



# INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 40

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA  
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina



# INFORME TÉCNICO N° 40

## Superfiguras Replicantes

María del Carmen Moure

<b>UNS-CONICET</b> INSTITUTO DE MATEMÁTICA BIBLIOTECA "Dr. ANTONIO MONTEIRO"
LIBRO No <b>I.TEC.INT.</b>
VOL. <b>40</b>
EJ. <b>-</b>

INMABB

UNS - CONICET

AÑO 1994





Este trabajo forma parte del proyecto PID 3322800/92  
CONICET dirigido por el Dr. Rafael Panzone en el INMABB.

PROCEDENCIA: INMABB - JNS CONICET  
PRECIO.....  
O.C..... L.C.....  
NO INV. INF. TECN. INT. 40  
FECHA 12/12/94 B-892

Lic. María del Carmen Moure

Mar del Plata, 10 de diciembre de 1994

## **INDICE**

### **PARTE I: REPRESENTACION DE LOS NUMEROS COMPLEJOS EN LA BASE DE GAUSS.**

- § 1. Representabilidad.
- § 2. Aritmética posicional en la base de Gauss.
- § 3. Números con dos y tres representaciones.

### **PARTE II: SUPERFIGURAS REPLICANTES Y ENDOMORFISMOS DE GRUPOS LIBRES.**

- § 4. Grupos Libres.
- § 5. Representaciones de Endomorfismos de Grupos Libres y Curvas Recurrentes.
- § 6. Ejemplos.

PARTE I

REPRESENTACION DE LOS NUMEROS  
COMPLEJOS EN LA BASE DE GAUSS.

§ 1. Representabilidad.

Los enteros positivos pueden ser representados en cualquier base entera  $b > 1$  usando dígitos  $0, 1, 2, \dots, b-1$ . El sistema decimal y el binario son los más conocidos de estas representaciones. Esta idea puede ser extendida a los números complejos.

Sean  $b \in \mathbb{C}$ ,  $|b| > 1$  y  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C}$ ,  $0 \in D$ .

Se definen los enteros del sistema  $(b, D)$  como los números del conjunto.

$$W = \left\{ \sum_{j=0}^M a_j b^j; a_j \in D \right\}$$

Los fraccionarios del sistema son los del conjunto

$$F = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j b^j; a_j \in D \right\}$$

Los números representables en la base forman el conjunto

$$G = \left\{ \sum_{j=-\infty}^M a_j b^j; a_j \in D \right\}$$

y finalmente los racionales del sistema serán aquellos números en  $G$  para los cuales  $a_j = 0$  si  $j < N$ , para algún  $N$  entero.

A continuación enunciamos algunos teoremas de la teoría de representabilidad.

**Teorema 1.1:** Sea  $b \in \mathbb{C}$ ,  $|b| > 1$  y  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \mathbb{C}$ ,  $0 \in D$ . Entonces, no todo número complejo admite un desarrollo de la forma  $\sum_{j=-\infty}^M c_j b^j$ ;  $c_j \in D$  o algún número tiene más de un desarrollo.

Por ejemplo si  $b = -1 + i$ , todo número complejo es representable, pero hay algunos con tres representaciones:

$$\frac{1-2i}{5} = \sum_{j=1}^{\infty} b^{-3j} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} b^{2-3j} = 1 + b + b^2 + \sum_{j=1}^{\infty} b^{1-3j}$$

**Sistemas de Restos.** Como es bien conocido, los enteros no negativos pueden representarse en cualquier base entera  $b > 1$  usando las cifras  $0, 1, \dots, b-1$ .

Si  $b < -1$  y  $D = \{0, 1, \dots, |b|-1\}$ ,  $Z$  puede representarse en notación posicional y sin prefijo negativo:

$m \in Z \Rightarrow m = \sum_{k=1}^r a_k b^k$ ,  $a_k \in D$  donde los coeficientes  $a_k$  son los restos de  $m$  en la división por  $b$ , es decir

$$m = b(a_r b^{r-1} + \dots) + a_0 = b[b(a_r b^{r-2} + \dots) + a_1] + a_0 = \dots$$

Sea  $E = \{p + iq : p, q \in Z\}$ , la familia de *enteros gaussianos* y  $b \in E$ ;  $|b| > 1$ . Para que todo número de  $E$  se pueda representar en forma única en base  $b$  con cifras en  $D \subset E$  y como entero del sistema  $(b, D)$  es necesario que  $D$  sea un *sistema completo de restos* respecto de  $b$ . Esto es

- i)  $d_1, d_2 \in D, d_1 \neq d_2 \Rightarrow d_1 - d_2 \neq br, r \in E$
- ii)  $g \in E \Rightarrow$  existen  $d \in D, r \in E$ , tales que  $g = br + d$

Si el proceso de dividir sucesivamente por  $b$  termina en un número finito de pasos,  $M+1$ , tendremos

$$g = \sum_{j=0}^M a_j b^j; a_j \in D$$

**Teorema 1.2 (Gauss).** Sean  $(n, m) = 1$  y  $D = \{0, 1, \dots, m^2 + n^2 - 1\}$ . Entonces  $D$  es un sistema completo de restos para la base  $b = m + in$ .

**Proposición 1.** Si  $D$  es un sistema completo de restos para la base  $b$  entonces los enteros del sistema,  $W$ , tienen representación única.

Sea  $b = 1 + i$ . Del teorema de Gauss sigue que  $\{0, 1\}$  es un sistema completo de restos y por lo tanto, según la proposición 1 todo entero del sistema tiene representación única. Además  $W \subset E$ . La representación se obtiene con el algoritmo de la división y como  $i = ib + 1$  resulta que el proceso de la división no termina para el entero  $i$ . Por lo que en este sistema  $W \neq E$ .

Esto muestra que  $b = m + in$ , siendo  $m, n$  coprimos no es condición suficiente para que todo entero gaussiano sea entero del sistema  $(b, D)$ .

Diremos que  $(b, D)$  es un *sistema numérico* si todo entero gaussiano es representable en él como entero del sistema.

**Teorema 1.3 (Kátai y Szabó).** Sean  $b = A + iB$ ,  $|b| > 1$ ,  $A$  y  $B$  en  $Z$  y  $D = \{0, 1, \dots, |b|-1\}$ .  $(b, D)$  es un sistema numérico si y sólo si se verifican

- i)  $A = \operatorname{Re}(b) < 0$
- ii)  $B = \operatorname{Im}(b) = \pm 1$

**Teorema 1.4.** Si  $(b, D)$  es un sistema numérico entonces todo complejo es representable en el sistema. Esto es si  $z \in \mathbb{C}$  entonces vale

$$z = a_r b^r + \dots + a_0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \dots \text{ para } a_j \in D$$

## § 2. Aritmética posicional en la base de Gauss.

Consideremos  $b = -1 + i$ . Si  $z = \sum_{j=0}^M c_j b^j$ ;  $c_j \in D = \{0, 1\}$  escribiremos  $z = (c_M \dots c_0, c_{-1} c_{-2} \dots)_b$  o simplemente  $z = (c_M \dots c_0, c_{-1} c_{-2} \dots)$ . Pero si los coeficientes  $c_j$  son enteros y no sabemos si son cifras "permitidas", escribiremos  $z = [c_M \dots c_0, c_{-1} c_{-2} \dots]$ . Por ejemplo puede verificarse que

$$2 + 3i = (1011), \quad -1 - i = (110), \quad i = (11), \quad 4 + 6i = (111010010100) \\ (1 - 2i)/5 = (0, \overline{001}) = (1, \overline{100}) = (111, \overline{010})$$

también es fácil verificar que

$$b^2 + 2b + 2 = 0 \quad \text{y} \quad b^3 + b^2 - 2 = 0$$

entonces

$$-1 = [121] \quad \text{y} \quad 2 = (1100)$$

además

$$b^3 + b = 2 \Rightarrow b^4 + b^3 = 2b \Rightarrow b^4 + b^3 + b^2 + 1 = b^2 + 2b + 1 = -1$$

por lo tanto  $-1 = (11101)$ .

**2.1. Suma.** Un sobreflujo de 2 en una columna a las tres columnas precedentes usando la igualdad  $2 = (1100)$ . Por ejemplo

$$\begin{array}{r} 110 \\ + 110 \\ \hline \underline{11101000} \\ 1100 \\ 1100 \\ 1100 \end{array} = \begin{array}{r} -1-i \\ -1-i \\ -2-2i \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11101 \\ 1 \\ \hline \underline{\dots 00000} \\ 1100 \\ 1100 \\ 1100 \\ 1100 \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

el segundo ejemplo muestra que la operación no siempre termina.

**2.2. Multiplicación.** Se reduce a la suma, por ejemplo,

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 11 \\ \hline 110 \\ + 110 \\ \hline \underline{111010} \\ 1100 \end{array} = \begin{array}{r} -1-i \\ i \\ 1-i \end{array}$$

### 2.3. Un Algoritmo corrector.

Dado un número  $z = \sum_{j=0}^m A_j b^j = [A_m A_{m-1} \dots A_1 A_0]$ , sea  $A_r$  el primer coeficiente que no es una cifra y sea  $s$  el entero tal que  $0 \leq A_r + 2 \leq 1$ . Sea  $p(b) = b^2 + 2b + 2 = 0$ . Entonces

$$z = \sum_{j=0}^m A_j b^j + p(b) s b^r = \sum_{j=0}^{m'} A'_j b^j$$

donde  $m' \leq m+2$  y  $A'_0 = A_0 \dots A'_{r-1} = A_{r-1}$  y  $A'_r = A_r + 2s$  son cifras (0 o 1).

Repetiendo este proceso se obtiene una representación de  $z$  en la base  $-1+i$ , ya que vale el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** El algoritmo corrector finaliza en un número finito de pasos.

**Primera demostración:**

Para dar mayor claridad a la demostración vamos a considerar que el algoritmo comienza por  $A_0$  y se repite de a un coeficiente, aún cuando sea una cifra; en caso de que  $A_k$  sea una cifra se tomará  $s_k=0$ .

Así tendremos

$$A_0^{(1)} = A_0 + 2s_0 \in D = \{0, 1\}$$

$$A_1^{(1)} = A_1 + 2s_0$$

$$A_2^{(1)} = A_2 + s_0$$

$$A_i^{(1)} = A_i \quad i > 2$$

y así sucesivamente, para corregir el coeficiente de  $b^k$  hacemos

$$A_k^{(k+1)} = A_k^{(k)} + 2s_k \in D = \{0, 1\}$$

$$A_{k+1}^{(k+1)} = A_{k+1}^{(k)} + 2s_k$$

$$A_{k+2}^{(k+1)} = A_{k+2}^{(k)} + s_k$$

$$A_i^{(k+1)} = A_i \quad i > k+2$$

Si el proceso termina antes del paso  $k=m$  ya está, si no es así, sigamos los últimos pasos para ver como continúa:

Desarrollamos los pasos  $k=m-2$ ,  $k=m-1$ ,  $k=m$  y  $k \geq m+1$

$$A_{m-2}^{(m-1)} = A_{m-2}^{(m-2)} + 2s_{m-2} \in D$$

$$A_{m-1}^{(m-1)} = A_{m-1}^{(m-2)} + 2s_{m-2}$$

$$A_m^{(m-1)} = A_m^{(m-2)} + s_{m-2}$$

$$A_i^{(m-1)} = A_i = 0 \quad i > m$$

$$A_{m-1}^{(m)} = A_{m-1}^{(m-1)} + 2s_{m-1} \in D$$

$$A_m^{(m)} = A_m^{(m-1)} + 2s_{m-1}$$

$$A_{m+1}^{(m)} = A_{m+1}^{(m-1)} + s_{m-1} = s_{m-1}$$

$$A_i^{(m)} = A_i = 0 \quad i > m+1$$

$$A_m^{(m+1)} = A_m^{(m)} + 2s_m \in D$$

$$A_{m+1}^{(m+1)} = A_{m+1}^{(m)} + 2s_m = s_{m-1} + 2s_m$$

$$A_{m+2}^{(m+1)} = A_{m+2}^{(m)} + s_m = s_m$$

$$A_i^{(m+1)} = A_i = 0 \quad i > m+2$$



y finalmente si  $k \geq m$

$$\begin{aligned} A_{k+1}^{(k+2)} &= A_{k+1}^{(k+1)} + 2s_{k+1} = s_{k-1} + 2s_k + 2s_{k+1} \in D \\ A_{k+2}^{(k+2)} &= A_{k+2}^{(k+1)} + 2s_{k+1} = s_k + 2s_{k+1} \\ A_{k+3}^{(k+2)} &= A_{k+3}^{(k+1)} + s_{k+1} = s_{k+1} \\ A_i^{(k+2)} &= A_i = 0 \quad i > k+3 \end{aligned}$$

así se genera una sucesión de enteros  $s_k$ . Observando el último conjunto de ecuaciones se ve que para  $k \geq m$  de la expresión

$$s_{k-1} + 2s_k + 2s_{k+1} \in \{0, 1\}$$

se tiene una forma de generar los  $s_k$ . Además, la información de los pasos anteriores queda "condensada" en  $s_{m-1}$  y  $s_m$ ; que por eso escribiremos desde ahora como  $s_0$  y  $s_1$ . Y a partir de allí las nuevas cifras salen de

$$(*) \quad \boxed{s_{k-1} + 2s_k + 2s_{k+1} = a_k \in \{0, 1\}}$$

Es claro que cuando se obtienen dos  $s_k$  consecutivos nulos el algoritmo termina, y eso es lo que queremos probar.

A continuación vamos a probar que de la fórmula de generación de los  $s_k$ , se obtienen otras de la forma

$$\begin{aligned} (1) \quad s_{4k} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} s_0 + R_{4k} \quad k \geq 1 \\ (2) \quad s_{4k+1} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} s_1 + R_{4k+1} \quad k \geq 1 \\ (3) \quad s_{4k+2} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}} s_0 + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}} s_1 + R_{4k+2} \quad k \geq 0 \\ (4) \quad s_{4k+3} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} (s_0 + s_1) + R_{4k+3} \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} (5) \quad R_n &= \sum_{0 \leq 8i \leq n-2} \frac{a_{n-8i}}{2^{4i+1}} - \sum_{0 \leq 8i+1 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+1)}}{2^{4i+1}} \\ &+ \sum_{0 \leq 8i+2 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+2)}}{2^{4i+2}} - \sum_{0 \leq 8i+4 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+4)}}{2^{4i+3}} \\ &+ \sum_{0 \leq 8i+5 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+5)}}{2^{4i+3}} - \sum_{0 \leq 8i+6 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+6)}}{2^{4i+4}} \end{aligned}$$

(en todos los casos la variación de  $i$  es en los naturales con el cero)

Es sencillo verificar (1),(2),(3) y (4) para  $k=0$  y  $k=1$ . Supongamos ahora que (1),(2),(3) y (4) valen para  $k$  y entonces, siempre valiéndonos de la fórmula (\*) de la página 5 lo verificamos para  $k+1$ . En primer lugar veamos que para todo  $n$  vale la siguiente igualdad:

$$(**) \quad R_{n+1} = -\frac{1}{2}R_{n-1} - R_n + \frac{1}{2}a_{n+1}$$

Para hacer más clara la demostración escribiremos para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$R_n = R_n^0 - R_n^1 + R_n^2 - R_n^4 + R_n^5 - R_n^6$$

siendo

$$R_n^\alpha = \sum_{0 \leq 8i+\alpha \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+\alpha)}}{2^{4i+\alpha}} \quad \text{donde } \beta_0=\beta_1=1, \beta_2=2, \beta_4=\beta_5=3 \text{ y } \beta_6=4$$

entonces tenemos

$$-\frac{1}{2}R_{n-1} - R_n + \frac{1}{2}a_{n+1} = -\frac{1}{2}R_{n-1}^0 + R_n^1 + \frac{1}{2}R_{n-1}^1 - R_n^2 - \frac{1}{2}R_{n-1}^2 + R_n^4 + \frac{1}{2}R_{n-1}^4 - R_n^5 - \frac{1}{2}R_{n-1}^5 + R_n^6 + \frac{1}{2}R_{n-1}^6 + \frac{1}{2}a_{n+1} - R_n^0$$

pero

$$-\frac{1}{2}R_{n-1}^0 + R_n^1 = -\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{0 \leq 8i \leq n-3} \frac{a_{n-1-8i}}{2^{4i+1}} + \sum_{0 \leq 8i+1 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+1)}}{2^{4i+1}} = - \sum_{2 \leq 8i+2 \leq n-1} \frac{a_{n+1-(8i+2)}}{2^{4i+2}} + 2 \sum_{1 \leq 8i+2 \leq n-1} \frac{a_{n+1-(8i+2)}}{2^{4i+2}}$$

además

$$\{i \in \mathbb{N}_0; 2 \leq 8i+2 \leq n-1\} = \{i \in \mathbb{N}_0; 1 \leq 8i+2 \leq n-1\} = \{i \in \mathbb{N}_0; 0 \leq 8i+2 \leq n-1\}$$

así

$$-\frac{1}{2}R_{n-1}^0 + R_n^1 = R_{n+1}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}R_{n-1}^1 - R_n^2 &= \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{0 \leq 8i+1 \leq n-3} \frac{a_{n-1-(8i+1)}}{2^{4i+1}} - \sum_{0 \leq 8i+2 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+2)}}{2^{4i+2}} = \\ &= \sum_{1 \leq 8i+2 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+2)}}{2^{4i+2}} - \sum_{0 \leq 8i+2 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+2)}}{2^{4i+2}} = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}R_{n-1}^2 = -\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{0 \leq 8i+2 \leq n-3} \frac{a_{n-1-(8i+2)}}{2^{4i+2}} = - \sum_{2 \leq 8i+4 \leq n-1} \frac{a_{n+1-(8i+4)}}{2^{4i+3}} = -R_{n+1}^4$$

$$R_n^4 = \sum_{0 \leq 8i+4 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+4)}}{2^{4i+3}} = \sum_{0 \leq 8i+5 \leq n-1} \frac{a_{n+1-(8i+5)}}{2^{4i+3}} = R_{n+1}^5$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}R_{n-1}^4 - R_n^5 &= \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{0 \leq 8i+4 \leq n-3} \frac{a_{n-1-(8i+4)}}{2^{4i+3}} - \sum_{0 \leq 8i+5 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+5)}}{2^{4i+3}} = \\ &= \sum_{2 \leq 8i+6 \leq n-1} \frac{a_{n+1-(8i+6)}}{2^{4i+4}} - 2 \sum_{1 \leq 8i+6 \leq n-1} \frac{a_{n+1-(8i+6)}}{2^{4i+4}} = -R_{n+1}^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}R_{n-1}^5 + R_n^6 &= -\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{0 \leq 8i+5 \leq n-3} \frac{a_{n-1-(8i+5)}}{2^{4i+3}} + \sum_{0 \leq 8i+6 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+6)}}{2^{4i+4}} = \\ &= - \sum_{1 \leq 8i+6 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+6)}}{2^{4i+4}} + \sum_{0 \leq 8i+6 \leq n-2} \frac{a_{n-(8i+6)}}{2^{4i+4}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}R_{n-1}^6 + \frac{1}{2}a_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{0 \leq 8i+6 \leq n-3} \frac{a_{n-1-(8i+6)}}{2^{4i+4}} + \frac{1}{2}a_{n+1} = \\ &= \sum_{2 \leq 8(i+1) \leq n-1} \frac{a_{n+1-8(i+1)}}{2^{4(i+1)+1}} + \frac{1}{2}a_{n+1} = \sum_{0 \leq 8j \leq n-1} \frac{a_{n+1-8j}}{2^{4j+1}} = R_{n+1}^0 \end{aligned}$$

$$-R_n^0 = - \sum_{0 \leq 8i \leq n-2} \frac{a_{n-8i}}{2^{4i+1}} = - \sum_{1 \leq 8i+1 \leq n-1} \frac{a_{n+1-(8i+1)}}{2^{4i+1}} = -R_{n+1}^1$$

Queda probada la fórmula (\*\*) de la página 5.

Seguimos ahora con la prueba de las fórmulas (1),(2),(3) y (4) de la página 5. Suponiendo que son válidas para  $k$ , vamos a probarlas para  $k+1$ :

Para probar (1) se usarán las fórmulas (3) y (4) de la hipótesis inductiva y la fórmula (\*\*)

$$\begin{aligned}
 (1): \quad s_{4(k+1)} &= s_{4k+4} = \frac{1}{2} (-s_{4k+2} - 2s_{4k+3} + a_{4(k+1)}) = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ - \left[ \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}} s_0 + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}} s_1 \right] - 2 \left[ \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} (s_0 + s_1) \right] - R_{4k+2} - 2R_{4k+3} + a_{4(k+1)} \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}} (-1+2) s_0 - R_{4k+2} - 2R_{4k+3} + a_{4(k+1)} \right] = \\
 &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+2}} s_0 - \frac{1}{2} R_{4k+2} - R_{4k+3} + \frac{1}{2} a_{4(k+1)} = \\
 &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2(k+1)}} s_0 + R_{4(k+1)}
 \end{aligned}$$

$$(2): \quad s_{4(k+1)+1} = s_{4k+5} = \frac{1}{2} (-s_{4k+3} - 2s_{4(k+1)} + a_{4k+5})$$

se prueba con (4) de la hipótesis inductiva y la recién demostrada (1) para el paso  $k+1$ .

De la misma forma se prueban (3) y (4) sin dificultad.

Resumiendo, lo importante es que hemos probado que los valores de la sucesión de enteros  $s_k$  son de la forma

$$s_k = T_k + R_k$$

con  $T_k$  y  $R_k$  como se muestra en las expresiones (1) a (5) de la Página 5. De donde podemos ver que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = 0$$

y ya que  $a_i=0$  ó  $a_i=1$  de (5) se tiene

$$- \sum_{0 \leq 8i+1 \leq n-2} \frac{1}{2^{4i+1}} - \sum_{0 \leq 8i+4 \leq n-2} \frac{1}{2^{4i+3}} - \sum_{0 \leq 8i+6 \leq n-2} \frac{1}{2^{4i+5}} \leq R_n \leq \sum_{0 \leq 8i \leq n-2} \frac{1}{2^{4i+1}} + \sum_{0 \leq 8i+2 \leq n-2} \frac{1}{2^{4i+2}} + \sum_{0 \leq 8i+5 \leq n-2} \frac{1}{2^{4i+3}}$$

por lo tanto

$$- \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^4} \right)^i \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} \right) \leq R_n \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^4} \right)^i \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \right)$$

esto es

$$T_n - \frac{16}{15} \frac{11}{16} \leq s_n \leq T_n + \frac{16}{15} \frac{7}{8}$$

es decir

$$T_n - \frac{11}{15} \leq s_n \leq T_n + \frac{14}{15} \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0 \quad \text{y} \quad s_n \text{ entero}$$

esto implica que existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que  $s_n=0$  para todo  $n \geq N$ , que es lo que queríamos probar.

**Segunda demostración:**

Como se ha mostrado en la prueba anterior, puede considerarse que el proceso comienza a partir del paso que corrige el coeficiente  $A_{m+1}$  y escribimos retomando lo de la ecuación (\*) de la página 5

$$\begin{aligned} A'_{m+1} &= s_0 + 2s_1 + 2s_2 = a_1 \\ A'_{m+2} &= s_1 + 2s_2 + 2s_3 = a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{cases} s_2 = -\left(\frac{s_0}{2} + s_1\right) + \frac{a_1}{2} \\ s_3 = -\left(\frac{s_1}{2} + s_2\right) + \frac{a_2}{2} \end{cases} \quad \text{y de esto} \quad \begin{cases} s_4 = -\frac{s_0}{4} + \frac{a_1}{4} - \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2} \\ s_5 = -\frac{s_1}{4} + \frac{a_2}{4} - \frac{a_3}{2} + \frac{a_4}{2} \end{cases}$$

donde  $a_i=0$  o  $a_i=1$ , entonces

$$\begin{cases} |s_4| \leq \frac{|s_0|}{4} + \frac{3}{4} \\ |s_5| \leq \frac{|s_1|}{4} + \frac{3}{4} \end{cases}$$

luego, inductivamente

$$|s_i| \leq \frac{|s_{i-4}|}{4} + \frac{3}{4} \quad \text{para } i \geq 4$$

así para  $i=0, i=1, i=2$  e  $i=3$  tenemos

$$|s_{4k+i}| \leq |s_i| + \sum_{j=1}^k \frac{3}{4^j}$$

esto muestra que  $\{s_j\}$  es una familia acotada, y por lo tanto finita puesto que los  $s_k$  son enteros. Esto significa que si el proceso no finaliza habrá un vector de la forma  $(s_q, s_{q+1}, s_{q+2})$  que se repite. Supongamos, sin por eso perder generalidad  $q=0$  y  $(s_0, s_1, s_2) = (s_k, s_{k+1}, s_{k+2})$  y sea  $\alpha = a_0 + a_1b + \dots + a_k b^k$ . Entonces vale

$$\sum_{j=0}^m A_j b^j = \sum_{j=0}^m A'_j b^j + b^{m+1}\alpha + b^{m+1-k}\alpha + \dots + b^{m+1+kH}\alpha + b^{m+1+kH+1}\alpha'$$

si  $\alpha \neq 0$  la representación de la derecha (después de escribir  $\alpha'$  con cifras) tiene tantos unos como se quiera. Pero la representación de un entero gaussiano es única (proposición 1, pág. 2. Si  $\alpha=0$ , la representación de la derecha tiene tantos ceros como se quiera y la contradicción es la misma.

**Ejemplos.**  $b^2 + 2b + 1 = [1 \ 2 \ 1] = [-1 \ -1 \ 0 \ 1] = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] = (11101)$   
 $3b^3 = [3 \ 0 \ 0 \ 0] = [-1 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] = (1101000)$

**2.4. Conversión de un entero de Gauss a la representación posicional en la base de Gauss.**

Sea  $z = R + iI$ . Entonces

$$z = I(-1 + i) + (R + I) = [I \ R + I]$$

y se aplica el algoritmo corrector. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
-2+i &= [1 \ -1] = [1 \ 3 \ 1] = [-1 \ -1 \ 1 \ 1] = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] = (11111) \\
3i &= [3 \ 3] = [-1 \ 1 \ 1] = [1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1] = [-1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1] = (1110111) \\
7 &= [0 \ 7] = [-3 \ -6 \ 1] = [3 \ 3 \ 0 \ 1] = [-1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] = [1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] = [-1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] = \\
&= [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] = (111011101)
\end{aligned}$$

Nota. las primeras potencias de  $b=-1+i$ :  $b^2=-2i$ ;  $b^3=2+2i$ ;  $b^4=-4$ ;  $b^5=4-4i$ ;  $b^6=8i$ ;  $b^7=-8-8i$ ;  $b^8=16$ .

### § 3. Números con dos y tres representaciones.

#### 3.1. Números con dos representaciones. Sea

$$z = \sum_{j=-\infty}^L p_j b^j = \sum_{j=-\infty}^L q_j b^j \quad p_j, q_j \in D$$

se define  $p(k) := \left( \sum_{j=k}^L p_j b^j \right) b^{-k}$ . A este entero gaussiano se lo denominará *estado  $k$  de la representación  $p$  de  $z$* . Si  $k=0$ ,  $p(0)$  coincide con la *parte entera de la representación  $p$  de  $z$* . Tenemos el siguiente

**Teorema 3.1.** Para todo  $k$ ,  $p(k)-q(k) \in S := \{0, \pm 1, \pm i, \pm(1+i)\}$ .

**Demostración:** Notemos que

$$0 = \sum_{j=-\infty}^L (p_j - q_j) b^j = \sum_{j=-\infty}^L (p_j - q_j) b^{j-k} = \sum_{j=-\infty}^{k-1} (p_j - q_j) b^{j-k} + \sum_{j=k}^L (p_j - q_j) b^{j-k}$$

entonces

$$p(k)-q(k) = -\sum_{j=-\infty}^{k-1} (p_j - q_j) b^{j-k}, \quad (p_j - q_j) \in \{0, \pm 1\}.$$

llamamos  $d_j = p_j - q_j$  y tenemos que

$$|d_0 + d_1 b + d_2 b^2| \leq \max_{d_i \in \{0, \pm 1\}} |d_0 + d_1 b + d_2 b^2| = |1 - b + b^2| = \sqrt{13}$$

luego

$$|p(k)-q(k)| \leq \sqrt{13} \sum_{j=1}^{\infty} |b|^{-3j} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}-1}$$

y resulta

$$(\diamond) \quad |p(k)-q(k)| < 2$$

por otra parte  $p(k-1) = p_{k-1} + p(k)b$  y así

( $\diamond\diamond$ )

$$\boxed{p(k-1) - q(k-1) = b[p(k) - q(k)] + (p_{k-1} - q_{k-1})}$$

de ( $\diamond$ ) sigue que  $p(k)-q(k)$  es un entero de Gauss que pertenece a  $S \cup \{\pm b\}$ . Si  $p(k)-q(k)$  fuera igual a  $\pm b$  entonces tendríamos

$$p(k-1) - q(k-1) = \pm 2i + (p_{k-1} - q_{k-1})$$

pero  $p_{k-1} - q_{k-1}$  es real y esto implicaría  $|p(k-1)-q(k-1)| \geq 2$  en contradicción con ( $\diamond$ ). QED

El teorema previo nos dice que el par de estados  $(p(k), q(k))$  puede ser de siete tipos diferentes según el valor de  $p(k)-q(k)$ . Simbolizaremos estos tipos de la siguiente manera:

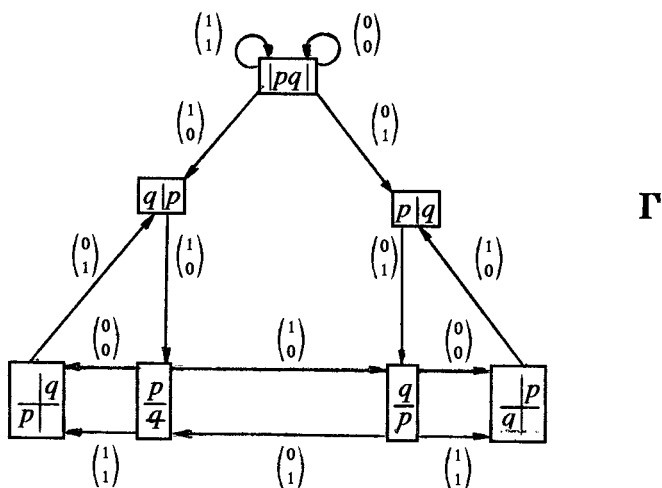
$$\begin{array}{ll}
|pq| & p(k) - q(k) = 0 \\
p|q & p(k) - q(k) = -1 \\
\frac{p}{q} & p(k) - q(k) = -i \\
\frac{|q}{p|} & p(k) - q(k) = -1 - i
\end{array}$$

Los tres tipos restantes se obtienen permutando  $p$  con  $q$ .

La ecuación ( $\diamond\diamond$ ) nos muestra que el par de cifras  $p_{k-1}, q_{k-1}$  es el que controla la transición del tipo de estado  $(p(k), q(k))$  al tipo del estado  $(p(k-1), q(k-1))$ .

Por ejemplo: si  $(p(k), q(k)) \in p|q$  entonces  $p(k-1) - q(k-1) = -b + (p_{k-1} - q_{k-1})$  que permanece en  $S$  sólo si  $p_{k-1} - q_{k-1} = -1$  que sólo se logra con  $p_{k-1} = 0, q_{k-1} = 1$  y entonces  $(p(k-1), q(k-1)) \in \frac{p}{q}$ .

De esta forma se construye el grafo  $\Gamma$



Supongamos que  $z$  tiene dos representaciones con distintas partes enteras, es decir que  $(p(0), q(0))$  pertenece a un nodo de  $\Gamma$  que no es el superior. En este caso podemos asociar a  $z$  un filamento (hilo infinito) del grafo  $\Gamma$  que parte de ese nodo y tal que al seguirlo se obtienen las cifras de  $z$  después de la coma para ambas representaciones. Esas cifras son las componentes de los vectores columna asociados a cada flecha. Las cifras antes de la coma serán las de  $p(0)$  y  $q(0)$  respectivamente.

Puede probarse que vale también la recíproca y vale entonces el siguiente

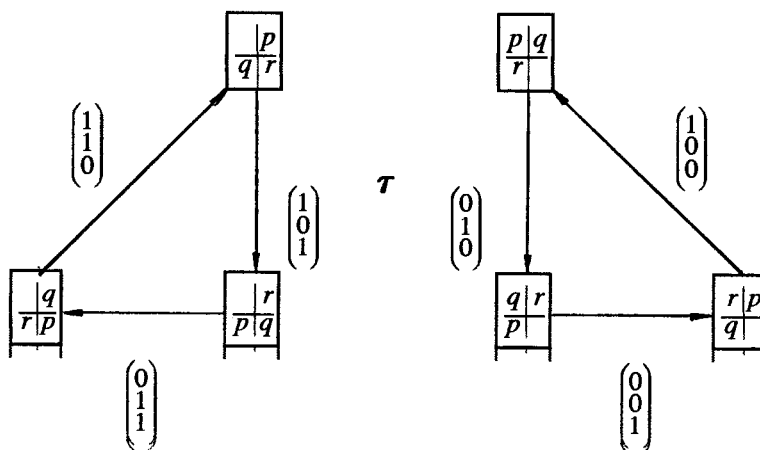
**Teorema 3.2.** i) A cada número  $z$  con dos representaciones tales que  $(p(0), q(0)) \notin |pq|$  le corresponde un filamento de  $\Gamma$  que parte del nodo que representa al tipo de  $(p(0), q(0))$ .

ii) Recíprocamente, a un filamento que parte de un nodo  $N \neq |pq|$  le corresponde un número  $z$  con dos representaciones tales que  $(p(0), q(0)) \in N$ . Si  $p(0) = 0$   $z$  es único.

**3.2. Números con tres representaciones.** Sea  $z$  un número con tres representaciones distintas:

$$z = \sum_{-\infty}^L p_j b^j = \sum_{-\infty}^L q_j b^j = \sum_{-\infty}^L r_j b^j$$

tales que  $p(0) \neq q(0) \neq r(0) \neq p(0)$ . Como  $p(0)-q(0)$ ,  $q(0)-r(0)$ ,  $r(0)-p(0)$  deben estar en  $S$ , la posición relativa de estos tres estados será necesariamente  $\frac{p|q}{r|}$  o bien  $\frac{|p}{q|r}$  o permutando las letras  $p$ ,  $q$  y  $r$ . La tripla de estados  $p(0), q(0), r(0)$  será del tipo de uno de los nodos del grafo  $\tau$ . Podemos construir el grafo  $\tau$  valiéndonos del grafo  $\Gamma$  y resulta



De lo dicho se desprende que no hay números con cuatro representaciones. Vale el siguiente

**Teorema 3.3.** Sea  $z$  un número con tres representaciones. Entonces existe  $n$  tal que  $zb^n = g_i + f_i$   $i=1,2,3$  con  $g_i$  un entero de Gauss,  $f_i \in F$  y tales que  $g_1=p(n)$ ,  $g_2=q(n)$ ,  $g_3=r(n)$  son distintos dos a dos y se relacionan entre si como en uno de los nodos de  $\tau$ . Las  $f_i$  se obtienen recorriendo indefinidamente un ciclo del grafo. Las cifras de  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  en los vectores columna asociados a cada flecha.

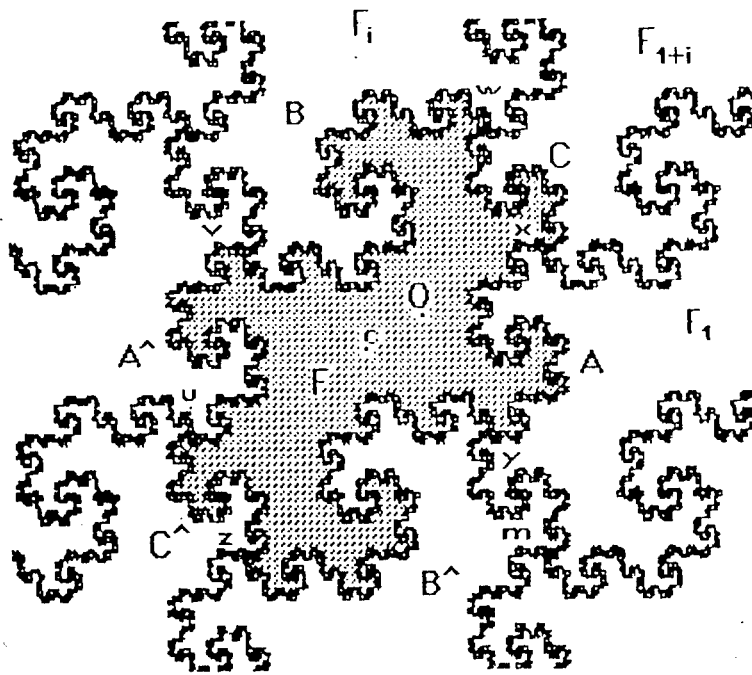
Recíprocamente, cada filamento de  $\tau$  se obtiene partiendo e un nodo y recorriendo indefinidamente uno de los ciclos del grafo  $\tau$ . Las tres sucesiones de cifras obtenidas representan a un mismo  $z \in \mathbb{C}$  si  $p(0)=0$ .

### 3.3. El conjunto $F$ asociado a la base de Gauss.

Se puede probar que el contorno del conjunto  $F$  es una curva cerrada simple y está formado por números con dos representaciones. A  $F$  se lo conoce como el *dragón gemelo* y verifica

$$F =$$

También  $\partial$  es un fractal cuya dimensión de Hausdorff  $s \in (1,2)$ . El arco  $A$  es semejante a los arcos  $B^{\wedge}$ ,  $C^{\wedge}$ ,  $A^{\wedge}$ ,  $B$ ,  $C$ . Además  $A$  es un conjunto autosemejante cuya dimensión de semejanza es  $s$ . Más aún, es un  $s$ -conjunto, esto es, su  $s$ -medida de Hausdorff es positiva y finita.[3]





## PARTE II

### SUPERFIGURAS REPLICANTES Y ENDOMORFISMOS DE GRUPOS LIBRES.

#### § 4. Grupos libres.

Sea  $X$  un conjunto no vacío cuyos elementos notaremos por  $x_a$ . Construiremos un conjunto  $L(X)$  de la siguiente manera:

Llamaremos una *palabra* a un producto finito  $x_{a_1}^{n_1} x_{a_2}^{n_2} \dots x_{a_k}^{n_k}$  en el cual  $x_{a_i} \in X$  y  $n_i$  son números enteros.

Diremos que la palabra es *reducida* si  $x_{a_i} \neq x_{a_{i+1}}$  y  $n_i \neq 0$  para cualquier  $i$ .

Dada una palabra siempre podemos hacer una palabra reducida con ella sumando las potencias cuando dos elementos adyacentes son iguales y omitiéndolos cuando la potencia sumada sea cero, repitiendo este proceso tantas veces como sea necesario. Por ejemplo:

$$x_a^{-3} x_a^2 x_b^5 x_b^{-5} x_a^7 x_c^2 = x_a^{-1} x_a^7 x_c^2 = x_a^6 x_c^2$$

donde la última es una palabra reducida.

Reduciendo una palabra  $x_a^0$  se obtiene una palabra sin símbolos que llamaremos *palabra vacía*.

Si  $v = x_{a_1}^{n_1} x_{a_2}^{n_2} \dots x_{a_k}^{n_k}$  el número  $\sum_{i=1}^k n_i$  se llama *longitud de la palabra reducida*  $v$  y se denota por  $l(v)$ .

Dadas dos palabras reducidas  $v$   $w$  para definir el producto  $v.w$  escribimos  $w$  inmediatamente después de  $v$  y si no resultara una palabra reducida, se realiza el proceso de reducción como ya se ha visto.

El elemento neutro para este producto es obviamente la palabra vacía. Probans  
que ésta es una operación asociativa:

Vamos a probar la igualdad

$$u.(v.w) = (u.v).w \quad (*)$$

siendo  $u = x_{a_1}^{n_1} x_{a_2}^{n_2} \dots x_{a_k}^{n_k}$   $v = x_{b_1}^{m_1} x_{b_2}^{m_2} \dots x_{b_r}^{m_r}$   $w = x_{c_1}^{p_1} x_{c_2}^{p_2} \dots x_{c_s}^{p_s}$

por inducción sobre la longitud de  $v$ . (si alguna fuera la palabra vacía, la igualdad es trivial).

1. Si  $l(v) = 1$ , esto es  $v = x_b$ . Considerando los casos

- i)  $x_b \neq x_{a_k}$  y  $x_b \neq x_{c_1}$
- ii)  $x_b = x_{a_k}$  y  $x_b \neq x_{c_1}$  o  $x_b \neq x_{a_k}$  y  $x_b = x_{c_1}$
- iii)  $x_b = x_{a_k} = x_{c_1}$

en todos los casos (\*) sigue fácilmente de la definición de producto.

2. Supongamos que (\*) es válida si  $l(v) < n$  y sea

$$n = l(v) = \sum_{i=1}^r m_i. \text{ Entonces}$$

$$v = v' x_{b_r}^{m_r} \text{ siendo } v' = x_{b_1}^{m_1} x_{b_2}^{m_2} \dots x_{b_{r-1}}^{m_{r-1}}$$

donde  $v'$  es una palabra reducida puesto que  $v$  lo es, y  $l(v') < l(v)$  (eventualmente  $v'$  será la palabra vacía). En consecuencia por la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned} u.(v.w) &= u.((v' x_{b_r}^{m_r}).w) = u.(v'.(x_{b_r}^{m_r}.w)) = \\ &= (u.v').(x_{b_r}^{m_r}.w) = ((u.v').x_{b_r}^{m_r}).w = \\ &= (u.(v' x_{b_r}^{m_r})).w = (u.v).w \end{aligned}$$

El inverso de una palabra reducida

$$v = x_{a_1}^{n_1} x_{a_2}^{n_2} \dots x_{a_k}^{n_k}$$

es la palabra

$$v^{-1} = x_{a_k}^{-n_k} \dots x_{a_2}^{-n_2} x_{a_1}^{-n_1}$$

El conjunto  $L(X)$  de todas las palabras reducidas forman un grupo bajo este producto que se llama *grupo libre generado por X*.  $L(X)$  queda completamente determinado por  $X$  y **no depende de las propiedades particulares de los elementos de este conjunto**.

Llamaremos *rango* de  $L(X)$  al cardinal del conjunto  $X$ . Y es fácil probar que dos grupos libres de igual rango son isomorfos. Por ejemplo un grupo libre de rango 1 es isomorfo al grupo aditivo de los números enteros  $Z$

Una propiedad fundamental del grupo libre  $L(X)$  es la siguiente:

Todo grupo es isomorfo al cociente de un grupo libre. En efecto, sea  $G$  un grupo arbitrario y  $X$  un conjunto de generadores de  $G$ . Si consideramos la aplicación inclusión

$$i_X: X \rightarrow G \quad i_X(x) = x$$

se extiende unívocamente a un homomorfismo  $f: L(X) \rightarrow G$ . Como  $X$  es un conjunto de generadores,  $f$  es un epimorfismo, y por lo tanto<sup>1</sup> se tiene

$$L(X)/\text{Nu}(f) \simeq G$$

<sup>1</sup>Teorema: Sean  $G, G'$  y  $H$  grupos,  $f, p$  morfismos de grupo,  $p$  epimorfismo y  $\text{Nu}(p) \subset \text{Nu}(f)$ , entonces existe  $F: G' \rightarrow H$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & G \rightarrow G' & \\ f \downarrow & \swarrow F & f = F \circ p \\ & H & \end{array}$$

además: i)  $\text{Nu}(f) = \text{Nu}(p) \rightarrow F$  es monomorfismo.  
ii)  $f$  es epimorfismo  $\rightarrow F$  es epimorfismo

Esto significa que  $\text{Nu}(f)$  determina  $G$  y observemos que los elementos de  $\text{Nu}(f)$  son las expresiones formales  $x_{a_1}^{n_1} x_{a_2}^{n_2} \dots x_{a_k}^{n_k}$  en  $L(X)$  tales que en  $G$   $x_{a_1}^{n_1} x_{a_2}^{n_2} \dots x_{a_k}^{n_k} = 1$ .

Ahora consideremos  $R$  una colección de palabras en  $L(X)$  tal que  $\text{Nu}(f)$  es el menor subgrupo normal que lo contiene. En esta situación decimos que el par  $(X, R)$  es una presentación del grupo  $G$ .

Por ejemplo

1.- Para el grupo  $Z$  una presentación es el par  $(X, R)$  donde  $X = \{x\}$  y  $R = \emptyset$ .

2.- Para  $Z_n$  un par  $(X, R)$  donde  $X = \{x\}$  y  $R = \{x^n\}$

Podemos citar los siguientes resultados más conocidos sobre grupos libres:

**Teorema de Rotman.** Todo subgrupo de un grupo libre es a su vez un grupo libre sobre algún conjunto.

**Teorema de Van Dyck:** Si  $G$  es el grupo determinado por un conjunto  $X$  y un conjunto de palabras  $R$  en  $L(X)$  y  $H$  es otro grupo determinado por el mismo conjunto  $X$  y un conjunto de palabras en  $L(X)$   $R' \supset R$ , entonces hay un epimorfismo  $G \rightarrow H$

Para demostrar éste último teorema, simplemente digamos que por lo visto antes, si llamamos  $N$  al menor subgrupo normal de  $L(X)$  que contiene a  $R$  y  $N'$  al menor subgrupo normal de  $L(X)$  que contiene a  $R'$ ; sabemos que

$$G \cong L(X)/N \quad \text{y} \quad H \cong L(X)/N'$$

y es claro que  $N \subset N'$ , entonces aplicando el teorema del homomorfismo citado en la última nota al pie, siendo  $f$  y  $p$  las proyecciones al cociente se tiene inmediatamente el resultado enunciado.

## § 5. Representaciones de Endomorfismos de Grupos Libres y Curvas Recurrentes.

Sea  $G$  el grupo libre generado por  $a$  y  $b$ . Consideramos a  $G$  como el cociente del semigrupo  $S^*$  generado por

$$S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$$

por la relación de equivalencia  $\sim$ , definida por  $W \sim V$  si y solo si  $W$  y  $V$  determinan, por cancelación, la misma palabra, llamada *palabra reducida*.

Sea  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homomorfismo, es decir,  $f$  determinada por  $f(a)$  y  $f(b)$  y las relaciones

$$f(W^{-1}) = -f(W) \text{ y } f(V \cdot W) = f(V) + f(W)$$

Dada  $f$  se define una aplicación  $K$  que asigna curvas poligonales en  $\mathbb{R}^2$  a cada palabra reducida en  $G$  de la siguiente manera

$$K[s] = \{\alpha f(s); 0 \leq \alpha \leq 1\} \quad s \in S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$$

y si  $s_1, \dots, s_m \in G$

$$K[s_1 \dots s_m] = \bigcup_{i=1}^m (K[s_i] + f(s_1 \dots s_{i-1}))$$

(la poligonal con vértices  $(0,0), f(s_1), f(s_1 s_2), \dots, f(s_1 \dots s_m)$ )

Observemos que entonces para  $W \in G$   $K[W^{-1}] = K[W] - f(W)$  ya que si  $W = s_1 \dots s_m \in G$

$$\begin{aligned} K[W] - f(W) &= \bigcup_{i=1}^m (K[s_i] + f(s_1 \dots s_{i-1}) - f(s_1 \dots s_m)) \\ &= \bigcup_{i=1}^m (K[s_i] - f(s_i \dots s_m)) \\ &= \bigcup_{i=1}^m (K[s_i] - f(s_i) + f(s_m^{-1} \dots s_{i+1}^{-1})) \\ &= \bigcup_{i=1}^m \{t f(s_i) - f(s_i) + f(s_m^{-1} \dots s_{i+1}^{-1}); t \in [0, 1]\} \\ &= \bigcup_{i=1}^m \{(1-t)(-f(s_i)) + f(s_m^{-1} \dots s_{i+1}^{-1}); t \in [0, 1]\} \\ &= \bigcup_{i=1}^m \{\alpha f(s_i^{-1}) + f(s_m^{-1} \dots s_{i+1}^{-1}); \alpha \in [0, 1]\} \\ &= \bigcup_{i=1}^m (K[s_i^{-1}] + f(s_m^{-1} \dots s_{i+1}^{-1})) = K[W^{-1}] \end{aligned}$$

Sea ahora  $\theta$  un endomorfismo de  $G$  (determinado por  $\theta(a)$  y  $\theta(b)$ ) y la iteración de éstos en la forma natural

$$\theta^1 = \theta; \quad \theta^{n+1}(s) = \theta(\theta^n(s)) \quad s = a, b \quad n \in \mathbb{N}$$

Se llamará  $M_\theta$  a la matriz de  $\theta$  definida como sigue

$$M_\theta = (m_{ij}) \quad m_{ij} \in \mathbb{Z} \quad i, j = 1, 2$$

tal que

$$p(\theta(s_j)) = m_{1j} p(a) + m_{2j} p(b) \quad s_1 = a \quad s_2 = b$$

siendo  $p: G \rightarrow \mathbb{R}^2$  el homomorfismo tal que  $p(a) = e_1$   $p(b) = e_2$

Notar que entonces si  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es la transformación lineal definida por  $T(e_1) = f(a)$   $T(e_2) = f(b)$  se tiene

$$(T \circ P)(a) = f(a) \quad (T \circ P)(b) = f(b)$$

entonces

$$T(p(\theta(s_j))) = m_{1j} T(p(a)) + m_{2j} T(p(b)) \text{ esto es}$$

$$f(\theta(s_j)) = m_{1j}f(a) + m_{2j}f(b)$$

Diremos que un endomorfismo  $\theta$  tiene *corto rango de cancelación* si para cualquier palabra reducida  $stu$  la cancelación no borra todas las letras de ninguna de las subpalabras  $\theta(s)$   $\theta(t)$   $\theta(u)$  en  $\theta(stu) \in S^*$ .

A continuación se enuncia el teorema central tal como aparece en [2]

**Teorema 5.1:** Sea  $\theta$  un endomorfismo de  $G$  tal que

- (1)  $\theta$  tiene corto rango de cancelación,
- (2)  $|\det M_\theta| > 1$ ,
- (3) Hay una matriz no singular  $T=(t_{ij})$ , tal que  $M_\theta = T^{-1}LT$ , donde  $L$  es una rotación seguida de una multiplicación por un escalar,
- (4) Las curvas  $K[\theta a]$ ,  $K[\theta b]$ ,  $K[\theta(ab)]$  y  $K[\theta(b^{-1}a)]$  no tienen puntos dobles.  $K[\theta a]$  no interseca a  $K[\theta a]+f(\theta b)$  ni  $K[\theta b]$  interseca a  $K[\theta b]+f(\theta a)$  donde  $f:G \rightarrow \mathbb{R}^2$  es el homomorfismo tal que

$$f(a) = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} ; \quad f(b) = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix}$$

entonces

$$L^{-n}K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})] \rightarrow K_\theta \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

en la métrica de Hausdorff, donde  $K_\theta$  es una curva que limita un paralelogramo o un *fractil replicante de orden*  $|\det M_\theta|^2$ ,  $F_\theta$ , conexo.

En el artículo de referencia Dekking presenta un "perfil" de la prueba que se basa en los siguientes hechos:

$K_n := L^{-n}K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})]$  es una poligonal sin puntos dobles que converge en la métrica de Hausdorff a una curva.

La propiedad (4) sería la que le garantiza que  $K_n$  no tenga puntos dobles. Sin embargo, a continuación presentamos un ejemplo que muestra que las condiciones que se piden en (4) no alcanzan para asegurar que  $K_n$  no tiene puntos dobles:

$$\text{Sea } \theta(a) = b^{-3}a, \quad \theta(b) = a^2b^{-2}$$

Puede probarse con un número finito de operaciones que  $\theta$  tiene corto rango de cancelación, esto es, se satisface la condición (1).

$$M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$|\det M_\theta| = 4 > 1$  (se satisface la condición (2)).

Para que se verifique la condición (3) es necesario y suficiente que  $M_\theta$  tenga autovalores complejos conjugados. En nuestro caso los autovalores son:  $\lambda_j = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$   $j=1,2$  y se tiene

$$|\lambda_j|^2 = 4 = \det M_\theta = \det L$$

entonces será  $L = |\lambda_j|R_\varphi$  con  $R_\varphi$  rotación de autovalores

<sup>2</sup>Fractil: Conjunto plano de interior no vacío cuya frontera tiene dimensión de Hausdorff estrictamente entre 1 y 2. Replicante de orden k: Puede descomponerse en k réplicas congruentes entre sí y semejantes al original.

así

$$\lambda_j / |\lambda_j| = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi$$

$$L = 2 \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{15}/2 \\ \sqrt{15}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Para determinar una matriz  $T$  tal que  $M_\theta = T^{-1}LT$  resolvemos el sistema lineal de cuatro ecuaciones que resulta de la igualdad  $TM_\theta = LT$  cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & \sqrt{15} & 0 \\ 4 & -3 & 0 & \sqrt{15} \\ -\sqrt{15} & 0 & 3 & -6 \\ 0 & -\sqrt{15} & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ equivalente a } \begin{pmatrix} 3 & -6 & \sqrt{15} & 0 \\ 0 & -15 & 4\sqrt{15} & -3\sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos entonces dar

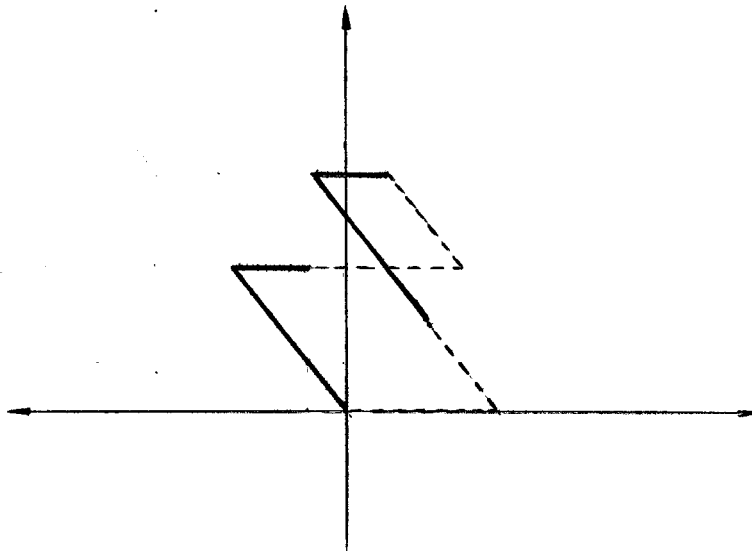
$$f(a) = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$f(b) = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{15}/6 \end{pmatrix}$$

En la figura que sigue vemos en este caso

$$K[\theta(aba^{-1}b^{-1})] = L(K_1)$$



Vemos que a pesar de verificarse las condiciones (1) a (4) del teorema,  $K_1$  tiene puntos dobles. Esto muestra que la condición (4) así enunciada no alcanza y debemos agregar que  $K[\theta(a^{-1}b^{-1})]$  y  $K[\theta(aba^{-1}b^{-1})]$  no tengan puntos dobles.

Vamos a la demostración del teorema:

Tenemos

$$f(a) = T(e_1) = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} ; f(b) = T(e_2) = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix}$$

además  $TM_\theta = LT$ , entonces

$$L(f(a)) = m_{11}f(a) + m_{21}f(b) = f(\theta a)$$

y

$$L(f(b)) = m_{12}f(a) + m_{22}f(b) = f(\theta b)$$

pero  $Lf$  y  $f\theta$  son homomorfismos de  $G$  en  $\mathbb{R}^2$ ,  $a$  y  $b$  generan  $G$ , de donde

$$Lf = f\theta$$

y así, multiplicando a izquierda por  $L$

$$L^2f = Lf\theta = f\theta^2$$

multiplicando luego a derecha por  $\theta$

$$L^2f\theta = L^3f = f\theta^3$$

y así inductivamente

$$L^n f = f\theta^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vamos a dar una parametrización para

$$K_n := L^{-n}K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})].$$

En un primer paso vamos a suponer que no hay cancelaciones, es decir que para cualquier par de palabras reducidas  $V, W$  se tiene

$$K[VW] = K[V] \cup (K[W] + f(V))$$

(si hay cancelación, se "borra" una parte de  $K[V]$  y otra superpuesta de  $K[W] + f(V)$ ). Así la poligonal  $K_n$  será:

$$\begin{aligned} & L^{-n}K[\theta^n(a)] \cup \{L^{-n}K[\theta^n(b)] + L^{-n}f(\theta^n(a))\} \cup \\ & \cup \{L^{-n}K[\theta^n(a^{-1})] + L^{-n}f(\theta^n(ab))\} \cup \\ & \cup \{L^{-n}K[\theta^n(b^{-1})] + L^{-n}f(\theta^n(aba^{-1}))\} = \\ & = L^{-n}K[\theta^n(a)] \cup \{L^{-n}K[\theta^n(b)] + f(a)\} \cup \\ & \cup \{L^{-n}K[\theta^n(a^{-1})] + f(a) + f(b)\} \cup \\ & \cup \{L^{-n}K[\theta^n(b^{-1})] + f(b)\} \end{aligned}$$

Comenzamos dando parametrizaciones

$$u_v^{(n)}: [0, 1] \rightarrow L^{-n}K[\theta^n(v)] \quad v = a, b, a^{-1}, b^{-1}$$

Notación:

$$\theta v = s_{v_1} s_{v_2} \dots s_{v_l} \quad s_{v_i} \in S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}, \quad l = \text{long}(\theta v)$$

Observemos que, para  $v \in S$  y  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 L^{-(n+1)}K[\theta^{n+1}(v)] &= L^{-1}(L^{-n}K[\theta^n(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_l})]) \\
 &= L^{-1}(L^{-n}(\bigcup_{i=1}^l (K[\theta^n(s_{v_i})] + f(\theta^n(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_{i-1}})))) \\
 &= L^{-1}(\bigcup_{i=1}^l (L^{-n}K[\theta^n(s_{v_i})] + L^{-n}f(\theta^n(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_{i-1}})))) \\
 &= L^{-1}(\bigcup_{i=1}^l (L^{-n}K[\theta^n(s_{v_i})] + f(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_{i-1}})))
 \end{aligned}$$

definimos entonces inductivamente para  $v = a, b, a^{-1}, b^{-1}$

$$\begin{aligned}
 u_v^{(0)}: [0, 1] &\longrightarrow K[v] \\
 u_v^{(0)}(t) &= f(v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_v^{(n+1)}: [0, 1] &\longrightarrow L^{-(n+1)}K[\theta^{n+1}(v)] \\
 u_v^{(n+1)}(t) &= L^{-1}(u_{s_{v_i}}^{(n)}(lt - (i-1)) + f(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_{i-1}})) \quad \text{si } \frac{i-1}{l} \leq t \leq \frac{i}{l}
 \end{aligned}$$

Veamos que están bien definidas:

◆ Es claro que  $\bigcup_{i=1}^l \left[ \frac{i-1}{l}, \frac{i}{l} \right] = [0, 1]$

◆◆ Si  $\frac{i-1}{l} \leq t \leq \frac{i}{l}$  entonces  $0 \leq lt - (i-1) \leq 1$

◆◆◆ Continuidad en los vértices:

$$u_v^{(n)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad u_v^{(n)}(1) = f(v) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

i) Para  $n=0$  es inmediato.

Supongámoslo cierto para  $n$  entonces

$$\begin{aligned}
 u_v^{(n+1)}(0) &= L^{-1}(u_{s_{v_1}}^{(n)}(0)) = L^{-1}(0) = 0 \\
 u_v^{(n+1)}(1) &= L^{-1}(u_{s_{v_l}}^{(n)}(1) + f(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_{l-1}})) \\
 &= L^{-1}(f(s_{v_l}) + f(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_{l-1}})) = L^{-1}f(\theta(v)) = f(v)
 \end{aligned}$$

ii) Para  $i=1, \dots, l-1$   $t = \frac{i}{l} = \frac{(i+1)-1}{l}$

$$\begin{aligned}
 u_v^{(n+1)}(i/l) &= L^{-1}(u_{s_{v_i}}^{(n)}(1) + f(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_{i-1}})) \\
 &= L^{-1}(f(s_{v_i}) + f(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_{i-1}})) = L^{-1}f(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_i})
 \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
 u_v^{(n+1)}\left(\frac{(i+1)-1}{l}\right) &= L^{-1}(u_{s_{v_{i+1}}}^{(n)}(0) + f(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_i})) \\
 &= L^{-1}f(s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_i})
 \end{aligned}$$



◆◆◆◆ Finalmente, es claro que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_v^{(n+1)}([0,1]) &= \bigcup_{i=1}^l L^{-1}(u_{s_{v_i}}^{(n)}([0,1]) + f(s_{v_1}, s_{v_2}, \dots, s_{v_{i-1}})) \\ &= L^{-1}(\bigcup_{i=1}^l L^{-n} K[\theta^n(s_{v_i})] + f(s_{v_1}, s_{v_2}, \dots, s_{v_{i-1}})) \\ &= L^{-(n+1)} K[\theta^{(n+1)}(v)] \end{aligned}$$

Ahora, para  $K_n := L^{-n} K[\theta^n(aba^{-1}b^{-1})]$  una parametrización será:

$u^{(n)}: [0,1] \rightarrow K_n$  definida por

$$u^{(n)}(t) = \begin{cases} u_a^{(n)}(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ u_b^{(n)}(4t-1) + f(a) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ u_{a^{-1}}^{(n)}(4t-2) + f(a) + f(b) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ u_{b^{-1}}^{(n)}(4t-3) + f(b) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Marquemos algunas conclusiones:

- Si notamos con  $V^{(n)}(v)$  al conjunto de vértices de  $L^{-n} K[\theta^n(v)]$  resulta (siempre de acuerdo a la fórmula recuadrada en la página 20)

$$\begin{aligned} V^{(0)}(v) &= \{0, f(v)\} \\ V^{(n+1)}(v) &= L^{-1}(\bigcup_{i=1}^l \{V^{(n)}(s_{v_i}) + f(s_{v_1}, s_{v_2}, \dots, s_{v_{i-1}})\}) \end{aligned}$$

- Para todo  $n \in \mathbb{N}$   $V^{(n)}(v) \subset V^{(n+1)}(v)$  y además si  $u_v^{(n)}(t) \in V^{(n)}(v)$  entonces  $u_v^{(n+1)}(t) = u_v^{(n)}(t)$  en efecto:

Para  $n=0$  esto es cierto pues, como ya hemos visto

$$0 = u_v^{(0)}(0) \text{ y } f(v) = u_v^{(0)}(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ahora supongamos cierto que

$$u_v^{(n-1)}(t) \in V^{(n-1)}(v) \Rightarrow u_v^{(n)}(t) = u_v^{(n-1)}(t) \in V^{(n)}(v)$$

y sea  $u_v^{(n)}(r) \in V^{(n)}(v)$  entonces según ■ para algún  $i$ :

$$u_v^{(n)}(r) = L^{-1}(u_{s_{v_i}}^{(n-1)}(rl - (i-1)) + f(s_{v_1}, s_{v_2}, \dots, s_{v_{i-1}}))$$

donde

$$u_{s_{v_i}}^{(n-1)}(rl - (i-1)) \in V^{(n-1)}(s_{v_i})$$

aplicando entonces la hipótesis inductiva

$$u_{s_{v_i}}^{(n-1)}(rl - (i-1)) = u_{s_{v_i}}^{(n)}(rl - (i-1)) \in V^{(n)}(s_{v_i})$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} u_v^{(n)}(r) &= L^{-1}(u_{s_{v_i}}^{(n)}(rl - (i-1)) + f(s_{v_1}, s_{v_2}, \dots, s_{v_{i-1}})) \\ &= u_v^{(n+1)}(r) \in V^{(n+1)}(v) \end{aligned}$$

■■■ Los lados de  $K_n$  son congruentes a  $L^{-n}k[v]$ :

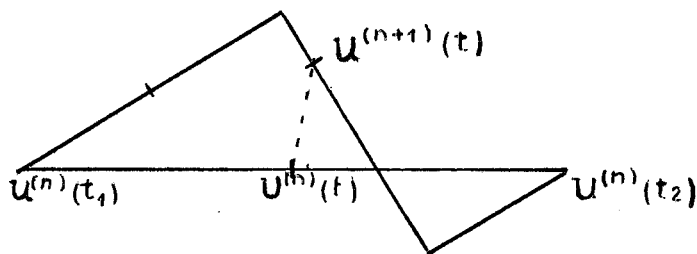
Es trivial para  $n=0$ , y si es cierto para  $n$ , siguiendo nuevamente la fórmula de la página 20, se tiene para  $n+1$ .

■■■■ Si  $u_v^{(n)}(t_1)$  y  $u_v^{(n)}(t_2)$  son vértices consecutivos de  $K_n$  y el lado que los une es congruente a  $L^{-n}K[v]$  entonces la poligonal que une esos vértices en  $K_{n+1}$  es congruente a  $L^{-(n+1)}K[\theta v]$ .

Vamos ahora a probar que  $K_n$  converge a una curva  $K_\theta$ :

Nos damos  $n \in \mathbb{N}$  y  $t \in [0,1]$ . Sean  $t_1$  y  $t_2$  tales que  $t_1 \leq t \leq t_2$  siendo  $u^{(n)}(t_1)$  y  $u^{(n)}(t_2)$  vértices consecutivos de  $K_n$ .

Llamemos  $P$  al "pedazo" de  $K_{n+1}$  que une  $u^{(n)}(t_1)$  y  $u^{(n)}(t_2)$  (que son también  $u^{(n+1)}(t_1)$  y  $u^{(n+1)}(t_2)$ ) como se probó en ■■).  $u^{(n+1)}(t)$  divide a  $P$  en dos partes  $P_1$  y  $P_2$  como en la figura



$u^{(n)}(t)$  divide al lado de  $K_n$  que une  $u^{(n)}(t_1)$  y  $u^{(n)}(t_2)$  en dos partes  $L_1$  y  $L_2$ . Sea entonces

$$d = \|u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t)\|$$

entonces

$$d < \text{long}(P_1) + \text{long}(L_1)$$

y

$$d < \text{long}(P_2) + \text{long}(L_2)$$

por lo tanto

$$2d < \text{long}(P) + \text{long}(L) < 2\text{long}(P)$$

y así

$$d < \text{long}(P)$$

pero  $P$  es congruente con  $L^{-(n+1)}K[\theta v]$  siendo  $\theta v = s_{v_1} s_{v_2} \dots s_{v_l}$ , luego

$$\begin{aligned} \text{long } P &= \|L^{-(n+1)}(s_{v_1})\| + \|L^{-(n+1)}(s_{v_2})\| + \dots + \|L^{-(n+1)}(s_{v_l})\| \\ &= \lambda^{-(n+1)}(\|s_{v_1}\| + \|s_{v_2}\| + \dots + \|s_{v_l}\|) \end{aligned}$$

donde  $\lambda$  es el escalar que verifica  $L = \lambda R_\theta$ ,  $\lambda^2 = |\det M_\theta| > 1$

llamemos

$$C = \text{máx} \left\{ \sum_{i=1}^{l(\theta v)} \|s_{v_i}\|; \quad v = a, b, a^{-1}, b^{-1} \right\}$$

entonces para cualquier  $t$  en  $[0,1]$  es cierto que

$$\|u^{(n+1)}(t)-u^{(n)}(t)\| < |\lambda|^{-(n+1)}C$$

y así para todo  $t$  en  $[0,1]$  y todo  $p$  en  $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|u^{(n+p)}(t)-u^{(n)}(t)\| &\leq \sum_{i=1}^p \|u^{(n+i)}(t)-u^{(n+i-1)}(t)\| \\ &< \sum_{i=1}^p |\lambda|^{-(n+i)}C = C|\lambda|^{-n} \sum_{i=1}^p |\lambda|^{-i} \\ &< C|\lambda|^{-n} \frac{|\lambda|^{-1}}{1-|\lambda|^{-1}} \end{aligned}$$

Esto prueba que  $u^{(n)}$  es de Cauchy en  $\mathfrak{C} = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f \text{ continua}\}$  (con la métrica del supremo) que es completo. Por lo tanto existe  $u$  en  $\mathfrak{C}$  tal que

$$u^{(n)} \rightarrow u$$

Si  $K_0 = \{u(t), t \in [0,1]\}$ , se tiene que  $K_n \rightarrow K_0$  en la métrica de Hausdorff, ya que dado  $\varepsilon > 0$ , existe un natural  $N$  tal que para  $n > N$

$$\|u^{(n)}(t)-u(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0,1]$$

por lo tanto, para todo  $t$  en  $[0,1]$

$$d(u(t), K_n) < \varepsilon$$

esto es

$$K_0 \subset (K_n)_\varepsilon$$

análogamente para todo  $t$  en  $[0,1]$

$$d(u^{(n)}(t), K_0) < \varepsilon$$

y así

$$K_n \subset (K_0)_\varepsilon$$

**Observación:** No se ha utilizado hasta aquí la hipótesis [4] del teorema. Esto prueba que [1], [2] y [3] implican que  $K_n$  converge a una curva  $K_0$ .

Por otra parte ya que  $K_n$  es una *curva de Jordan* (cerrada y simple) en el plano, determina en  $\mathbb{R}^2$ ; según el teorema conocido como *teorema de la curva de Jordan* [6]; dos componentes conexas, sólo una acotada, y con la frontera común: la curva dada. La componente acotada se llama *interior de la curva*.

Está bien determinado entonces para cada  $n$  natural, el conjunto  $F_n^\circ$  igual al interior de la curva  $K_n$ . Llamaremos  $F_n$  a su clausura, esto es  $F_n = F_n^\circ \cup K_n$ . Es claro que  $F_n$  es compacto.

Tenemos además que si  $K_n \subset [K_m]_\varepsilon$  entonces  $F_n \subset [F_m]_\varepsilon$ , por lo tanto  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en el espacio  $(\mathbf{K}, d)$  donde  $\mathbf{K}$  es la familia de compactos de  $\mathbb{R}^2$  y  $d$  la métrica de Hausdorff. Ahora este espacio es completo, por lo tanto existe un compacto  $F$  tal que  $F_n \rightarrow F$ <sup>3</sup>.

<sup>3</sup> No siempre será  $K_0$  una curva simple, luego no es posible definir a  $F_0$  por medio del teorema de Jordan.

Veamos que el área de  $F_n$  es igual a la del paralelogramo de lados  $K[a]$  y  $K[b]$ ; esto es el interior de  $K_0 = K[aba^{-1}b^{-1}]$ ; llamémoslo  $F_0$ .

Por el teorema de Green:

$$\begin{aligned} \text{Area}(F_n) &= \int_{K_n} x \, dy = \int_0^{1/4} (u_a^{(n)})_1(4t) \cdot (u_a^{(n)})'_2(4t) 4 \, dt + \\ &+ \int_{1/4}^{1/2} (u_b^{(n)}(4t-1) + f(a))_1 \cdot (u_b^{(n)})'_2(4t-1) 4 \, dt + \\ &+ \int_{1/2}^{3/4} (u_a^{(n)}(-4t+3) + f(b))_1 \cdot (u_a^{(n)})'_2(-4t+3) (-4) \, dt + \\ &+ \int_{3/4}^1 (u_b^{(n)}(-4t+4))_1 \cdot (u_b^{(n)})'_2(-4t+4) (-4) \, dt = \\ &= \int_0^1 (u_a^{(n)})_1(t) \cdot (u_a^{(n)})'_2(t) \, dt + \\ &+ \int_0^1 (u_b^{(n)}(t) + f(a))_1 \cdot (u_b^{(n)})'_2(t) \, dt = \\ &= (f(a))_1 [(u_b^{(n)})_2(1) - (u_b^{(n)})_2(0)] + (f(b))_1 [(u_a^{(n)})_2(0) - (u_a^{(n)})_2(1)] = \\ &= (f(a))_1 (f(b))_2 - (f(b))_1 (f(a))_2 = \det T = \text{área}(F_0) \end{aligned}$$

Así  $K[\theta(aba^{-1}b^{-1})] = L(K_1)$  limita un conjunto de área  $|\det L| \cdot \text{Area}(F_0) = |\det M_\theta| \cdot \text{Area}(F_0)$ , y entonces, ya que los lados de  $L(K_1)$  son congruentes a  $K[v]$  con  $v=a$  o  $v=b$ ,  $L(F_1)$  es unión de  $|\det M_\theta|$  paralelogramos congruentes a  $F_0$  y por lo tanto  $F_1$  es unión de  $|\det M_\theta|$  paralelogramos congruentes a  $L^{-1}(F_0)$ . Podemos entonces afirmar que existen vectores  $V_1, V_2, \dots, V_d$  con  $d = |\det M_\theta|$  tales que

$$F_1 = \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(F_0) + V_i$$

y supongamos que es cierto que

$$F_n = \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(F_{n-1}) + V_i$$

en ambos casos los conjuntos se superponen sólo en parte de su frontera y tenemos

$$K_n = \partial F_n \subset \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(\partial F_{n-1}) + V_i = \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(K_{n-1}) + V_i$$

es más, podemos escribir

$$\bigcup_{i=1}^d L^{-1}(\partial F_{n-1}) + V_i = K_n \cup \Omega_n$$

donde  $\Omega_n$  son los segmentos de  $\bigcup_{i=1}^d L^{-1}(K_{n-1}) + V_i$  que no son parte de  $K_n$ .

Definimos una función  $\phi_n$  que se aplica sobre la familia de segmentos  $\{L^{-n}K[v] + W \mid v=a, b \ W \in \mathbb{R}^2\}$  y tal que

$$\phi_n(L^{-n}K[v] + W) = L^{-(n+1)}K[\theta v] + W$$

entonces  $\phi_n(K_n) = K_{n+1}$  y vale que si  $S$  está en el dominio de  $\phi_n$  y  $V \in \mathbb{R}^2$

$$\phi_n(S + V) = \phi_n(S) + V$$

además

$$\phi_n \circ L^{-1} = L^{-1} \circ \phi_{n-1}$$

ya que si  $S = L^{-(n-1)}K[v] + W$

$$\begin{aligned} (\phi_n \circ L^{-1})(S) &= \phi_n(L^{-n}K[v] + L^{-1}(W)) = L^{-(n+1)}K[\theta v] + L^{-1}(W) = \\ &= L^{-1}(L^{-n}K[\theta v] + W) = L^{-1}(\phi_{n-1}(L^{-(n-1)}K[v] + W)) = (L^{-1} \circ \phi_{n-1})(S) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi_n(K_n \cup \Omega_n) &= \bigcup_{i=1}^d \phi_n(L^{-1}(K_{n-1}) + V_i) = \\ &= \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(\phi_{n-1}(K_{n-1}) + V_i) = \\ &= \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(K_n) + V_i \end{aligned}$$

esto es

$$K_{n+1} \cup \phi_n(\Omega_n) = \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(K_n) + V_i$$

también es cierto que la aplicación  $\phi_n$  deja fijos todos los vértices (sólo agrega vértices) y todas las poligonales  $L^{-1}(K) + V_i$   $j \in \mathbb{N}$   $i=1 \dots d$  son curvas cerradas simples, por lo tanto y ya que teníamos  $L^{-1}(K_{n-1}) + V_i \subset F_n$  tendremos que

$$L^{-1}(K_n) + V_i \subset F_{n+1}$$

y recordemos que

$$\sum_{i=1}^d \text{área}(L^{-1}(F_n) + V_i) = d \cdot \text{área}(L^{-1}(F_n)) = \det L \cdot \text{área}(L^{-1}(F_n)) = \text{área}(F_n) = \text{área}(F_{n+1})$$

de todo esto concluimos

$$F_{n+1} = \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(F_n) + V_i$$

Recordemos que ya se ha probado que  $F_n \rightarrow F_\theta$  en el espacio  $(\mathbf{K}, d)$  de los compactos con la métrica de Hausdorff. Además, ya que  $L^{-1}$  es una semejanza contractante

$$d(L^{-1}(F_n), L^{-1}(F_\theta)) < d(F_n, F_\theta)$$

Además, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) = A$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n) = B$  en la métrica de Hausdorff  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = A \cup B$  ya que

$$\begin{cases} A_n \subset (A)_\epsilon \subset (A \cup B)_\epsilon \\ B_n \subset (B)_\epsilon \subset (A \cup B)_\epsilon \end{cases} \Rightarrow A_n \cup B_n \subset (A \cup B)_\epsilon$$

y recíprocamente.

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1} = \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n) + V_i$$

esto es

$$F_\theta = \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(F_\theta) + V_i$$

queda probado entonces que  $F_\theta$  es un conjunto replicante de orden  $d$

Esto además nos permite asegurar [7] que si  $\tau = \{\tau_i; i=1\dots d\}$  es la familia de semejanzas donde  $\tau_i(x) = L^{-1}(x) + V_i$  entonces  $F_\theta$  es el único conjunto invariante por  $\tau$ , esto es

$$F_\theta = \tau(F_\theta) = \bigcup_{i=1}^d \tau_i(F_\theta) = \bigcup_{i=1}^d L^{-1}(F_\theta) + V_i$$

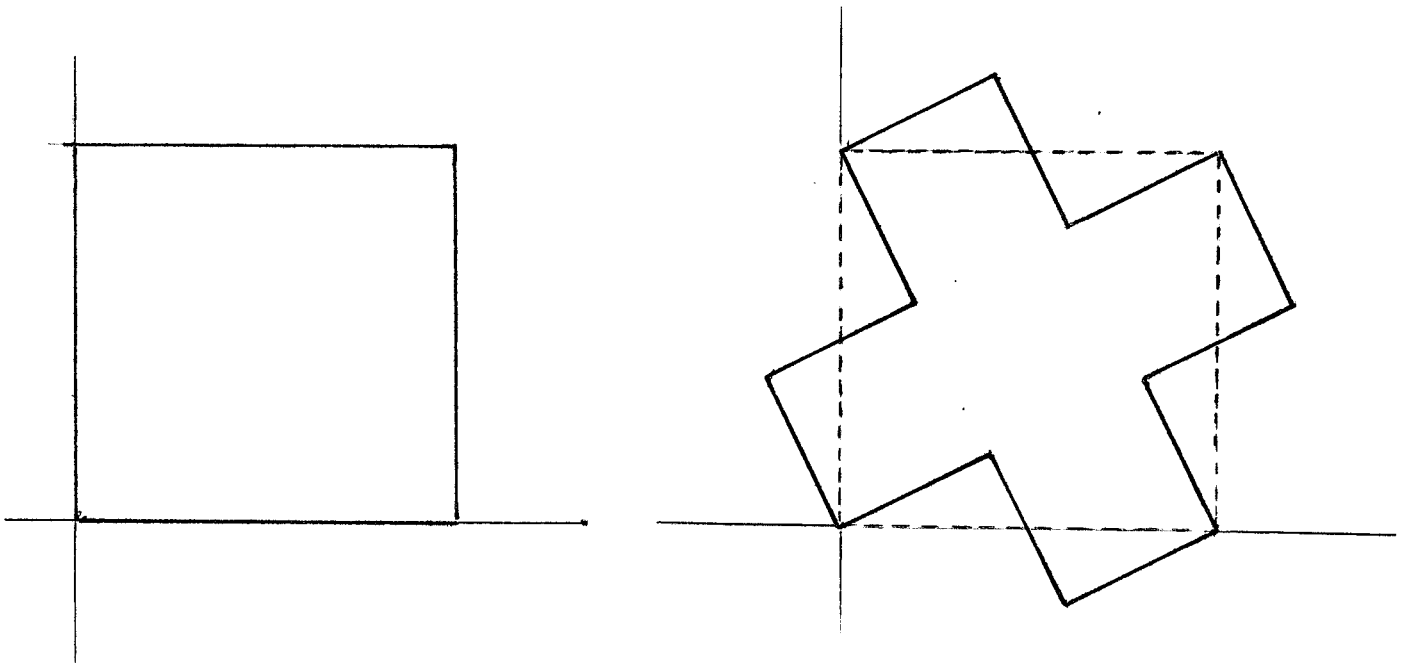
y que para cualquier compacto  $K$

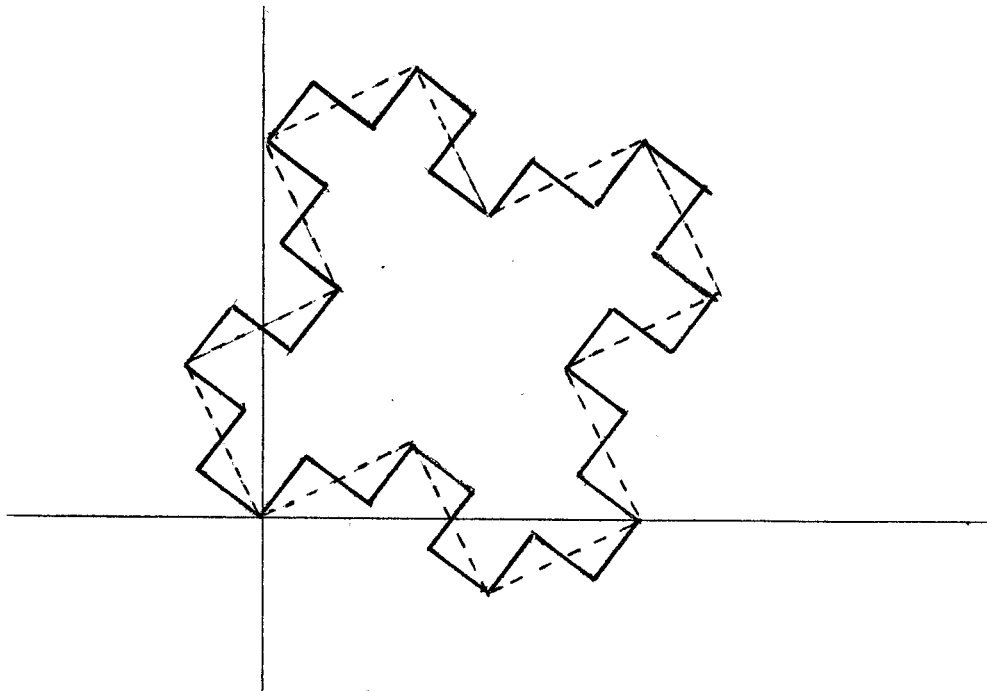
$$F_\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n(K)$$

## § 6. Ejemplos

**Ejemplo 6.1:**  $\theta(a) = aba$  ;  $\theta(b) = ba^{-1}b$  aquí no hay cancelaciones.

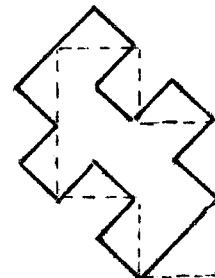
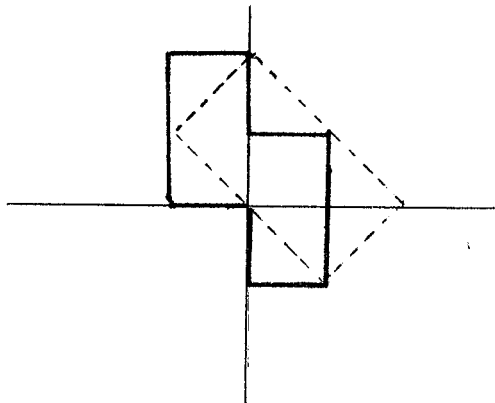
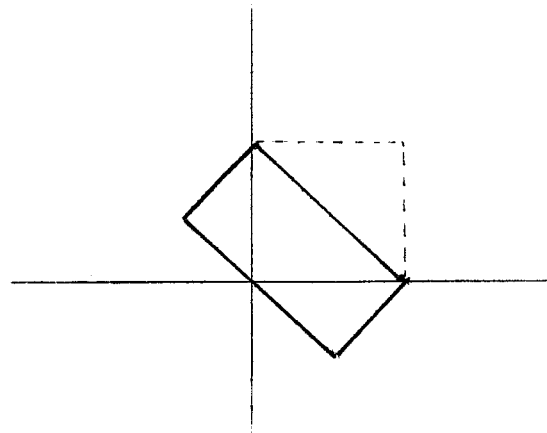
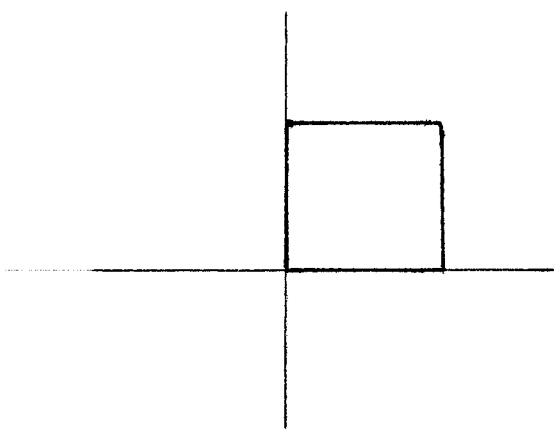
$$M_\theta = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = L \quad \text{esto es } T = Id \quad f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d = \det M_\theta = 5$$





**Ejemplo 6.2:**  $\theta(a) = ab$  ;  $\theta(b) = a^{-1}b$

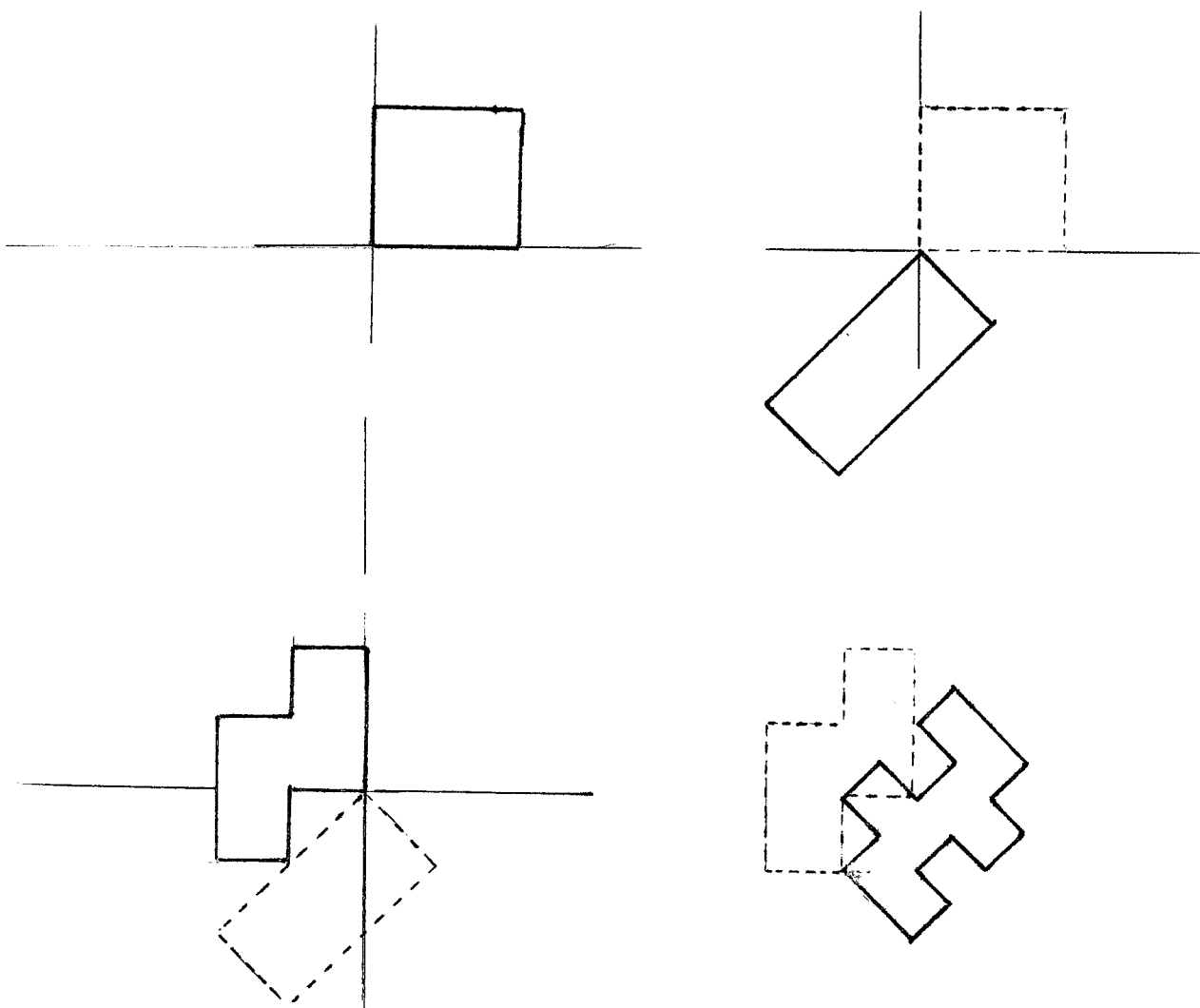
$$M_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = L = \sqrt{2} R_{\pi/4} \quad \text{esto es } T = Id \quad f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d = \det M_{\theta} = 2$$



**Ejemplo 6.3:**  $\theta(a) = a^2 b a^{-3}$  ;  $\theta(b) = a b^{-1} a^{-2}$

$$M_\theta = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = L = \sqrt{2} R_{3\pi/4} \quad \text{esto es } T = Id \quad f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d = \det M_\theta = 2$$

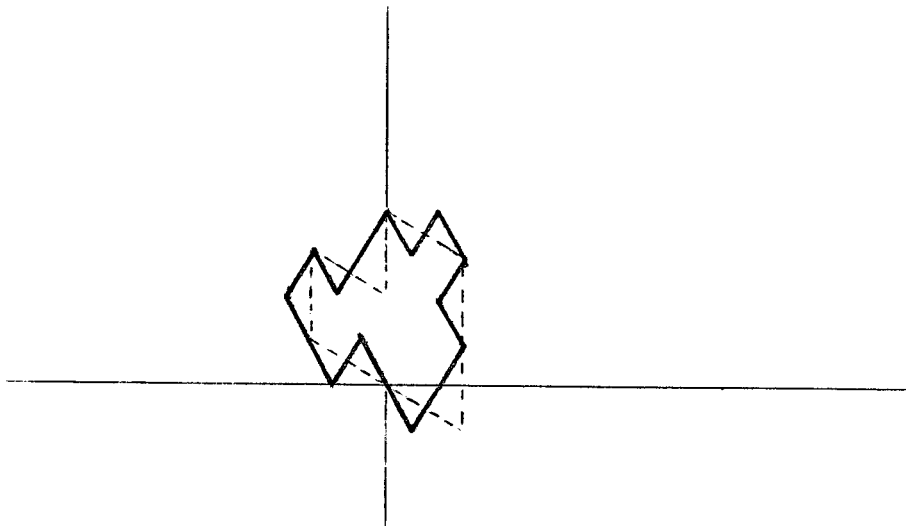
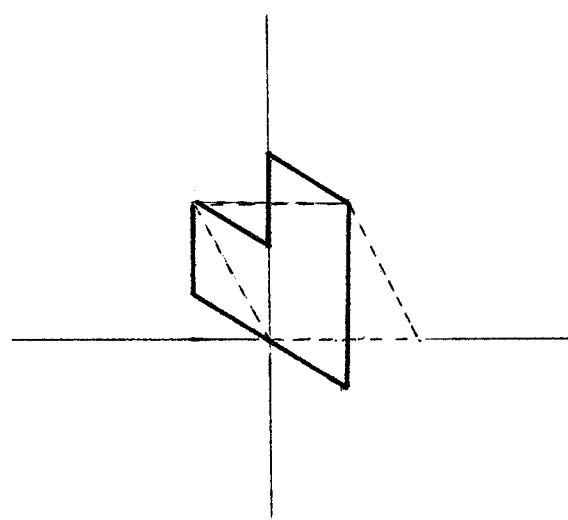
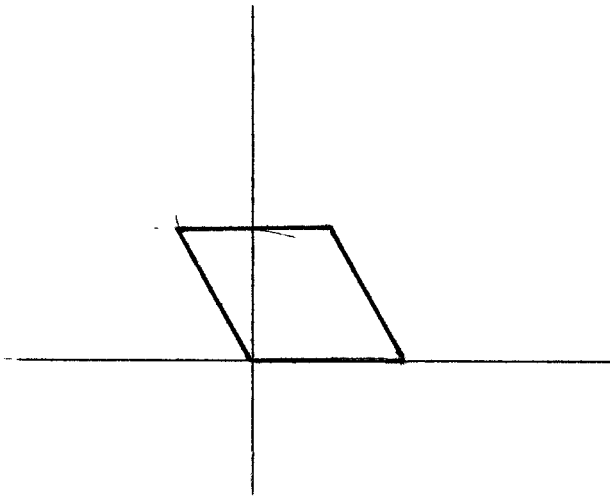
Este endomorfismo genera la frontera del conjunto  $F$  de los fraccionarios en la base de Gauss.





**Ejemplo 6.4:**  $\theta(a) = aba$  ;  $\theta(b) = a^{-1}b$

$$M_\theta = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}LT \quad \text{siendo} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad L = \sqrt{3} R_{\pi/6} \quad f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(b) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad d = \det M_\theta = 3$$



### Referencias.

- [1] Benedek, A. y Panzone, R., Representación de los números complejos en la base de Gauss. *Actas del Primer Encuentro Nacional de Analistas*. (1992), 5-26.
- [2] Dekking, F.M., Replicating superfigures and endomorphisms of free groups. *J. of Combinatorial Theory. Ser.A* 32(1982), 315-320.
- [3] Benedek, A. y Panzone, R., The set of Gaussian Fractions. *Actas del Segundo Congreso Dr. Antonio Monteiro*. (1993), 11-40.
- [4] Edgar, G.A., *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer, (1990).
- [5] Kátai J. and Szabó J., Canonical number system for complex integer, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 37 (1975), 255-260.
- [6] Apostol, T.M., *Análisis Matemático*, Reverté, (1972).
- [7] Panzone R., Dimensión, Autosemejanza y Fractalidad., *Notas. INMABB*.
- [8] Ito S., On the fractal curves induced from the complex radix expansion, *Tokio J. Math.* 12 (1989) 299-320.