bigwedge\{\mathbf{w}_j^{(h)} : h \in T_0(\mathbf{b})\} \wedge \bigwedge\{-\mathbf{w}_j^{(h)} : h \in T_1(\mathbf{b})\}$, $1 \leq j \leq t$.
Como $h \in T_1(\mathbf{b})$ *equivale a* $\mathbf{b}^{(h)} = \mathbf{1}$ *y* $\mathbf{w}_h^{(h)} = 1$, *entonces para todo* $j \in T_1(\mathbf{b})$ *se tiene que* $-\mathbf{w}_j^{(j)} = 0$ *y por lo tanto* $m_{\mathbf{b}}$ *tiene* $t - k$ *coordenadas iguales a* $0 \in FB(t-1)$ *y si* $j \in T_0(\mathbf{b})$ *entonces* $(m_{\mathbf{b}})_j \in \mathcal{A}(FB(t-1))$, *como vimos en el lema 2.10.*
Es claro que si $1 \leq k \leq t$ *existen* $\binom{t}{k} = \dfrac{t!}{k!(t-k)!}$ *elementos* $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t),t)$ *tales que* $N[T_0(\mathbf{b})] = k$, *y como los átomos de* $\mathbf{P}(t)$ *son las* t*-uplas tales que una de sus coordenadas es un átomo de* $FB(t-1)$ *y las restantes son todas iguales al elemento* $0 \in FB(t-1)$,

entonces es claro que cada $m_{\mathbf{b}}$*, donde* $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t) - \{\mathbf{\Gamma}\}$ *y* $N[T_0(\mathbf{b})] = k$*, es supremo de* k *átomos de* $\mathbf{P}(t)$*.*

El resultado indicado por H.Bass [3], en la página 267, es un caso particular cuando $t = 2^n$*,* $n \in \mathbf{N}$*, de lo explicado precedentemente. También lo es el resultado indicado por M. Abad y L. Monteiro [2], en la página 532, con el número 3.5.*

Lema 2.11 *Si* B *es un álgebra de Boole monádica, tal que* $\mathcal{K}(B) = \exists B$ *es un álgebra de Boole finita y* $x \in B$*,* $x \neq 0$ *entonces* $\exists x = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(B)) : a \wedge x \neq 0\}$*. [3], [9].*

Dem. Como $\mathcal{K}(B)$ es un álgebra de Boole finita y $\exists x \neq 0$ entonces $\exists x = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(B)) : a \leq \exists x\}$.
Sean $X_1 = \{a \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(B)) : a \wedge x \neq 0\}$ y $X_2 = \{a \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(B)) : a \leq \exists x\}$, entonces para probar el lema nos basta demostrar que $X_1 = X_2$.
Sea $a \in X_1$, luego (1) $a \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(B))$ y (2) $a \wedge x \neq 0$. De (1) resulta $\exists a = a$. Como $a, \exists x \in \mathcal{K}(B)$ entonces $b = a \wedge \exists x \in \mathcal{K}(B)$. Como $b \leq a$, $b \in \mathcal{K}(B)$ y a es un átomo de $\mathcal{K}(B)$ entonces $b = a \wedge \exists x = a$, esto es, $a \leq \exists x$ y por lo tanto $a \in X_2$, o $a \wedge \exists x = 0$, y en este caso como $a \wedge x \leq a \wedge \exists x = 0$ tendríamos $a \wedge x = 0$, lo que contradice (2).

Sea $a \in X_2$, luego (1) $a \in \mathcal{A}(\mathcal{K}(B)) \subseteq \mathcal{K}(B)$ y (2) $a \leq \exists x$. De (1) resulta (3) $\exists a = a$. De (2) resulta que $a = a \wedge \exists x$ y por lo tanto $\exists a = \exists(a \wedge \exists x) = \exists a \wedge \exists x = \exists(\exists a \wedge x)$. De donde resulta por (3) que $0 \neq a = \exists(a \wedge x)$, y por lo tanto $a \wedge x \neq 0$, esto es $a \in X_1$. $\square$

Lema 2.12 $\exists \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{w}^{(i)}$, $1 \leq i \leq t$.

Dem. Sabemos que $\mathbf{v}^{(i)} \leq \mathbf{w}^{(i)}$, $\mathbf{w}^{(i)} \in \mathbf{W} \subseteq BS(\mathbf{W}) = \mathbf{K}$, $1 \leq i \leq t$ y que $\exists \mathbf{v}^{(i)} = \bigwedge\{k \in \mathbf{K} : \mathbf{v}^{(i)} \leq k\}$, $1 \leq i \leq t$. Luego $\exists \mathbf{v}^{(i)} \leq \mathbf{w}^{(i)}$, $1 \leq i \leq t$.
Como $\exists \mathbf{P}(t) = \mathbf{K}$, entonces por el lema 2.11 podemos escribir $\exists \mathbf{v}^{(i)} = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(\mathbf{K}) : a \wedge \mathbf{v}^{(i)} \neq \mathbf{0}\}$, y por el lema 2.10 $\mathcal{A}(\mathbf{K}) = \{m_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t) - \{\mathbf{\Gamma}\}\}$.
Sea $m_{\mathbf{b}} \in m(\mathbf{W})$ tal que $\mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t) - \{\mathbf{\Gamma}\}$ y por lo tanto $m_{\mathbf{b}} \in \mathcal{A}(\mathbf{K})$. Probemos que $m_{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{v}^{(i)} \neq \mathbf{0}$. Vimos que $m_{\mathbf{b}} = (\bigwedge\{\mathbf{w}^{(j)} : j \in T_0(b)\}) \wedge (\bigwedge\{-\mathbf{w}^{(j)} : j \in T_1(b)\})$ y como $\mathbf{v}_i^{(i)} = 1$ y $\mathbf{v}_h^{(i)} = 0$ cualquiera sea $h \neq i$, $1 \leq h \leq t$, entonces la componente i-ésima de $m_{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{v}^{(i)}$ es $(\bigwedge\{\mathbf{w}_i^{(j)} : j \in T_0(b) - \{i\}\}) \wedge (\bigwedge\{-\mathbf{w}_i^{(j)} : j \in T_1(b)\}) \wedge 1 = a \wedge 1 = a$, donde $a \in \mathcal{A}(FB(t-1))$, pues por hipótesis $i \in T_0(b)$. Luego $m_{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{v}^{(i)} \neq \mathbf{0}$.
Como por el lema 2.1, (4):

$$\mathbf{w}^{(i)} = \bigvee\{m_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t),\ \mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{0}\},$$

resulta entonces $\mathbf{w}^{(i)} \leq \bigvee\{a \in \mathcal{A}(\mathbf{K}) : a \wedge \mathbf{v}^{(i)} \neq \mathbf{0}\} = \exists \mathbf{v}^{(i)}$. $\square$
Este lema generaliza los resultados de H. Bass indicados en la página 266 de su trabajo (Lema 5).

3 Construcción del álgebra libre

Sea $n \in \mathbf{N}$, $t = 2^n$ y

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{P}(2^n) = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{2^n} \ , \\ \\ \text{donde } \ E_i = FB(2^n - 1), \ 1 \leq i \leq 2^n. \end{array}}$$

Luego por lo visto anteriormente:

$$N[\mathcal{A}(\mathbf{P}(2^n)] = 2^n \times 2^{2^n - 1}.$$

Consideremos los subconjuntos $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ de $\mathbf{P}(2^n)$ definidos como en el párrafo anterior. Sea $H = \{1, 2, \ldots, 2^n\}$, luego si $h \in H$ entonces:

$$h = 1 + \sum_{r=1}^{n} h_r 2^{r-1}, \ \text{ donde } \ h_r \in \{0, 1\} \subseteq \mathbf{Z}.$$

Sean $\mathbf{g}^{(i)}$, $1 \leq \ i \leq n$, los elementos de $\mathbf{P}(2^n)$ definidos del siguiente modo:

$$\mathbf{g}_h^{(i)} = \begin{cases} 0 \in FB(2^n - 1), & si \ \ h_i = 0 \in \mathbf{Z}, \\ \\ 1 \in FB(2^n - 1), & si \ \ h_i = 1 \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad , \quad 1 \leq h \leq 2^n \ ,$$

y $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}^{(i)} : 1 \leq i \leq n\}$.

Observemos que de acuerdo a la definición anterior:

$$1 + \sum_{r=1}^{n} g_h^{(r)} 2^{r-1} = 1 + \sum_{r=1}^{n} h_r 2^{r-1} = h$$

Lema 3.1 *El álgebra de Boole $BS(\mathbf{G})$, tiene 2^n átomos, por lo tanto es isomorfa al álgebra de Boole con n generadores libres.*

Dem. Dado que $BS(\mathbf{G}) = \mathbf{s}(m(\mathbf{G}))$, nos basta probar que: $m(\mathbf{G}) = \mathbf{V}$.

Sea $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), n)$ y $T = \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Si $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi}$ entonces $m_{\mathbf{\Phi}} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)}$. Como $(m_{\mathbf{\Phi}})_{2^n} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{g}_{2^n}^{(i)} = 1$, y si $h \in H - \{2^n\}$ entonces existe un índice i, $1 \leq i \leq n$, tal que $\mathbf{g}_h^{(i)} = 0$ luego $(m_{\mathbf{\Phi}})_h = 0$, para todo $h \neq 2^n$, luego $m_{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{v}^{(2^n)}$.

b) Si $\mathbf{b} = \mathbf{\Gamma}$ entonces $m_{\mathbf{\Gamma}} = \bigwedge_{i=1}^{n} -\mathbf{g}^{(i)}$, y como $\mathbf{g}_1^{(i)} = 0$, cualquiera que sea i, $1 \leq i \leq n$, entonces $(m_{\mathbf{\Gamma}})_1 = 1$. Si $h \in H - \{1\}$ entonces existe un índice i, $1 \leq i \leq n$ tal que $\mathbf{g}_h^{(i)} = 1$ luego $(m_{\mathbf{\Gamma}})_h = 0$, para todo $h \neq 1$, luego $m_{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{v}^{(1)}$.

c) Si $\mathbf{b} \notin \{\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}\}$, entonces existen $t', t^* \in H$, $t' \neq t^*$, tales que $\mathbf{b}^{(t')} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b}^{(t^*)} = \mathbf{1}$. Sean $T_0(\mathbf{b}) = \{t \in T : \mathbf{b}^{(t)} = \mathbf{0}\}$ y $T_1(\mathbf{b}) = \{t \in T : \mathbf{b}^{(t)} = \mathbf{1}\}$, luego $t' \in T_0(\mathbf{b})$, $t^* \in T_1(\mathbf{b})$.
Sea $h = 1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{b})} 2^{j-1}$, luego $h \in H$ y $h = 1 + \sum_{r=1}^{n} h_r 2^{r-1}$, donde $h_r = 1$ si $r \in T_0(\mathbf{b})$ y $h_r = 0$ si $r \in T_1(\mathbf{b})$.
Vamos a probar que $(m_{\mathbf{b}})_h = 1 \in FB(2^n - 1)$, y que $(m_{\mathbf{b}})_j = 0 \in FB(2^n - 1)$, para todo $j \neq h$.
Para ello basta observar que las siguientes condiciones son equivalentes:

   i) $(m_{\mathbf{b}})_k = (\bigwedge\{\mathbf{g}_k^{(i)} : i \in T_0(\mathbf{b})\}) \wedge (\bigwedge\{-\mathbf{g}_k^{(i)} : i \in T_1(\mathbf{b})\}) = 1$.

   ii) $\bigwedge\{\mathbf{g}_k^{(i)} : i \in T_0(\mathbf{b})\} = 1$ y $\bigwedge\{-\mathbf{g}_k^{(i)} : i \in T_1(\mathbf{b})\} = 1$.

   iii) $\mathbf{g}_k^{(i)} = 1$ para todo $i \in T_0(\mathbf{b})$ y $-\mathbf{g}_k^{(i)} = 1$ para todo $i \in T_1(\mathbf{b})$.

   iv) $k_i = 1$, para todo $i \in T_0(\mathbf{b})$, y $k_i = 0$, para todo $i \in T_1(\mathbf{b})$.

   v) $k = h$.

Acabamos así de probar que $m_{\mathbf{b}} \in \mathbf{V}$ cualquiera que sea $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), n)$, luego $m(\mathbf{G}) \subseteq \mathbf{V}$.
Sean $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), n)$ y $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$. Si $\mathbf{b}$ o $\mathbf{c}$ son elementos de $\{\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}\}$, entonces es claro que $m_{\mathbf{b}} \neq m_{\mathbf{c}}$. Si $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), n) - \{\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}\}$, entonces vimos en el lema 2.1, 1) que $m_{\mathbf{b}} \wedge m_{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$.
Como $(m_{\mathbf{b}})_h = 1$, con $h = 1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{b})} 2^{j-1}$, y $(m_{\mathbf{b}})_j = 0$ para todo j, $j \neq h$, $(m_{\mathbf{c}})_k = 1$, con $k = 1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{c})} 2^{j-1}$, y $(m_{\mathbf{c}})_j = 0$ para todo j, $j \neq k$, entonces si $h = k$, esto es $1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{b})} 2^{j-1} = 1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{c})} 2^{j-1}$, resulta $T_0(\mathbf{b}) = T_0(\mathbf{c})$, y por lo tanto $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, absurdo.
Luego $m_{\mathbf{b}} \neq m_{\mathbf{c}}$. Por lo tanto $m(\mathbf{G}) = \mathbf{V}$. □

Lema 3.2 $MS(\mathbf{G}) = BS(\mathbf{V} \cup \mathbf{W})$.

Dem. Aplicando sucesivamente los lemas 2.7, 2.6, 3.1 y 2.12 podemos escribir:
$MS(\mathbf{G}) = MS(m(\mathbf{G})) = BS(m(\mathbf{G}) \cup \exists m(\mathbf{G})) = BS(\mathbf{V} \cup \exists \mathbf{V}) = BS(\mathbf{V} \cup \mathbf{W})$. □

Observación 3.1 *Si S es una subálgebra de un álgebra de Boole finita B, con r átomos, $r \geq 1$, tal que $\mathcal{A}(S) \subseteq \mathcal{A}(B)$, entonces $S = B$. En efecto, sean $s_1, s_2, \ldots, s_u$, $u \leq r$ los átomos de S y $C_i = \{a \in \mathcal{A}(B) : a \leq s_i\}$, $1 \leq i \leq u$. Es bien conocido que $Q = \{C_1, C_2, \ldots, C_u\}$ es una partición del conjunto $\mathcal{A}(B)$. Como $\mathcal{A}(S) \subseteq \mathcal{A}(B)$, cada C_i, $1 \leq i \leq u$, está formado por un sólo elemento (un átomo de B), luego $u = r$ y por lo tanto $S = B$.*

Lema 3.3 $BS(\mathbf{V} \cup \mathbf{W}) = \mathbf{P}(2^n)$.

Dem. Por construcción $\mathbf{V}$ es una partición de $\mathbf{1} \in \mathbf{P}(2^n)$ y vimos que $\mathbf{v}^{(i)} \leq \mathbf{w}^{(i)}$ y $\exists \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{w}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$. Entonces por el lema 2.5

$$\mathcal{P} = \{m_b(\mathbf{V} \cup \mathbf{W}) : \mathbf{b} \in \bigcup_{k=1}^{2^n} \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), 2.2^n, k, k + 2^n)\}$$

es una partición de $\mathbf{1} \in \mathbf{P}(2^n)$ tal que $\mathcal{A}(BS(\mathbf{V} \cup \mathbf{W})) \subseteq \mathcal{P}$.
Pero si $\mathbf{b} \in \bigcup_{k=1}^{2^n} \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), 2.2^n, k, k + 2^n)$, entonces $\mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{0}$, para un cierto j, $1 \leq j \leq 2^n$, y $\mathbf{b}^{(j')} = \mathbf{1}$, para todo j', $1 \leq j' \leq 2^n$, $j \neq j'$, y además $\mathbf{b}^{(j+2^n)} = \mathbf{0}$, luego

$$p = m_{\mathbf{b}}(\mathbf{V} \cup \mathbf{W}) = \mathbf{v}^{(j)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^n} (\mathbf{w}^{(i)} + \mathbf{b}^{(i+2^n)}).$$

Por lo tanto su coordenada h-ésima, $1 \leq h \leq 2^n$, es

$$p_h = \mathbf{v}_h^{(j)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^n} (\mathbf{w}_h^{(i)} + \mathbf{b}_h^{(i+2^n)}).$$

Pero vimos que $\mathbf{v}_h^{(j)} = 0$, para $h \neq j$ y $\mathbf{v}_j^{(j)} = 1$, luego $p_h = 0$, para $h \neq j$ y $p_j = \bigwedge_{i=1}^{2^n} (\mathbf{w}_j^{(i)} + \mathbf{b}_j^{(i+2^n)})$.
Pero por lema 2.9, b) $\{\mathbf{w}_j^{(i)} : 1 \leq i \leq 2^n\} = \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{2^n-1}\}$, y como $\mathbf{w}_j^{(j)} = 1$ y $\mathbf{b}^{(j+2^n)} = \mathbf{0}$ entonces $p_j \in \mathcal{A}(FB(2^n - 1))$ y en consecuencia $p \in \mathcal{A}(\mathbf{P}(2^n))$.
Acabamos así de probar que $\mathcal{A}(BS(\mathbf{V} \cup \mathbf{W})) \subseteq \mathcal{A}(\mathbf{P}(2^n))$ de donde resulta por la observación 3.1 que $BS(\mathbf{V} \cup \mathbf{W}) = \mathbf{P}(2^n)$. $\square$

De los lemas 3.2 y 3.3 resulta que $\mathbf{G}$ es un conjunto de generadores del álgebra de Boole monádica $\mathbf{P}(2^n)$, esto es

$$MS(\mathbf{G}) = \mathbf{P}(2^n).$$

Sea $FMB(n)$ el álgebra de Boole monádica con n genera- dores libres, G un conjunto de n generadores libres de $FMB(n)$ y f una biyección de G en $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{P}(2^n)$, entonces f se puede extender a un único homomorfismo monádico h de $FMB(n)$ en $\mathbf{P}(2^n)$.
Luego $h(FMB(n)) = MS(h(G)) = MS(\mathbf{G}) = \mathbf{P}(2^n)$, y por lo tanto h es un homomorfismo monádico suryectivo. Además h es biunívoca pues $FMB(n)$ y $\mathbf{P}(2^n)$ tienen el mismo número de elementos. Por lo tanto h establece una biyección entre ambos conjuntos y en consecuencia h es un isomorfismo.

Referencias

[1] Abad M. and Monteiro L., *Number of epimorphisms between finite symmetric Boolean algebras*, Reports on Mathematical Logic, 10 (1976), 3-7.

[2] Abad M. and Monteiro L., *Monadic epimorphisms and applications*, Portugaliae Mathematica, 39 (1980), 525-538.

[3] Bass H., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 258-268.

[4] Carnap R., *Modalities and quantification*, J. Symbolic Logic 11 (1946), 33-64.

[5] Héng-Shan Gao, *A simple proof of a theorem of H. Bass*, Shuxue Jinzhan 6 (1963), 92-95; errata 6 (1963), 306 en chino.

[6] Halmos P.R., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 219-227.

[7] Halmos P.R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[8] Henkin L., Monk D. and Tarski A., *Cylindric Algebras* , Part I, North-Holland Publishing Co., (1971).

[9] Masse A., *Anneaux monadiques libres sur un ensemble fini , (I) et (II)*, Seminaire de Logique Algèbrique , Faculté des Sciences, Université de Lyon, (1970).

[10] Monteiro A., *Seminario sobre álgebras de Boole monádicas*, Universidad Nacional del Sur, (1973).

[11] Monteiro L., *Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas.* Notas de Lógica Matemática Nro.32, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1974) .

[12] Monteiro L., *Algèbres de Boole monadiques libres.* Algebra Universalis, 8 (1978), 374-380.

[13] Monteiro L., *Cursos sobre álgebras de Boole y álgebras de Boole monádicas*, Universidad Nacional del Sur, (1993).