INFORME TECNICO INTERNO

N°. 38

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

INFORME TÉCNICO N° 38

Conjuntos graduados de Zadeh

A. Monteiro

INMABB

UNS - CONICET

AÑO 1994

El siguiente trabajo fue publicado en 1978 en la revista Técnica, editada por la "Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico" (Lisboa - Portugal).

La publicación del mismo en los informes técnicos del INMABB está motivada por:

1. El contenido de este trabajo fue expuesto en 1974, en un cursillo dictado por el Dr. Antonio A. R. Monterio, en el Instituto de Matemática, de la UNS.
2. La revista "Técnica" no se encuentra en la Biblioteca del INMABB, y en esa versión se han detectado varios errores de impresión.
3. Este trabajo es una excelente introducción al estudio algebraico de los Fuzzy Sets.

Han colaborado en la corrección los ex-discípulos del autor: Dr. Luiz F. Monteiro, Mg. Diana Brignole y además la Lic. Roxana Entizne.

Dr. Luiz F. Monteiro
Director
INMABB-UNS-CONICET

Noviembre, 1994

TÉCNICA
associação dos estudantes do instituto superior técnico
revista de engenharia
Lisboa - Portugal

NÚMERO 449/450 SETEMBRO/OUTUBRO 1978 ANO LIII VOLUME XL

C. D. U. 51.951

A Memória de Aureliano de Mira Fernandes

Conjuntos graduados de Zadeh

ANTÓNIO ANICETO MONTEIRO

1 — INTRODUÇÃO

A noção de *conjunto graduado* foi introduzida por L. A. Zadeh [1965] (1), com o nome de «*Fuzzy Set*». Em França dá-se o nome de «*ensemble flou*» a esta noção, mas preferimos a expressão: «*conjunto graduado*» introduzida por Gr. C. Moisil [1972] (1) (pág. 157-162).

Seja E um conjunto dado, não vazio, diz-se que o conjunto V é uma parte de E se todo elemento de V é um elemento de E e então escreve-se $V \subseteq E$.

É usual em matemática substituir o conjunto V pela sua *função característica* $K_v(x)$ definida do seguinte modo: K_v é uma aplicação do conjunto E no conjunto {0,1}, formado pelos dois números reais 0 e 1, definida do modo seguinte

$$K_v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \varepsilon V \\ 0 & \text{se } x \bar{\varepsilon} V \end{cases}$$

É claro que o conhecimento da aplicação $K_v(x)$ determina univocamente o conjunto V, que é o conjunto de todos os pontos x de E tais que $K_v(x) = 1$.

Zadeh substituiu o conjunto {0,1}, pelo conjunto de todos os números reais x tais que $0 \leqslant x \leqslant 1$, que representaremos pela notação [0,1] e dá o nome de conjunto graduado F a toda aplicação f de E em [0,1].

Podemos pensar no conjunto [0,1] com um conjunto de *valores lógicos*, 0 representa o valor lógico *falso* e 1 o valor lógico *verdadeiro*. Se $0 < \lambda < 1$; λ é um valor lógico intermédio. Representaremos a expressão «o ponto p pertence ao *conjunto graduado* F» pela notação

$$p \in F \qquad (1)$$

Então o valor lógico do enunciado (1), em notação $v\,(p \in F)$, será definido pela fórmula

$$v\,(p \in F) = f\,(p)$$

Para indicar que um ponto p pertence ao *conjunto* X escreve-se $p \varepsilon X$.

Assim os dois símbolos ε e ∈ representam relações distintas.

Comparando com o caso anterior podemos dizer que *f é a função característica do conjunto graduado F* e podemos, no fundo, identificar F e f.

Se $v\,(x \in F) = 1$ diremos que o enunciado «$x \in F$» é verdadeiro.

Se $v\,(x \in F) = 0$ diremos que o enunciado «$x \in F$» é falso.

Se $v\,(x \in F) = f(p) = \lambda$ diremos que o enunciado «$x \in F$» tem o valor lógico λ ou que merece o *grau de confiança* λ.

Se f não toma valores distintos de 0 e 1 estamos reduzidos ao caso precedente.

Esta ideia de tomar como conjunto dos valores lógicos o segmento [0,1] foi apresentada pela primeira vez pelo matemático polaco J. Lukasiewicz antes de 1930(2); para uma exposição sobre vários cálculos proposicionais polivalentes considerados por este autor ver Lukasiewicz — Tarski [1930].

Como o segmento [0,1] é o conjunto de todos os valores lógicos, é necessário definir os conectivos ∧ (e), ∨(ou) e ∼ (negação) sobre [0,1].

As definições de Zadeh são as seguintes:

$$a \wedge b = \min\,(a, b)$$
$$a \vee b = \max\,(a, b)$$
$$\sim a = 1 - a$$

Seja

$$Z = [0,1]^E$$

o conjunto de todas as aplicações de E em [0,1]. Se $f, g \varepsilon Z$ escreveremos $f = g$ para indicar que $f(x) = g(x)$ para todo $x \varepsilon E$. Definiremos a função $h = f \wedge g$ pela fórmula

(1) Ver a lista bibliográfica no fim deste artigo.

(2) Mas este autor considera (além dos conectivos ∨, ∧, ∼ definidos a seguir) o conectivo de implicação definido por $a \to b = \min\,(1, 1 - a + b)$.

$$h(x) = f(x) \wedge g(x) \qquad (1)$$

e $l = f \vee g$ por

$$l(x) = f(x) \vee g(x) \qquad (2)$$

e a negação de f (em notação $\sim f$) por

$$(\sim f)\ (x) = 1 - f(x) \qquad (3)$$

As definições (1) (2) (3) podem escrever-se sob a forma

(1') $(f \wedge g)\ (x) = f(x) \wedge g(x)$
(2') $(f \vee g)\ (x) = f(x) \vee g(x)$
(3') $(\sim f)\ (x) = \sim f\ (x)$

A função identicamente igual a 1 será representada pelo símbolo 1 e a função identicamente igual a 0 será representada pelo símbolo 0, isto é

$1\ (x) = 1$ para todo $x \in E$
$0\ (x) = 0$ para todo $x \in E$

Obtemos assim um sistema $< Z, 0, 1, \wedge, \vee, \sim)$ donde 0 e 1 são dois elementos de Z, $\wedge$ e $\vee$ duas operações binariais definidas sobre Z e $\sim$ uma operação unária definida sobre Z.

Queremos estudar as propriedades algébricas do sistema Z. Para isso necessitamos recordar algumas noções da teoria dos reticulados e em particular dos reticulados distributivos, das álgebras de Morgan e de Kleene, que facilitem a leitura dos trabalhos indicados na bibliografia.

Este artigo deve ser considerado como uma iniciação à teoria dos conjuntos graduados de Zadeh, *considerados sob o ponto de vista da álgebra*, quando são algebrizados por meio das operações $\vee$, $\wedge$ e $\sim$. Mas é claro que sobre o segmento [0,1] podem defenir-se outras operações.

De Kerf (J. L. F.) [1975] coligiu uma lista de 200 referências bibliográficas sobre os conjuntos graduados na qual figuram 31 trabalhos de Zadeh. Veja também os 3 volumes publicados por Kaufman (A.) [1975], onde figuram numerosas aplicações.

O *problema fundamental* de determinar um conjunto finito de igualdades válidas em toda álgebra Z, a partir das quais seja possível demonstrar todas as outras igualdades válidas em todas essas álgebras foi resolvido por J. Kalman [1958] (como veremos no § 6). Os resultados de J. Kalman que têm um interesse decisivo para a teoria algébrica dos conjuntos graduados, foram apresentados na sua Tese de Doutoramento na Universidade de Harvard, em 1955.

O segundo *problema fundamental* de encontrar um procedimento para decidir com um número finito de cálculos se uma igualdade dada é ou não válida em todas as álgebras Z foi também resolvido por J. Kalman na sua Tese.

A exposição destes resultados fundamentais é um dos objectivos centrais desta nota. Veremos assim que 10 anos antes da introducão da noção de conjunto graduado, já estavam elaboradas as técnicas e obtidos os resultados adequados para o estudo dos conjuntos graduados sob o ponto de vista da álgebra. Este facto passou desapercebido durante bastante tempo. Certos erros cometidos têm a sua origem nesta circunstância.

Finalmente corresponde assinalar que St. Kleene tinha considerado em [1938] um cálculo proposicional trivalente, com três valores lógicos o 0 (falso), ½ (indecidível), 1 (verdadeiro). Sobre o conjunto $M_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ estavam definidas duas operações binárias $\vee$ (ou), $\wedge$ (e) e uma operação unária $\sim$ (negação) definidos por meio das tábuas correspondentes e estava pendente o problema de caracterizar esta álgebra finita por meio de igualdades.

Este problema foi resolvido também por J. Kalman e este resultado tem muita importância na teoria dos conjuntos graduados, visto que M_3 é uma álgebra característica com respeito às álgebras Z, isto é, *uma igualdade é válida em todas as álgebras Z se e só se ela for válida em M_3*.

Y. Gentillome [1967] [1968], tendo em vista aplicações à linguística foi levado a definir a noção do conjunto vago X como um par $X = (X_1, X_2)$ de subconjuntos X_1, X_2 de um universo $\mathbb{E}$, tais que $X_1 \subseteq X_2$, algebrizando os conjuntos vagos em forma adequada que será indicada no § 7.

Gr. C. Moisil [1940], [1941] tinha sido levado a introduzir uma construção análoga no estudo do cálculo proposicional trivalente de Lukasiewicz.

Indicaremos a estreitas relações entre esta noção e a teoria dos conjuntos graduados.

A história da matemática mostra neste caso, como em tantos outros, a enorme importância que tem a investigação fundamental, para as aplicações da matemática e reciprocamente.

Sob este ponto de vista, a vida do falecido e prestigioso investigador Aureliano de Mira Fernandes é um exemplo digno do nosso respeito e admiração. Foi professor de uma importante escola de Engenharia, o Instituto Superior Técnico de Lisboa e do I. S. C. E. F., mas paralelamente às suas funcões de Professor, dedicava a maior parte do seu tempo disponível a realizar trabalhos de investigação em matemática pura, ou a realizar cursos de especialização, sobre o mesmo tema, para alguns dos seus discípulos.

Na minha juventude, quando se queria prestigiar o Instituto Superior Técnico, sempre se dizia *«tem como Professor o Aureliano de Mira Fernandes»* considerando-se esta afirmação como a indicação de um Homem exemplar, que todos respeitávamos e admirávamos, porque a sua dedicação à investigação no campo das matemáticas puras, honrava o espírito humano.

Jean Perrin, prémio Nobel de Física, quando na década de 30, creio eu, lutava para criar a «Caisse National de la Recherche», tinha que convencer da sua utilidade numerosas pessoas, que tinham o poder de decisão mas não o poder de compreensão, sempre lhes dizia *«A ciência pura, é aquela que não tem ainda aplicações»*. Este artigo, redactado em homenagem à memória de Aureliano de Mira Fernandes, tem por objectivo fundamental, ilustrar esta tese mostrando a evolução das ideias em torno da noção de conjunto graduado de Zadeh a partir do ano de 1938. Devemos também assinalar que a noção de *reticulado* data pelo menos de 1897 com R. Dedekind.

2 — CONJUNTOS ORDENADOS E RETICULADOS

Uma relação binária $\leq$ definida sobre um conjunto A diz-se uma relação de ordem se verificar as propriedades seguintes:

01 — *Reflexiva:* $x \leq x$

02 — *Antisimétrica:* se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x=y$

03 — *Transitiva:* Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$

Escreveremos $x < y$ para indicar que $x \leq y$ e $x \neq y$.

Diz-se que *um elemento y cobre o elemento* x se: 1.º) $x < y$; 2.º) Não existe nenhum elemento $z \in A$ tal que $x < z < y$.

O *Diagrama* de um conjunto ordenado A *finito* define-se do seguinte modo:

1.º) Cada elemento $a \in A$ representa-se por um pequeno círculo (no plano do papel) que se chama o afixo de a; 2.º) Se b cobre a o afixo de b coloca-se mais acima de a, ligando-se a e b por um segmento. Seja dado o conjunto $A = \{2, 3, 6\}$ e ordenemos A pela relação *divide* (que representaremos pela notação $\leq$). A relação *divide* entre números naturais é uma relação de ordem e o diagrama de A está indicado na Fig. 1. Dois elementos x y dizem-se incomparáveis se $x \not\leq y$ e $y \not\leq x$. Na fig. 1, 2 e 3 são incomparáveis.

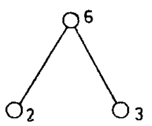


Fig. 1

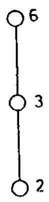


Fig. 2

Se ordenamos A pela relação *«menor ou igual»* que se representaremos também pela notação $\leq$ então o diagrama de A está representado na figura 2. Na figura 3, está indicado o diagrama do conjunto. $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, de todos divisores de 12, ordenado pela relação *divide*. Diz-se que *u* é *último elemento* de um conjunto ordenado A se $a \leq u$, para todo $a \in A$. Se A tem último elemento então ele é único. Com efeito se u e u' são últimos elementos de A então $u \leq u'$ e $u' \leq u$ logo $u = u'$.

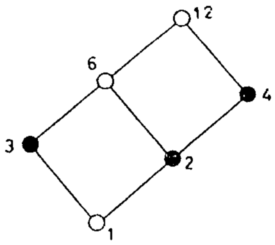


Fig. 3

Diz-se que p é primeiro elemento de A se $p \leq a$ para todo $a \in A$. Se A tem primeiro elemento ele é único.

O diagrama da Fig. 1 não tem primeiro elemento, 2 é primeiro elemento da Fig. 2, 1 é primeiro elemento da Fig. 3. 6 é o último elemento dos diagramas das Fig. 1 e 2, e 12 é o último elemento do diagrama da fig. 3.

Dados dois conjuntos ordenados $(A, \leq)$ $(A', \leq)$ diz-se que o segundo é isomorfo ao primeiro se existe uma transformação φ de A *sôbre* A' tal que

1.º) φ é *biunívca*.

2.º) Se $a, b \in A$ são tais que $a \leq b$ então $\varphi(a) \leq \leq \varphi(b)$.

3.º) Se $a, b \in A$ são tais que $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ então $a \leq b$. (1).

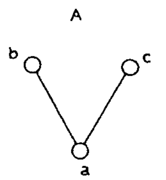


Fig. 4

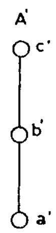


Fig. 5

Sejam A e A' os conjuntos ordenados definidos pelos seus diagramas indicados nas fig. 4 e 5 e seja φ definida por $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$, $\varphi(c) = c'$. As condições 1.º) e 2.º) são verificadas mas 3.º) não é verificada porque:

$\varphi(b) = b' \leq \varphi(c) = c'$ e não se tem $b \leq c$.

A teoria dos conjuntos ordenados tem por objectivo o estudo das propriedades dos conjuntos ordenados que se mantêm invariantes por isomorfismo. Dois conjuntos ordenados isomorfos A e A' podem diferir apenas pela natureza dos seus elementos.

Para indicar exemplos de conjuntos ordenados basta indicar um diagrama ao acaso. Dados dois ele-

(1) É fácil de ver que se A' é isomorfo a A, então A é isomorfo a A'. Podemos por iso dizer que A e A' são isomorfos.

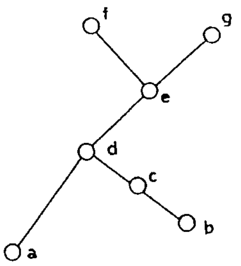


Fig. 6

mentos x, y de um diagrama para que seja $x \leq y$ é necessário e suficiente que seja $x = y$ ou que exista um «caminho» ascendente que parta de x e chegue a y. Assim na figura 4, $a \leq d$, $a \leq e$, $a \leq f$, $a \leq g$, $b \leq c$, $b \leq d$, $b \leq e$, $b \leq f$, $b \leq g$, $c \leq d$, $c \leq e$, $c \leq f$, $c \leq g$, $d \leq e$, $d \leq f$, $d \leq g$, $e \leq f$, $e \leq g$ e além disso $a \leq a$, $b \leq b$, $d \leq d$, $e \leq e$, $f \leq f$, $c \leq c$, $g \leq g$.

Muitas vezes o primeiro e último elemento de um conjunto ordenado A representam-se por 0 e 1. Esta notação não é adequada para as figura 2 e 3.

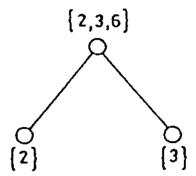
O exemplo mais importante de um conjunto ordenado é uma família A de conjuntos ordenados pela relação de inclusão $\subseteq$. A razão desta afirmação é a seguinte:

2.1 — *TEOREMA. Dado um conjunto ordenado* $(A, \leq)$ *existe uma família A' de conjuntos, ordenados pela relação de inclusão* $\subseteq$ *tal que os conjuntos ordenados* $(A, \leq)$ *e* $(A', \subseteq)$ *são isomorfos.*

DEM. Dado $a \in A$ seja $f(a)$ o conjunto de todos os elementos de A tais que $x \leq a$. Então $f(a)$ é um sub-conjuntos de A.

Seja $A' = \{f(a) : a \in A\}$ e ordenemos A' pela relação de inclusão $\subseteq$. Verifica-se imediatamente que $(A', \subseteq)$ é isomorfo a $(A, \leq)$.

Para o caso da figura 4 o diagrama de A' é



2.2 — *DEFINIÇÃO. Diz-se que c é o infimo do par ordenado (a, b) de elementos de um conjunto ordenado A se:*

I 1.º) $c \leq a$ *e* $c \leq b$

I 2.º) *Se x é tal que* $x \leq a$ *e* $x \leq b$ *então* $x \leq c$.

Se a e b têm um infimo ele é único.

Se assim é escreve-se $c = a \wedge b$.

A condição 1.º) pode expressar-se dizendo que c é uma *cota inferior* de a e b, e a condição 2.º) expressa que c é a maior das cotas inferiores de a e b.

Na figura 6 tem-se $e = f \wedge g$.

2.3 — *DEFINIÇÃO. Diz-se que c é o supremo do par ordenado* (a, b) *de elementos de um conjunto ordenado A se*

S 1.º) $a \leq c$ *e* $b \leq c$.

S 2.º) *Se* $a \leq x$ *e* $b \leq x$ *então* $c \leq x$; então escreveremos $c = a \vee b$.

Se a e b tem um supremo ele é unico.

2.4 — *DEFINIÇÃO. Um conjunto ordenado A diz-se um reticulado si* $a \wedge b$ *e* $a \vee b$ *existem para todo par ordenado* (a b) *de elementos de A.*

É bem conhecida que

2.5 — *TEOREMA. Num reticulado A valem as seguintes regras de cálculo:*

(R1) $a \wedge a = a$

(R2) $a \wedge b = b \wedge a$

(R3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

(R4) $a = a \vee (a \wedge b)$

(R1') $a = a \vee a$

(R2') $a \vee b = b \vee a$

(R3') $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

(R4') $a = a \wedge (a \vee b)$

Reciprocamente se $(A, \wedge, \vee)$ *é um sistema formado por um conjunto, não vazio, A e duas operações binárias* $\wedge$ *e* $\vee$ *definidas sobre A que verificam as igualdades* (R1) — (R4) *e* (R1') — (R4') *então é possível definir sobre A uma relação de ordem* $\leq$ *tal que:* 1.º) $a \wedge b$ *é o infimo de a e b;* 2.º) $a \vee b$ *é o supremo de a e b.*

A relação de ordem buscada pode definir-se do seguinte modo: $x \leq y$ se e só se $x = x \wedge y$.

Para a demonstração de este resultado veja-se por exemplo Garrett Birkhoff [1948] (*).

2.6 — *DEFINIÇÃO. Um reticulado* $(A, \wedge, \vee)$ *diz-se distributivo se*

(D) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Existem reticulados que não são distributivos. É o que acontece com o reticulado A que tem por diagrama a Fig. 7.

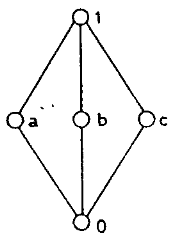


Fig. 7

Com efeito

$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) =$
$= 0 \vee 0 = 0$

logo A não é distributivo. Em todo reticulado distributivo vale também a regra de cálculo

(D') $x \vee (y \wedge z) =$
$= (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

(*) Aos símbolos $\vee$ e $\wedge$ podemos dar o nome de «verso» e «reverso» (em inglês «cup» e «cap»).

2.7 — *LEMA. Para que um reticulado* $(A, \wedge, \vee)$ *tenha primeiro* (0) *e último* (1) *elementos é necessário e suficiente que existam dois elementos* $0,1 \varepsilon A$ *tais que*

$$0 \wedge x = 0 \qquad 1 \vee x = 1$$

para todo $x \varepsilon A$, *ou o que é equivalente*

$$0 \vee x = x \qquad 1 \wedge x = x$$

2.8 — *DEFINIÇÃO. Um conjunto ordenado A diz-se totalmente ordenado se* 04) *Para todo par* (x, y) *ou* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$.

2.9 — *TEOREMA. Todo conjunto A totalmente ordenado A é um reticulado distributivo.*

Com efeito: se $x \leq y$ então $x = x \wedge y$ e $x \vee y = y$; se $y \leq x$ teremos $y = y \wedge x$ e $x \vee y = x$. Portanto A é um reticulado. Vejamos que A é um reticulado distributivo. Com efeito dados 3 elementos x, y, z ε A verifica-se uma só das condições:

1.º) $x \leq y \leq z$
2.º) $x \leq z \leq y$
3.º) $y \leq x \leq z$
4.º) $y \leq z \leq x$
5.º) $z \leq x \leq y$
6.º) $z \leq y \leq x$.

No primeiro caso teremos

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \vee x = x$$

e a igualdade D é verificada.
Nos restantes casos a verificação é análoga.

2.10 — *COROLÁRIO. O segmento* [0,1] *com a sua ordem natural é um reticulado distributivo.*

Basta notar que [0,1] com a sua ordem natural é um conjunto totalmente ordenado.

Um exemplo muito importante de reticulado distributivo é o que se indica a seguir.

2.11 — *DEFINIÇÃO. Uma família A conjuntos tal que se* $X \varepsilon A$ *e* $Y \varepsilon A$ *então* $X \cap Y \varepsilon A$ *e* $X \cup Y \varepsilon A$ *dá-se o nome de anel de conjuntos.*

Verifica-se facilmente que

2.12 — *Um anel de conjuntos é um reticulado distributivo.*

Veremos mais adiante que se trata do exemplo mais importante de reticulado distributivo.

Indiquemos uma construção que permite obter reticulados distributivos a partir de reticulados distributivos dados.

2.11 — *DEFINIÇÃO. Seja* $\{A_i\}_{i \in I}$ *uma família de reticulados (distributivos) e seja*

$$P = \prod_{i \in I} A_i$$

o produto cartesiano dos conjuntos A_i. *Para representar um elemento* $p \varepsilon P$ *usaremos a notação* $p = (p_i)_{i \varepsilon I} = (p_i)$ *donde* $p_i \varepsilon A_i$ (para $i \varepsilon I$) *chama-se a coordenada de índice* i *do ponto* $p \in P$.

Se $p = (p_i) \in P$ *e* $q = (q_i) \in P$

Poremos $p \wedge q = (p_i \wedge q_i)$
$p \vee q = (p_i \vee q_i)$

Verifica-se imediatamente que valem as regras de cálculo (R1—R4), (R1'—4') *e* (D); *logo* $(P, \wedge, \vee)$ *é um reticulado (distributivo).*

Se todos os A_i têm primeiro elemento O_i então P tem como primeiro elemento $O = (O_i)$.

Se todos os A_i têm último elemento 1_i então P tem por último elemento $1 = (1_i)$.

No caso particular em que todos os A_i são iguais ($A_i = A$) escreveremos

$$P = A^I$$

que é o conjunto de todas *as aplicações* f *de* I *em* A, com $f(i) = a_i \varepsilon A$.

Neste caso podemos escrever $p = (p_i)_{i \varepsilon I}$ onde $p_i = f(i) = a_i \varepsilon A$.

Daqui resulta que P é um reticulado distributivo.

Suponhamos agora que $A = [0,1]$ então a família de todos os conjuntos graduados considerados como aplicações de E em [0,1].

$$Z = [0,1]^E$$

é um reticulado distributivo.

Como o segmento [0,1] tem primeiro elemento 0 e último elemento 1; o mesmo acontece ao reticulado distributivo Z que são as funções identicamente iguais, respectivamente, a 0 e 1.

Dada uma relação binária R definida sobre um conjunto E dá-se o nome de relação dual de R à relação R* definida pela condição

$x R^* y$ se e só se $y R x$. É claro que $R^{**} = R$.

A relação dual de $\leq$ costuma representar-se por $\geqslant$. Tem-se então o seguinte

PRINCÍPIO DE DUALIDADE. A relação dual duma relação de ordem é uma relação de ordem.

Cada um dos conjuntos ordenados A e A* indicados na figura seguinte é dual do outro

É claro que a transformação $f(x) = x^*$ é um *anti-isomorfismo* de A *sobre* A* isto é, f é uma transformação biunívoca de A sobre A* tal que

A condição $x \leq y$ em A é equivalente a $y^* \leq x^*$ em A*.

A um anti-isomorfi f de A sobre A de período 2 ($f\,f(x) = x$) dá-se o nome de *involução*.

A noção de ínfimo é dual da noção de supremo.

3 — RETICULADOS DISTRIBUTIVOS FINITOS

Necessitamos que conhecer alguns resultados sobre os reticulados destributivos finitos A.

Um elemento $i \in A$ diz-se *irredutível* se $i \neq o$ e $i = a \vee b$ implica $i = a$ ou $i = b$. É fácil de provar o seguinte

3.1 — *TEOREMA. Para que um elemento* $i \neq o$ *de um reticulado finito A seja irredutível é necessário e suficiente que o conjunto S de todos os elementos x de A tais que* $x < i$ *tenha um último elemento.*

Aplicando este teorema ao reticulado distributivo A da fig. 3 vê-se que os elementos irredutíveis de A são 2, 3 e 4.

Um resultado importante é o seguinte

3.2 — *TEOREMA. Num reticulado finito A, com mais de um elemento, todo elemento* $a \neq o$ *é supremo de elementos irredutíveis* (Garrett Birkhoff).

Trata-se de um corolário do Teorema 4.7 que demonstraremos mais adiante.

No caso da fig. 7, os elementos irredutíveis são a, b, c; e $1 = a \vee b = a \vee c = b \vee c$.

Um elemento p de um reticulado finito A diz-se *primo* se 1.°) $p \neq o$; 2.°) se $p \leq a \vee b$ então ou $p \leq a$ ou $p \leq b$.

3.3 — *TEOREMA. Num reticulado finito todo elemento primo é irredutível* (G. Birkhoff).

Dem. Seja p primo e suponhamos que (1) $p = a \vee b$ então como p é primo teremos (2) $p \leq a$ ou (3) $p \leq b$. De (1) resulta (2') $a \leq p$ e (3') $b \leq p$. Se se verifica (2), usando (2'), teremos $p = a$. Se se verifica (3'), usando (3) teremos $p = b$ e portanto p é irredutível.

Num reticulado finito não existem necessariamente elementos primos. É o que acontece no reticulado da fig. 7, onde a não é primo porque $a \leq b \vee c = 1$ e entretanto não se verifica nem $a \leq b$, nem $a \leq c$. Os elementos 1, b, c também não são primos.

3.4 — *TEOREMA. Num reticulado distributivo A todo elemento irredutível é primo.* (G. Birkhoff).

Dem. Seja i irredutível e suponhamos que $i \leq a \vee b$, isto é $i = i \wedge (a \vee b)$ como A é distributivo podemos descrever

$$i = (i \wedge a) \vee (i \wedge b)$$

e como i é irredutível teremos «$i = i \wedge a$ ou $i = i \wedge b$» isto é «$i \leq a$ ou $i \leq b$» e portanto i é primo.

Recordemos agora que

3.5 — *TEOREMA. Seja A um reticulado finito no qual todo elemento irredutível é primo, então A é um reticulado distributivo.*

Se trata de um caso particular do Teor 4.12 que demonstraremos no parágrafo seguinte.

Recordemos agora que

3.6 — *TEOREMA. Para que um elemento* $p \neq o$ *de um reticulado finito seja primo é necessário e suficiente que a família Z de todos os elementos z tais que* $p \not\leq z$, *tenha um último elemento* z_0.

Dem. Seja p primo e $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ a família indicada e ponhamos

$$z_0 = z_1 \vee z_2 \vee \cdots \vee z_n$$

Se fosse $p \leq z_0$ então se vê por recorrência que existe algum índice $i (1 \leq i \leq n)$ tal que $p \leq z_i$ o que é impossível pela definição de Z, logo $p \leq z_0$ e então $z_0 \in Z$ e z_0 é o último elemento da família Z.

Seja p um elemento tal que 1.°) $p \neq o$; 2.°) A família $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ de todos os elementos tais que $p \not\leq z_i$, tem um último elemento z_0. Provemos que p é primo. Com efeito suponhamos que p não é primo então existem dois elementos x, y tais que (1) $p \leq x \vee y$ (2) $p \not\leq x$ (3) $p \not\leq y$. De (2) e (3) resulta x, $y \in Z$ logo $x \leq z_0$, $y \leq z_0$ e então (4) $x \vee y \leq z_0$. De (1) e (4) resulta $p \leq z_0$ o que é impossível por hipótese e o teorema está demonstrado.

Os teoremas que acabamos de indicar são de extrema utilidade para averiguar se um reticulado A dado pelo seu diagrama é ou não é distributivo.

Determina-se em primeiro lugar o conjunto I de todos os elementos irredutíveis usando o Teorema 3.1. Para que o reticulado seja distributivo, basta verificar que todos os elementos irredutíveis são primos, o que se faz facilmente usando o Teorema 3.6.

Consideremos o reticulado que tem o diagrama da Fig. 9 (verifique que cada par de elementos tem um ínfimo e um supremo usando as respectivas definições). (Basta considerar o caso dos pares incomparáveis por que se $x \leq y$ então $x = x \wedge y$ e $x \vee y = y$).

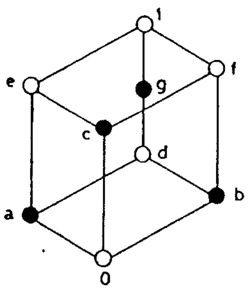


Fig. 9

Os elementos irredutíveis a, b, c, g estão marcados em negro, os elementos a, b, c são primos, mas g não é primo porque a família dos elementos que não seguem g, a saber, o, a, b, c, d, e, f, não tem um último elemento; logo A não é distributivo.

Seja A um reticulado distributivo finito com mais que um elemento e representemos por π o conjunto ordenado(1) de todos os elementos primos de A.

O teorema seguinte tem muita importância.

3.7 — *TEOREMA. Dado um conjunto ordenado finito π_0 existe um reticulado distributivo finito A tal que o conjunto π dos elementos primos de A é isomorfo a π_0.* Todo reticulado distributivo finito A' com esta propriedade é isomorfo a A (Garrett Birkhoft [1937]).

Demonstraremos a existência de A. Dado um conjunto ordenado π_0 daremos o nome de *secção inferior* de π_0 de a toda a parte S de π_0 tal que se $s \in S$ e $a \leq s$ então $a \in S$ e convencionamos que ϕ é um secção inferior de π_0. Uma secção inferior S será chamada uma *secção inferior principal* se existe um elemento $a \in \pi_0$ tal que S é o conjunto de todos os elementos $x \in \pi_0$ tais que $x \leq a$ e então escreveremos $S = (a)$.

Vê-se facilmente que a intersecção (reunião) de duas secções inferiores é uma secção inferior. Portanto a família A de todas as secções inferiores de π_0 incluindo a secção vazia ϕ é um reticulado distributivo finito.

Prova-se facilmente que as secções inferiores principais de π_0 isto é as secções inferiores da forma (a) ($a \in \pi_0$) são elementos *primos* de A.

Com efeito se S_1, et S_2 são duas secções inferiores tais que

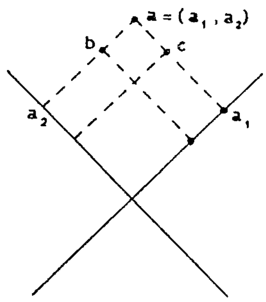
(1) $\quad (a) \subseteq S_1 \cup S_2$

então como $a \in (a)$ de (1) resulta que ou (2) $a \in S_1$, ou (3) $a \in S_2$. Em qualquer dos casos: ou $(a) \subseteq S_1$ ou $(a) \subseteq S_2$ e (a) é um elemento primo de $\bar{A}$.

Suponhamos agora que a secção inferior $S \neq \phi$ seja um elemento primo de A observe-se que $S = \cup \{(a); a \in S\}$ e como S, por hipótese, é um elemento primo de A então existe um a tal que (1) $S \subseteq (a)$. Como $a \in S$ então (2) $(a) \subseteq S$. De (1) e (2) resulta $S = (a)$.

Provámos então que o conjunto dos elementos primos de A é $\pi = \{S(a); a \in \pi_0\}$ e utilizando o Teorema 2.1 podemos afirmar que π_0 é isomorfo a π.

Observemos que existem reticulados distributivos que não contêm nenhum elemento primo (isto é irredutível). Com efeito a recta R com a sua ordem natural é um reticulado distributivo e o mesmo acontece a: $A = R \times R$.



Dado o elemento $a = (a_1, a_2) \in A$ Consideremos os dois elementos de A

$b = (a_1-1, a_2)$
$c = (a_1, a_2-1)$

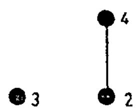
então

$b \vee c = (a_1, a_2) = a$

com $a \neq b$ e $a \neq c$, logo a *não é irredutível* (qualquer que seja $a \in A$).

É para remediar este inconveniente que se introduz a noção de *filtro* que vamos agora estudar.

No caso de um reticulado *distributivo finito* A o conjunto ordenado π dos seus elementos primos é uma descrição simples e compacta de A. O reticulado distributivo da fig. 3 fica determinado pelo diagrama dos seus elementos primos indicados na figura anexa.



4 — FILTROS

A teoria dos filtros desempenha um papel importante no estudo dos reticulados. Seja A um reticulado. Supomos sempre que A tem mais que um elemento.

4.1 — *DEFINIÇÃO. Uma parte F de A diz-se um filtro (de A) se*

F 1) $F \neq \phi$

F 2) *Se* $a \in F$ e $a \leq b$ *então* $b \in F$

F 3) *Se* $a, b \in F$ *então* $a \wedge b \in F$

Um filtro F diz-se próprio se $F \neq A$.

Para que F seja próprio é necessário (se A tem primeiro elemento o) e suficiente que $o \neq F$.

(1) A ordem sobre π coincide com a ordem dada em A.

4.2 — *DEFINIÇÃO. Dado um elemento* $a \varepsilon A$ *o conjunto* $F(a)$ *de todos os elementos* x *de* A *tais que* $a \leq x$ *é um filtro, chamado filtro principal gerado por a.*

Para que $F(a)$ seja próprio é necessário e suficiente que seja $a \neq o$.

Verifica-se imediatamente que

4.3 — *LEMA. Se* $\{F_i\}$ $(i \varepsilon I)$ *é uma família de filtros então a sua intersecção* $F = \bigcap_{i \varepsilon I} F_i$ *é um filtro se* $F \neq \phi$ (1).

4.4 — *DEFINIÇÃO. Um filtro próprio* F *diz-se irredutível de dados dos filtros* F_1 *e* F_2 *tais que* $F = F_1 \cap F_2$ *então ou* $F = F_1$, *ou* $F = F_2$.

4.5 — *DEFINIÇÃO. Dado um filtro* F *próprio e um elemento* $a \overline{\varepsilon} F$, *dá-se o nome de filtro gerado por* F *e* a *à intercepção* G *de todos os filtros que contêm* F *e* a.

4.6 — *TEOREMA. Dado um filtro próprio* F *e um elemento* $a \overline{\varepsilon} F$ *então o filtro gerado por* F *e* a *é o conjunto* G *de todos os elementos* g *para cada um dos quais existe um elemento* $f \varepsilon F$ *sal que* $f \wedge a \leq g$.

Dem. Basta provar F1), F2) e F3).

F1) É claro que $G \neq \phi$, porque $f \wedge a \leq f$ logo $a \varepsilon G$.

F2) *Se* $g \varepsilon G$ *e* $g \leq g'$ *então* $g' \varepsilon G$.

De $g \varepsilon G$ resulta que existe um elemento $f \varepsilon F$ tal que

$$f \wedge a \leq g$$

como $g \leq g'$ então

$$f \wedge a \leq g'$$

e portanto $g' \varepsilon G$.

F3) *Se* $g, g' \varepsilon G$ *então* $g \wedge g' \varepsilon G$.

Das hipóteses resulta que existem elementos $f, f' \varepsilon F$ tais que

$$f \wedge a \leq g \qquad f' \wedge a \leq g'$$

logo

$$(f \wedge a) \wedge (f' \wedge a) \leq g \wedge g'$$

como $f'' = f \wedge f' \varepsilon F$ então

$$f'' \wedge a \leq g \wedge g'$$

e portanto $g \wedge g' \varepsilon G$ o que termina a demonstração de que G é um filtro. Além disso G é o menor filtro que contém F e a, como se vê sem dificuldade.

OBSERVAÇÃO: No caso em que A contém um zero: para que o filtro G seja próprio é necessário e suficiente que $o \overline{\varepsilon} G$ isto é que $f \wedge a \neq o$ para todo $f \varepsilon F$; diz-se neste caso que a é compatível com F.

4.7 — *TEOREMA. Num reticulado A, todo filtro próprio é a intersecção de filtros irredutíveis* (Birkhoft).

Dem. Seja F um filtro próprio e $c \overline{\varepsilon} F$. Consideremos a família F de todos os filtros (próprios) que contêm F sem conter c.

Seja $\mathsf{C} = \{F_i\}$ uma cadeia de filtros de F isto é uma família de filtros de F tais que dados dois filtros de C um deles está contido no outro então o conjunto

$$X = \bigcup F_i$$

é um filtro próprio que contém F sem conter c.

Acabamos de provar que todas as cadeias de F têm uma cota superior logo pelo teorema de Zorn a família F tem pelo menos um elemento máximo C, isto é existe um filtro $C \varepsilon \mathsf{F}$ tal que 1.º) $F \subset C$, 2.º) $c \overline{\varepsilon} C$ e não existe nenhum filtro $C' \varepsilon \mathsf{F}$ com estas duas propriedades e tal que $C \subset C'$.

Provemos que C é irredutível — Com efeito suponhamos que $C = F_1 \cap F_2$, então $C \subseteq F_1$, $C \subseteq F_2$.

Se $C \neq F_1$ e $C \neq F_2$ então $C \subset F_1$, $C \subset F_2$. Daqui resulta por ser C um filtro máximo na família F que $c \varepsilon F_1$ e $c \varepsilon F_2$ e portanto $c \varepsilon F_1 \cap F_2 = C$ o que é impossível pela definição de C. Podemos então afirmar que ou $C = F_1$ ou $C = F_2$ e portanto C é irredutível.

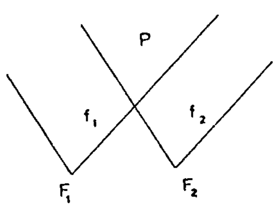
Acabamos assim de provar que dado o filtro próprio F e um elemento $c \overline{\varepsilon} F$ existe um filtro irredutível C que contém F sem conter c. Isto mostra que F é intersecção de filtros irredutíveis.

4.8 — *DEFINIÇÃO. Um filtro próprio* P *diz-se primo se a condição* $a \vee b \varepsilon P$ *implica que* $a \varepsilon P$ *ou* $b \varepsilon P$.

4.9 — *TEOREMA. Em todo reticulado todo filtro primo é irredutível* (G. Birkhoft e O. Frink [1948]).

Dem. Seja P um filtro primo e suponhamos que existem dois filtros F_1, F_2 tais que $P = F_1 \cap F_2$.

Se $P \neq F_1$ existe um elemento f_1 tal que (1) $f_1 \varepsilon F_1$ (2) $f_1 \overline{\varepsilon} P$



Se $P \neq F_2$ existe um elemento f_2 tal que (3) $f_2 \varepsilon F_2$, (4.º) $f_2 \overline{\varepsilon} P$ então como (5) $f_1 \leq f_1 \vee f_2$ (6) $f_2 \leq f_1 \vee f_2$ De (1) e (5) resulta (7) $f_1 \vee f_2 \varepsilon F_1$ De (2) e (6) resulta (8) $f_1 \vee f_2 \varepsilon F_2$ então (9) $f_1 \vee f_2 \varepsilon F_1 \cap F_2 = P$ e como P é primo de (9) resulta $f_1 \varepsilon P$ (o que contradiz (2)) ou $f_2 \varepsilon P$ (o que

(1) Se A tem último elemento então F não pode ser vazio.

contradiz (4)). Podemos portanto afirmar que $P=F_1$ ou $P = F_2$ e P é irredutível.

4.10 — *TEOREMA. Num reticulado distributivo todo filtro irredutível e primo* (G. Birkhoft e O. Frink [1948]).

Dem. Seja I um filtro irredutível e suponhamos que I não é primo, então existem dois elementos a, b tais que 1.°) $a \vee b \in I$, 2.°) $a \bar{\in} I$, 3.°) $b \bar{\in} I$.

Seja F_a o filtro gerado por I e a; para que $x \in F_a$ é necessário e suficiente que exista um elemento $i \in I$ tal que (1) $i \wedge a \leq x$.

Seja F_b o filtro gerado por I e b; para que $x \in F_b$ é necessário e suficiente que exista um elemento $j \in I$ tal que (2) $j \wedge b \leq x$.

É claro que (3) $a \in F_a$ e (4) $b \in F_b$.

Por outro como $I \subseteq F_a$ e $I \subseteq F_b$ então (5) $I \subseteq F_a \cap F_b$. Provemos agora que (6) $F_a \cap F_b \subseteq I$. Para isso seja $x \in F_a \cap F_b$ então existem $i, j \in I$ tais que

$$i \wedge a \leq x \qquad j \wedge b \leq x$$

logo

$$i \wedge j \wedge a \leq x \qquad i \wedge j \wedge b \leq x$$

É claro que $k = i \wedge j \in I$. Então

$$k \wedge a \leq x \qquad k \wedge b \leq x$$

logo (7) $k \wedge a \vee k \wedge b = k \wedge (a \vee b) \leq x$ e como $k \in I$ e $(a \vee b) \in I$, teremos (8) $k \wedge (a \vee b) \in I$. De (7) e (8) resulta $x \in I$ e (6) está demonstrada. De (5) et (6) resulta.

$$I = F_a \cap F_b$$

com $F_a \neq I$ e $F_b \neq I$, o que é impossível porque I é irredutível. Esta contradição mostra que I é primo como queríamos demonstrar.

4.11 — *TEOREMA. Num* reticulado *distributivo todo filtro é intersecção de filtros primos* (Stone (M.) [1937]).

Dem. Consequência de 4.7 e 4.10

4.12 — *TEOREMA. Se todo filtro irredutível de um reticulado é primo então o reticulado é distributivo.*

Dem. De $b \leq b \vee c$ e $c \leq b \vee c$ resulta $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$ e $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$ e portanto

(I) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

Suponhamos que

(II) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) < a \wedge (b \vee c)$

Considero o filtro principal $F(a \wedge (b \vee b c))$ por (II) e Teor 4.7 existe um *filtro irredutível* tal que

(1) $F(a \wedge (b \vee c)) \subseteq I$

(2) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \bar{\in} I$

De (1) resulta (3) $a \wedge (b \vee c) \in I$ logo (4) $a \in I$ e (5) $b \vee c \in I$, como I é irredutível então I é primo, e de (5) resulta que ou (5') $b \in I$ ou (5") $c \in I$.

Suponhamos que $b \in I$ então de (4) (5') resulta $a \wedge b \in I$ e como

$$a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

podemos afirmar que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \in I$ o que contradiz (2).

De modo análogo a hipótese (5") conduz a uma contradição e portanto (II) não pode ser verificada e teremos

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$$

e o reticulado é distributivo (*).

Recordemos ainda que

4.13 — *TEOREMA. Para que num reticulado A todo o filtro seja intersecção de filtros primos é necessário e suficiente que o reticulado seja distributivo.*

Este resultado foi anunciado em A. Monteiro [1947] e demonstrado em A. Monteiro [1948].

Recordemos o seguinte *Teorema Fundamental* na teoria dos reticulados distributivos.

4.14 — *Todo reticulado distributivo A é isomorfo a um anel de conjuntos* (Garrett Birkhoft [1933]).

Dem. Se A tem um só elemento então A é isomorfo ao anel de conjuntos *A* formado pelo conjunto vazio ϕ. Se A tem mais do que um elemento, seja E a família dos filtros primos de A. Para $a \in A$ ponhamos

$$s(a) = \{P \in E \,/\, a \in P\}$$

É claro que s(a) é uma parte de E.

Verifica-se imediatamente que

(1) $s(a \wedge b) = s(a) \cap s(b)$

(2) $s(a \vee b) = s(a) \cup s(b)$

Seja $\mathbf{A} = \{s(a);\ a \in A\}$. De (1) e (2) resulta que $\mathbf{A}$ é um anel de conjuntos e que s é um homomorfismo de A sobre $\mathbf{A}$. Para ver que s é um isomorfismo basta provar que s é biunívoca.

Sejam $a, b \in A$ tais que $a \neq b$ isto é ou (1) $a \not\leq b$ ou (2) $b \not\leq a$.

No caso (1) F(a) é um filtro que não contém b, logo pelo teorema 4.11 existe um filtro primo P que contém F(a) sem conter b. Como $a \in P$ e $b \bar{\in} P$ então

(*) K. ISEKI [1952] demonstrou este teorema supondo que A tem primeiro elemento.

$s(a) \neq s(b)$. No caso (2) a demonstração é análoga e podemos afirmar que s é biunívoca [1].

4.15 — *TEOREMA. Seja A um reticulado distributivo. Para que* $a \in A$ *seja irredutível* (primo) *é necessário e suficiente* que o filtro principal F(a) seja respectivamente irredutível (primo) (G. Birkhoft — [1940]).

Tendo em conta este resultado vê-se que os teoremas 3.2, 3.5 são casos particulares dos teoremas 4.7 e 4.12.

A noção de ideal é *dual* da noção de filtro e a sua definição é a seguinte

4.16 — *DEFINIÇÃO. Uma parte I de um reticulado A diz-se um ideal de A se* I_1) $I \neq \phi$; I_2) *Si* $a \in I$ *e* $b \leq a$ *então* $b \in I$; I_3) *Si* $a, b \in I$ *então* $a \vee b \in I$. A todas as definições que indicamos para os filtros (primos, irredutíveis), correspondem definições duais para os ideais e a cada propriedade válida para os filtros corresponde uma propriedade dual válida para os ideais, que nos abstemos de enunciar.

Recordemos solamente que

4.17 — *TEOREMA. Para que um filtro P de um* reticulado A seja um filtro primo é necessário e suficiente que o seu complemento $C\,P = A - P = I$ seja um ideal, cuja demonstração é imediata.

5 — ALGEBRAS DE MORGAN

Vamos agora introduzir noções necessárias para o estudo dos conjuntos graduados sob o ponto de vista da Algebra.

5.1 — *DEFINIÇÃO. Um sistema* $(A, \wedge, \vee, \sim)$ *formado por um conjunto não vazio A, duas operações binárias* $\wedge$, $\vee$ *e uma operação unária* $\sim$ *definidos sobre A, diz-se um reticulado de Morgan se são verificadas as seguintes condições:*

1.°) $(A, \wedge, \vee)$ *é um reticulado distributivo;*
2.°) *Operador* $\sim$ *(chamado de negação) verifica as duas igualdades*

$$M_1)\ \sim\sim x = x$$

$$M_2)\ \sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$$

Esta noção foi considerada pela primeira vez por GR. C. MOISIL (1935) (pág. 91). O estudo desta noção foi iniciado por J. Kalman [1958] [2], que obteve resultados muito importantes.

Notemos que de M_1) e M_2) resulta
$\sim(\sim x \wedge \sim y) = \sim\sim x \vee \sim\sim y = x \vee y$
e portanto

$$M_3)\ \sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$$

Em particular $x \vee y = \sim(\sim x \wedge \sim y)$.

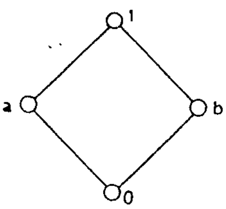
(1) Ver também Iseki [1950].
(2) Sob o nome de «distributive i — lattice».

A terminologia *Reticulado de Morgan* foi introduzida em A. Monteiro [1960] e é hoje geralmente adoptada.

5.2 — *DEFINIÇÃO. Um reticulado de Morgan A diz-se uma algebra de Morgan se A contém um último elemento 1* (isto é $x \vee 1 = 1$).

Ponhamos $\sim 1 = 0$. De $x \vee 1 = 1$
resulta $\sim x \wedge \sim 1 = \sim 1$, isto é
$\sim x \wedge 0 = 0$ ou substituindo x por $\sim x$: $x \wedge 0 = 0$
e portanto o é primeiro elemento de A.

Um exemplo importante de álgebra de Morgan é o reticulado distributivo cujo diagrama está indicado na Fig. 5.1. As tábuas das operações $\vee$, $\wedge$ e $\sim$ são as seguintes:



Algebra M 4
Fig. 5.1

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

x	$\sim x$
0	1
a	a
b	b
1	0

O leitor pode verificar que se trata de uma álgebra de Morgan.

As álgebras de Morgan foram estudadas por A. Bialynicki-Birula, H. Rasiowa [1957] e por A. Bialynicki-Birula [1957], sob o nome de álgebras quase booleanas.

Os primeiros autores indicavam a seguinte *construção para obter álgebras de Morgan.* Seja dado um conjunto não vacio E e uma involução de E sobre E, isto é uma aplicação φ de E sobre E tal que tal que $\varphi\ \varphi\ (x) = x$ para todo $x \in E$.

Para toda parte $X \subseteq E$ ponhamos

$$(*)\ \sim X = C\ \varphi\ (X)$$

então a família $A = 2^E$ de todas as partes de E agebrizada pelas operações de intersecção ($\cap$), reunião ($\cup$) e ($\sim$) é uma álgebra de Morgan o que se verifica sem dificuldades.

Toda sub-álgebra da álgebra de Morgan A que acabamos de indicar diz-se uma álgebra de Morgan de conjuntos

Consideremos um conjunto com dois pontos $E = \{a, b\}$ e seja φ definido por $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$.

Então $2^E = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. O diagrama destes conjuntos, ordenados pela relação de inclusão, está indicado na figura. A negação está definida de acordo com (*) por $\sim \phi = E$, $\sim E = \phi$, $\sim \{a\} = \{a\}$, $\sim \{b\} = \{b\}$. A álgebra assim obtida é uma álgebra de Morgan (que é de resto isomorfa à álgebra M4.)

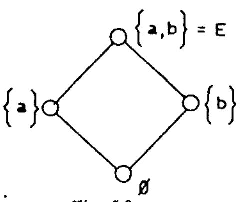


Fig. 5.2

Indiquemos o importante

5.3 — *TEOREMA. Toda álgebra de Morgan A é isomorfa a uma álgebra de Morgan de conjuntos* (Bialynicki-Birula e H. Rasiowa [1957].

Indiquemos a técnica usada por estes autores para demonstrar este teorema. Se A tem um só elemento então A é isomorfa ao conjunto vazio ϕ. Basta definir $\sim$ pela igualdade $\sim \phi = \phi$, para ver que o teorema é verdadeiro neste caso. Se A tem mais do que um elemento seja E a família de todos os filtros primos P de A. Consideremos a seguinte *transformação de Birula-Rasiowa*

$$\varphi(P) = A - \sim P = C \sim P.$$

donde $\sim P$ é o conjunto de todos os elementos da forma $\sim p$, para $p \varepsilon P$. Prova-se que $\varphi(P)$ é um filtro primo isto é $\varphi(P) \varepsilon E$ e ademais $\varphi\varphi(P) = P$. Está assim definida uma involução sobre E. Para $X \subset E$, define-se a negação de Morgan. $\sim X = C\varphi\ (P)$ e então $A = 2^E$ algebrizada pelas operações $\cap$, $\cup$, $\sim$ é uma álgebra de Morgan, e os autores provam que A é isomorfa a uma sub-álgebra de A. Ver também H. Rasiowa [1974]. Recordemos também que

5.4 - *TEOREMA. Toda álgebra de Morgan* A *com mais de um elemento é isomorfa a uma sub-álgebra de um produto cartesiano de álgebras M4* (Bialynicki-Birula [1957]).

Ver também H. Rasiowa [1974] pág. 471. Um resultado análogo foi demonstrado por J. Kalman [1958] para os reticulados de Morgan.

Sejam x_1, x_2 ..., x_n, ... variáveis individuais que podem tomar valores sobre uma álgebra de Morgan. Daremos o nome de forma polinomial das variáveis x_1, x_2, ... x_n, a toda a expressão que pode ser obtida usando as variáveis dadas x_1, ... x_n, os símbolos $\wedge$, $\vee$, $\sim$ e (parêntesis esquerdo e direito); (e): de acordo com as seguintes regras:

1.º) As variáveis x_1, ..., x_n são formas polinomiais.

2.º) Se p e q são formas polinomiais estão $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$ e $\sim p$ são formas polinominais.

Representaremos as formas polinomiais de n variáveis pelos símbolos $p(x_1, ..., x_n)$, $q(x_1, ... x_n)$ etc.

São exemplos de formas polinomiais de n variáveis: $(x_1 \wedge x_2)$; $(\sim x_1 \vee (\sim x_2 \wedge x_3))$, etc.

Dada uma álgebra de Morgan A e uma forma polinomial $p(x_1, ..., x_n)$ se substituirmos x_1, x_2, ..., x_n por elementos a_1, a_2, ..., a_n de A obteremos um elemento de A que representaremos por

$$p_A\ (a_1, ..., a_n)\ \varepsilon\ A$$

Nestas condições cada forma polinomial p dá origem a uma *aplicação* p_A de $A^n = A \times A \times ... \times A$ em A, que chamaremos uma *função polinomial* p_A $(x_1, ... x_n)$. Duas funções polinomiais $p_A\ (x_1, ... x_n)$ $q_A\ (x_1, ..., x_n)$ dizem-se *idênticas em A* se

$$p_A\ (a_1, ..., a_n) = q_A\ (a_1, ..., a_n)$$

para todas as escolhas de $(a_1, ..., a_n) \in A^n$. Escreveremos então mais simplesmente $p_A = q_A$.

Duas formas polinomiais dizem-se idênticas se para toda álgebra de Morgan A for $p_A = q_A$ *e então escreveremos simplesmente* $p = q$.

5.5 — *DEFINIÇÃO. Uma álgebra de Morgan* K *diz-se característica se as duas condições seguintes forem equivalentes.*

1.º) f e g *são idênticas, isto é* $f = g$.

2.º) $f_K = g_K$.

O autor mencionado anteriormente demonstrou o seguinte:

5.6 — *TEOREMA.* M4 *é uma álgebra característica para as álgebras de Morgan.*

Vejamos que as fórmulas polinomiais $f(x_1, x_2) = x_1 \wedge \sim x_1$ e $g(x_1 x_2) = x_1 \wedge \sim x_1 \wedge (x_2 \vee \sim x_2)$ não são idênticas. Com efeito em M4 tem-se

$f_{M4}(a, b) = a \wedge \sim a = a$

$g_{M4}(a, b) = (a \wedge \sim a) \wedge (b \vee \sim b) = a \wedge b = 0$

e portanto $f_{M4}\ (a,b) \neq g_{M4}\ (a,b)$ logo f e g não são idênticas isto é: $f \neq g$.

Isto significa que a igualdade

$$x_1 \wedge \sim x_1 = x_1 \wedge \sim x_1 \wedge (x_2 \vee \sim x_2)$$

não pode ser demonstrada a partir dos axiomas de uma álgebra de Morgan. Existe portanto um procedimento mecânico para averiguar se duas formas polinomiais são ou não idênticas.

Podemos dizer que uma forma polinomial $p(x_1, ..., x_n)$ é uma tese se $p_{M4}\ (x_1, ..., x_n) = 1$ para todos $x_1, ..., x_n \in$ M4. É fácil de ver que não há nenhuma forma polinomial que seja uma tese. Com efeito se dermos às variáveis $x_1, ..., x_n$ o valor a ε M4 então

$$p_{M4}(a, a, ..., a) = a$$

visto que a é invariante para as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$ já que $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$, $\sim a = a$.

É interessante notar que num reticulado de Morgan podemos defenir o operador de Sheffer

$$x/y = \sim x \wedge \sim y$$

Monteiro (L.) e Picco (D.) [1963] mostraram que as operações $\vee$, $\wedge$ e $\sim$ podem ser obtidas a partir do operador de Sheffer por meio das fórmulas

(I) $\sim a = a/a$ (II) $a \wedge b = (a/a) / (b/b)$

(III) $a \vee b = (a/b) / (a/b)$

e caracterizaram os reticulados de Morgan por meio de duas igualdades onde figura somente o operador de Sheffer.

Por outro lado Maronna (R.) [1964] caracterizou os reticulados de Morgan por meio de duas igualdades nas quais figuram somente os operadores $\vee$ e $\sim$.

Gastaminza (M. L.) e Gastaminza (S.) [1968] caracterizaram os reticulados de Morgan, tomando como operadores primitivos a implicação $a \to b = \sim a \vee b$ e a negação $\sim$.

Dado um reticulado distributivo finito A põe-se naturalmente o problema de saber se é possível definir sobre A um operador de negação $\sim$ que dê a A uma estrutura de álgebra de Morgan.

Como A é determinado, a menos de um isomorfismo, pelo conjunto ordenado π dos elementos primos de A é natural tratar de resolver este problema estudando π.

A este respeito demonstrámos o seguinte resultado.

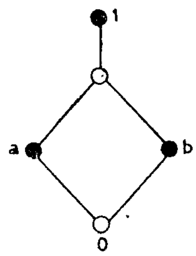
5.7 — *TEOREMA. Se A é um reticulado distributivo finito e $(\pi, \leq)$ o conjunto ordenado de todos os elementos primos de A, para que sobre A se possa definir uma estrutura de álgebra de Morgan é necessário e suficiente que exista uma involução ψ de π sobre π, isto é um anti-isomorofismo de π sobre π de período 2.* Diremos que o par (π, ψ) é o *sistema determinante* da álgebra de Morgan buscada. A partir de ψ determina-se a negação de Morgan $\sim$ por meio da fórmula válida para todo $x \in A$

$$\sim x = \vee \{p;\ \psi(p) \not\leq x\}$$

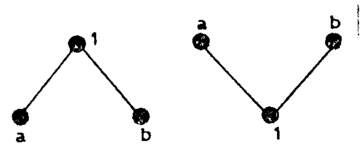
A. Monteiro [1960], [1963].

A demonstração deste teorema não foi ainda publicada, mas foi exposta num curso dado na Universidade Nacional do Sur (Bahia Blanca — Argentina) no 1.º semestre de 1962 (*).

Consideremos o reticulado distributivo A que tem o diagrama indicado na figura sseguinte, onde estão marcados em negro os elementos primos de A; {a, b, 1}. Representamos àparte o diagrama de π e o seu dual π^*.



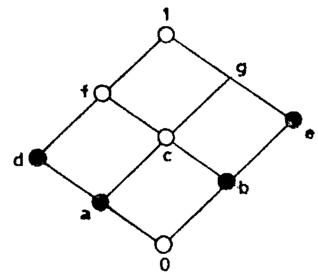
Reticulado A



π π*

Como π e π^* não são isomorfos então não existe nenhuma involução de π sobre π. Logo sobre A não pode definir-se uma estrutura de Algebra de Morgan.

Consideremos agora o reticulado distributivo com 9 elementos indicado no diagrama seguinte onde



Reticulado A

x	$\sim x$	$\approx x$
0	1	1
a	g	f
b	f	g
c	c	c
d	e	d
e	d	e
f	b	a
g	a	b
1	0	0

p	$\psi(p)$	$\varphi(p)$
a	d	e
d	a	b
b	e	d
e	b	a

estão marcados em negro os elementos primos de A. O diagrama de π está indicado na figura seguinte.

(*) A licenciada Isabel Lourciro, da Faculdade de Ciências de Lisboa, possui fotocópia das notas de curso, com a demonstração respectiva.

Neste caso existem duas involuções de π sobre π, ψ e φ dadas nas tábuas anexas. Isto significa que é possível definir sobre A duas negações de Morgan $\sim$ e $\sim$ dadas pelas tábuas seguintes de acordo com o teorema anterior.

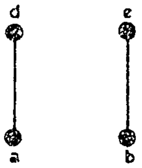


Diagrama de π

Involução ψ — Para obter $\sim a$ tenho que determinar o conjunto de todos os elementos primos p tais que $\psi(p) \not\leq a$; os primos em questão são a, b, e, logo

$$\sim a = a \vee b \vee e = g$$

De modo análogo se calculam as negações dos outros elementos.

Involução φ — Para obter $\sim a$ determino o conjunto de todos os elementos primos p tais que $\varphi(p) \not\leq a$, que é: {a, b, d} logo $\sim a = a \vee b \vee d = f$. De modo análogo se procede com os outros elementos.

Sobre o reticulado dado A existem então duas e só duas estruturas de álgebra de Morgan. Esta construção é importante para encontrar exemplos de Algebras de Morgan finitas.

Está pendente a resolução do seguinte problema:

Dado um conjunto ordenado finito π, encontrar um algoritmo que permita: 1.º) averiguar se existe alguma involução de π e no caso afirmativo. 2.º) Determinar todas as involuções de π.

António Diego encontrou um conjunto ordenado com 24 elementos, que admite um anti-isomorfismo de π sobre π, mas para o qual não existe nenhuma involução de π (resultado não publicado).

6 — AS ÁLGEBRAS DE KLEENE

As noções algébricas estudadas no parágrafo anterior são insuficientes para o estudo dos conjuntos graduados de Zadeh. Durante bastante tempo este e outros autores só puseram em evidência as regras de cálculo que valem numa álgebra de Morgan.

Recordemos que Kleene (St.) considerou em [1938] (*) um cálculo proposicional, com três conectivos $\wedge$, $\vee$, $\sim$, que tem por matriz característica um conjunto com 3 valores de verdade: o (falso), ½ (indecidível), 1 (verdadeiro), definidos pelas tábuas seguintes:

$\wedge$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

$\vee$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

x	$\sim$x
0	1
½	½
1	0

(*) Ver também [1952].

Observamos que o conectivo $\vee$ pode ser definido por meio de $\wedge$ e $\sim$ já que

$$a \vee b = \sim(\sim a \wedge \sim b)$$

como se verifica de imediato usando as tábuas anteriores. Basta portanto conhecer $\wedge$ e $\sim$.

Kleene indicava também tábuas para outros conectivos $\rightarrow$ (implicação) e $\longleftrightarrow$ (equivalência), mas não é necessário indicar essas tábuas visto que elas podem ser obtidas por meio das seguintes definições

$$a \rightarrow b = \sim a \vee b$$

$$a \longleftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$$

A este cálculo daremos o nome de *cálculo proposicional trivalente de Kleene* (em notação K 3).

A matriz que acabamos de indicar será representada pela notação M_3. Consideremos o conjunto $M_3 = \{0, ½, 1\}$ ordenado pela relação $\leq$, então como se trata de um conjunto totalmente ordenado, podemos afirmar que M_3 é um reticulado distributivo onde

$$a \wedge b = \min\{a,b\}$$
$$a \vee b = \max\{a,b\}$$

Assim se obtiveram as tábuas anteriormente indicadas para $\wedge$ e $\vee$.

Também se verifica que valem as regras de cálculo $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$ e $\sim\sim x = x$ e portanto o Sistema $(M_3, \wedge, \vee, \sim)$ é um reticulado de Morgan, mas trata-se de um reticulado de Morgan *muito particular*, já que se verifica a igualdade de J. Kalman

$$\text{(K)} \qquad x \wedge \sim x = x \wedge \sim x \wedge (y \vee \sim y)$$

que não é válida em todas as álgebras de Morgan; e que pode escrever-se mais simplesmente

$$\text{(K)} \qquad x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$$

para todo x e todo y. Esta situação conduz-nos à seguinte definição que se deve a J. Kalman [1958].

6.1 — *DEFINIÇAO. A um reticulado de Morgan* $(A, \wedge, \vee, \sim)$ *tal que*

$$\text{(K)} \qquad x \wedge \sim x = x \wedge \sim x \wedge (y \vee \sim y)$$

daremos o nome de reticulado de Kleene. Se num reticulado de Kleene é dado um elemento $1 \in A$ *tal que* $x \vee 1 = 1$ *diremos que o sistema* $(A, \wedge, \vee, \sim, 1)$ *é uma álgebra de Kleene e que 1 é o elemento designado.*

Pela fórmula $x \vee 1 = 1$ vê-se que 1 é o último elemento do reticulado distributivo A. Pode acontecer que um reticulado de Kleene contenha um último elemento 1. Dar um elemento 1 de A é no fundo dar um operador de zero variáveis, ao qual se dá multas vezes o nome de *elemento designado*. Nesta situação é preciso distinguir cuidadosamente entre os dois sistemas $(A, V, \wedge, \sim)$ e $(A, \wedge, V, \sim, 1)$. Isto tem muita importância na definição de sub-álgebra. Uma sub-álgebra de $(M_3, \wedge, V, \sim)$ e toda parte S não vazia de M_3 fechada para as operações $\wedge$, V, $\sim$. Assim $S = \{½\}$ é uma sub-álgebra de $(M_3, \wedge, V, \sim)$ e não é uma sub-álgebra do sistema $(M_3, \wedge, V, \sim, 1)$, visto que toda sub-álgebra deste sistema deve conter o elemento 1 (e portanto o elemento $0 = \sim 1$, portanto $S = \{½\}$ não é uma sub-álgebra deste segundo sistema.

Estas noções foram introduzidas por J. Kalman, na sua tese de doutoramento na Universidade de Harvard em 1955, mas os importantes resultados obtidos por este matemático de Nova Zelândia, só foram publicados em [1958], onde deu à noção de reticulado de Kleene o nome de «*normal i — lattice*». Devemos então distinguir o reticulado de Kleene M_3 da álgebra de Kleene M_3 (na qual se dá o elemento designado 1). Muitas vezes falaremos da Algebra M_3, sem fazer distinções que estarão implícitas no contexto.

Comecemos por indicar alguns exemplos:

EXEMPLO 1

Seja $A = (0,1)$ o conjunto de todos os números reais x tais que $0 < x < 1$ onde por definição

(1) $x \wedge y = \min\{x,y\}$
(2) $x \vee y = \max\{x,y\}$
(3) $\sim x = 1 - x$

então o sistema $< A, \wedge, V, \sim>$ é um reticulado de Kleene. Verifica-se de imediato que se trata de um reticulado de Morgan e como

$$x \wedge \sim x \leq ½ \leq y \vee \sim y$$

A igualdade (K) é verificada e estamos em presença de um reticulado de Kleene. $(A, \wedge, V, \sim)$, que não tem último elemento.

EXEMPLO 2

Seja R o conjunto dos números reais. Definamos as operações $\wedge$ e V pelas fórmulas (1) e (2), e ponhamos $\sim x = -x$

Então o sistema $(R, V, \wedge, \sim)$ é um reticulado de Kleene (já que $x \wedge \sim x \leq 0 \leq y \vee \sim y$) que não tem último elemento.

EXEMPLO 3

Seja $A = [0,1]$, onde as operações $\wedge$, V, $\sim$ estão definidas por (1), (2), (3) então o sistema $(A, \wedge, V, \sim, 1)$ é uma álgebra de Kleene.

EXEMPLO 4

Seja $A = \{0,1, ..., n\}$. Definamos as operações $\wedge$ e V pelas fórmulas (1) e (2) e ponhamos por definição para $x \in A$: $\sim x = n - x$; então o sistema $(A, \wedge, V, \sim)$ é um reticulado de Kleene e o sistema $(A, \wedge, V, \sim, n)$ é uma álgebra de Kleene.

EXEMPLO 5

Seja p um número primo e $A = \{p^0 = 1, p^1, p^2, ..., p^n\}$.

Ponham por definição para

$$x = p^\alpha \quad y = p^\beta \text{ (onde } 0 \leq \alpha \leq n, 0 \leq \beta \leq n)$$

$$x \wedge y = p^{\alpha \wedge \beta}, \text{ onde } \alpha \wedge \beta = \min\{\alpha,\beta\}$$

$$x \vee y = p^{\alpha \vee \beta} \quad \text{onde } \alpha \vee \beta = \max\{\alpha,\beta\}$$

e $\sim x = p^{n-\alpha}$ então o sistema $(A, \wedge, V, \sim, p^n)$ é uma álgebra de Kleene.

Observe-se que $x \wedge y$ é o máximo comum divisor de x e y e que $x \vee y$ é o menor múltiplo comum de x e y, além disso $\sim x = \frac{p^n}{p^\alpha} = \frac{p^n}{x}$, Então o sistema $< A, \wedge, V, \sim, p^n>$ é uma álgebra de Kleene que é de resto isomorfa ao exemplo 4.

Observe-se que neste reticulado a relação de ordem $\leq$ $(x = x \wedge y)$ coincide com a relação de divisibilidade (x divide y) e que A tem por último elemento p^n e por primeiro elemento $p^0 = 1$. Indiquemos o diagrama de A sobre a figura 6.1. Na figura 6.2 está indicado o diagrama do exemplo 4. Vê-se imediatamente que estas duas álgebras de Kleene são isomorfas. Note-se que na figura 6.1 $\sim p^o = \sim 1 = p^n$, $\sim p = p^{n-1}$, $\sim p^2 = p^{n-2}$, etc. e que na figura 6.2

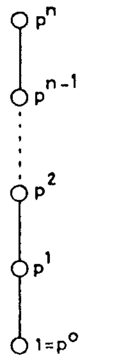


Fig. 6.1

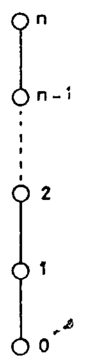


Fig. 6.2

$$\sim 0 = n, \ \sim 1 = n - 1, \ \sim 2 = n - 2, \text{ etc.}$$

EXEMPLO 6

Seja n um número natural cuja decomposição em factores primos é

$$n = p_1^{n1}\, p_2^{n2} \dots p_k^{nk}$$

e seja A o conjunto de todos os divisores x de n, isto é $x = p_1^{x1}\ p_2^{x2}\ \dots\ p_k^{xk}$ com $o \leq x_i \leq n_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

Se x, y ε A escrevemos x ∧ y para indicar o máximo comum divisor de x e y e x ∨ y para indicar o mínimo comum múltiplo de x e y. Se x é da forma indicada e $y = p_1^{y1} p_2^{y2} \dots p_k^{yk}$ e se

$$x_i \wedge y_i = \min\{x_i, y_i\}$$
$$x_i \vee y_i = \max\{x_i, y_i\}$$

então

$$x \wedge y = p_1^{x_1 \wedge y_1}\ p_2^{x_2 \wedge y_2} \cdots\ p_k^{x_k \wedge y_k}$$

$$x \vee y = p_1^{x_1 \vee y_1}\ p_2^{x_2 \vee y_2} \cdots\ p_k^{x_k \vee y_k}$$

são respectivamente o m. c. d. de x e y e o m. m. c. de x e y.

Então o sistema (A, ∧, ∨) é um reticulado distributivo que tem por último elemento n e por primeiro elemento $1 = p^o_1\ p^o_2 \dots p^o_k$. Ponhamos 1 = n. Definamos a operação de negação pela fórmula $\sim x = \dfrac{n}{x}$ (onde x ε A) então o sistema (A, ∧, ∨, ∼, 1) é uma *álgebra de Kleene* e (∼ 1) é o inteiro 1.

Veja I. M. Yaglóm [1977] onde se encontra este exemplo pág. 50, (exercício 6), pág. 30 (exemplo 4).

Este autor põe em evidência neste exemplo as reglas de cálculo que servem para definir uma álgebra de Morgan, mas não assinala a igualdade de Kalman (K).

Seja E dado um conjunto dado, não vazio, e A uma álgebra de Kleene arbitrária então o conjunto

$$P = A^E$$

de todas as aplicações de E em A algebrizadas ponto por ponto é uma álgebra de Kleene. [P, ∧, ∨ ∼, 1] (1).

Se tomarmos A = [0, 1] como no exemplo 3, então P é *a família Z dos conjuntos graduados de* Zadeh, *que é portanto uma álgebra de Kleene.*

Consideremos o exemplo particular dos divisores de 12, ordenados pela relação divide. O seu diagrama está indicado na fig. 6.3. A *negação* de acordo com o exemplo 6 será dada por $\sim 1 = \frac{12}{1} = 12$, $\sim 2 = \frac{12}{2} = 6$, $\sim 3 = 4$, $\sim 6 = 2$, $\sim 4 = 3$, $\sim 12 = 1$.

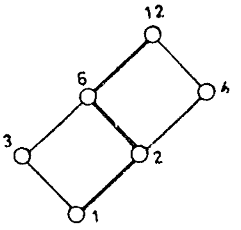


Fig. 6.3

O conjunto {1, 2, 6, 12} ordenado pela relação divide, cujo diagrama está indicado na fig. 6.4 é uma sub-álgebra da álgebra de Kleene da fig. 6.3, que tem por primeiro elemento 1 e por último elemento 12.

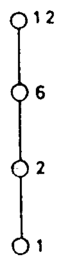


Fig. 6.4

EXEMPLO 7

Seja E um espacio topológico e C (E) o conjunto de todas as funções numéricas (2) continuas em todos os pontos de E. Dadas duas funções f, g ε C(E), consideremos as funções *(Continuas sobre E)* a = f ∧ g, b = f ∨ g definidas pelas fórmulas

$$a(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$
$$b(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Seja ∼ f a função continua definida pela igualdade

$$(\sim f)\ (x) = -f\ (x)$$

então o sistema (C (E), ∧, ∨, ∼) é um reticulado de Kleene, que não tem último elemento.

Põe-se naturalmente, como no caso das Algebras de Morgan, o problema de saber quais as identidades válidas em todas as álgebras de Kleene. Este problema foi resolvido por J. Kalman (1958), que demonstrou o seguinte resultado.

6.2 — *TEOREMA. Toda a álgebra (reticulado) de Kleene, com mais de um elemento é isomorfa (isomorfo) a uma sub-álgebra de um produto cartesiano de álgebras (reticulados)* M_3 (J. Kalman [1958] de donde resulta que:

(1) 1 representa a aplicação identicamente igual a 1.
(2) Isto é f(x) ε R, para todo x ε E.

6.3 — *TEOREMA. A álgebra (reticulado) M_3 é uma álgebra característica para as álgebras (reticulados) de Kleene.* (J. Kalman [1958]).

Isto significa que duas formas polinomiales de n variáveis $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$ são idênticas em todas as álgebras de Kleene si e solamente se elas forem idênticas em M_3 isto é se

$$p_{M_3}(x_1, \ldots, x_n) = q_{M_3}(x_1, \ldots, x_n)$$

Observando que M_3 é a matriz utilizada por Kleene [1938] para definir o cálculo proposicional K_3, vemos pelo Teorema 6.3 de Kalman, que as identidades que podem deduzir-se dos axiomas que caracterizam a noção de (reticulado) ou de álgebra de Kleene coincidem com as identidades que valem em M_3. Isto mostra que o conjunto das identidades que valem em M_3, pode ser caracterizada por um conjunto finito de axiomas, dados por igualdades, a partir das quais se deduzem todas as outras utilizando as regras da lógica. Para expressar esta situação diz-se que a Matriz M_3 introduzida por Kleene é *finitamente axiomatizável.*

Observemos que a álgebra de Kleene dos conjuntos graduados de Zadeh é uma álgebra de Kleene particular. Pode então por-se o problema de saber se não haverá alguma identidade válida em toda a álgebra de Kleene da forma

$$Z = [0,1]^E$$

onde E é um conjunto não vazio e que não seja válida em todas as álgebras de Kleene:

É claro que toda a identidade válida na álgebra de Kleene [0,1] é válida em Z, visto que Z é um produto cartesiano de álgebras [0,1] e reciprocamente.

Trata-se então de saber se há alguma identidade válida em [0,1] e que não sseja válida em todas as álgebras de Kleene.

Notemos que o conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ é uma sub-álgebra de [0,1] visto que o conjunto $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ é fechado para as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$ e contém o elemento 1. Vê-se em seguida que esta sub-álgebra de [0,1] é isomorfa a M_3.

Portanto toda a identidade válida em [0,1] é válida em M_3 e então, em virtude do teorema de Kalman é válida em todas as álgebras de Kleene e em particular em $Z = [0,1]^E$

Podemos portanto afirmar que

6.4 — *TEOREMA M_3 é uma álgebra característica para a classe das álgebras de Kleene da forma $Z = [0,1]^E$ onde E é um conjunto não vazio.*

Existe um problema análogo para o conjunto R dos números reais, sobre o qual se definem as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$, da maneira indicada no exemplo 2; temos então o reticulado de Kleene (R, $\vee$, $\wedge$, $\sim$). Dadas duas formas polinoniales $p(x_1, \ldots, x_n)$ e $q(x_1, \ldots, x_n)$. Sabemos que se

$$(1) \quad p_{M_3}(x_1, \ldots x_n) = q_{M_3}(x_1, \ldots, x_n)$$

então

$$p_R(x_1, \ldots, x_n) = q_R(x_1, \ldots, x_n)$$

visto que sendo R um reticulado de Kleene ele é isomorfo a um sub-álgebra de um produto de reticulados de Kleene M_3. Então se (1) vale então M_3 vale em qualquer produto cartesiano de reticulados M_3 e também em qualquer sub-reticulado de Kleene desse produto e portanto em R.

Pode perguntar-se se não haverá alguma identidade $f = g$ válida em R e que não seja válida em todos os reticulados de Kleene.

Observemos que o conjunto $T = \{-1, 0, 1\}$ é uma sub-álgebra do reticulado de Kleene (R, $\vee$, $\wedge$, $\sim$), cujo diagrama está marcado na fig. 6.5, ao lado do diagrama de M_3 (fig. 6.6). É claro que como reticulados M_3 e T são isomorfos. Observe-se que em T: $\sim 1 = -1$, $\sim 0 = 0$, $\sim(-1) = 1$ e em M_3

Fig. 6.5

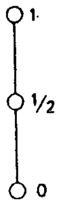


Fig. 6.6

$$\sim 1 = 0, \ \sim \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}, \ \sim 0 = 1$$

logo a transformação φ de T sobre M_3 definida por $\varphi(-1) = 0$, $\varphi(0) = \frac{1}{2}$, $\varphi(1) = 1$ é um isomorfismo de T sobre M_3. Portanto se vale a igualdade $f_R = g_R$ ela vale também no sub-reticulado de Kleene T de R e vale portanto em M_3 isto $f_{M_3} = g_{M_3}$. Logo as identidades que valem em R são as que valem em todos os reticulados de Kleene.

Dum modo mais geral:

6.5 · *TEOREMA. Se uma álgebra (reticulado) de Kleene A contém uma sub-álgebra (sub-reticulado de Kleene) isomorfa a M_3, então para que uma igualdade seja válida em A ($p_A = q_A$) é necessário e suficiente que ela seja válida em M_3 e será então válida em todas as álgebras (reticulados) de Kleene.* (J. Kalman).

Existe uma classe particular de álgebras de Kleene, que são as que verificam a igualdade

$$(1) \quad x \wedge \sim x = 0$$

de donde resulta

$$(2) \quad x \vee \sim x = 1$$

São as chamadas *álgebras de Boole* entre as quais figura a álgebra de Boole com dois elementos $M_2 = \{0,1\}$ definida pelas tábuas

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

x	$\sim x$
0	1
1	0

As igualdades (1) e (2) são verificadas em M_2 mas não são verificadas em M_3 visto que $\frac{1}{2} \wedge \sim \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$; $\frac{1}{2} \vee \sim \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$.

Observe-se que M_2 é uma sub-álgebra de M_3 e M_4 e que M_3 é isomorfa a uma sub-álgebra de M_4.

Os resultados mais importantes sobre as álgebras de Boole foram obtidos por M. H. Stone. [1934], [1935], [1936], [1937] entre os quais destacamos os seguintes:

6.5 — *TEOREMA. Toda álgebra de Boole, com mais de um elemento, é isomorfa a uma sub-álgebra de um produto cartesiano de álgebras M_2.*

6.6 — *TEOREMA. M_2 é uma álgebra característica para as álgebras de Boole;* o mesmo acontece com toda álgebra de Boole com mais de um elemento.

Para as álgebras de Kleene pode demonstrar-se que

6.7 — *TEOREMA. Toda álgebra de Kleene A, com mais de um elemento, que não seja uma álgebra de Boole, é uma álgebra característica para a classe das álgebras de Kleene* (J. Kalman).

É claro que a álgebra característica M_3 para a classe das álgebras Kleene é a menor de todas, porque uma álgebra de Kleene com dois elementos é a álgebra de Boole M_2, que não é característica para a classe das álgebras de Kleene.

O seguinte teorema permite averiguar se sobre um reticulado distributivo finito A dado, pode definir-se uma estrutura de álgebra de Kleene.

TEOREMA. Para que num reticulado distributivo finito A seja possível definir uma estrutura de Álgebra de Kleene é necessário e suficiente que sobre o conjunto ordenado (π, $\leq$) de todos os elementos primos de A exista uma involução ψ de π sobre π que verifique a condição.

(K) Para todo $p \in \pi$ ou $\psi(p) \leq p$ ou $p \leq \psi(p)$. A. Monteiro [1960], [1963].

Consideremos o reticulado distributivo A, indicado na figura 6.7, onde os elementos primos estão marcados em negro, os diagramas de π e o do seu dual π^* estão também indicados. O único isomorfismo ψ de π sobre π^* é ψ (c) = b, ψ (b) = c, ψ (a) = d, ψ (d) = a e como ψ tem período 2; pode definir-se sobre A uma única estrutura de Algebra de Morgan; mas sobre A não pode definir-se uma estrutura de álgebra de Kleene porque ψ (a) = d é incomparável com a.

7 — OS CONJUNTOS VAGOS DE GENTILHOMME

Indiquemos em primeiro lugar uma construção indicada por Gr. C. Moisil [1940] pág. 450, [1941](1), [1972] pág. 214).

Seja B uma álgebra de Boole e consideremos o conjunto A de todos os pares $x = (x_1, x_2)$ de elementos de B tais que $x_1 \leq x_2$.

Definamos as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$ sobre A da seguinte maneira, onde $x = (x_1, x_2) \in A$, $y = (y_1, y_2) \in A$

$$x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2)$$
$$x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2)$$
$$\sim x = (-x_2, -x_1); \quad 1 = (1,1)$$

onde $-b$ é o complemento booleano de $b \in B$. Então Moisil provou que

7.1 — *O SISTEMA* (A, $\wedge$, $\vee$, 1) *é uma álgebra de Morgan;* o que é fácil de verificar.

Podemos mesmo afirmar que

7.2 — *O SISTEMA* (A, $\wedge$, $\vee$, 1) *é uma álgebra de Kleene.*

O objectivo de Moisil era construir um modelo algébrico do cálculo proposicional trivalente de Lu-

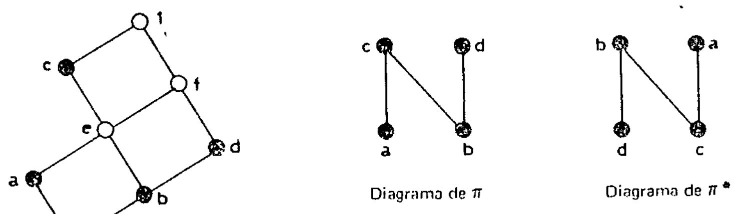


Fig. 6.7

(1) Ver também A. Rose [1950].

siewicz e por isso definia sobre A uma outra operação μ dada pela fórmula

$$\mu x = \mu (x_1, x_2) = (x_2, x_2)$$

que vamos deixar de lado.

A demonstração de 7.1 e 7.2 obtém-se por cálculos elementares.

Y. Gentillome na sua tese de doutoramento [1967] e em [1968], tendo em vista aplicações à linguística, considera uma construção análoga. Seja dado um conjunto fixo E e seja $B = 2^E$ o conjunto de todas as partes de E que é uma álgebra de Boole particular.

Então este autor dá o nome de *Conjunto vago* de E a um par $X = (X_1, X_2)$ de sub-conjuntos de E tais que

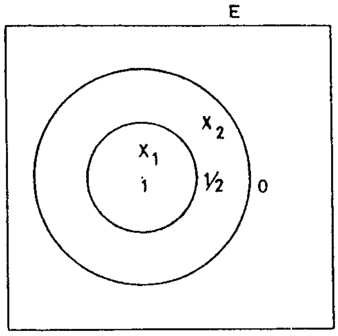


Fig. 7

$X_1 \subset X_2$ e chama X_2 a *zona de extensão máxima* e X_1 a *zona de extensão mínima* do conjunto vago X. Ao conjunto $X_2 - X_1 = X_2 \cap CX_1$ dá o nome de *zona vaga de X*.

Este autor algebriza a família V de todos os conjuntos vagos, como o fez Moisil em 1940, assinalando que valem as regras de cálculo que usámos para definir uma álgebra de Morgan. Observemos que os pares

$$O = (\phi, \phi) \quad 1 = (E, E)$$

são o primeiro e último elemento da Algebra de Morgan $\langle V, \cap, \cup, \sim, 1 \rangle$. As operações $\cap$ $\cup$ (intersecção e união) correspondem às operações $\wedge$ e $\vee$ indicadas no caso mais geral considerado por Moisil. Entretanto Gentillome e Moisil, não assinalam que o sistema obtido é uma álgebra de Kleene.

Seja $X = (X_1, X_2)$ um conjunto vago do universo E. Escreveremos $p \varepsilon X$ (onde $X \subseteq E$) para indicar que «o ponto p *pertence ao conjunto* X». Usaremos a notação $p \in X$ para indicar que *«o ponto p pertence ao conjunto vago* $X = (X_1, X_2)$». Vamos usar a lógica trivalente de Kleene onde há três valores lógicos 0, ½, 1. Usaremos a notação $v(p \in X)$ para indicar o valor lógico do enunciado «$p \in X$».

De acordo com Moisil [1941](¹) poremos por definição

$$(1) \quad v(p \in x) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \varepsilon X_1 \\ \tfrac{1}{2} \text{ se } p \varepsilon X_2 - X_1 \\ 0 \text{ se } p \bar{\varepsilon} X_2 \end{cases}$$

Sabemos que se $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$ são dois conjuntos vagos de E, a sua intersecção está definida por

$$X \cap Y = (X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2)$$

então pela definição anterior

$$v(p \in X \cap Y) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \varepsilon X_1 \cap Y_1 \\ \tfrac{1}{2} \text{ se } p \varepsilon X_2 \cap Y_2 - (X_1 \cap Y_1) \\ 0 \text{ si } p \bar{\varepsilon} X_2 \cap Y_2 \end{cases}$$

Dum modo geral dado um conjunto vago X representemos por $V(X)$ o conjunto dos pontos $p \varepsilon E$ tais que $v(p \in X) = 1$, por $T(X)$ o conjunto dos pontos $p \varepsilon E$ tais que $v(p \in X) = ½$ e $F(X)$ o conjunto dos pontos $p \varepsilon E$ tais que $v(p \in X) = 0$.

É claro que pela fórmula (1) temos

$$(e) \quad V(X) = X_1; \quad T(X) = X_2 - X_1, \quad F(X) = C\, X_2$$

Os conjuntos $V(X)$, $T(X)$, $F(X)$ são disjuntos dois a dois e a sua reunião é

$$V(X) \cup T(X) \cup F(X) = E \text{(²)}$$

A função $v(p \in X)$ definida sobre E e tomando seus valores no conjunto $M_3 = \{0, ½, 1\}$ de acordo com a fórmula (1) daremos o nome de *função característica do conjunto vago X*, e escreveremos $K(X)$.

Reciprocamente seja dada uma aplicação f de E em M_3, e seja $V(f) = f^{-1}(1)$, $T(f) = f^{-1}(½)$, $F(f) = f^{-1}(0)$, então existe um e um só conjunto vago $X = (X_1, X_2)$ que tem por função característica a função dada f, com efeito: ponhamos $X_1 = V(f)$ e $X_2 = V(f) \cup T(f)$ então o conjunto vago: $X = (X_1, X_2)$ tem por função característica a função dada f, isto é $f = K(X)$.

Temos assim por um lado a álgebra de Kleene V de todos os conjuntos vagos sobre o universo E e por outro lado a álgebra de Kleene $F = M_3^E$ de todas as aplicações de E em M_3 algebrizadas ponto por ponto.

A este respeito podemos afirmar que

(¹) Moisil introduziu esta ideia no estudo das álgebras de Lukasiewicz trivalente em [1941] e no caso dos conjuntos vagos em [1972-5].

(²) Entretanto os conjuntos V(X), T(X), F(X) não formam uma tripartição de E porque alguns deles podem ser vazios.

7.1 — *TEOREMA. As álgebras de Kleene* V *e* F *são isomorfas.*

Para demonstrar este teorema basta provar que se fizermos corresponder a cada conjunto vago X a sua função característica $K(X)$, definida anteriormente, então

1.°) K é uma aplicação biunívoca de V sobre F

2.°) $K(X \cap Y) = K(X) \wedge K(Y)$

3.°) $K(\sim X) = \sim K(X)$

4.°) $K(1) = 1$, onde $1 = (E, E,)$ é o último elemento de V e 1 é a função identicamente igual a 1 sobre E.

Usando a regra de cálculo

$$X \cup Y = \sim(\sim X \cap \sim Y)$$

de 2.°) e 3.°) deduz-se

5.°) $K(X \cup Y) = K(X) \vee K(Y)$

A demonstração faz-se mediante cálculos que serão considerados mais ou menos simples, segundo a experiência do leitor.

Ilustremos este teorema com um exemplo simples. Tomemos um universo $E = \{1, 2\}$ com dois pontos. A família $B = 2^E$ de todas as partes de E está indicada no diagrama da fig. 7.2. A família V

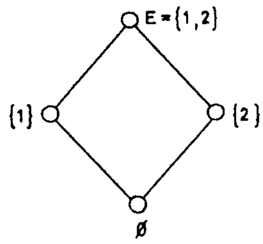


Fig. 7.2

de todos os conjuntos vagos definidos sobre E está dada por

$$O = (\phi, \phi),\ A = (\phi, \{2\}$$

$$B = (\phi, \{1\},\ C = (\phi, E)$$

$$D = (\{2\}, \{2\}),\ E = (\{1\}, \{1\})$$

$$F = (\{2\}, E),\ G = (\{1\}, E)$$

$1 = (E, E)$ (*). A relação de ordem entre dois conjuntos vagos $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$ define-se pelas duas condições $X_1 \subseteq Y_1$, e $X_2 \subseteq Y_2$. Então o diagrama de V está indicado na figura 7.3.

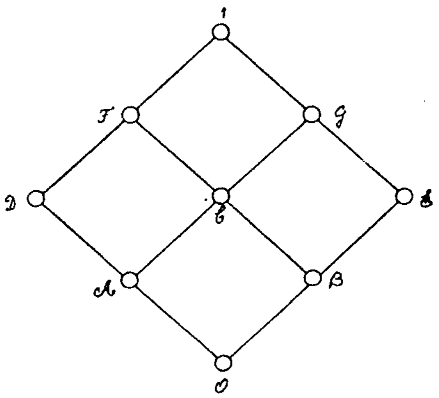


Fig. 7.3

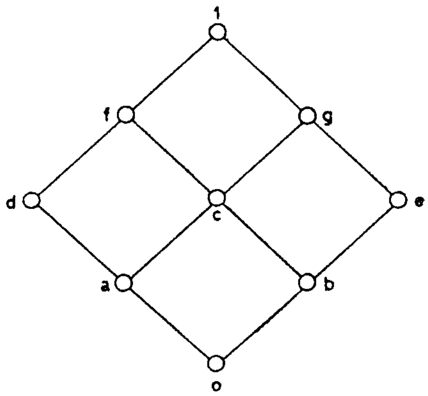


Fig. 7.4

Para representar uma função $f \in K_3$ escreveremos $f = (f_1, f_2)$ onde $f_1 = f(1)$, $f_2 = f(2)$.

As diversas funções características são dadas por $K(O) = (0,0) = o$ $K(A) = (0, \frac{1}{2}) = a$, $K(B) = = b = (\frac{1}{2}, 0)$ $K(C) = c = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $K(D) = d$ $(0,1)$, $K(E) = e = (1,0)$ $K(F) = f = (\frac{1}{2}, 1)$, $K(G) = = g = (1, \frac{1}{2})$, $K(1) = (1,1) = 1$.

As funções características ordenam-se ponto por ponto, isto é: se $h = (h_1, h_2)$ e $j = (j_1, j_2)$ então $h \leq j$ só e somente se $h_1 \leq h_2$ e $h_2 \leq j_2$. O diagrama

(*) Observe que os conjuntos vagos O, D, E e 1 têm uma zona vaga vazia.

de M_3^E está indicado na figura 7.4, os reticulados distributivos das figuras 7.3 e 7.4 são isomorfos.

Nestes dois reticulados a operação de negação está dada pelas tábuas:

X	$\sim X$	$K(X)$	$\sim K(X)$
O	1	o	1
A	G	a	g
B	F	b	f
C	C	c	c
D	E	d	e
E	D	e	d
F	B	f	b
G	A	g	a
1	O	1	o

Pela simples inspecção das figuras 7.3 e 7.4 verifica-se que K é um isomorfismo de V sobre K_3^E.

Este teorema permite afirmar que se o universo E tem n pontos então a família V de todos os conjuntos vagos tem 3^n elementos distintos.

Recordemos que de acordo ao Teorema 6.2 toda álgebra de Kleene A é isomorfa a uma sub-álgebra da álgebra de Kleene

$$F = M_3^E$$

onde E é um conjunto convenientemente escolhido. Pelo teorema 7.3 sabemos que F_3 é isomorfa à álbra $\tilde{V}$ de todos os conjuntos vagos definidos sobre o universo E e portanto *toda álgebra de Kleene A é isomorfa a uma sub-álgebra de* V(1). Podemos portanto afirmar que a álgebra de Kleene considerada por Zadeh

$$Z = [0,1]^E$$

é isomorfa a uma sub-álgebra da álgebra V de todos os conjuntos vagos definidos sobre um universo E* convenientemente escolhido.

8 — ÁLGEBRAS LIVRES E INJECTIVAS

A noção de álgebra livre tem uma grande importância. Seja A uma álgebra de Morgan. Seja G uma parte de A, diz-se que *G é um conjunto de geradores de A* se A for a menor sub-álgebra de A que contém G.

Diz-se que G é *um conjunto de geradores livres de A*, se dada uma álgebra de Morgan A' que tem um conjunto G' de geradores tal que a potência de G' é igual ou menor que a potência de G, então dada uma aplicação unívoca f de G sobre G' existe um homomomorfismo h de A sobre A', que é uma extensão de f, isto é para $g \in G$: $h(g) = f(g)$.

Uma *álgebra de Morgan A diz-se livre se tem um conjunto G de geradores livres.*

As álgebras de Morgan com um conjunto G de geradores livres de potência dada e foram descritas por O. Chateaubriand e A. Monteiro [1969].

No caso particular em que c é um número natural n então a álgebra de Morgan livre com n geradores livres L(n) é finita.

Pela própria definição L(n) é *a maior álgebra de Morgan com n geradores.* Representemos por N(X) o número de elementos do conjunto X. Sabe-se que

$$N(L(1)) = 6 \quad N(L(2)) = 168$$

Mas não se conhece uma fórmula que dê o número N(L(n)).

Para o caso das álgebras de Kleene livres cuja definição é análoga tem-se

$$N(L(1)) = 6 \quad N(L(2)) = 84$$

Este último resultado foi indicado por J. Berman e Ph. Dwinger, num importante trabalho no qual dão uma descrição das álgebras de Kleene com c geradores livres.

R. Cignoli, num trabalho não publicado, indicou uma construção geométrica das álgebras de Kleene com c geradores livres, usando, nas suas linhas gerais, a técnica usada em O. Chateaubriand e A. Monteiro [1969].

No caso particular dos reticulados de Kleene (onde não se postula a existência de um último elemento) tem-se

$$N(L(1)) = 4; \qquad N(L(2)) = 82$$ (2)

Daqui resulta em particular que dadas duas funções numéricas contínuas num espaço topológico E (por exemplo na recta) — veja Exemplo 7 — então 82 é o número máximo de funções contínuas que podem obter-se a partir de f e g efectuando as operações ∧, ∨ e ∼. Não se conhece uma fórmula que dê o número N(L(n)) no caso dos reticulados de Kleene.

(1) Este resultado generaliza um resultado análogo obtido por Moisil [1941] para as álgebras de Lukasiewicz trivalentes.

(2) Este resultado também foi obtido usando o computador do Lab. de Física e Energia Nuclear pela licenciada Maria Manuel Costa Freitas.

Acontece que entre alguns dos geradores de uma álgebra de Morgan pode existir uma relação de *ordem* (por exemplo $g_1 \leq g_2$).

A determinação das *álgebras de Morgan livres sobre um conjunto ordenado* $(G, \leq)$ *de geradores* foi obtida por L. Monteiro [1967], [1974].

Uma *álgebra de Morgan I* (ou de Kleene) diz-se *injectiva* se dada 1.º) uma álgebra A; 2.º) uma sub-álgebra S de A; 3.º) um homomomorfismo h de S em I; então existe um homorfismo H de A em I que é uma extensão de h, isto é: $H(s) = h(s)$ para todo $s \in S$.

As álgebras de Morgan e de Kleene injectivas foram determinadas por R. Cignoli [1975].

Um problema que seria importante resolver é o seguinte: dada um reticulado de Morgan (ou de Kleene) finito A, determinar o menor número de elementos de A que geram A; um problema análogo foi resolvido para os reticulados distributivos finitos (A. Monteiro, [1968]).

9 — ÁLGEBRAS CENTRADAS

Daremos o nome de centro de um reticulado de Morgan a todo elemento c tal que $\sim c = c$. A álgebra K_1 tem dois centros a e b. J. Makinson observou [1] que um reticulado de Kleene A não pode ter mais do que um centro; com efeito si c e c' são centros de A então $c = c \wedge \sim c \leq c' \vee \sim c' = c'$ isto é $c \leq c'$ e do modo análogo se prova que $c' \leq c$ logo $c = c'$. Mas é claro que existem reticulados de Kleene que não têm nenhum centro como se vê nas figuras 6.3 e 6.4.

Recordemos os reticulados de Kleene considerados anteriormente no §6: o *Exemplo 1* tem por centro ½; o Exemplo 2 tem por centro 0, etc. A álgebra de Kleene V dos conjuntos vagos sobre um universo E, tem por centro $C = (\phi, E)$.

Se na definição de uma álgebra (ou reticulado) de Kleene A se postula que existe um elemento c tal que $\sim c = c$, diz-se que A é uma álgebra (reticulado) de Kleene centrada[2] (centrado). Seria importante determinar as álgebras de Kleene centradas com um número finito de geradores livres.

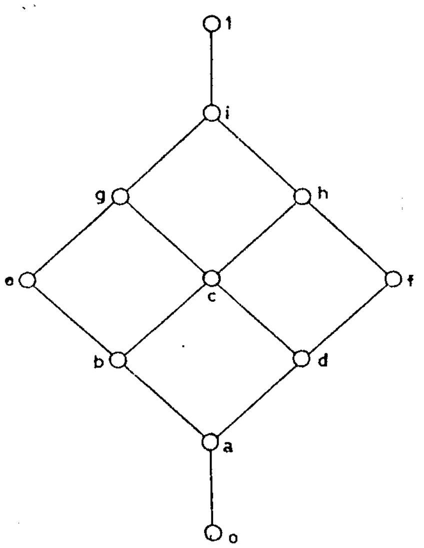


Fig. 9.1

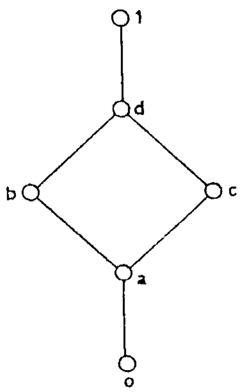


Fig. 9.2

A álgebra de Kleene centrada com um gerador livre tem 11 elementos cujo diagrama está indicado na figura 9.1. A negação de Morgan está dada por $\sim 0 = 1$, $\sim a = i$, $\sim b = h$, $\sim d = g$, $\sim c = c$ $\sim f = e$. A lei da dupla negação $\sim\sim x = x$ permite obter a negação dos restantes elementos. O gerador livre é f ou e. Este resultado foi obtido com cálculos manuais. Enquanto que a álgebra de Kleene com um gerador livre indicada na figura 9.2 tem 6 elementos. [A negação de Morgan está dada por $\sim 0 = 1$, $\sim a = d$, $\sim b = c$].

Não se conhece o número de elementos das álgebras com n geradores livres, para as seguistes classes de álbras:

1.º) reticulados distributivos; 2.º) álgebras de Morgan; 3.º) álgebras de Kleene; 4.º) álgebras de Kleene centradas, excepto nalguns com particulares 1.º) n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,; 2.º) n = 1, 2, 3; 3.º) n = 1, 2; 4.º) n = 1.

O *reticulado de Kleene centrado* com um gerador livre f tem 9 elementos. O seu diagrama obtém-se a partir da fig. 9.1 suprimindo os elementos 0 e 1.

O reticulado de Kleene das funções numéricas contínuas C(E) de um espaço topológico E. (Veja Exemplo 7, do § 6) tem por centro a função 0 (identicamente igual a 0). Então se consideramos C(E) como um reticulado de Kleene centrado podemos

(1) Ver L. Monteiro [1974-a].

(2) Teremos agora um sistema $(A, \wedge, \vee, \sim, 1, c)$ onde são dados dois elementos fixos 1 e c de A.

afirmar que efectuando as operações $\wedge$, $\vee$, $\sim$ a partir de uma função contínua dada f e da *constante* o podem obter-se *quando* muito 9 funções contínuas, mas é fácil encontrar exemplos em que esse número é menor que 9. Quem disponha de um computador pode determinar facilmente o reticulado de Kleene centrado com dois geradores livres, que terá mais que 82 elementos(1).

10 — A IMPLICAÇÃO

Uma álgebra de Kleene pode, ser enriquecida com a introdução de novas operações unárias, binárias, etc. e põe-se naturalmente o estudo das novas álgebras assim obtidas.

O operador de implicação $a \rightarrow b = \sim a \vee b$ definido nas álgebras de Morgan e de Kleene não têm propriedades interessantes. Existem entretanto outros operadores de implicação (de Lukasiewicz, intuionista, construtiva, etc.) que podem definir-se no segmento [0,1]; então $Z = [0,1]^E$ terá uma estrutura algébrica mais complexa. Se pomos

$$a \rightarrow b = \min\{1, 1 - a + b\} \quad (2)$$

temos um cálculo proposicional considerado pela primeira vez por J. Lukasiewicz [1930], que foi um dos fundadores das lógicas não clássicas. Entramos assim no campo dos lógicas polivalentes, que se encontra actualmente em pleno florescimento, em parte devido às suas aplicações (circuitos, programação, reconhecimento de formas etc.). Convém recordar neste momento, que foi J. Lukasiewicz que iniciou em [1920] — juntamente com Post [1921] — o estudo das lógicas polivalentes com a consideração de um cálculo proposicional tri-valente(3), motivado pelo seguinte enunciado *«amanhã haverá uma batalha no mar»*, que tinha sido considerado por Aristóteles. J. Lukasiewicz inquiria sobre o valor lógico do referido enunciado: verdadeiro? falso? ou desconhecido? Meditando sobre esta questão foi levado a considerar um cálculo proposicional trivalente (independentemente de qualquer questão prática). Trata-se de um acontecimento de grande importância na história da lógica e da matemática.

Em 1959 as escolas russa (V. I. Shestakov) e romena (Gr. C. Moisil) encontraram (ver Moisil [1969] aplicações das lógicas polivalentes à teoria dos circuitos e dos autómatos (para referências bibliográficas (ver Moisil [1972], pág. 782-786).

Para uma vista panorâmica de introdução às lógicas polivalentes (até 1969) ver Rescher [1969]. Um artigo importante sobre as relações entre as lógicas polivalentes e as ciências da computação deve-se a G. Epstein-C. Frieder e D. Rins [1974]. Um livro sobre algumas lógicas não clássicas consideradas sob o ponto de vista da álgebra foi escrito por Helena Rasiowa [1974]. Exemplos de aplicações da teoria dos conjuntos graduados de Zadeh encontram-se em A. Kaufman [1975].

Este artigo pode ser considerado como uma introdução e um programa para o estudo das álgebras de Morgan e de Kleene.

11 — BIBLIOGRAFIA

[1] — **Berman (J.) and Dwingor (Ph.)** — De Morgan algebras: free produts and free algebras. (pré-print).

[2] — **Bialynicki-Birula (A.)** [1957] — Remarks on quasi — Boolean Algebras «Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 615-619».

[3] — **Bialynicki-Birula (A.)** and **Rasiowa (H.)** [1957] — On the representation of quasi — Boolean Algebras «Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 259-261».

[1958] — On constructive falsity in the constructive logic with strong negation. «Colloquium Mathematicum 6 (1958), 287-291».

[4] — **Birkhoff (G.)** [1933] — On the combination of subalgebras. «Proc. Camb. Phil. Soc. 29 (1933), 441-464».
[1937] — Rings of Sets. «Duke Mathematical Journal, 3 (1937), 443-454».

[5] — **Birkhoff (G.)** [1948] — Lattice Theory. «American Mathematical Society, 1948».

[6] — **Birkhoff (G.)** and **Frink (O.)** [1948] — Representation of lattices by sets. «Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 299-316».

[7] — **Chateaubriand (O.)** et **Monteiro (A.)** [1969] — Les algèbres de Morgan libres. «Notas de Lógica Matemática» N.º 26 (1969). «Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahia Blanca».

[8] — **Cignoli (R.)** [1975] — Injective de Morgan and Kleene alebras. Proc. American Math. Soc. 47 (1975) 269-278.

[9] — **De Kerf (Joseph. L. F.)** [1975] — A Bibliography on fuzzy sets. «Journal of computational and Applied Mathematics. Vol. 1, n.º 3 (1975) — p. 205-210».

(1) O engenheiro César Alves do Laboratório de Cálculo Automático da Fac. de Ciências do Porto elaborou um programa que lhe permitiu determinar, em 24 segundos, a álgebra de Kleene centrada com 2 geradores livres cujo número de elementos é 195. Este resultado foi também obtido pela licenciada Maria M. C. Freitas.

(2) Sobre outros operadores de implicação ver De Luca (A.) e Termini (G.) [1970] [1972], Rasiowa [1974].

(3) Distinto do cálculo trivalente de Kleene [1938].

[10] — De Luca (A.) and Termini (S.) [1970]—Some algebraic properties of fuzzy sets (Abstract). «Notices of American Mathematical Society. 17 (1970) 944».

[1972] — Algebraic properties of fuzzy sets. «Journal of Mathematical Analysis and Applications 40 (1972) 373-386».

[11] — Gastaminza (M. L.) and Gastaminza (S.) [1968] — Caracterisation of the Morgan lattices by the operation of implication and negation. «Proc. Japan Acad. 44 (1968), 659-662».

[12] — Epstein (G.), Frieder (G.) and Ring (D.) [1974] — The development of multiple-valued logic as related to computer Science. «Computer» 7 (1974), 20-30.

[13] — Gentilhomme (Y.) [1967] — Étude structurale d'une terminologie. Essai methodologique. «Thèse soutenue à l'Ecole Pratique des Hautes Études. Paris 1967».

[1968] — Les ensembles flous en linguistique. «Cahiers de linguistique théorique et apliquée. Bucarest, V, 47 (1968)».

[14] — Iseki (Kiyosi) [1950] — Une condition pour qu'un lattice soit distributif. «C. R. de l'Académie des Sciences de Paris. 230 (1950) 1726-1727».

[1952]—Contribution to lattice theory. «Publ. Math. Debrecen 2 (1952), 194-203.

[15] — Kalman (J. A.) [1958] — Lattices with involution. «Transactions of American Mathematical Society 87 (1958), 485-491».

[16] — Kaufmann (A.) [1975] — Introduction à la théorie des ensembles flous. Tome 1. «Masson & Cie. Paris, 1975. Tome 2. Id. 1975. Tome 3 (en preparation)».

[17] — Kleene (St.c) [1938] — On notation for ordinals numbers. «J. of Simbolic Logic 3 (1938), 150-155».

[1952] — Introduction to Methamathematics. «Nort-Holland Pub. Co. Amsterdam 1952».

[18] — Lukasiewicz (J.) [1920] — On 3 — valued logic (em polaco). «Ruch Filosoficzny. 5 (1920) 169-171.

[1970]. Selected Warks edited by L. Borkowski North-Holland Pub. Co. Amsterdam. 1970.

[19] — Lukasiewicz (J.) and Tarski [1930] — Unterschungen über der Aussagenkalkül. «Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Classe III, vol. 23 (1930) pp. 1-21, 30-50». Tradução inglesa em Tarski [1956].

[20] — Maronna (A.) [1964] — A caracterization of Morgan lattices. «Portugalia Math. 23 (1964), 169-171». Preprint em «Notas de Lógica Matemática N.° 18».

[21] — Moisil (Gr. C.) [1935] — Recherches sur l'algèbre de la logique. «Ann. Sci. Univ. Jassy, 22 (1935), 1-117».

[1940] — Recherches sur les logiques non-chrysipiennes. «Ann. Sci. Université de Yassy 26 (1940) 431-466». Reproduzido em Moisil [1972] p. 195-252.

[1941] — Recherches sur les logiques non-chryipiennes. «Ann. Sci. Université Yassy. 27 (1941) 86-98». Repriduzido em Moisil [1972] p. 233-243.

[1942] — Logique modale. «Disquisitiones math et phys. Bucarest. II, 1 (1942) 3-98». Reproduzido em Moisil [1972] p. 341-431.

[1969] — Algebraic Theory of Switching circuits. «Pergamon Press. 1969».

[1972] — Essais sur les logigues non chrysipiennes. «Bucarest (1972) 820 pág.».

[1972-a] — La logique des concepts nuancées. Ver [1972], p. 157-163.

[1972-b] — Les ensembles flous et la logique à trois valeurs [1972], p. 99-103.

[22] — Monteiro (A.) [1947] — Sur l'Arithmétique des Filtres Premiers. «C. R. Acad. des Sciences 225 (1947), 846-848».

[1948] — Filtros e Ideais 1. «Notas de Matemática N.° 2. Rio de Janeiro 1948. Filtros e Ideais 2. Notas de Matemática n.° 5. Idem».

[1960]—Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique. «Anais Acad. Brasileira de Ciências» 52 (1960), 1-7».

[1962] — Construcción de los Algebras de Nelson finitas. Resumo de uma comunicação apresentada à la U. M. A.) «Révista da Unión Matematica Argentina 19 (1962), 361.

[1963] — Construction des algèbres de Nelson finies. «Bull. de l'Académie Polonaise des Sciences 11 (1963) 355-358».

[1968] — Generadores de reticulados distributivis finitos. «Actas del Simposio Panamericano de Matemática Aplicada. Buenos Aires. 1968, 465».

[23] — Monteiro (L.) [1967] — Une construction du réticulé distributif libre sur un ensemble ordonné. «Colloquium Mathematicum. 17, fasç. 1 (1967), 23-27».

[1974] — Une construction des algèbres de Morgan libres sur un ensemble ordonné. «Reports en Mathematical Logic. 3 (1974), 31-36».

[1974-a] — Algebras de Lukasiewicz monádicas (Tése de Doutoramento). «Notas de Lógica Matemática n.º 32 (1974). Instituto de Matemática». 108 pág.

[24] — Monteiro (L.) et Picco(D.) [1963] — Les réticulés de Morgan et l'opération de Sheffer. «Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sciences. Série Sc. Math. Astr. et Phys. 11 (1963) 355-358».

[25] — Post (E.) [1921] — Introduction to general theory of elementary propositions. Amer. J. Math. 43 (1921) 163-185.

[26] — Rescher (N.) [1969] — Many — Valued Logic. «McGraw-Hill Co. New York. 1969, 359 pág.».

[27] Rasiowa (H.) [1974] — An algebraic approach to non-classical Logics «North-Holland Publish Co-Amsterdam. 1974».

[28] — Rose (A.) [1950] — A lattice-theoretic caracterization of three valued logic. «J. London Mathematical Soc. 25 (1950), 225-259».

[29] — Sholander (M.) [191] — Postulates for distributive lattices. «Canadian Journal of Mathematics 3 (1951), 28-30».

[30] — Stone (M. M.) [1934] Boolean Algebres and their application to topology. «Proc. Nat. Acad. Sci 20 (1934) 197-202». 103-105».

[1935] — Subsumption of Boolean algebras under the theory of rings. «Ihid. 21 (1935),

[1936] — The theory of representation for Boolean algebras. «Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936) 37-111».

[1937] Topological representations of distributive lattices and Brouwerian algebras. «Cas. Mat. Fys 67 (1937), 1-25.

[31] — Tarski (Alfred) [1956] — Logic, Semantics Methamathematics. Editado por «J. H. Woodger. Oxford. Clarendon Press». 1956.

[32] — Yaglóm (I. M.) [1977] — Algebra Extraordinária. «Lecciones Populares de Matemáticas. Editorial MIR. Moscú. 1977».

[33] — Zadeh (L. A.) [1965] — Fuzzy Sets. «Information and Control 8 (1965) 338-353».

[1965] — Fuzzy Sets and systems. «Proc. of the Symposium on System Theory. Polytechnic Press of the Institute of Brooklyn. New York. 1965. (pág. 29-37)».

[1968] — Fuzzy algorithms. «Information and Control 12 (1968), 94-102».

[1969-1974] — «Ver os n.os 176-200 da lista bibliográfica indicada em De Kerf [1975].