INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 40 Bis

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

Poner tapas amarillas

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 40 Bis

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - B8000CPB - BAHIA BLANCA

- 1994 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 40 Bis

Recopilación Bibliográfica Sobre Diferenciabilidad de Funciones

Marta A. Casamitjana

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1994

INSTITUTO DE MATEMATICA
(INMABB) - UNS - CONICET

Recopilación Bibliográfica sobre "Diferenciabilidad de Funciones"

Marta A. Casamitjana.

Departamento de Matemática
Bahia Blanca, Abril 1994

RECOPILACION BIBLIOGRAFICA

[1]-RADEMACHER,H. *Uber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen* .
Math.Annalen 79 (1919).S.340.

[2]-YOUNG,W.H. *On a change of the variables in a multiple integral.*
Proc.R.S(A). Vol.26 (1921) p.82-91.

[3]-YOUNG,W.H. *Integration over the area of a curve and transformations of the variables in a multiple integral.*
Proc.London Math.Soc.Vol.21(1923) p.161-190.

[4]-STEPANOFF,W. *Uber totale Differenzierbarkeit.*
Math .Annalen (1923),S.318.

[5]-STEPANOFF,W. *Sur las conditions de la differentielle totale* .
Recueil de la Soc.Math.de Moscou 33 (1924) p.511-516.
[Muestra que si f es continua sobre $\mathbb{R}^2$ y parcialmente diferenciable sobre un subconjunto K de $\mathbb{R}^2$, K conexo y compacto , entonces la *lipschitziana* $L(f,x)$ es finita en todo punto $x \in D$, para algún subconjunto D denso de K.($L(f,x) = \limsup_{h\to o} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|}$)
Da tres ejemplos importantes:(i)f continua,parcialmente diferenciable c.d. en $\mathbb{R}^2$ pero no diferenciable en ningún punto.(ii) f continua, diferenciable parcialmente sobre todo $\mathbb{R}^2$ pero el conjunto de puntos donde f es diferenciable tiene medida de Lebesgue menor que cualquier número $\varepsilon>0$.(iii) f continua , diferenciable sobre todo $\mathbb{R}^2$ tal que existe un compacto K, conexo con $\{x : L(f,x)=\infty\}$ de segunda categoría en K.]

[6]-TONELLI. *Sulla Quadratura delle Superficie.*
Atti della R.Accademia Nazionale dei Lincei (S6), 3 (1926) p.357-362, 445-450, 633-638.
[Establece el siguiente resultado: Sea $z = f(x,y)$ $(0 \le x,y \le 1)$ continua en el cuadrado $K_o = (0,0;1,1)$.
Para que esta superficie tenga área A finita es necesario y suficiente que la función f sea de variación acotada. Si esta condición se verifica, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en casi todo punto de K_o y

$$A \ge \int_o^1 \int_o^1 \left[1 + \frac{\partial f}{\partial x}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}^2\right]^{1/2} dx\, dy.$$

La igualdad vale si y solamente si f es A.C.]

[7]-CACCIOPOLI,R. *Sul Carattere Infinitesimale delle Superficie Quadrabili.*
Atti delle R.Acad.Nac.Dei Lincei (S6) 7, (1928) p.901-905.
[Exhibe un ejemplo de una superficie con área finita la cual no tiene plano tangente en todos los puntos de un conjunto de medida positiva]

[8]-CACCIOPOLI,R. *Sulla differenziabilitá delle funzioni di più variabili.*
Rend. Acc. Sci. Fisc.Mat.,Napoli III 34 (1928), p.152-159.
[Obtiene los siguientes resultados: -Una función de dos variables , diferenciable en casi todo punto respecto a un grupo de ellas, y uniformemente Lipschitziana en el resto,es diferenciable en casi todo punto. Introduce el concepto de *variación parcial uniformemente limitada* ,y demuestra :-Una función de dos variables a variación limitada, derivable en casi todo punto respecto de ambas, es diferenciable en casi todo punto. Introduce el concepto de *diferenciabilidad asintótica*, y prueba -Una función parcialmente derivable en casi todo punto es asintóticamente diferenciable en casi todo punto.]

[9]-CACCIOPPOLI,R. *Teoria generale del cambiamento di variabili negli integrali doppi.*
Atti Congreso Inter.Mat. Barcelona.Vol.2 (1928) p.303-308. Math.Ann.Vol 101 (1939).p.672-685.

[10]-MENCHOFF,D. *Sur les differentielles totales des fonctions univalentes.*
Math.Ann.105 (1931) p.75 a 78.
[Generalización de los teoremas de Rademacher-Stepanoff].

[11]-U.S.HASLAM-JONES. *Derivate planes and tangent planes of a measurable function.*
The Journal of Math. (Oxford serie) Vol.3, .(1931) p.120.
[Generaliza los resultados obtenidos por Denjoy-Young (sobre las derivadas de Dini) para funciones de dos variables. El teorema de Rademacher es un corolario de unos de los teoremas demostrados en este trabajo.]

[12]-BURKILL,J.C-HASLAM-JONES. *Notes on the differentiability of functions of two variables.*
The Journal of the London Math.Society.Vol.VII (1932).
[En §§2,3, los autores completan la teoría de Rademacher - Stepanoff, de diferenciabilidad de funciones de dos variables. En §§4,5 prueban que una función de dos variables, monótona,(de acuerdo a la definición apropiada)es diferenciable en casi todo punto.En §6 establecen la diferenciabilidad aproximada de funciones de variación acotada tipo Tonelli.]

[13]-SAKS,S. *On the Surfaces without Tangent Planes.*
Ann.of Mat.(2) 34 (1933) p.114-124.
[Obtiene un resultado mas fuerte que Caccippoli [7]. Prueba que existe una función u (x,y) sobre el cuadrado unitario K_o absolutamente continua y de variación total menor que uno sobre todo segmento recto en K_o y tal que la superficie $z = u\ (x,y)$ no tiene tangente en ningún punto. (Es obvio que una tal superficie no solamente tiene área finita sino que es también A.C.T.)].

[14]-WHITNEY,H. *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets.*
Trans.Am.Math. Vol.36 No.1 (1934). p.63-89.
[Temas:I.Differentiable functions in closed sets.
II.Differentiable extensions.
III.Aproximation theorems.
IV.Analytic extensions.]

[15]-WHITNEY,H. *Functions differentiables on the boundaries of regions.*
Ann. of Math. Vol.35 (1934) p.482-485.
["Sea $f(x_1,...,x_n)$ definida en una región $R \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f \in C^m$ en R. Si B es el contorno de R se dice que f es de clase C^m en R + B si es posible extender la definición de f a través de una región conteniendo R + B tal que f tenga todas las derivadas parciales hasta la de orden m continuas allí". El autor muestra que para ciertas regiones, para que una función sea de clase C^m en la región cerrada es suficiente que las derivadas parciales de orden m sean continuas sobre el contorno.]

[16]-WHITNEY,H. *Differentiable functions defined in closed sets.*
Transactions of the Society.Vol. 36 No.2 (1934) p.369-387.
[En su trabajo [14] el autor ha mostrado que si $f(x)$ definida en un cerrado A contenido en el espacio n-dimensional E es de clase C^m en A entonces puede ser extendida sobre E con derivadas parciales de orden m continuas. En este trabajo se restringe al caso 1-dimensional.

[17]-SEVERI,F. *Sulla differenziabilià totale delle funzioni di più variabili reali.*
Ann.Mat.Pura Appl. (4) 13 (1935) p.1-35
[El trabajo consta de los siguientes subtítulos : - Tangenti e cordi improprie in un punto di accumulazione d' un insieme. -Differenziali e derivate direzionali . -Condizione per la differenziabilità . - Condizione per l'iper differenziabilità . -La regola generale di derivazione delle funzioni composte . - Continuità delle iperderivate quando esistono in un dominio piano.-Condizione per la differenziabilità in un dominio piano.-Observazioni varie.]

[18]-WHITNEY,H.*Differentiable functions defined in arbitrary subsets of Euclidean space.*
Trans.Am.Math.Soc. Vol 40 (1936) p. 309-317.
[Sobre extensión de funciones diferenciables. Sobre propiedades de funciones diferenciables.]

[19]-HIRSCHFELD,H.O. *Continuation of differentiable function through de plane.*
Quart.Jornal. Math.of Oxford Ser.Vol.7 (1936) p.1-15.

[20]-CACCIOPPOLI,R. *Teoria generale del cambiamento di variable negli integrali doppi.*
Math.Ann.Vol.101 (1939) p.672-685.

[21]-CARATHEODORY,C. *Reelle Functionen. Band I. Zahlen, Punktmengen, Funktionen.*
B.G.Teubner, Leipzig (1939).
MR 1 (7) (1940).

[22]-CALKIN,J,W. *Functions of Several Variables and Absolute Continuity I.*
Duke Math.J 6, (1940). p.170-186.
MR 1 (7) (1940).

[23]-MORREY,C.B.Jr. *Functions of Several Variables and Absolute Continuity II.*
Duke Math. J.6, (1940). p.187-215.
MR 1 (7) (1940).

[24]-RODO,T.-RIECHELDERFER,R. *A Theory of Absolutely Continuous Transformations in the Plane.*
Trans.Amer.Math.Soc. 49, (1941) p.258-307.
MR 2 (8).(1941).

[25]-CESARI,L. *Sulle funzioni assolutamente continue in due variabili.*
Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa (2) 10 (1941) p.91-101.
[El autor prueba que , si f es continua en $[0,1]\times[0,1]$ y ACT ,con derivadas parciales en L_p $(p>2)$ entonces f es diferenciable Stolz en casi todo punto en $[0,1]\times[0,1]$.]

[26]-HESTENES,M.R. *Extensions of the range of a differentiable function.*
Duke Math.J.8 (1941) p.183-192.
[El autor da dos métodos de extensión del rango de funciones diferenciables. El primero es aplicable solamentea funciones de clase C^m sobre un conjunto cerrado **A** (m es finito) y el contorno de **A** tiene ciertas propiedades. El segundo es esencialmente una modificación del dado por Whitney [14] y es aplicable a funciones de clase C^m (m finito ó infinito)sobre un conjunto cerrado **A** arbitrario.

[27]-HELSEL,R.G.-RODO,T. *The transformations of double integrals.*
Trans.Amer.Math.Soc.Vol.54 (1943) p.83-102.
MR 4(10) (1943) p.269.

[28]-BRUDNO,A. *Continuity and differentiability* .
Math.Sbortnik NS Vol.13 (1943) p.119-134.
MR 7(1).(1946).

[29]-OSTROWSKY,A. *Note Sur L'interversion Des Dérivations et Les Différentielles Totales.*
MR 5 (9) (1944) p.233.

[30]-FEDERER,H. *Sur face Area II.*
Trans.Amer.Math.Soc.55 (1944),p.420-437, 438-456
M.R. 6(2).(1945). p.44-45.

[31]-WHITNEY,H. *On the extension of differentiable functions.*
Bull.Amer. Math.Soc. 50 (1944) p.76-81.
[El autor ha probado previamente teoremas de extensión en su trabajo [14].Aqui probará una propiedad de uniformidad : Si la función y sus derivadas son "suficientemente pequeñas" en todo $x \in A$ la función puede ser extendida a todo el espacio manteniendo las derivadas la misma propiedad. A es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad que $\exists$ un número $\omega > 0$ tal que cualquier par de puntos $x,y \in A$ están unidos por un arco cuya longitud es menor ó igual que ωr_{xy} ($r_{xy} = d(x,y)$).]

[32]-ZYGMUND,A. *Smooth functions.*
Duke Math.Journal 12 (1945) p.47-76.
[El propósito de este trabajo es mostrar que las funciones continuamente diferenciables (y sus generalizaciones) juegan un papel muy importante en la teoría de funciones reales y series trigonométricas.]

[33]-CESARI,L. *Sulla transformazione degli integrali doppi.*
Annali di Mat.Pura Appl.(4) Vol.27 (1948) p.321-327.
MR 11 (1). (1950).

[34]-ALEXIEWICZ A. *On differentiation of vector valued functions.*
Studia Math.11 (1950) p.185-196.
MR 12(7) p.507 (1951).

[35]-TSUJI,M. *Change of variable in the multiple Lebesgue integral.*
J.Math.Soc.Japan 2 (1950) p.48-56.
[El autor demuestra (a) Si $u = f(x)$ es una transformación topológica de un dominio D del espacio n-dimensional tal que $L(f,x) < \infty$ $\forall x \in D$ entonces f es una transformación que lleva conjuntos medibles Lebesque en conjuntos medibles. (b) El Teorema de Rademacher [Mat.Ann.79,p.340-359 (1919)] sobre cambio de variable en la integral múltiple.]

[36]-CALDERON,A. *On the differentiability of absolutely continuous functions.*
Riv. Mat. Univ. Parma Vol.2 (1951) p.203-213.
[Generaliza un resultado de Cesari,L.[26].]

[37]-WHITNEY,H. *On totally differentiability and smooth functions.* Pacific Journal Math. 1 (1951) p.143-159. [Federer,H.[30], demuestra que si f es totalmente diferenciable c.d.en un conjunto acotado P, entonces existe un cerrado $Q \subset P$ con $|P-Q|<\varepsilon$, tal que f es continuamente diferenciable en Q. En este trabajo, el autor muestra que f es aproximadamente totalmente diferenciable c.d. si y solamente si Q existe con la propiedad anterior. El resto del trabajo apunta a un teorema de Federer (sobre funciones continuamente diferenciables).]

[38]-DAVIES,R.O. *On accessibility of plane sets and approximate differentiation of functions of two real variables.* Proc.Cambridge Phil.Soc.48 (1952).p.215-232. MR 13(7) (1952) p.635.

[39]-CECCONI,J. *Sulla differenziabilità nel senso di Stolz , di una funzioni di più variabili.* Ricerche Mat.1 (1952).p.317-324. [Obtiene una conclusión más fuerte que el clásico teorema de Rademacher, suponiendo f(x,y) Lipschitz en [0,1]x[0,1] y condiciones de continuidad de f_x, f_y]

[40]-KUDRYAVCEV,L.D.-KASCENKO,J.D. *On change of variable in a integral.* Doklady Akad.Nauk SSSR(N.S) 84 (1952) p.864-871. (Russian). [Establece la fórmula de transformación para la integral múltiple,de *f.J* ,sobre un dominio n-dimensional,cuando *f* y *J* pertenecen a L_2.]

[41]-SEKI,S. *On the change of variable in the multiple integrals.* J.Soc.Japan (4) (1952) p.218-230. [Demuestra la fórmula de cambio de variable , suponiendo que f es un homeomorfismo de D sobre f(D),totalmente diferenciable en casi todo punto. Luego trata el caso donde f no es necesariamente biunívoca.]

[42]-LODIGIANI,B. *Sulla differenziabilità asintotica regolare delle funzioni di più variabili.* Rend.Sem.Mat.Univ.Padova 22(1953).p.251-257. [Trata un teorema sobre diferenciabilidad total que vale para n=2 y es generalmente falso para n>2. Obtiene, como principal resultado, una condición para que f(x,y,z) tenga diferencial aproximado regular.]

[43]-KUDRYAVCEV,L.D. *On summability of Jacobians.* Mat.SbornikN.S.33 (75),(1953) (Russian).p.389-398. [Bajo ciertas condiciones sobre f prueba:(I) $|f(E)| = \int_E |J|\, dx$, $E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^2$,E medible,f monótona.(II)f compacta,

E compacto, entonces la pseudo multiplicidad de E es finita y J es sumable.]

[44]-KUDRYAVCEV,L.D. *On propiertes of differentiable mapping of regions of Euclidean space.*
Mat.Sbornik N.S.32 (74), (1953)(Russian).p.493-514.
[El autor establece un número de propiedades de transformaciones diferenciables y sus Jacobianos ó matrices Jacobianas.]

[45]-BONATI SAVORGNAN,C. *Sulla differenziabilità secondo Stolz delle funzioni composte.*
Ann.Univ.Ferrara.Sez. VII(NS) 3 (1954),p.17-24.
[Se establecen condiciones suficientes para la diferenciabilidad (en el sentido ordinario ó en el sentido Stolz , respectivamente) de funciones compuestas.]

[46]-SCHWARTZ,J. *The formula of change of variable in a multiple integral.*
Amer.Math.Monthly 61 (1954) p.81-85.
(MR 15(7)).(1954).

[47]-OSTROWSKY,A. *Note sur les deriveés uniformes de les differentielles totales.*
Comment Math.Helv.29 (1955) p.298-300.
[El autor hace referencia a las interrelaciones entre un trabajo de F.Severi[Ann.Mat.Pura Appl.(4) 13 (1934),1-35] sobre la existencia de diferencial total de una función f(x,y) y un trabajo propio [Comment Math.Helv.15 (1943), 222-226] en el cual muestra la existencia de diferencial total bajo condiciones diferentes.]

[48]-NIKOL'SKII,S.M. *Some properties of differentiable functions given on an n-dimensional open set.*
Izv.Akad.Nauk, Sec.Mat.23 (1959), p.213-242.
MR 22 (5A) #3775.

[49]-GEHRING,F.W.-LETHO,O. *On the total differentiability of functions of a complex variable.*
Ann. Acd. Sci. Fenn. Ser. A I No.272 (1959), 9 pp.
MR 23 (1962) # A1799.

[50]-SALINAS,B. *On change of variable in multiple integrals.*
(Spanish) Collect.Math.12 (1960) p.138-153.
[Obtiene tres teoremas sobre el cambio de variables en las integrales múltiples.El último de ellos generaliza los dos anteriores,para el caso en que la transformación T sea diferenciable en casi todo punto del conjunto donde está definida y transforme conjuntos de medida nula ,en cojuntos con la misma propiedad.

[51]-STEIN,E.M.-ZYGMUND,A. *Smoothnes and differentiability of functions.*
Ann.Univ.Sci.Budapest,Studia Math.III-IV (1960-1961)

p.295-307.
MR24 (1962).#A1982.

[52]-CARMAN,P. *La differentiabilité des representations quasi conformes tridimensionales.*
Atti. Acad.Naz. Linceri Rend.Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.(8) 29 (1960) p.181-185.
[Se definen los conceptos de aplicación Q-quasiconformal y simétrica Q-quasiconformal. El autor usa el teorema de Rademacher-Stepanoff para mostrar que ambas clases de aplicaciones son diferenciables c.d. en cierto dominio D.]

[53]-IL'IN,V.P-SOLONNIKOU,V.A. *On some properties of differentiable functions of several variables.*
Dobl.Akad.Nauk.163,3 (1961),p.538-541. Soviet Math. Dokl 2. p.95-98.
MR 22 (9A) #8258.

[54]-SERRIN,J. *On de Differentiability of Functions of Several Variables.*
Arch. Rational Mech.Anal. 7 (1961) p. 359-372.
[Sea G un abierto de $\mathbb{R}^n$. El autor prueba que si **u** es diferenciable débil entonces **u** difiere a lo sumo en un conjunto de medida cero en G de una función **v**(x), donde **v**(x) tiene derivadas parciales ordinarias $v_x = (v_{x_1}, \ldots, v_{x_n})$ c.d. en G. También prueba que **u**(x) es de variación acotada si y solo si es quasi diferenciable. Finalmente demuestra que si **u** es fuertemente diferenciable ($-\int u\phi_x dx = \int \phi\,\psi\, dx$, para alguna función vectorial sumable ψ) y $\psi \in L^p$ para algún p > n entonces **v** es continua y tiene diferencial c.d. en G.]

[55]-CALDERON,A.P.- ZIGMUND,A. *On the Differentiability of Functions which are of Bounded Variation in Tonelli's sence.*
Rev.Un.Mat.Arg. 20 (1962) p.102-121.
[Los autores generalizan algunos de los resultados de una nota anterior [C-Z.*Local Properties of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations.* Studia Mat.], resultados que son de interés en varias aplicaciones.]

[56]-WEISS,M. *Total and partial differentiability in L^p.*
Studia Math. XXV (1964) p.103-109.
[Resultado principal:Sea $f(x)=f(x_1,\ldots x_n) \in L^p$, $1\le p\le\infty$, sobre el cubo unitario Q_o y supongamos que en cada punto $x \in E \subseteq Q_o$ f tiene k-th diferencial en L^p.Sea m un entero fijo, $1\le m \le n$. Entonces en casi todo punto $x \in E$ f tiene k-th diferencial en L^p con respecto a la variable $x' = (x_1,\ldots,x_m)$.]

[57]-NEUGEBAUER,C.J. *Smoothness and differentiability in* L^p.
Studia Math. 25 (1964) p.81-91.
[Muestra que si una función es medible, Lp-smoothness entonces es Lp-diferenciable sobre un conjunto con la potencia del continuo en cada intervalo. Incluye en este trabajo algunos resultados sobre la propiedad de Darboux de f'_{Lp} y concluye con la clasificación de Baire de una función Lp-simétrica.]

[58]-SAKS,S.* *Theory of the integral.*
Dover Publications. New York (1964)

[59]-BARABONOV,A.I.-KUPOV,N.P. *Change of variables in an integral over a domain.*
(Russian). Volz.Mat.Sb. Vyp 2 (1964) p.195-200.
MR 33(5) # 5806.

[60]-STEIN,E.M.-ZYGMUND,A. *On the differentiability of functions.*
Studia Math. XXIII. Fas.3 (1964) p.247-283.
[En este trabajo extienden y generalizan resultados propios de un trabajo anterior [51]].

[61]-NEUGEBAUER,C.J. *Differentiability almost everywhere.*
Proc.Amer. Math.Soc.16 (1965) p.1205-1210.
[Condicion necesaria y suficiente para que una función medible sea equivalente a una función diferenciable en casi todo punto de un conjunto.La condición es en términos d e integrales de Marcinkiewicz.]

[62]-MORREY,C. * *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.*
Springer. N.Y. (1966).
MR 34 #2380.

[63]-SINDALOVSKII,G.H. *On the differential total.* (Russian).
Mat. Sbornik (N.S)70 (112) (1966),p.347-367.
[Generaliza resultados de Rademacher, Stepanoff y Haslam-Jones y resultados propios previos.]

[64]-VARBERG,D.E. *On differentiable tranformations in* $\mathbb{R}^n$.
Amer.Math. Monthly 73 núm.4,parte II,(1966).p.111-114.
[Prueba que si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n > \mathbb{R}$,$E \leq D$, E medible, f diferenciable en E,entonces f(E) es medible y

$$|f(E)| \leq \int_E |J(x)|\ dx\ .$$

(|.|:medida de Lebesgue.Obs:no pide f continuamente diferenciable).]

[65]-ROSETNSAK,J.G. *Generalized Derivatives and Differentiability almost everywhere.*
Soviet Math. Docl. Vol. 7 (1966) p.1381-1383.
[El resultado principal de este trabajo es el siguiente Teorema:"Para toda función **u** de clase $W^l_p(U)$ el diferencial formal de orden l de **u** en un punto

$x \in U$ es el diferencial total de orden l de la función **u** en el punto x en el sentido de convergencia en W_p^l (U) para casi todo punto $x \in$ **U**." Este Teorema puede ser usado para obtener resultados de diferenciabilidad en casi todo punto de cierta clase especial de funciones.]

[66]-DZVARSEISVILI,A.G. *The total differential.*
(Russian Georgian summary) Sakhart SSR
Mec.Akad.Math.Inst. Srom 34 (1968) p.13-21.
[Bajo ciertas condiciones sobre $P(x,y)$, $Q(x,y)$ definidas en $R_o=[0,1]\times[0,1]$, el autor prueba que existe $F(x,y)$ sobre R_o tal que $dF=Pdx+Qdy$, c.d. en R_o.]

[67]-RESHETNYAK,Y. *Generalized derivatives and differentiability almost everywhere.*
Mat. Sbortnik 75 (1968) p.323-334.
[El resultado principal del trabajo es:
Si $w \in W_p^l(U)$, entonces para casi todo $u \in U$ se tiene
$$\left|\left|h^{-l}(u(x+hx) - \sum_{0<\alpha<l} D^{\alpha}u(x)h^{\alpha}x^{\alpha}/\alpha!)\right|\right|_{W_p^l} \longrightarrow 0 \ , \ h \longrightarrow 0.$$
Se dan aplicaciones de este resultado.]

[68]-MCEDLISVILI,S.A. *The existence of a total differential.*
(Russian Georgian english summaries)Sakharten SSR Mecn. Akad. Moambe 53 (1969). p.29-32.
[Estudia condiciones suficientes para la existencia de diferencial total de una función de dos variables.]

[69]-ZIEMER,W.P. *Change of variables of absolutely continuous functions.*
Duke Math. J 36 (1969).
[Supone $G \subseteq E_n$ (G acotado). $H_p^1(G)$ $(p\geq 1)$ (clase de funciones definidas en G, de clase L_p y con derivadas parciales(en el sentido de las distribuciones) de clase L_p). Estudia el comportamiento de una función en $H_q^1(G)$, cuando compone con un homeomorfismo bi-medible cuya inversa es en $H_p^1(G)$,para apropiado p. De especial interés es la demostración de la fórmula *co-área* para transformaciones en H_p^1 .]

[70]-DE LUCIA,P. *Sulla differenziabilità quasi ovunque di una funzioni misurabili.*
Ricerche Mat. 19 (1970),p.79-92
[Supone f medible,definida sobre $X\subseteq\mathbb{R}^k$,X medible y acotado y prueba que las siguientes condiciones son equivalentes:(I)f es diferenciable en casi todo

punto de **X**.(II)F puede ser aproximada (fuerte) en **X** por funciones $C^{(1)}$.(III) f puede ser aproximada (fuerte) en **X** por funciones Lipschitz.(IV) f es "strongly almost Lipschitz" sobre **X**.(V) f es localmente Lipschitz en casi todo punto de **X**. Las equivalencias (I)y (V) fueron establecidas por Stepanoff (1923).]

[71]-DE LUCIA,P. *Sulla caratterizzazione delle funzioni numeriche di una variabili quasi ovunque derivabili rispeto ad un'altra.*
Ricerche Mat.19 (1970),p.26-47.
MR 43 # 3406.

[72]-STEIN,E.M.**Singular integrals and differentiability properties of functions.*
University Press, (1970)

[73]-DE LUCIA, P. *Sulla Caratterizzazione delle Funzione Finita-mente additive D'intervalo derivable quasi ovunque in Senso Ordinario.*
Ricerche Mat. 20,p.157-174. (1971).
Zbl.Math. 232 # 26007.

[74]-BONGIORNO,B. *Sulla differenziabilità quasi ovunque delle funzioni di più variabili.*
(French summary).Rend.Circ.Mat.Palermo(2) 20 (1971), p.34-42.
[Caracterización de las funciones de n variables diferenciables en casi todo punto, por condiciones de tipo variacional.]

[75]-VARBERG,D.E. *Change of variable in the multiple integrals.*
Amer.Math.Monthly 78 (1971) MR 42(6) #7843)
[Prueba el teorema clásico de cambio de variables pidiendo un mínimo de hipótesis:T diferenciable en casi todo punto de **E**,(E medible),T biunívoca en **E**.]

[76]-FADELL,A. *A generalization of Rademacher theorem on complete differential.*
Colloq.Mat.27 (1973) p.125-131.
[Se introduce el concepto de *conjunto accesible*. El *Teorema de accesibilidad* permite probar el Teorema de Rademacher para funciones de varias variables , modificando la demostración de Rademacher.Más aún demuestra una condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad en c.d.]

[77]-VALENTI,S. *On the differentiability of functions whose values are assigned on O-measures sets.*
Rev.Roumanie Math.Pures Appl.18(1973),p.1283-1286.
[Para funciones de una ó más variables, el autor da algunas condiciones necesarias y suficientes para la diferenciabilidad en casi todo punto envolviendo solamente el comportamiento de la función sobre un conjunto de medida nula.]

[78]-VETRO,P. *Sulla differenziabilitá parciale delle funcioni di piú variabili.*
Rendiconti del Circ.Mat.di Palermo.Serie II-Tomo XXII (1973) Fas. I-II.
[Se caracterizan por condiciones de tipo variacional a las funciones reales (continuas sobre un abierto E $\subseteq \mathbb{R}^n$) diferenciables c.d. con respecto a todo grupo de p variables ($0<p\leq n$).]

[79]-FADEL,A.G. *On the existence of regular approximate differentiales.*
Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973) p.541-544.
[Rodo-Cacciopoli y Scorza Dragoni dieron condiciones suficientes para que una función real continua definida sobre un conjunto plano abierto tenga diferencial regular aproximado en c.d.(1938). El autor extiende ahora este resultado al espacio n-dim. de una manera natural probando que para una función continua sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ una condición suficiente para la existencia de diferencial regular aproximado es que la función sea totalmente diferenciable (Stolz) c.d.en la dirección de todo (n-1)dim. hiperplano.]

[80]-HOFFMAN,J. *On the differentiability points of a functions of two real variables admitting partial derivatives.*
Math.Scand.35 (1974) p.259-266.
[Demuesta resultados sobre diferenciabilidad a lo largo de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$.]

[81]-DI BARI,C.M. *Su alcune condizioni di differenziabilità per la funzioni di piú variabili.*
Atti.Acad.Sci.Let.Arti Palermo Parte I (4) p.34 (1974/75)
[El autor establece condiciones necesarias y suficientes para la diferenciabilidad parcial en casi todo punto,de una función medible Borel en $\mathbb{R}^n$ y para la diferenciabilidad asintótica en casi todo punto de funciones medibles Lebesgue.]

[82]-HOFFMAN-JORGENSEN. *On the differentiability of function of two real variables admiting partial derivatives.*
Mat.Scand. 35 (1974) p.259-266.
[En esta nota los autores muestran que si f es una función continua y parcialmente diferenciable sobre una curva diferenciable $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces f es diferenciable en x para todo x en un subconjunto denso G_δ de Γ.

[83]-VETRO,P. *Su certe condizioni di differenziabilitá.*
Rendiconti Circ.Mat.di Palermo,Tomo XXIII (1974) II.
[Dada una función real f (sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$) se consideran dos funciones de intervalo asociadas a la función f. Utilizando las condiciones clásicas sobre estas funciones de conjunto se encuentran

caracterizaciones para las funciones f que son c.d. diferenciables en Ω.]

[84]-DE LUCIA,P. *Sulla differenziabilità delle funzioni.* English summary.Boll.UN.Mat.Ital.(4) 11 (1975) núm.3 suppl.p.56-69.
[Usando propiedades de los puntos de densidad de de un conjunto , establece condiciones de diferenciabilidad en casi todo punto.]

[85]-FADELL,A.G. *A note of a theorem of Gehring and Letho.* Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975) p.195-198.
[Se define el concepto de *mesh approximate differential* como una modificación del diferencial aproximado regular. Se muestra que para funciones reales abiertas continuas sobre conjuntos abiertos en el espacio n-dimensional los conceptos de mesh app. diferencial y total diferenciabilidad son equivalentes y se obtiene el teorema de Gehring-Letho como un corolario mediante un refinamiento de un conocido teorema sobre diferencial regular aproximado.]

[86]-VINOKUROV,V.A. *On the differentiability of functions in a Sobolev space.* Dokl.Acad.Nauk.SSSR 227 (1976),p.15-18.
[Define f diferenciable de orden L en un punto x en el sentido L_q y prueba que si $f\in W^{L}_{p,loc}$ entonces f es diferenciable c.d. en Ω en el sentido de la definición dada para q admitida.]

[87]-CALDERON,C.P.-LEWIS,J.E. *On the differentiability of functions of several variables.* Illinois J. Math.20 (1976) p.535-542.
[Se discuten dos problemas.Primero muestran que si $f\in L^{p}_{n}(\mathbb{R}^n)$ entonces f tiene total diferencial de orden n en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$. Segundo, si restringimos nuestra atención a funciones de la forma $f=G_n*g$, donde $\hat{G}_n=(1+|x|^2)^{-n+2}$ es la transformada de Fourier de G_n y $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces si $g\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L_1(\mathbb{R}^n)\times\log^+L_1$, f tiene diferencial total de orden n c.d. en $\mathbb{R}^n$].

[88]-DE LUCIA,P. *On the differentiability of functions.* Rend.Circ.Palermo (2) p.26 (1977) núm.1-3;7-16 (1978)
[Sobre los clásicos teoremas de Stepanoff (sobre diferenciabilidad en casi todo punto y diferenciabilidad aproximada) para funciones de más de una variable.]

[89]-GUARIGLIA,E. *The summability of the partial derivative of a differentiable function.* (Italian) Ricerche Mat.27 núm.1 (1978). p.59-81.
[Establece condiciones necesarias y suficientes para que una función de k variables sea

diferenciable en casi todo punto y con derivada parcial en L_1.]

[90]-BRUCKNER,A.* *Differentiation of real functions.*
Lecture Notes Math.,659. Springer-Verlag, Berlín-New York (1978)
[Esta colección de notas es lectura esencial para quien está interesado en el desarrollo reciente de la teoría de diferenciación de funciones reales.D.Waterman (Bull.Amer.Math.Soc.(NS) 2 (1980)núm.1,232-237) y L.Misik (Zbl 382 : 26002) han realizado un resumen de cada uno de los capítulos.]

[91]-OHTSUKA,M. *Area formula.*
Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 6 No.2, (1978) p.599-636.
[El autor demuestra la siguiente fórmula:

$$\int_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{f^{-1}\{y\}} g\ dH^{m-k}dH^k y = \int_E g\ J_k f\ dL^m$$

cuando $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitziana,$E\subseteq\mathbb{R}^m$,es L^m medible, F(E) es σ-finito con respecto a H^k ; $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$, g L^mmedible.(L^m:medida L-dim. de Lebesgue, H^j :medida j-dim. de Haussdorff, $J_k f$:k-dim.Jacobiano)

Incluye la demostración de una forma del Teorema de Rademacher.]

[92]-VODOP'YANOV,S.K-GO'DSHTEIN,V.M. *On geometrics properties of functions with generalized first derivatives.*
Russian Math. Surveys 34:1 Cap.1-2.(1979) p.19-74 .
[Cap.1.Integral representations and differential properties of functions.
Cap.2.Change of variable in an integral.]

[93]-GUZMAN,M. *A change of variables formula whithout continuity.*
Amer.Math.Monthly 87 (1980) núm.9 p.736-739.
[Muestra que es posible obtener una fórmula de cambio de variable satisfactoria sin requerir continuidad de la transformación.De esta fórmula general obtiene facilmente otras fórmulas clásicas y no tan clásicas.]

[94]-AVERSA,V. *On a condition of almost everywhere differentiability.*
Italian English summary. Rend.Accad.Sci.Fis. Mat. Napoli (4) 47 (1980),(1981).p.55-60.
(Prueba una condición necesaria y suficiente para que una función f ,definida en $X\subseteq\mathbb{R}^2$,(X medible y acotado)sea diferenciable en casi todo punto de X y de allí deriva una condición necesaria y suficiente para que f sea aproximadamente diferenciable en casi todo punto de X.]

[95]-SAINT-PIERRE,J. *Sur le théorème de Rademacher.* Travaux. Sem. Anal. Convexe 12 No.1,exp.No.2, (1982) p.10.
[Presenta en detalle la demostración del Teorema de Rademacher, dada por Morrey,C.(Multiple Integrals in the Calculus of Variaciones. Springer. New York (1966))].

[96]-DI BENEDETO,M.*On the differentiability of continuous functions.* (Italian).Atti.Accad.Sci.Let Arti Palermo Sec(5) 3 (1982/83) p.432-462 (1985)
[Extiende resultados anteriores propios y obtiene condiciones para que una función $f:E\to\mathbb{R}$,$E\subseteq\mathbb{R}^2$,sea diferenciable con respecto a cualquier grupo de m variables,$1\le m\le n$.También da una caracterización para funciones diferenciables en casi todo punto, en términos de una condición α-Lipschitz.]

[97]-MONTALVO,D. *Change of variable in multiple integrals.* Colloquium 1985-86 (Badajoz,1985-86) p.80-86. Publ. Dep.de Mat.Univ.Extremadura 15.
[El trabajo es una parte de un curso.Establece dos nuevos teoremas de cambio de variables y da solamente lineamientos de las demostraciones.]

[98]-HUMKE,P.-SALAT,T. *Remarks on strong and symmetric differentiability of real functions.* Acta Math. Univ. Comenianae 52-53, (1987) p.235-241.
[En la primera parte de este paper los autores dan algunos resultados acerca de funciones fuertemente diferenciables y de diferenciabilidad simétrica uniforme. La segunda parte contiene nuevas demostraciones de resultados conocidos sobre el conjunto de puntos donde una función es fuertemente diferenciable y sobre el conjunto donde es diferenciable uniforme. Estas propiedades están basadas en algunas propiedades de los conjuntos de puntos de absoluta continuidad de las funciones.]

[99]-MORI,A. *On Quasi-Conformality And Pseudo-Analyticity* Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1987) p.56-57.
[El autor centra su interés alrededor de propiedades en casi todo punto de funciones casiconformes.Se nota que una aplicación casiconforme tiene diferencial total c.d. y se prueba que la aplicación es absolutamente continua sobre casi toda línea horizontal(también probado por Straebel). Se deja un problema abierto sobre A.C.]

[100]-NAKVINDA,A.-ZAJICEK,L. *A simple proof of the Rademacher Theorem.* Cas.Pestovani Mat.113, No.4, (1988) p.337-341.
[El teorema de Rademacher que establece que una función localmente Lipschitz $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable c.d. es un resultado básico para la introducción y estudio de los llamados diferenciales generalizados. El autor da aquí una demostración de este teorema.

Varias demostraciones del mismo pueden hallarse , especialmente en libros; la propuesta aquí es similar a aquellas demostraciones.]

[101]-EMEL,YANOV,V.F.-RUBNICH,B.A. *On a differentiability criterion.* Math.Today, Sci-Methodological Collect.(1988) p.142-146.
[Se prueba el teorema siguiente:Sea f una función definida sobre un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ que admite derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o), x_o=(x_c^i)$, $i=1,\dots,n$, interior a X. Sea $F(t)=f(\phi_1,\dots,\phi_n)$. Si $F(t)$ admite derivada $F'(t_o)$ para todas las funciones $\phi_i(t)$ diferenciables en t_o, con $\phi_i(t_o)=x_c^i$, $i=1,\dots,n$, y si la fórmula

$$(1) \qquad F'(t_o) = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o).\phi_i'(t_o)$$

vale siempre para todas las funciones entonces f es diferenciable en x_o.
Los autores muestran con un ejemplo que el Teorema no es válido si se omite la validez de (1) y todas las demás condiciones son satisfechas.]

[102]-WALCZAK,S. *On the differentiability of absolutily continuous functions of several variables. Remarks on the Rademacher theorem.*
Bull. Pol. Acad. Sci.Math.36, No9-10 (1988) p.513-520.
[En notas previas el autor da definición de función A.C de varias variables y también una condición necesaria y suficiente para que una función $z:P^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sea A.C.($P^n=[0,1]^n$).Con la ayuda de esto prueba que la función A.C. z tiene derivadas parciales $\partial z/\partial x^i (i=1,\dots,n), \partial^n z/\partial x^1 \dots \partial x^n$ y diferencial total c.d..En la última parte da algunas observaciones sobre el teorema de Rademacher.]

[103]-de BARRA,G-FITZPATRCK,S-GILES,J.R. *On generic differentiability of locally Lipschitz functions on Banach spaces.*
Func. Anal. and Opt., WorkShoop-Miniconf,Camberra/Au. (1988).
Zbl. Math. 682 #46029.

[104]-MIKHAJLOV,L.G. *On the singular theory of total differentials* (Russian) Dokl. Akad. Nauk.Tadzh SSR 32, No.9 (1989) p.567-569.
[Usando coordenadas polares el autor prueba dos teoremas dando condiciones suficientes para la existencia de una solución $u \in C^2(D_o)$ del sistema
$u_x' = a(x,y)/r(x,y); u_y' = b(x,y)/r(x,y), r(x,y)=(x^2+y^2)^{1/2}$
$D = \{(x,y) : 0<r(x,y)\leq R\}$.]

[105]-SIELSKA,M. *On some conditions of differentiability of the functions af many variables.*
Zesk. Nauk. Politec.Lodz. 531, Mat.21 (1989) p.41-52.
[El autor prueba un hecho intuitivo: Una función de dos variables tiene total diferencial en algún punto si y solamente si su gráfico está incluido localmente entre dos superficies de rotación determinadas por alguna curva con recta tangente en ese punto. Establece también el mismo teorema para funciones de n variables.]

[106]-MEISTERS,G-OLECH,C. *A Jacobian condition for injectivity of differentiable maps.*
Ann. Pol. Math 51 (1990) p.249-254.
MR 92 e; #58023.

[107]-PREISS, D. *Differentiability and measurs in Banach spaces.*
Pros. Int. Congr. Mat. Kyoto/Japan (1990), vol. II p.923-929 (1991).
[El autor da una visión general sobre dos cuestiones:
(1) la diferenciabilidad de una función real Lipschitz sobre un abierto de un espacio de Banach
(2) cuándo medidas de Borel finitas sobre un espacio de Banach separable están determinadas por sus valores sobre esferas.
Quedan propuestos algunos problemas abiertos.]

[108]-PREISS,J. *Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces .*
Fun. Anal. 91, No.2 (1990) p.312-345.
[El resultado principal de este trabajo es sorprendentemente general y potente. Establece que si la norma de un espacio de Banach es diferenciable lejos del origen y f es una función Lipschitz sobre un abierto G de E entonces el conjunto de puntos de diferenciabilidad de f es un subconjunto denso D de G y el subdiferencial de Clark ∂f puede ser calculado por medio de gradientes.
Este resultado se mantiene para Frechet, Gateaux o alguna noción intermedia de diferenciabilidad. La ténica usada en la demostración no produce diferenciabilidad c.d. en ningún sentido. Al final de la sección se encuentra alguna información sobre la medida del conjunto de los puntos de diferenciabilidad.]

[109]-RUAN,G. *Strict differentiability of non smooth functions.*
Nat.Sci. j. Xiangtan Univ. 13, No.4 (1991) p.12-18.
[Prueba que:- funciones regularmente Lipschitz son estrictamente diferenciables en $x \in X$ (X espacio de Banach) si y solamente si las derivadas de Clark son continuas en x , $\forall v \in X$; - en un espacio separable. el conjunto de puntos donde una función regularmente Lipschitz es estrictamente diferenciable es de 2da. categoría ; -el gradiente generalizado de Clark se expresa por el límite de derivadas estrictas.]

[110]-MOVAHEDI-LANKARANI,H. *On the theorem of Rademacher.*
Real Anal.Exchange 17 No.2 (1991-92) p.802-808.
MR 93 C; #26025.

[111]-HATA,M. *Differentiable functions which do not satisfy a uniform Lipschitz condition of any order.*
Proc. Am. Math. Soc. 111, No.2 (1991) p.443-450.
[La intención del autor es construir dos clases de funciones absulutamente continuas. Una diferenciable en todo punto pero no satisface condición de Lipschitz uniforme de ningún orden sobre una larga clase de subintervalos, mientras que la otra es diferenciable en casi todo punto pero no satisface una condición de Lipschitz uniforme de algún orden sobre algunos subintervalos.]

[112]-EVANS,M.J. *A Note on Symetric and Ordinary Differentiation.*
Real Anal.Exchange 17 (1991-92) No.2 p.820-826.
MR 94 b: 26008a.

[113]-VINOKUROV,V.A. *Change of Variables and Multiplication of Generalized Functions.(Russian).*
Dokl.Akad.Nauk.SSSR 319 n$^{\underline{o}}$5 (1991) p.1054-1064.
Traslation in Soviet Math. Dokl 44 (1992), No.1,p.273-280.
MR 93 c: 46070.

[114]-OMIADZE,K.T. *On the Problem of Differentiability of Absolutely Continuous Set Functions.*
Soobshch Akad Nauk.Gruz.145, No.2 (1992).p.253-256.
Zbl.Math. 770 #28004.

[115]-ZAJICEK,L. *An elementary proof of the one-dimension Rademacher Theorem.*
Math. Bohem 117, No.2 (1992) p.133-136.
[El objetivo de esta nota es presentar una muy simple demostración del teorema de Rademacher: "Sea f una k-Lipschitz función sobre (a,b), entonces f es diferenciable en casi todo punto."
Esta demostración está basada en los siguientes resultados bien conocidos:

Lema I.$\{x\in(a,b)$: f'no existe$\} = \bigcup_{i,j}^{4}\{x : D_i f(x) < D_j f(x)\}$ donde f es una función definida sobre un intervalo acotado (a,b) y $D_1=D^+$, $D_2=D_+$, $D_3=D^-$, $D_4=D_-$.

Lema II.Sea $x\in(a,b)$ e $i \in \{1,2,3,4,\}$. Entonces
(a) Si $g'(x)=c\in\mathbb{R}$, $D_i(f+g)=D_i f + c$

(b) Si g es no decreciente sobre (a,b) , $D_i(f+g)(x) \geq D_i f(x)$.

Lema III.Sea f Lipschitz e $i\in\{1,...,4\}$.Entonces la función $D_i f(x)$ es Lebesgue medible.

Lema IV (Dini).Sea g continua sobre [c,d], $t\in\mathbb{R}$ e $i \in \{1,...,4\}$. Si $D_i g \geq t$ (ó $D_i g \leq t$) para cada $x \in (c,d)$
$g(d) - g(c) \geq t(d-c)$ (ó $g(d) - g(c) \leq t(d-c)$, respectivamente.

[116]-HAJLASZ,P. *Change of Variables Formula Under Minimal Assumptions.*
Colloq.Math 64 (1993), No.1 p.93-101.

[Se muestra que si f: $\Omega \to \mathbb{R}^n$; Ω abierto de $\mathbb{R}^n$, satisface una de las condiciones equivalentes: (*i*) f aproximadamente totalmente diferenciable c.d.; (*ii*) f aproximadamente diferenciable respecta a cada variable c.d.;(*iii*) para cada $\varepsilon > 0$, existe un cerrado F y una f.g ε $C'(\mathbb{R}^n)$tal que $|\Omega\backslash F| < \varepsilon$ y f/F = g/F, entonces f puede ser redefinida sobre un conjunto de medida cero tal que f satisfaga la condición (N) de Luzin y f es admisible para la fórmula de transformación].