# INFORME TECNICO INTERNO

## Nº. 41

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

# INFORME TÉCNICO N° 41

# Un Estudio sobre el Problema de Momentos y la Solución de una Aplicación a la Teoría de Control



Graciela Beatriz Paolini

INMABB

UNS - CONICET

AÑO 1995

**El Capítulo 6 de este trabajo forma parte del proyecto PID 3322800/92, C.O.N.I.CE.T., dirigido en el INMABB por el Dr. RAFAEL PANZONE.**

**Mg. Graciela B. Paolini**

**1995**

## INDICE GENERAL

**CAPITULO 1: El problema de momentos: generalidades.**



**CAPITULO 2: El problema de momentos de Hamburguer.**

**CAPITULO 3: El problema clásico de momentos y su relación con el análisis.**



**CAPITULO 4: El problema de momentos en un espacio de Hilbert.**

## Prólogo.

*Este trabajo contiene, en sus cuatro primeros capítulos, una recopilación de material sobre el problema de momentos. El capítulo 5 está constituído por resultados originales , que tienen por objetivo demostrar el teorema que figura en la sección* 2.4: *caracterizar el espacio de momentos de una sucesión de exponenciales reales. Dichos resultados formaron parte de la tesis presentada para optar al grado de Magister, dirigida por el Dr. Edgardo N. Güichal.*

# CAPÍTULO 1

# EL PROBLEMA DE MOMENTOS: GENERALIDADES

## 1.- INTRODUCCION

En este capítulo se enuncian algunos problemas de momentos especiales y criterios de solubilidad de los mismos. Se dan definiciones de conceptos y algunos resultados básicos que serán de utilidad en los capítulos 2 y 3. Finalmente en la última sección se da una reseña histórica del problema de momentos.

## 2.- FORMULACION DEL PROBLEMA DE MOMENTOS

Dada una función no decreciente $\varphi(t)$ de la variable real $t$, o lo que es lo mismo una medida no negativa $d\varphi(t)$, se llaman *momentos de* $\varphi(t)$, si existen, a las siguientes cantidades:

$$c_n = \int_a^b t^n \, d\varphi(t) \ , \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.1}$$

Algunos problemas de momentos especiales son los siguientes:

*a*) Si $(a,b) = (0,\infty)$ se denomina *problema de momentos de* STIELTJES
*b*) Si $(a,b) = (-\infty,\infty)$ se denomina *problema de momentos de* HAMBURGER
*c*) Si $(a,b) = (0,1)$ se denomina *problema de momentos de* HAUSDORFF.

Cabe notar que los problemas de HAUSDORFF y de STIELTJES son casos particulares del problema de HAMBURGUER.
En el problema de momentos se fija una familia de funciones $\Psi = \{\psi_\alpha\}$ (en el caso de (1.1) la familia $\Psi$ se compone de las funciones $\psi_n(t) = t^n$), y se trata de determinar la medida $d\varphi$ dadas las integrales de las $\psi_n$ respecto de ella, y en caso que exista, bajo que condiciones el problema es *determinado* o *indeterminado*., es decir, tiene una única o infinitas soluciones.
Hay generalizaciones en las cuales la teoría ha sido extendida a otras familias $\Psi$.
Por ejemplo, en el estudio del problema de momentos (1.1) tiene importancia el hecho que toda función continua puede aproximarse por polinomios de potencias, y varias generalizaciones de la teoría de aproximación por polinomios han originado generalizaciones correspondientes de la teoría de momentos. Asi, por ejemplo, segun un teorema de MUNTZ [S], toda función continua

puede aproximarse por combinaciones lineales de funciones de la forma:

$$\psi_k(t) = t^{n_k}, \text{ siempre que } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty$$

Esto sugiere considerar momentos respecto del sistema:

$$\left\{\psi_k(t) = t^{n_k}\right\}$$

Otra generalización es el siguiente *problema general de los momentos* estudiado por LIVSHITZ y KREIN [A]: *Sea* L = {f(t)} *un sistema lineal de funciones analíticas sobre la recta real, con la propiedad que si* $f \in L$ *y* $f(a) = 0$, *entonces también:*

$$\frac{f(t)}{t - a} \in L$$

*Supongamos definido sobre* L *un producto casi escalar con las propiedades ordinarias de producto escalar, salvo que puede ser* $(f,f) = 0$ *para* $f \neq 0$. *El problema general de momentos consiste en hallar una medida* $d\varphi(t)$ *tal que para todo par* f,g *perteneciente a* L *sea:*

$$(f,g) = \int f(t).\overline{g(t)}\, d\varphi(t)$$

*y estudiar si tal medida es única.*

Si en vez de medidas sobre la recta se consideran medidas sobre la circunferencia, se obtienen los momentos trigonométricos:

$$\tau_n = \int_0^{2\pi} e^{-int} d\varphi(t)$$

cuya teoría está estrechamente ligada a la del problema de momentos (1.1) en un intervalo finito. Reemplazando n por la variable continua s se obtiene el analogo *continuo*:

$$\tau_s = \tau(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} d\varphi(t)$$

En el caso de los momentos (1.1) con un intervalo (a,b) finito, asi como en el caso de momentos trigonométricos, el problema de los momentos es siempre determinado. En cambio, en el caso de STIELTJES o de HAMBURGUER, el problema puede ser indeterminado. No nos ocuparemos en lo que sigue de los problemas de momentos trigonométricos.

## 3.- CONCEPTOS BASICOS

La medida $d\varphi(t)$ da origen a la función analítica:

$$\sigma(z) = \int_a^b \frac{1}{t - z}\, d\varphi(t)$$

definida para $Im z \neq 0$, y llamada *la transformada de* CAUCHY - STIELTJES *de* $\varphi(t)$; recíprocamente, dada $\sigma(z)$ queda perfectamente determinada la medida $d\varphi(t)$ por una fórmula de inversión. Formalmente, los momentos $c_n$ son los coeficientes del desarrollo de $\varphi$ en serie de potencias:

$$\varphi(z) \simeq \frac{c_0}{z} + \frac{c_0}{z^2} + \ldots ,$$

si bien esta serie puede no converger. La serie anterior se desarrolla a su vez formalmente en una fracción continua de la forma:

$$\varphi(z) = \frac{\lambda_1}{z + c_1} - \frac{\lambda_2}{z + c_2} - \ldots \simeq \frac{1}{|a_1 z|} + \frac{1}{|a_2 z|} + \ldots$$

que se designará con $\mathcal{F}$. La fracción $\mathcal{F}$ da origen, pues, a otras dos sucesiones $\lambda_n$ y $c_n$ , y con éstas se construye una matriz de JACOBI:

$$J = \begin{pmatrix} c_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ \lambda_1 & c_2 & \lambda_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Recordemos que una matriz $J = (a_{ij})$ se dice de JACOBI si $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > 1$, y $a_{i-1,i} = a_{i,i+1} \in \mathbb{R}$, $a_{ii} > 0$.
La matriz $J$ puede considerarse como una forma cuadrática:

$$\sum c_i x_i^2 + 2.\sum \lambda_i \, x_i x_{i-1}$$

de infinitas variables o como un operador sobre el espacio de HILBERT de infinitas dimensiones. Por lo tanto, toda medida $d\varphi(t)$ da origen a los siguientes entes matemáticos:

$$d\varphi(t) \ , \ \{c_n\} \ , \ \sigma(z) \ , \ \mathcal{F} \ , \ J$$

que se utilizarán en capítulos siguientes.Para mas detalles, puede consultarse **[A]**.

Otros resultados que se utilizarán mas adelante son los TEOREMAS DE HELLY **[W]**:

<u>TEOREMA</u> 1: *Sea la sucesion de funciones:*

$$\left\{ \alpha_n(x) \right\}_{n=0}^{\infty}$$

*de variacion uniformemente acotada en* $a \leq x \leq b$ *y tal que:*

$$|\alpha_n(a)| < A \ , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

*para alguna constante A. Entonces existe un conjunto de enteros:*

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$$

*y una funcion $\alpha(x)$ de variacion acotada en* $a \leq x \leq b$ *tal que:*

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_{n_i}(x) = \alpha(x), \ a \leq x \leq b$$

<u>TEOREMA</u> 2: *Sea la sucesion de funciones:*

$$\left\{ \alpha_n(x) \right\}_{n=0}^{\infty}$$

*de variacion uniformemente acotada en* $a \leq x \leq b$. *Sea:*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) = \alpha(x), \qquad a \leq x \leq b$$

*y sea* $f(x)$ *continua en* $a \leq x \leq b$. *Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\ d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)\ d\alpha(x)$$

## 4.- CRITERIOS DE SOLUBILIDAD DE PROBLEMAS DE MOMENTOS ESPECIALES

### 4.1.- Introducción

Sea $\mathbb{R}$ un espacio euclideano de dimensión k y sea dada una sucesión múltiple infinita de constantes reales:

$$c_{j_1 j_2 \dots j_k} \quad ; \quad j_1, j_2, \dots, j_k = 0,1,2,\dots$$

El objetivo es encontrar condiciones necesarias y suficientes para que exista una función no decreciente k-dimensional $\varphi$ cuyo espectro $\sigma(\varphi)$ este contenido en un conjunto cerrado $\sigma_o$ dado de antemano, y que sea solución del problema de momentos:

$$c_{j_1 j_2 \dots j_k} = \int_{\mathbb{R}} t_1^{j_1} \dots t_k^{j_k} \, d\varphi \; ; \; j_1, j_2, \dots, j_k = 0,1,2,\dots$$

Para simplificar discutiremos sólo el caso k = 2; no es difícil extender el resultado al caso de cualquier número de dimensiones.
Sea $P(x,y)$ un polinomio en $\mathbb{R}$:

$$P(x,y) = \sum_{i,j} a_i b_j \, x^i \, y^j$$

donde $a_i$, $b_j$ son constantes reales o complejas.
Sea la funcional:

$$\mathcal{L}(P) = \sum_{i,j} c_{ij} \, a_i b_j$$

En particular:

$$\mathcal{L}(x^i \, y^j) = c_{ij}$$

<u>TEOREMA</u> 1: *Una condicion necesaria y suficiente para que el problema de momentos definido por la sucesion de momentos* $\{c_{ij}\}$ *tenga una solucion es que la funcional* $\mathcal{L}(P)$ *sea no negativa en* $\sigma_o$, *es decir:*

$$\mathcal{L}(P) \geq 0, \; si \; P(x,y) \geq 0 \; en \; \sigma_o$$

Este teorema es una aplicación inmediata del siguiente teorema de extensión de funcionales no negativas:

<u>TEOREMA</u>: *Sea* $\mathcal{M}$ *una variedad lineal de funciones a valores reales* f(t) *definidas en un espacio* $\Omega$ , $t \in \Omega$. *Sea* $\mathcal{M}_o$ *una subvariedad lineal de* $\mathcal{M}$, *y sea* $\mathcal{L}_o(x)$ *una funcional aditiva y homogénea*

*definida en* $\mathcal{M}_o$ *y no negativa en* $\Omega_o$, *es decir:*

$$\mathcal{L}_o(f_1 + f_2) = \mathcal{L}_o(f_1) + \mathcal{L}_o(f_2) \quad , \quad f_1, f_2 \in \mathcal{M}_o$$

$$\mathcal{L}_o(c.f) = c.\mathcal{L}(f) \qquad\qquad f \in \mathcal{M}_o$$

$$\mathcal{L}_o(f) \geq 0 \text{ si } f(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in \Omega_o \subseteq \Omega$$

*donde* $\Omega_o$ *es un conjunto dado de* $\Omega$, *que en particular puede coincidir con* $\Omega$.

Para las demostraciones puede consultarse [ST].

El TEOREMA 1 puede aplicarse para derivar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones de varios problemas de momentos especiales, caracterizados por una elección especial de $\mathbb{R}$, algunos de los cuales se detallan en las secciones siguientes.

**4.2.- El problema de momentos de Hamburguer.**

Aquí $\mathbb{R}$ coincide con el eje real. Entonces $c_{ij} = 0$ para $j \geq 1$, y se tiene una sucesión de momentos simple:

$$c_n = c_{no} \quad , \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

y el problema se reduce a determinar una función unidimensional $\varphi(x)$ tal que:

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\varphi(x)$$

Entonces es suficiente considerar polinomios y funciones de x solamente, y definir la funcional $\mathcal{L}$ como:

$$\mathcal{L}\left[P_n(x)\right] = \sum_{j=o}^{n} x_j \; a_j \quad , \quad P_n(x) = \sum_{j=o}^{n} a_j \; x^j$$

Se establece entonces el siguiente resultado:

<u>TEOREMA</u>: *Para que un problema de momentos de* HAMBURGUER*:*

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\psi \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

*tenga una solucion es necesario que:*

$$\Delta_n = |c_{i+j}|_{0\leq i,j\leq n} \geq 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

*Para que exista una solucion cuyo espectro no sea reducible a un conjunto finito de puntos es necesario y suficiente que:*

$$\Delta_n > 0 \quad , \; n = 0,1,2,\ldots$$

*Para que exista una solucion cuyo espectro consista de (k+1) puntos distintos es necesario y suficiente que:*

$$\Delta_0 > 0,\ldots,\Delta_k > 0 \quad ; \quad \Delta_{k+1} = \Delta_{k+2} =\ldots=0$$

*El problema de momentos es determinado en este caso.*

**4.3.- El problema de momentos de STIELTJES.**

En este caso $\mathbb{R}$ coincide con la parte positiva del eje real. Como en el caso precedente, hay que considerar sólo momentos $c_n = c_{n0}$, y sólo polinomios y funciones de una variable. El problema de momentos se reduce a:

$$c_n = \int_0^\infty x^n \, d\varphi, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

y una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución es que:

$$\mathcal{L}(P) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot c_j \geq 0$$

toda vez que:

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n \geq 0 \text{ , para } x \geq 0$$

Aplicando esta condición a dos polinomios especiales:

$$\left(a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n\right)^2 \quad y \quad x \cdot \left(a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n\right)^2$$

resulta que:

$$Q_n(a) \equiv \sum_{i,j=0}^{n} c_{i+j} \cdot a_i a_j \geq 0$$

$$Q_n^1(a) \equiv \sum_{i,j=0}^{n} c_{i+j+1} \cdot a_i a_j \geq 0$$

que es equivalente a:

$$\Delta_n = \left| c_{i+j} \right|_{i,j=0}^{n} \geq 0$$

$$\Delta_n^{(1)} = \left| c_{i+j+1} \right|_{i,j=0}^{n} \geq 0$$

para n = 0,1,2,.... Como en el caso precedente, se deriva el siguiente :

<u>TEOREMA</u>: *Una condicion necesaria para la existencia de una solucion del problema de momentos de* STIELTJES:

$$c_n = \int_0^\infty t^n \, d\varphi \ , \ n = 0,1,2,\ldots$$

*es que:*

$$\Delta_n \geq 0 \ , \ \Delta_n^{(1)} \geq 0 \ , \ n = 0,1,2,\ldots$$

*Para que exista una solucion cuyo espectro no sea reducible a un conjunto finito de puntos es necesario y suficiente que:*

$$\Delta_n > 0 \ , \ \Delta_n^{(1)} > 0 \ , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

*Para que exista una solucion cuyo espectro consista de exactamente* k+1 *puntos distintos de $t = 0$, es necesario y suficiente que:*

$$\begin{cases} \Delta_0 > 0 \ ,\ldots, \Delta_k > 0, \ \Delta_{k+1} = \Delta_{k+2} = \ldots = 0 \\ \Delta_0^{(1)} > 0 \ ,\ldots, \Delta_k^{(1)} > 0, \ \Delta_{k+1}^{(1)} = \Delta_{k+2}^{(1)} = \ldots = 0 \end{cases}$$

*mientras que para que exista una solucion cuyo espectro consista de* k+1 *puntos, uno de ellos igual a cero, es necesario y suficiente que:*

$$\begin{cases} \Delta_0 > 0 \ , \ldots , \Delta_k > 0, \ \Delta_{k+1} = \Delta_{k+2} = \ldots = 0 \\ \Delta_0^{(1)} > 0 \ , \ldots , \Delta_k^{(1)} > 0, \ \Delta_{k+1}^{(1)} = \Delta_{k+2}^{(1)} = \ldots = 0 \end{cases}$$

*En los últimos dos casos el problema es determinado.*

**4.4.- El problema de momentos de HAUSDORFF.**

El conjunto $\mathbb{R}$ se reduce ahora al intervalo cerrado [0,1]. Usando la notación:

$$c_n = \int_0^1 t^n \, d\varphi \ , \quad n = 0,1,2,...$$

$$\mathscr{L}(P_n) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot c_j \quad , \quad P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^j$$

se concluye que una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución es que:

$$P_n(x) \geq 0 \text{ en } [0,1] \Rightarrow \mathscr{L}(P_n(x)) \geq 0$$

Para transformar esta condición es necesario discutir la representación de polinomios no negativos en [0,1], para lo cual utiliza los polinomios de BERNSTEIN:

<u>DEFINICION</u>: *Si* f(t) *es una funcion univaluada y finita en* [0,1], *el polinomio de grado* n*:*

$$B_n(t;f) = \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu/n) . \binom{n}{\nu} t^p . (1 - t)^{n-p}$$

*es llamado el* polinomio de BERSTEIN *de grado* n *asociado con* f(t). Una propiedad importante de los polinomios de BERNSTEIN es la siguiente:

*Si* $P_m(t)$ *es un polinomio fijo de grado* m, *entonces:*

$$B_n(t;P_m) = P_m(t) + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{P_{ms}(t)}{n^s}$$

*donde los polinomios* $P_{ms}(t)$ *no dependen de* n *y son idénticamente iguales a cero en en caso que* $P_m(t)$ *sea constante.*

Basándose en estos resultados se demuestra el siguiente:

<u>TEOREMA</u>: *Una condicion necesaria y suficiente para que el problema de momentos de* HAUSDORFF*:*

$$c_n = \int_0^1 t^n \, d\varphi \ , \quad n = 0,1,2,...$$

*tenga una solucion es que todas las diferencias:*

$$\Delta^k c_\nu \geq 0 \ , \quad k,\nu = 0,1,2,...$$

donde:

$\Delta^0 c_\nu = c_\nu$

$\Delta^1 c_\nu = c_\nu - c_{\nu+1}$

⋮

$\Delta^k c_\nu = c_\nu - \binom{k}{1} c_{\nu+1} + \binom{k}{2} c_{\nu+2} + ... + (-1)^n c_{\nu+k} = \mathscr{L}\left(t^\nu (1 - t)^k\right).$

## 5.- RESENA HISTORICA DEL PROBLEMA DE MOMENTOS.

Los primeros desarrollos de la teoría de momentos consistieron en un tratamiento algebraico del problema en el caso particular de momentos (1.1) donde:

$$\varphi(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} \tag{1.2}$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado n. En 1839 el matemático suizo Jacques Charles STURM (1803-1855), el inglés James Joseph SYLVESTER (1814-1897) y el alemán Carl Wilhelm BOCHARD (1817-1880) trabajaron en este problema que eqivale, según demostraron, al problema de descomposición de (1.2) en fracciones simples, con $t_i > 0$, o sea, que las raíces de $P(z)$ son todas reales no negativas. El resultado fundamental de STURM y SYLVESTER consiste en que *las raices de $P(z)$ son todas reales no negativas si y solo si son no negativos los determinantes:*

$$\Delta_i = |\mu_{i+j}|_0^n \qquad \Delta_i' = |\mu_{i+j+8}|_0^n$$

Edward John ROUTH también estudió este problema.
En 1853 el matemático francés Charles HERMITE (1822-1905) mostró la relación existente entre la teoría de STURM - SYLVESTER y la teoría de formas cuadráticas. Mostró que el problema de descomponer (1.2) en fracciones simples era equivalente al de reducir la matriz $J$ a su forma canónica en el caso que $J$ y $\mathcal{F}$ son finitas; luego, conociendo la forma canónica de la matriz $J$ queda determinada la solución del problema de momentos.
En una serie de trabajos que se inicia en 1855, el matemático ruso Pafnuti Liwowich TCHEBYCHEFF (1821-1894) discutió integrales del tipo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{t-y}\, dy$$

con $\varphi(t) \geq 0$ si $t \in (-\infty,\infty)$, y sumas del tipo:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_i^2}{t-t_i}\ ,\ \theta_i \neq 0$$

Su herramienta fundamental fue la teoría de fracciones continuas. Pero TCHEBYCHEFF no estaba interesado en la existencia o solución del problema de momentos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \varphi(x)\, dx = c_n \;, \; n = 0,1,2,\ldots$$

sino principalmente en los siguientes problemas:

*a) Hasta donde una sucesion de momentos dada determina la funcion* $\varphi(t)$? Más particularmente, dada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^n\, dt = c_n, \; n = 0,1,2,\ldots$$

se puede concluir que :

$$\varphi(t) = e^{-t^2}$$

o que la distribución caracterizada por la función:

$$\int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\, dx$$

es normal?

Este es un problema fundamental en la teoría de probabilidad y en la estadística matemática.

*b) Cuáles son las propiedades de los polinomios* $\omega_n(z)$ *denominadores de aproximantes sucesivos de la fraccion continua:*

$$\frac{\lambda_1}{|z+c_1|} - \frac{\lambda_2}{|z+c_2|} - \ldots ?$$

Esto abre un nuevo campo: la teoría general de polinomios ortogonales, de los cuales sólo los polinomios clásicos de LEGENDRE, JACOBI, LAGUERRE, ABEL, LAPLACE y HERMITE se conocían antes de TCHEBYCHEFF. En el trabajo de TCHEBYCHEFF se encuentran numerosas aplicaciones de polinomios ortogonales a interpolación, expansión de funciones en series y a cuadrados aproximados.

En trabajos publicados por Heinrich Eduard HEINE en los años 1861,1878,1881, se puede encontrar una breve discusión de las fracciones continuas asociadas con:

$$\int_{a}^{b} \frac{\varphi(x)}{t-x}\, dx$$

donde la función dada $\varphi(t)$ es no negativa en (a,b), y también una aplicación de los polinomios ortogonales $\omega_n(x)$ a cuadrados aproximados.

Un alumno de TCHEBYCHEFF, el matemático ruso A. MARKOFF

(1856-1922) continuó el trabajo de su maestro aplicándolo, en particular a la teoría de probabilidad y al problema muy relacionado de encontrar cotas precisas para:

$$\int_c^d d\Psi(t) \quad , \quad a < c < d < b$$

donde la función $\Psi(t)$ es no decreciente en $(a,b)$, de la cual se han dado los $n + 1$ primeros momentos. Este importante problema fue propuesto, y su solución, basada en las ahora conocidas como *desigualdades de* TCHEBYCHEFF, fue dada sin demostración en 1873 por TCHEBYCHEFF. La demostración fue publicada por MARKOFF en 1884, después de aproximadamente diez años. Casi simultáneamente con MARKOFF resultados análogos fueron publicados por el matemático holandés STIELTJES, quien no mencionó los trabajos de TCHEBYCHEFF y MARKOFF. Por este motivo, MARKOFF escribió a HERMITE, y un extracto de esta carta fue publicado. En respuesta, STIELTJES publicó una breve nota en la que reconocía la prioridad de los matemáticos rusos, explicando que el no podía haber conocido los trabajos de MARKOFF ,mientras que los de TCHEBYCHEFF habían escapado a su atención.

MARKOFF también generalizó el problema de momentos (1896) requiriendo que la solución $\varphi(t)$ sea acotada. En sus investigaciones también ocuparon un rol prominente las fracciones continuas. Las investigaciones de MARKOFF fueron simplificadas y presentadas brillantemente en una disertación de POSSE.

Entre los años 1894 y 1895, STIELTJES publicó un brillante trabajo: "*Recherches sur les fractions continues*" conteniendo una gran cantidad de ideas nuevas, entre otras un nuevo concepto de integral, nuestra *integral de* STIELTJES. En su trabajo propone y resuelve completamente el problema (1.2) que él llama *problema de momentos* (por su conexión con la mecánica) en el caso que $(a,b) = (0,\infty)$.

STIELTJES construye la solución del problema dependiendo de la naturaleza de la fracción continua correspondiente a la integral:

$$I(z,\varphi) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{z+t} \approx \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots \approx \frac{1}{|a_1 z|} + \frac{1}{|a_2 z|} + \dots$$

y a la fracción continua "asociada":

$$\frac{\lambda_1}{z+c_1} - \frac{\lambda_2}{z+c_2} - \frac{\lambda_3}{z+c_3} - \cdots$$

Haciendo uso de la teoría de fracciones continuas, STIELTJES mostró que todos los $a_i$ son positivos de donde resulta la positividad de todos los $\lambda_i$ y $c_i$. Mostró además que esta condición necesaria también era suficiente para la existencia de una solución del problema de momentos. En términos de la sucesión dada $\{c_n\}$, esta condición es equivalente a la positividad de los siguientes determinantes:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & & & \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} = |c_{i+j}|_{i,j=0}^{n} \quad , \ n = 0,1,2,\ldots$$

$$\Delta_n^{(1)} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+2} \\ \vdots & & & \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{2n+1} \end{vmatrix} = |c_{i+j+1}|_{i,j=0}^{n} \quad , \ n = 0,1,2,\ldots$$

La solución puede ser esencialmente única, en cuyo caso se dice que el problema es *determinado*, o puede haber más de una solución, en cuyo caso hay infinitas y el problema se dice *indeterminado*. La parte en que STIELTJES estudia cuando el problema es determinado o no es la más profunda de su memoria. Además da ejemplos de casos indeterminados y pueba que el problema es indeterminado si y sólo si es convergente la serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Finalmente STIELTJES estudia ciertas soluciones extremales.

THOMAS JEAN STIELTJES (1856-1894) comenzó su carrera como astrónomo, y estuvo asociado al observatorio de Leyden durante seis años antes de completar sus estudios en París, donde escribió su disertación. Entonces obtuvo una posición en Toulouse: solicitó una cátedra de matemática en Groningen antes de ir a París, pero a pesar de ser primero en la lista nunca obtuvo el cargo. Esto explica por que su trabajo matemático estuvo colmado de ideas de mecánica. Fue un amigo del matemático HERMITE, con quien mantuvo

una fructífera correspondencia hasta su muerte.
Entre los años 1900 y 1910 se produjo una repentina cristalización de todas las ideas y métodos que se habían acumulado lentamente durante el siglo XIX. Esto se produjo esencialmente por la publicación de cuatro trabajos fundamentales: En 1900 el del matemático suizo Ivar FREDHOLM (1866-1927) sobre ecuaciones integrales, en 1902 la tesis del francés Henry LEBESGUE (1875-1941) sobre integración, en 1906 el trabajo del alemán David HILBERT (1862-1943) sobre teoría espectral, y en ese mismo año la tesis del francés Maurice FRECHET referida a espacios métricos.
Estos nuevos conceptos en análisis condujeron a los sucesores de HILBERT a trasladar sus resultados en el lenguaje de lo que ahora llamamos *espacios de* HILBERT, lo que hizo posible la discusión de los sistemas de ecuaciones lineales más generales en tales espacios.
Uno de los mejores alumnos de HILBERT, el alemán Erhard SCHMIDT (1845-1921) a quien se atribuye usualmente el *proceso de ortogonalizacion* publicó en 1908 un trabajo en el cual definió lo que ahora llamamos el espacio complejo $\ell^2$, o $\ell^2_{\mathbb{C}}$, con las nociones de producto escalar y de norma, la definición de ortogonalidad, de conjuntos cerrados y de subespacio vectorial. La característica más importante de este trabajo es la demostración de la existencia de la proyección ortogonal de un punto en un subespacio vectorial cerrado, y la forma puramente geométrica en que SCHMIDT utiliza este resultado para discutir el sistema más general de ecuaciones lineales en un espacio de HILBERT:

$$(x\ ,\ a_n) = c_n\ ,\quad n = 1,2,... \tag{1.3}$$

donde los $a_n$ son vectores arbitrarios de $\ell^2$ y los $c_n$ números complejos arbitrarios.
Para cada n, SCHMIDT considero las variedades lineales afines cerradas $\mathcal{F}_n$ de $\ell^2$ definidas por las ecuaciones:

$$(x\ ,\ a_j) = c_j\ ,\quad 1 \le j \le n$$

y la proyección ortogonal $x^{(n)}$ del origen de $\mathcal{F}_n$ ; la condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución del sistema (1.3) es que la sucesión creciente:

$$\left\{\|x^{(n)}\|\right\}$$

sea acotada; entonces la sucesión:

$$\left\{x^{(n)}\right\}$$

tiene un límite débil $x \in \ell^2$, que es la solución de (1.3) de norma mínima. Por supuesto, cada $\mathcal{F}_n$ debe ser distinto de vacio, lo que significa que cualquier relación lineal:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . a_k = 0$$

entre los vectores $a_n$ debe implicar:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . c_k = 0$$

Entonces puede asumirse (eliminando algunas de las ecuaciones de (1.3)) que los $a_n$ son linealmente independientes, y en este caso, SCHMITD obtuvo facilmente la expresión explicita de $\|x^{(n)}\|$:

$$\|x^{(n)}\|^2 = \frac{\Delta_n}{D_n}$$

donde:

$$D_n = \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_n) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_n) \\ \vdots & & & \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \cdots & (a_n,a_n) \end{vmatrix}$$

y:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 & & c_n \\ \bar{c}_1 & (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \cdots & (a_1,a_n) \\ \bar{c}_2 & (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \cdots & (a_2,a_n) \\ & \vdots & & & \\ \bar{c}_n & (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \cdots & (a_n,a_n) \end{vmatrix}$$

Este enfoque geométrico fue ya compartido en 1906-1907 por otros dos jóvenes matemáticos: ERNST FISCHER y el húngaro FRIGYES RIESZ (1880-1956) en un importante trabajo que los condujo independientemente a lo que es ahora llamado *el teorema de RIESZ-FISCHER*, introduciendo una relación insospechada entre espacios de HILBERT y la teoría de integración.

El tema central de F. RIESZ fue el estudio de sistemas infinitos de ecuaciones lineales:

$$\int_I f(x).g_\alpha(x)\ dx = c_\alpha \qquad (1.4)$$

donde $g_\alpha$ pertenece a $L^q(I)$ (I es un intervalo arbitrario, $I \subseteq \mathbb{R}$); esto puede ser considerado como una generalización del problema que E. SCHMIDT trato en $\ell^2$, debido al teorema de RIESZ-FISCHER. Para adaptar el método de SCHMIDT a este problema, F. RIESZ comenzó extendiendo definiciones y resultados de la teoría de espacios de HILBERT: convergencia uniforme y débil de una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L^p(I)$ a $f \in L^p(I)$ y la generalización del principio de elección de HILBERT, es decir, la compacidad débil de la esfera unitaria en $L^p(I)$, que es uno de los ingredientes principales en la solución de (1.4). El otro ingrediente es derivado de un resultado obtenido por el matemático alemán Edmund George Herman LANDAU (1877-1938) en 1907: *Si:*

$$\sum a_n x_n$$

*es convergente para toda sucesion* $\{x_n\}$ *tal que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

*entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < \infty$$

Aproximando funciones de $L^p$ por funciones que tienen sólo una cantidad numerable de valores, F. RIESZ dedujo del resultado de LANDAU que, *si para una funcion medible* g, *el producto* f.g *es integrable para toda funcion* $f \in L^p$, *entonces necesariamente* g *pertenece a* $L^q$. Su solución de (1.4) sigue entonces la misma línea que la de E. SCHMIDT; comienza con un sistema del tipo de (1.4) finito para el cual prueba la existencia y unicidad de una solución $f \in L^p$ para la cual:

$$\int_I |f(x)|^p\ dx \qquad (1.5)$$

es mínimo. El problema es entonces encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre los $c_\alpha$ tales que, cuando se toma de (1.4) un sistema finito correspondiente a los índices $\alpha$ en un

conjunto finito arbitrario $\mathbb{H}$, el correspondiente mínimo $M_H$ de la integral (1.5) tomado para todas las soluciones *minimales* están *uniformemente acotados* (independientemente de $\mathbb{H}$); el uso de los dos ingredientes mencionados antes conduce a la existencia de una solución de (1.4) por un argumento similar al de E. SCHMIDT.
La originalidad de F. RIESZ está en haber encontrado un tipo de condición completamente distinto: *la existencia de un número* $M > 0$ *tal que, para cualquier subconjunto finito* $\mathbb{H}$ *de índices y cualquier familia* $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{H}}$ *de escalares se tiene la desigualdad:*

$$\left| \sum_{\alpha\in\mathbb{H}} \lambda_\alpha c_\alpha \right| \leq M. \left(\int_I \sum_{\alpha\in\mathbb{H}} |\lambda_\alpha g_\alpha(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \tag{1.6}$$

F. RIESZ aplicó esta condición en particular al caso en que las $g_\alpha$ son todas las funciones de $L^q(I)$; (1.6) es entonces equivalente a la continuidad en $L^q$ de la funcional lineal $\mathcal{L}$ definida por:

$$\mathcal{L}(g_\alpha) = c_\alpha$$

y generalizó entonces su resultado anterior en $\ell^2$ y $C(I)$, probando que se puede expresar este hecho como: *El dual de* $L^q(I)$ *puede ser identificado con* $L^p(I)$; el nombre *dual* no fue utilizado por F. RIESZ, aunque dio por primera vez ejemplos de lo que ahora llamamos *espacios de Banach reflexivos que no son isomorfos a su dual.*
En 1911, F. RIESZ combinó sus métodos para el tratamiento del sistema (1.4) en $L^p$ con el teorema de HADAMARD-RIESZ sobre funcionales lineales en $C[a,b]$ para estudiar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\int_a^b g_\alpha(x).d\xi(x) = c_\alpha \tag{1.7}$$

donde $[a,b]$ es un intervalo compacto en $\mathbb{R}$, las funciones $g_\alpha$ son continuas en $[a,b]$, los $c_\alpha$ escalares dados, y se tiene que determinar una función $\xi$ de variación acotada en $[a,b]$ que satisfaga las ecuaciones (1.7) para todo $\alpha$. Este problema puede ser considerado como una generalización del propuesto y resuelto por STIELTJES.
La condición dada por F. RIESZ para la existencia de una solución

$\xi$ del sistema general (1.7) es similar a la condición (1.6): *la existencia de una constante* M > 0 *tal que para cualquier familia finita de escalares* $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in H}$ *se tiene:*

$$\left|\sum_{\alpha\in H} \lambda_\alpha c_\alpha\right| \leq M.\sup_x \left|\sum_{\alpha\in H} \lambda_\alpha g_\alpha(x)\right|$$

Observó explícitamente que el miembro derecho de esta desigualdad es el límite del miembro derecho de (1.6) cuando $q \to \infty$.
La demostración es similar a la de (1.4); el proceso resulta más complicado pues aún en el caso de un sistema finito (1.7) no hay más unicidad para las soluciones *minimales*.
La condición (1.4) puede interpretarse de la siguiente forma: si

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha = 0 \text{ en } L^q(I)$$

entonces:

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha c_\alpha = 0$$

esto implica que, si $\mathbb{F}$ es un subespacio vectorial de $L^q(I)$ generado por los $g_\alpha$ , hay una forma lineal $\mathcal{L}$ bien determinada, definida en $\mathbb{F}$ tal que:

$$\mathcal{L}(g_\alpha) = c_\alpha$$

para todo $\alpha$. Entonces la condición (1.6) significa que esta forma lineal $\mathcal{L}$ es continua en $\mathbb{F}$; la existencia de $f \in L^p(I)$ tal que:

$$\mathcal{L}(g_\alpha) = \int_I f(x).g_\alpha(x)\, dx$$

para todo $\alpha$ significa entonces que $\mathcal{L}$ puede ser extendida a una forma lineal continua definida en todo el espacio $L^q(I)$; en otras palabras es un caso especial de lo que ahora se conoce como el *teorema de Hahn-Banach.*
Tal interpretación de este resultado no fue dado por F. RIESZ; la primera mención de este punto de vista apareció en un trabajo escrito en 1912 por el matemático austríaco Eduard HELLY (1884-1943) en el que da una prueba diferente de los resultados de F. RIESZ sobre los sistemas (1.7). Después de un intervalo de nueve años debido a la primera guerra mundial en que fue prisionero de guerra en Rusia, HELLY retornó a su método en un

trabajo de 1921, en el que por primera vez trabajó con *espacios normados de sucesiones* generales, mediante métodos que no dependían de las características especiales del espacio.

En 1922 Rolf NEVALINNA estudió el problema con los métodos de la teoría de funciones de variable compleja y obtuvo la siguiente fórmula que da todas las posibles soluciones (en el caso indeterminado) expresadas mediante un parámetro-función: *Si* $\{\varphi(t)\}$ *son las posibles soluciones del problema de momentos supuesto indeterminado y si* $\{\psi(z)\}$ *son las transformadas correspondientes:*

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(t)}{t - z}$$

*entonces todas estas* $\psi(z)$ *se obtienen por la formula:*

$$\psi(z) = \frac{p_0(z) + N(z).p_1(z)}{q_0(z) + N(z).q_1(z)}$$

*donde* $p_i, q_i$, $i = 1,2$ *son cuatro funciones enteras fijas y* $N(z)$ *es una funcion de clase N, es decir, una funcion analitica en el semiplano superior con parte imaginaria positiva.*

A cada $N(z)$ corresponde una $\psi(z)$ transformada de una solución $\varphi(t)$ y recíprocamente. Para $N(z)$ constante se obtienen las soluciones llamadas canónicas que son medidas $d\varphi(t)$ a puro salto. De esta fórmula resulta que, fijando z y variando $\psi$, los posibles valores de $\psi(z)$ correspondientes a posibles soluciones $d\varphi$ llenan un círculo $\Gamma(z)$ llamado *circulo de Nevanlinna* y los puntos de la circunferencia provienen de las $\psi$ correspondientes a las soluciones canónicas.

En el mismo año el matemático húngaro Marcel RIESZ (1886-1969) estudia la teoría desde el punto de vista de polinomios *casi ortogonales* e introduce nuevos e importantes métodos directos, determinando la clausura de los polinomios en el espacio $L^2(d\varphi)$ para los $d\varphi(t)$ soluciones del problema. M. RIESZ prueba que el conjunto de todos los polinomios es denso en $L^2(d\varphi)$ si y sólo si el problema es determinado, o si $d\varphi$ es una solución canónica.

Torsten CARLEMAN mostró entre los años 1923 y 1926 la conexión entre el problema de momentos (1.1) y las teorías de funciones quasi analíticas y de formas cuadráticas en infinitas variables. Encontró además el siguiente criterio de suficiencia, el más general conocido para que el problema sea determinado:

*El problema es determinado si:*

$$\sum \frac{1}{\sqrt[2n]{c_{2n}}} = \infty$$

En 1923 Félix HAUSDORFF dio un criterio para que el problema de momentos (1.1) posea una solución necesariamente única en un intervalo finito, esto es, cuando se requiere que $\varphi(x)$ permanezca constante fuera de un intervalo finito dado. Dio además una construcción efectiva de la solución y criterios para que ésta resulte con propiedades específicas (diferenciabilidad, continuidad, etc.). Como ya se comentó, en 1853 HERMITE demostró en el caso particular que $J$ es una matriz finita, *que conociendo su forma canonica queda determinada la solucion del problema de los momentos*. Esta idea se generaliza para el caso de $J$ infinita, pero para ello hace falta desarrollar la teoría de reducción a formas canónicas de matrices infinitas. Esta teoría fue desarrollada por HILBERT en el caso de matrices infinitas acotadas, y CARLEMAN extendió esta teoría elaborando una teoría importante de matrices no acotadas. Esta teoría fue precedida por trabajos del alemán Hermann WEYL (1885-1955) en 1910 para casos más particulares. Con este desarrollo CARLEMAN obtuvo un tratamiento completo del problema de los momentos. Los mismos resultados fueron obtenidos por el alemán Ernst HELLINGER (1883-) en 1922 mediante un estudio de las relaciones entre fracciones continuas y matrices infinitas. Por otra parte, toda matriz define un operador en el espacio de HILBERT separable, y la teoría de CARLEMAN ha sido incluída en la teoría general de extensión de operadores hermitianos debido a John von NEUMANN (1903-1957) quien en 1926 arribó a Gottingen para desempeñarse como asistente de HILBERT. Sus trabajos, publicados entre 1929 y 1932 fueron completados luego por STONE, FRIEDRIKS y KREIN.

Alrededor de 1934 Naum Il'ic ACHYESER y Mark Grigorevic KREIN generalizaron el trabajo de MARKOFF haciendo uso de la teoría de formas cuadráticas; también extendieron la teoría al problema de momentos trigonométricos.

Una forma de utilizar los resultados obtenidos en la teoría de momentos fue reducir el estudio de ciertos tipos generales de operadores hermitianos al de operadores del problema de momentos, es decir, al estudio de operadores dados por matrices de JACOBI y de extender los teoremas a operadores hermitianos generales. HELLINGER trabajó en espacios separables y PLESNER, ROHLIN (1941) y SEGAL (1952) extendieron la teoría de HELLINGER a espacios no separables, lo que dio origen a la llamada *teoria de multiplicidad.*

Lo opuesto a un operador autoadjunto viene a ser un operador hermitiano simple tal que no existe un subespacio invariante en el que él sea autoadjunto. El operador **A** de la teoría de momentos tiene la propiedad que sus índices de defecto son finitos e iguales y solo caben dos casos: o los índices son (0,0) y el operador es autoadjunto (el problema es determinado) o los índices son (1,1) (problema indeterminado) y en este caso **A** es simple. ACHYESER, NEUMARK Y KREIN generalizaron la fórmula (1946-47) y el teorema del círculo de Nevanlina para operadores hermitianos generales con índices de defecto iguales y finitos. KREIN y LIVSHITZ en 1947 obtuvieron una generalización completa de la teoría de momentos para operadores simples con índices de defecto iguales y finitos. KREIN mostró que si **A** es un operador simple con índices (1,1) en un espacio $\mathcal{H}$ entonces **A** puede representarse mediante funciones meromorfas de modo que si al elemento f $\in \mathcal{H}$ le corresponde la función f(z), entonces a Af le corresponde z.f(z), es decir, el operador **A** se representa por el operador multiplicación por z. KREIN estudió en detalle el caso en que las funciones f(z) son enteras y obtuvo para este caso una generalización completa de la teoría de momentos.

Por otra parte, LIVSHITZ mostró que a todo tal operador corresponde una función analítica, llamada *funcion caracteristica de* **A** de modo *que dos operadores son unitariamente equivalentes si y solo si tienen funciones caracteristicas iguales.*

En el caso de operadores maximales, estos tienen una única $E_t$ no ortogonal, y PLESSNER se propuso el problema de caracterizar tales $E_t$ correspondientes a operadores maximales.

Las bibliografías consultadas fueron: [A], [Bi], [Be], [D], [KN], [MC].

## CAPÍTULO 2

# EL PROBLEMA DE MOMENTOS DE HAMBURGUER

## 1.- INTRODUCCION.

Todo problema de momentos genera una serie de interrogantes, siendo los más importantes los referidos a la solubilidad y al número de soluciones. Este capítulo se ocupa de las respuestas a estas dos preguntas en el caso del problema de momentos de HAMBURGUER y nos ocuparemos de dos enfoques radicalmente distintos: uno de ellos, debido a AKHIEZER, utiliza principalmente fracciones continuas, matrices infinitas de Jacobi y ciertos polinomios asociados. El otro, debido a LANDAU, incluye las nociones básicas de estos espacios para obtener los mismos resultados.

Mientras que los argumentos utilizados por AKHIEZER son difíciles de motivar, éstos representan respuestas a preguntas simples y naturales en el contexto de espacios de Hilbert, por lo cual se reducen sustancialmente las dificultades analíticas del primer enfoque.

En la sección siguiente presentaremos el problema y los resultados obtenidos por ambos autores; en la sección 3 se detalla el tratamiento del problema según AKHIEZER [A], y en la sección 4 según LANDAU [L]. En la última sección se comparan ambos métodos.

## 2.- EL PROBLEMA DE MOMENTOS Y SU SOLUCION.

Dada una función no decreciente $\varphi(t)$ de la variable real t, o lo que es lo mismo una medida no negativa $d\varphi(t)$, se llaman *momentos de* $\varphi$, si existen, a los números

$$c_n = \int_a^b t^n \, d\varphi(t) \quad , \quad n = 0,1,2,... \qquad (2.1)$$

El problema de momentos consiste en, dada la sucesión:

$$c = \left\{c_n\right\}_{n=0}^{\infty}$$

encontrar la función no decreciente $\varphi(t)$ tal que se satisfaga (2.1), y saber si esta función, también llamada *medida representativa* está unívocamente determinada. (Se supone que $\varphi(t)$

tiene más de un número finito de puntos de crecimiento).
Si se verifica que:

$$\sum_{j,k=0}^{N} a_j \cdot \bar{a}_k \cdot c_{j+k} \geq 0$$

$$\sum_{j,k=0}^{N} a_j \cdot \bar{a}_k \cdot c_{j+k} = 0 \Leftrightarrow a_j = 0, \; j = 0, \ldots, N \tag{2.2}$$

entonces, para cualquier elección de los números complejos $\{a_i\}$:

$$\sum_{j,k=0}^{N} a_j \cdot \bar{a}_k \cdot c_{j+k} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot x_j \right|^2 d\varphi(x)$$

y como $\varphi(x)$ tiene más de un número finito de puntos de crecimiento, la forma cuadrática es definida positiva. Entonces la condición (2.2) es evidentemente necesaria para la existencia de la representación (2.1). Se prueba que también es suficiente:

TEOREMA A: *Si la condición (2.2) es satisfecha, el problema de momentos tiene una solución.*

El otro resultado importante es el siguiente:

TEOREMA B: *La medida representativa es única o, dado cualquier número real $\alpha$ existe una medida representativa para la cual $\alpha$ es un punto de masa positiva.*

## 3.- ENFOQUE CLASICO.

### 3.1.- Demostración del TEOREMA A.

La idea de la demostración del teorema A es la siguiente: Utiliza $c_0, c_1, \ldots, c_{2n}$ para definir una funcional lineal $\mathcal{L}$ en el espacio de polinomios $\Pi_{2n}$ de grado 2n de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} : \Pi_{2n} \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(x^k) = c_k, \quad 0 \leq k \leq 2n.$$

Por (2.1) se puede introducir la sucesión:

$$1 = P_0, P_1, \ldots, P_n$$

de polinomios ortonormales con respecto a $\mathscr{L}$, en el sentido que:

$$\mathscr{L}(P_i\tilde{P}_j) = \delta_{ij}$$

donde $P_k$ es un polinomio de grado k y coeficiente principal positivo. La existencia de medidas representativas $d\varphi_n$ sigue de la interpolación de LAGRANGE en los ceros de ciertos polinomios particulares, los *quasiortogonales*, construídos a partir de los $P_k(x)$. Finalmente, el teorema de HELLY permite concluir que una subsucesión de $\{d\varphi_n\}$ converge a una medida representativa para la sucesión completa $\{c_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Más detalladamente, la demostración es como sigue. Como ya se ha visto, la demostración de la condición necesaria es simple; la demostración de la condición suficiente es más compleja y la divide en dos pasos:

$\alpha$) Asume que es dada una sucesión positiva:

$$\left\{c_k\right\}_{k=0}^{\infty}.$$

Para cualquier n positivo considera el problema de momentos truncado de orden 2n-1, es decir:

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\varphi(x) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,2n-1. \qquad (2.3)$$

donde $\varphi(x)$ es una función no decreciente.

Construye en este primer paso una solución particular del problema de momentos truncado de la siguiente manera:

Considera la sucesión definida positiva $(c_k)$ dada, y construye a partir de ella una sucesión de polinomios

$$\left\{ P_k \right\}_{k=0}^{\infty}$$

llamados de *primer grado*, con las siguientes propiedades que los caracterizan:

1) $P_n(\lambda)$ es un polinomio de grado n y coeficiente principal positivo.

2) $\mathscr{S}\left\{P_n P_m\right\} = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$

donde la funcional $\mathcal{S}$ está definida en el espacio de todos los polinomios como sigue:

$$\mathcal{S}\left\{R(\lambda)\right\} = p_o c_o + p_1 c_1 + \ldots + p_n c_n$$

donde $R(\lambda) = p_o + p_1\lambda + \ldots + p_n\lambda^n$.

También se pueden definir los polinomios $P_k$ aplicando el proceso de ortogonalización a la sucesión de funciones $\lambda^k$, $k = 0,1,2,\ldots$, tomando como producto escalar la expresión:

$$(\lambda^i , \lambda^k) = c_{i+k}$$

Otra forma en que aparecen estos polinomios es considerando la ecuación en diferencias finitas:

$$b_{k-1}y_{k-1} + a_k y_k + b_k y_{k+1} = \lambda y_k , \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

donde:

$$a_k = \mathcal{S}\left\{\lambda . P_k(\lambda) . P_k(\lambda)\right\}, \qquad b_k = \frac{\sqrt{D_{k-1}D_{k+1}}}{D_k}$$

con las condiciones iniciales:

$$P_o(\lambda) = 1, \qquad P_1(\lambda) = \frac{\lambda - a_o}{b_o} \tag{2.5}$$

donde:

$$D_k = \begin{vmatrix} c_o & c_1 & \cdots & c_k \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{k+1} \\ & & \vdots & \\ c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{2k} \end{vmatrix}$$

Con estos polinomios construye una sucesión de polinomios llamados *quasiortogonales* $P_n(\lambda,\tau)$ de la siguiente manera:

$$P_n(\lambda,\tau) = P_n(\lambda) - \tau . P_{n-1}(\lambda)$$

donde $\tau \in \mathbb{R}$, y nota:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n, \qquad \lambda_k = \lambda_k^n(\tau)$$

los ceros del polinomio $P_n(\lambda,\tau)$, que se demuestra que son reales y simples.

Construye también los polinomios $Q_k(\lambda)$, llamados de *segundo grado*, de la siguiente manera:

1) Considerando la definición de la funcional $\mathscr{S}$ :

$$Q_k(\lambda) = \mathscr{S}_u\left\{\frac{P_k(\lambda) - P_k(u)}{\lambda - u}\right\} \tag{2.6}$$

2) Considerando la ecuación en diferencias, $Q_k(\lambda)$ es solución con las siguientes condiciones iniciales:

$$Q_0(\lambda) = 0, \qquad Q_1(\lambda) = 1/b_0 \tag{2.7}$$

$Q_k(\lambda)$ es un polinomio de grado k-1, cuyos ceros también son reales y simples.

Construye entonces los polinomios quasiortogonales $Q_n(\lambda,\tau)$.

Considera ahora la sucesión

$$\left\{\mu_k = \mu_k^{(n)}(\tau)\right\}_{k=0}^{\infty}$$

definida por:

$$\mu_k = \frac{Q_n(\lambda_k,\tau)}{P'_n(\lambda_k,\tau)} .$$

Demuestra que otras dos representaciones de los $\mu_k$ son:

$$\mu_k = \frac{P_{n-1}(\lambda_k).Q_n(\lambda_k) - P_n(\lambda_k).Q_{n-1}(\lambda_k)}{P_{n-1}(\lambda_k).P'_n(\lambda_k) - P_n(\lambda_k).P'_{n-1}(\lambda_k)} \tag{2.8}$$

De la ecuación (2.4) y de las condiciones iniciales (2.5) y (2.7) resulta lo que denomina "*el análogo de la formula de* LIOUVILLE-OSTROGRADSKII":

$$P_{k-1}(\lambda).Q_k(\lambda) - P_k(\lambda).Q_{k-1}(\lambda) = \frac{1}{b_{k-1}} \quad , \; k \in \mathbb{N}$$

De aquí resulta que el numerador de la expresión (2.8) es $1/b_{n-1}$. Considerando $y_k$ una solución de (2.4) con parámetro $\lambda$ y $z_k$ una solución de (2.4) con parámetro $\mu$, resulta:

$$b_{n-1}\left[y_{n-1}z_n - y_n z_{n-1}\right] - b_{n-1}\left[y_{m-1}z_m - y_m z_{m-1}\right] = (\mu - \lambda).\sum_{k=m}^{n-1} y_k z_k$$

En particular, si $y_k = P_k(\lambda)$, $z_k = P_k(\mu)$ y $m = 1$ se obtiene la fórmula de CHRISTOFFEL - DARBOUX:

$$(\mu - \lambda)\sum_{k=0}^{n-1} P_k(\lambda)\; P_k(\mu) = b_{n-1}\left\{P_{n-1}(\lambda).P_n(\mu) - P_n(\lambda).P_{n-1}(\mu)\right\}$$

de donde resulta la tercer expresión de los $\mu_k$:

$$\mu_k = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} |P_i(\lambda_k)|^2}$$

y por lo tanto $\mu_k > 0$, para todo k.

Demuestra además que esta sucesión $\{\mu_k\}$ verifica las dos propiedades siguientes:

$$\frac{Q_{n+1}(z) - \tau.Q_n(z)}{P_{n+1}(z) - \tau.P_n(z)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\mu_i}{z - \lambda_i} \qquad (2.9)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mu_k\, \lambda_k^m = \mathscr{S}\{\lambda^m\} = c_m, \quad m = 0,1,\ldots,2n-1. \qquad (2.10)$$

donde $\lambda_1 < \lambda_2 <\ldots< \lambda_{n+1}$ , $\lambda_i = \lambda_i^{(n+1)}(\tau)$ y $\mu_i = \mu_i^{(n+1)}(\tau)$.

Introduce entonces las funciones seccionalmente constantes $\varphi_n(x)$ que tienen como únicos puntos de crecimiento los $\lambda_i$, en donde las discontinuidades son los $\mu_i$:

$$\mu_i = \varphi_n(\lambda_{i+0}) - \varphi_n(\lambda_{i-0}) \; , \; i = 1,2,\ldots,n+1$$

Entonces la ecuación (2.10) toma la forma:

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\varphi_k(x), \quad k = 0,1,2\ldots,2n-1 \tag{2.11}$$

Por lo tanto, estas funciones $\varphi_n(x)$ son ciertas soluciones del problema truncado.

*Observacion*: Si $\tau < \infty$, la ecuación (2.10) y por lo tanto la (2.11) también son válidas para $k = 2n$, y si $\tau = 0$, para $k = 2n+1$.

*b*) Toma cualquier sucesión de soluciones no decrecientes $\varphi_n(x)$ del problema truncado de orden $2n-1$ $(n=1,2,3,\ldots)$, por ejemplo las construídas en el paso *a*). Como la variación total para cualquier $n$ de la función $\varphi_n(x)$ es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_n(x) = c_o$$

la sucesión:

$$\left\{\varphi_n(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

satisface las condiciones del teorema de HELLY. Entonces, existe una función no decreciente $\varphi(x)$ y una sucesión:

$$\left\{\varphi_{n_i}(x)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

tal que en todos los puntos de continuidad de $\varphi(x)$ vale la ecuación:

$$\varphi(x) = \lim_{i\to\infty} \varphi_{n_i}(x).$$

Prueba entonces que $\varphi(x)$ es solución del problema completo:

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\varphi(x), \quad k = 0,1,2\ldots$$

En efecto:

Si $-A < 0$ y $B > 0$ son dos puntos de continuidad de $\varphi(x)$, por el segundo teorema de HELLY:

$$\int_{-A}^{B} x^k \, d\varphi(x) = \lim_{i\to\infty} \int_{-A}^{B} x^k \, d\varphi_{n_i}(x) \qquad (2.12)$$

Por otro lado, si $2r$ es un número par mayor que $k$, entonces para $n_i > r$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\varphi_{n_i}(x) = \int_{-A}^{B} x^k \, d\varphi_{n_i}(x) + \int_{-\infty}^{-A} x^k \, d\varphi_{n_i}(x) + \int_{B}^{\infty} x^k \, d\varphi_{n_i}(x).$$

Por lo tanto:

$$\left| \int_{-\infty}^{-A} x^k \, d\varphi_{n_i}(x) + \int_{B}^{\infty} x^k \, d\varphi_{n_i}(x) \right| = \left| \int_{-\infty}^{-A} \frac{x^{2r}}{x^{2r-k}} \, d\varphi_{n_i}(x) + \int_{B}^{\infty} \frac{x^{2r}}{x^{2r-k}} \, d\varphi_{n_i}(x) \right|$$

$$\leq \frac{1}{K^{2r-k}} \left\{ \int_{-\infty}^{-A} x^{2r} \, d\varphi_{n_i}(x) + \int_{B}^{\infty} x^{2r} \, d\varphi_{n_i}(x) \right\} \leq \frac{C_{2r}}{K^{2r-k}}$$

donde $K = \min \{A,B\}$. Entonces sigue de (2.12) que:

$$\left| \int_{-A}^{B} x^k \, d\varphi(x) - c_k \right| \leq \frac{C_{2r}}{K^{2r-k}}$$

Resta ahora hacer tender $A$ y $B$ a infinito, pero de tal manera que $-A$ y $B$ continúen siendo puntos de continuidad de $\varphi(x)$. Esto prueba que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\varphi(x) = c_k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

La función $\varphi(x)$ encontrada tiene evidentemente un número infinito de puntos de crecimiento. En efecto, si $\varphi(x)$ posee sólo un número finito de puntos de crecimiento $x_1, x_2, \ldots, x_N$, para el polinomio:

$$P(x) = (x - x_1)^2.(x - x_2)^2\ldots(x - x_N)^2$$

valdría la igualdad:

$$\mathcal{S}\{P(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_1)^2.(x - x_2)^2\ldots(x - x_N)^2 \, d\varphi(x) = 0$$

que es un absurdo pues la sucesión $\left\{c_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ es positiva. ■

### 3.2.- Propiedades de los polinomios asociados con la matriz de Jacobi.

En discusiones subsiguientes la siguiente función jugará un rol importante:

$$w_n(\lambda,\tau) = -\frac{Q_n(\lambda) - \tau.Q_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda) - \tau.P_{n-1}(\lambda)} = -\frac{Q_n(\lambda,\tau)}{P_n(\lambda,\tau)} .$$

Son funciones de variable compleja $\lambda$, del índice n y del parámetro real $\tau$, $-\infty < \tau < \infty$. De la definición de esta función resulta que:

$$w_n(\lambda,\infty) = w_{n-1}(\lambda,0).$$

Vale el siguiente resultado:

<u>TEOREMA</u> (HELLINGER): *Sea $\lambda$ un número complejo fijo en el semiplano* $\mathrm{Im}\lambda > 0$ $(\mathrm{Im}\lambda < 0)$ *y sea $\tau$ tal que varía en el eje real. Entonces* $w = w_n(\lambda,\tau)$ *describe un contorno circular* $K_n(\lambda)$ *en el semiplano* $\mathrm{Im}w > 0$ $(\mathrm{Im}w < 0)$; *el centro de este círculo es el punto:*

$$-\frac{\overline{P_{n-1}(\lambda)}.Q_n(\lambda) - \overline{P_n(\lambda)}.Q_{n-1}(\lambda)}{\overline{P_{n-1}(\lambda)}.P_n(\lambda) - \overline{P_n(\lambda)}.P_{n-1}(\lambda)}$$

*y su radio es:*

$$\frac{1}{|\lambda - \bar{\lambda}| \sum_{k=0}^{n-1} |P_k(\lambda)|^2}$$

*La ecuacion del circulo $K_n(\lambda)$ puede escribirse en la forma:*

$$\frac{w - \bar{w}}{\lambda - \bar{\lambda}} - \sum_{k=0}^{n-1} |wP_k(\lambda) + Q_k(\lambda)|^2 = 0$$

Usará la notación $K_n(\lambda)$ tanto para el área circular como para el contorno circular que lo encierra.

Los puntos w que están fuera del círculo $K_n(\lambda)$ verifican la desigualdad:

$$\frac{w-\bar{w}}{\lambda-\bar{\lambda}} - \sum_{k=0}^{n-1} |wP_k(\lambda) + Q_k(\lambda)|^2 < 0$$

mientras que puntos $w$ interiores al círculo $K_n(\lambda)$ verifican:

$$\frac{w-\bar{w}}{\lambda-\bar{\lambda}} - \sum_{k=0}^{n-1} |wP_k(\lambda) + Q_k(\lambda)|^2 > 0.$$

De aquí resulta que el círculo $K_n(\lambda)$ está enteramente contenido en el $K_{n-1}(\lambda)$y las circunferencias de los círculos se tocan. En efecto: si un punto $w$ está situado en el círculo $K_n(\lambda)$ entonces:

$$\frac{w-\bar{w}}{\lambda-\bar{\lambda}} - \sum_{k=0}^{n-1} |wP_k(\lambda) + Q_k(\lambda)|^2 = 0$$

y por lo tanto:

$$\frac{w-\bar{w}}{\lambda-\bar{\lambda}} - \sum_{k=0}^{n-2} |wP_k(\lambda) + Q_k(\lambda)|^2 \geq 0$$

Entonces $w \in K_{n-1}(\lambda)$. La existencia de un punto común en las circunferencias $K_n(\lambda)$ y $K_{n-1}(\lambda)$ sigue de la relación:

$$w_n(\lambda,\infty) = w_{n-1}(\lambda,0)$$

**3.3.- Teorema de invarianza.**

Considerando un punto no real $\lambda$, es posible construir para él la sucesión de círculos $K_n(\lambda)$. Como $K_{n+1}(\lambda) \subseteq K_n(\lambda)$, existe un círculo límite o un punto límite $K_\infty(\lambda)$.

Si $w$ es el punto límite, o cualquier punto del círculo límite, resulta que para cualquier entero positivo $n$ vale la desigualdad:

$$\frac{w-\bar{w}}{\lambda-\bar{\lambda}} > \sum_{k=0}^{n-1} |wP_k(\lambda) + Q_k(\lambda)|^2.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |wP_k(\lambda) + Q_k(\lambda)|^2 < \infty .$$

Como $y_k = w.P_k(\lambda) + Q_k(\lambda)$, $k = 0,1,2,\ldots$ es solución de la ecuación (2.4), el inciso *a)* del siguiente teorema queda demostrado:

TEOREMA:

*a) Para cualquier* $\lambda$ *no real existe al menos una solución* $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ *de las ecuaciones:*

$$b_{k-1}y_{k-1} + a_k y_k + b_k y_{k+1} = \lambda y_k,\ k = 1,2,\ldots \tag{2.4}$$

*tal que:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$$

*es decir,* $\{y_k\} \in \ell^2$.

*b) Cualquier solución de esta ecuación pertenece a* $\ell^2$ *si y sólo si* $K_\infty(\lambda)$ *es un circulo.*

*Demostracion de b):*

Si toda solución de (2.4) pertenece a $\ell^2$ entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2 < \infty$$

y por lo tanto $K_\infty(\lambda)$ es un circulo.

Reciprocamente, si $K_\infty(\lambda)$ es un circulo, entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2 < \infty$$

y como en cualquier caso:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |wP_k(\lambda) + Q_k(\lambda)|^2 < \infty$$

$w \in K_\infty(\lambda)$, la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(\lambda)|^2$$

también converge.■

TEOREMA DE INVARIANZA:

*Si la serie:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2$$

*converge en cualquier punto λ no real, entonces converge uniformemente en cualquier parte finita del plano complejo. La misma propiedad tiene la serie:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(\lambda)|^2.$$

Para demostrar este teorema se basa en el siguiente:

LEMA: *Si:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 < \infty \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|^2 < \infty$$

*y si* $\eta_n$ , $n = 0,1,2,...$, *es una solución de la ecuación:*

$$\eta_n = d_n + (\lambda - \lambda_0) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} \, \eta_k \ , \quad n = 0,1,2,... \tag{2.13}$$

*entonces la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|^2$$

*converge uniformemente en toda parte finita del plano λ.*

Veamos como sigue el teorema a partir del lema. Como:

$$\frac{P_n(\lambda) - P_n(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

es un polinomio en λ de grado n-1, puede ser representado en la forma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} \, P_k(\lambda) \tag{2.14}$$

Los coeficientes $a_{nk}$ pueden ser calculados de la siguiente forma:

$$a_{nk} = \mathscr{S}_\lambda\left\{\frac{P_n(\lambda) - P_n(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} \, P_k(\lambda)\right\} =$$

$$P_k(\lambda_o) \cdot \mathscr{S}_\lambda\left\{\frac{P_n(\lambda) - P_n(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o}\right\} + \mathscr{S}_\lambda\left\{\left[P_n(\lambda) - P_n(\lambda_o)\right] \cdot \frac{P_k(\lambda) - P_k(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o}\right\}$$

Pero, como:

$$\mathscr{S}_\lambda\left\{\frac{P_k(\lambda) - P_k(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o}\right\} = Q_k(\lambda_o)$$

y:

$$\mathscr{S}_\lambda\left\{P_n(\lambda) \; . \frac{P_k(\lambda) - P_k(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o}\right\} = 0, \quad k = 0,1,2,\dots,n$$

resulta:

$$a_{nk} = P_k(\lambda_o) \cdot Q_n(\lambda_o) - P_n(\lambda_o) \cdot Q_k(\lambda_o)$$

Eligiendo $d_n = P_n(\lambda_o)$ , $\eta_n = P_n(\lambda)$, de la igualdad (2.14) resulta:

$$\frac{\eta_n - d_n}{\lambda - \lambda_o} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} \cdot \eta_k$$

y:

$$\eta_n = d_n + (\lambda - \lambda_o) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} \cdot \eta_k \quad , \; n = 0,1,2,\dots$$

que es una ecuación como (2.13).

Como $K_\infty(\lambda_o)$ es un círculo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\lambda)|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(\lambda)|^2 < \infty$$

por lo que se cumple la primera condición del LEMA.

Además la condición:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|^2 < \infty$$

se cumple pues:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |P_k(\lambda_0).Q_n(\lambda_0) - P_n(\lambda_0).Q_k(\lambda_0)|^2 \le$$

$$\le 2.\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[|P_k(\lambda_0).Q_n(\lambda_0)|^2 + |P_n(\lambda_0).Q_k(\lambda_0)|^2\right] =$$

$$= 2.\left[\sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(\lambda_0)|^2 \sum_{k=0}^{n-1} |P_k(\lambda_0)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\lambda_0)|^2 \sum_{k=0}^{n-1} |Q_k(\lambda_0)|^2\right] <$$

$$< 4.\sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(\lambda_0)|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |P_k(\lambda_0)|^2 < \infty.$$

Por lo tanto, el LEMA es aplicable, y entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2$$

es uniformemente convergente en cualquier parte finita del plano $\lambda$. La demostración para la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(\lambda)|^2$$

es análoga.■

### 3.4.- Demostración del TEOREMA B.

Los lineamientos generales de la demostración del TEOREMA B son los siguientes:

Al demostrar el TEOREMA A probó que, si $P_n(\alpha) \neq 0$, existe una medida representativa $d\varphi_n(x)$ para el problema truncado que concentra una masa:

$$\left[\sum_{k=0}^{n} |P_k(\alpha)|^2\right]^{-1}$$

en el punto $x = \alpha$. Prueba entonces que:

*a*) Los polinomios $\left\{P_k(\lambda)\right\}$ satisfacen una recursión de tres términos, análoga a la ecuación diferencial de STURM LIOUVILLE:

$$x.P_k(x) = b_{k-1}P_{k-1}(x) + a_k P_k(x) + b_k P_{k+1}(x)$$

donde $a_k \in \mathbb{R}$ , $b_k > 0$ . Además de los polinomios:

$$\left\{P_k(x)\right\}$$

esta ecuación tiene una segunda solución, los polinomios:

$$\left\{Q_k(x)\right\}.$$

Prueba que si:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\lambda)|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(\lambda)|^2 < \infty$$

para un punto $\lambda$ en el plano complejo, lo mismo es cierto para todo $\lambda$.

*b*)Lleva el problema al dominio complejo introduciendo la transformada de STIELTJES:

$$w_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \lambda}\, d\varphi_n(x)$$

con $Im\lambda > 0$. Usando propiedades de transformación conforme de transformaciones lineales fraccionarias, muestra que cuando $d\varphi_n$ varía en el conjunto de medidas representativas para el problema truncado, el punto $w_\lambda$ recorre el disco cerrado $K_n(\lambda)$ en el semiplano superior. Cuando n crece, los discos correspondientes están encajados y por lo tanto convergen o a un disco, o a un punto. Se conecta entonces este fenómeno con el comportamiento de la recursión de tres términos mostrando que cuando $Im\lambda > 0$, ambas soluciones son de cuadrado sumable en $\lambda$ si y sólo si el límite de $K_n(\lambda)$ es un disco.

*c*) Sigue de (*a*) y (*b*) que si $K_n(\lambda)$ converge a un punto en un valor $\lambda$ en $Im\lambda > 0$, esto sucede en todo $\lambda$ tal que $Im\,\lambda > 0$. Entonces la

---

2. **EL PROBLEMA DE MOMENTOS DE HAMBURGUER.**

transformada de STIELTJES:

$$\int \frac{1}{x - \lambda}\, d\varphi(x)$$

está preescripta únicamente en $Im\ \lambda > 0$, cualquiera sea la elección de la medida representativa, y como la transformada puede ser invertida, la medida representativa debe ser única. En el caso opuesto, si $K_n(\lambda)$ se acerca a un disco para un valor de $\lambda$, la medida representativa no es única.

Más aún, de ($c$) y ($b$) sigue que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\alpha)|^2 < \infty$$

para cada $\alpha$, y por lo tanto de ($a$), correspondiendo a cada punto real $\alpha$, puede encontrarse una medida representativa de modo que concentre allí una masa no nula.

Más detalladamente, la demostración es la siguiente:

$a$) Para demostrar el TEOREMA A se construyeron los polinomios $P_k(x)$ y $Q_k(x)$ como soluciones de las ecuaciones:

$$x.y_k(x) = b_{k-1}y_{k-1}(x) + a_k y_k(x) + b_k y_{k+1}(x)$$

donde $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k > 0$ , con distintas condiciones iniciales.

Por el teorema de invarianza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(\lambda)|^2$$

es uniformemente convergente en cualquier parte finita del plano $\lambda$. La demostración para la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(\lambda)|^2$$

es análoga.

$b$) Al demostrar el TEOREMA A se vio que:

$$\frac{Q_{n+1}(z) - \tau . Q_n(z)}{P_{n+1}(z) - \tau . P_n(z)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\mu_i}{z - \lambda_i} \tag{2.9}$$

con: $\lambda_1 < \ldots < \lambda_{n+1}$ , $\lambda_i = \lambda_i^{(n+1)}(\tau)$.

Recordando la definición de la función $w_n(\lambda) = w_n(\lambda,\tau)$, el miembro izquierdo de (2.9) es $- w_{n+1}(z)$. Entonces, utilizando las funciones $\varphi_n(x)$ construidas antes, la ecuación (2.9) puede escribirse en la forma:

$$w_{n+1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - z} \, d\varphi_n(x) \qquad (Im z \neq 0)$$

Se vio también que el punto $w_{n+1} = w_{n+1}(z)$ describe la circunferencia del círculo $K_{n+1}(z)$ cuando el parámetro $\tau$ varía sobre el eje real. El siguiente hecho resulta de la construcción: sea z un punto no real fijo; entonces para cualquier punto $w_{n+1}$ situado en la circunferencia $K_{n+1}(z)$ existe una solución $\varphi_n(z)$ del problema de momentos truncado tal que:

$$w_{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - z} \, d\varphi_n(x).$$

Para obtener dicha solución $\varphi_n(x)$ se debe determinar el parámetro real $\tau$ de modo que:

$$w_{n+1} = - \frac{Q_{n+1}(z) - \tau . Q_n(z)}{P_{n+1}(z) - \tau . P_n(z)} .$$

Demuestra el siguiente resultado:

TEOREMA: *Si la sucesión positiva*

$$\left\{ c_k \right\}_{k=o}^{\infty}$$

*es tal que los círculos* $K_n(\lambda)$ *convergen a un círculo límite, es posible construir una solución al problema de momentos:*

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\varphi(x), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

*para la cual:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - z} \, d\varphi(x)$$

*sea un punto* w *predeterminado de la circunferencia* $K_\infty(z)$.

*c*) Resulta como corolario que si $K_\infty(\lambda)$ es un círculo para algún $\lambda$, $Im\lambda \neq 0$, y por lo tanto para todo $\lambda$ tal que $Im\lambda \neq 0$, el problema de momentos es indeterminado. Más aún, demuestra el siguiente resultado:

TEOREMA: *El conjunto de valores asumidos en el punto* $\lambda$ *(*$Im\lambda \neq 0$*) por todas las funciones* $w(\lambda)$ *pertenecientes a un problema de momentos, coincide con el conjunto de puntos* $K_\infty(\lambda)$.

De aquí resulta el siguiente:

COROLARIO: *Si* $K_\infty(\lambda)$ *es un punto, el problema de momentos es determinado.*

*Dem:* Sean $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ dos soluciones del problema de momentos. Se consideran las funciones:

$$w_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \lambda} \, d\varphi_1(x) \qquad w_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \lambda} \, d\varphi_2(x)$$

para $Im\lambda \neq 0$. Estas funciones deben coincidir para cualquier $\lambda$ tal que $Im\lambda \neq 0$, pues el conjunto $K_\infty(\lambda)$ que contiene los puntos $w_1(\lambda)$ y $w_2(\lambda)$ consiste en un punto para cualquier $\lambda$ con parte imaginaria distinta de cero. Escribiendo:

$$w(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

resulta que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \lambda} \, dw(x) = 0, \quad Im\lambda \neq 0.$$

Utilizando la fórmula de inversión de STIELTJES Y PERRON, encontramos que:

$$\frac{1}{2} \left[ w(x - 0) + w(x + 0) \right]$$

es constante, $-\infty < x < \infty$. Por lo tanto, $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ representan la misma solución del problema. ∎

## 4.- DEMOSTRACIONES HILBERTIANAS

### 4.1.- Introducción

En su trabajo, LANDAU [L] trata el problema en el contexto de espacios de Hilbert.

### 4.2.- Una demostración elemental.

Considera el espacio $\Pi_n$ de polinomios de grado n, y define en él un producto escalar de la siguiente forma:

$$(x^j, x^k) = c_{j+k} \;, \quad 0 \le j,k \le n$$

que está bien definido debido a la condición (2.1). Este producto escalar tiene la propiedad que, para cada $T_{n-1}$ y $U_{n-1}$ pertenecientes a $\Pi_{n-1}$:

$$(x.T_{n-1}, U_{n-1}) = (T_{n-1} , x.U_{n-1}) \tag{2.15}$$

Recíprocamente, cualquier producto escalar con esta propiedad definido en $\Pi_n$ genera una sucesión:

$$c_{j+k} = ( x^j, x^k), \quad 0 \le j,k \le n$$

que satisface la condición (2.1).

*Observacion* 1: Conociendo $c_j$, $0 \le j \le 2n$, no es posible definir un producto escalar en $\Pi_n$ , pero sí es suficiente para determinar la proyección ortogonal de $\Pi_{n+1}$ sobre $\Pi_{n-1}$ , ya que para calcularla sólo son necesarias las cantidades:

$$(x^j , x^k), \quad j \le n+1 \;, \quad k \le n-1$$

El objetivo es representar el producto escalar en $L^2(-\infty,\infty)$ respecto a una medida representativa, es decir, de la forma:

$$(T_n\ ,\ U_n) = \int_{-\infty}^{\infty} T_n(x).\overline{U_n(x)}\ d\varphi(x)\ ,\quad d\varphi(x) \geq 0 \tag{2.16}$$

Considera la funcional lineal definida de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_\lambda : \Pi_n \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}_\lambda\left\{S_n(x)\right\} = S_n(\lambda)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Por ser esta funcional lineal y acotada, existe un polinomio en $\Pi_n$, que se notará $E_n^\lambda$ tal que:

$$\mathcal{L}_\lambda\left\{S_n(x)\right\} = (S_n\ ,\ E_n^\lambda) = S_n(\lambda) \tag{2.17}$$

<u>DEFINICION</u> 1: *El polinomio* $E_n^\lambda \in \Pi_n$ *que verifica* (2.17) *para cada* $S_n \in \Pi_n$ *se lo llamará* polinomio de evaluación.

El interés en estos polinomios se debe al hecho que, como se verá más adelante, cualquier conjunto de (n+1) polinomios de evaluación mutuamente ortogonales generan una medida que satisface (2.16).

<u>DEFINICION</u> 2: *Una medida que satisface* (2.16) *y que consiste de (n+1) puntos de masa se llamará una* medida representativa elemental atómica.

<u>PROPOSICION</u> 1: *Existe una correspondencia biunívoca entre las medidas representativas elementales atómicas y conjuntos de (n+1) polinomios de evaluación mutuamente ortogonales.*

La idea de la demostración es la siguiente: Dada una medida representativa elemental atómica $d\varphi_n(x)$, con masa $m_i > 0$ en $x = \alpha_i$, $i = 0,1,...,n$, por (2.16) resulta que:

$$(S_n\ ,\ T_n) = \sum_{i=1}^{n} S_n(\alpha_i).\overline{T_n(\alpha_i)}.m_i$$

y por lo tanto definiendo:

$$E_n^{\alpha_i} \equiv \frac{\prod_{j\neq i} (x - \alpha_j)}{m_i \prod_{j\neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}$$

resulta que:

$$E_n^{\alpha_i} (\alpha_j) = \frac{1}{m_i} \delta_{ij}$$

que forman un conjunto de (n+1) polinomios de evaluación mutuamente ortogonales.

Recíprocamente dados:

$$\left\{E_n^{\alpha_i}\right\} \quad i=0,1,\ldots,n,$$

(n+1) polinomios de evaluación mutuamente ortogonales, puede obtenerse una base ortonormal de $\Pi_n$ dividiendo

$$E_n^{\alpha_i} \quad \text{por} \quad \left\| E_n^{\alpha_i} \right\|,$$

para cada i.

Expresando un polinomio $S_n \in \Pi_n$ en esta base, resulta:

$$(S_n \ , \ T_n) = \sum_{i=0}^{n} S_n(\alpha_i).\overline{T_n(\alpha_i)} \left\| E_n^{\alpha_i} \right\|^{-2}$$

que puede escribirse como:

$$\int S_n(x).\overline{T_n(x)} \, d\varphi(x)$$

donde la medida representativa elemental atómica $d\varphi(x)$ tiene masa:

$$\left\| E_n^{\alpha_i} \right\|^{-2}$$

en $x = \alpha_i$.□

Ahora, el objetivo es, en lugar de buscar medidas representativas elementales atómicas, tratar de obtener conjuntos de polinomios de evaluación mutuamente ortogonales.

Dada una base ortonormal $\{\phi_k\}$ de $\Pi_n$, se puede construir explícitamente uno de tales conjuntos de la siguiente forma:

$$E_n^{\lambda} = \sum \phi_k(x).\overline{\phi_k(\lambda)} \tag{2.18}$$

Elije como base aquella formada por los polinomios:

$$\left\{P_k(x)\right\}_{0\leq k\leq n} , P_0(x) = 1$$

que resulta de ortogonalizar las potencias de x por el proceso de Gram-Schmidt.

Reúne entonces algunas propiedades de los polinomios $P_k(x)$; al demostrar éstas se ve la importancia de (2.15). Ellas son:

*a*) $P_k(x)$ tiene coeficientes reales y k ceros reales y distintos.

*b*) $P_k(x)$ y $P_{k+1}(x)$ no tienen ceros en común.

Se notará $\mathcal{P}_{n-1}$ la proyección ortogonal sobre el subespacio $\Pi_{n-1}$, es decir:

$$\mathcal{P}_{n-1}T = \sum_{k=0}^{n-1} \langle T , P_k\rangle . P_k .$$

Entonces:

*c*) $E_n^{\lambda}$ es la solución a las ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{n-1}(x - \bar{\lambda}).T_n = 0 & (2.19) \\ (1 , T_n) = 1 & (2.20) \end{cases}$$

Si $T_n \not\equiv 0$ satisface sólo (2.19), entonces $(1 , T_n) \neq 0$ y:

$$E_n^{\lambda} = \frac{T_n}{\overline{(1 , T_n)}}$$

Como:

$$(E_n^{\lambda} , E_n^{\nu}) = E_n^{\lambda}(\nu)$$

resulta:

*d*) $E_n^{\nu}$ es ortogonal a $E_n^{\lambda}$ toda vez que $E_n^{\lambda}(\nu) = 0$ (2.21)

*e*) El grado de $E_n^{\lambda}$ es al menos n-1; es igual a n-1 si y solo si $\lambda$ es uno de los ceros de $P_n$.

*f*) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(\alpha) \neq 0$ entonces $E_n^{\alpha}$ tiene n ceros reales distintos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, y $E_n^{\alpha}$ junto con $\left\{ E_n^{\beta_i} \right\}_{1\leq i\leq n}$ forma un conjunto de (n+1) polinomios de evaluación mutuamente ortogonales.

*g*) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(\alpha) = 0$, los polinomios de evaluación en los n ceros de $P_n$ tienen grado n-1, son mutuamente ortogonales y ortogonales a $P_n$.

En vista de las propiedades *f*) y *g*), dado $\alpha \in \mathbb{R}$ que no sea un cero de $P_n$, se puede encontrar un conjunto de (n+1) polinomios de evaluación mutuamente ortogonales. Cada uno de esos conjuntos generan una medida representativa elemental atómica para el problema de momentos truncado. Esta medida tiene masa:

$$\left\| E_n^{\alpha} \right\|^{-2}$$

en $x = \alpha$.

Para conocer el comportamiento de estas medidas cuando $\alpha$ varía, encuentra la siguiente expresión de $E_n^{\lambda}$ :

*h*) $$E_n^{\lambda}(x) = c_n \cdot \frac{P_{n+1}(x) \cdot P_n(\bar{\lambda}) - P_n(x) \cdot P_{n+1}(\lambda)}{x - \bar{\lambda}}, \quad c_n = (x \cdot P_n \ , \ P_{n+1}) > 0$$

La demostración se basa en el siguiente hecho: $(x - \bar{\lambda}) \cdot E_n^{\lambda}(x)$ es un polinomio de grado n+1 y ortogonal a $\Pi_{n-1}$ por propiedad *c*). Entonces su forma general es una combinación lineal de $P_n(x)$ y $P_{n+1}(x)$. Pero para determinar $P_{n+1}(x)$ se requiere conocer $c_{2n+1}$ y $c_{2n+2}$, que todavía no se conocen necesariamente. Sin embargo, mediante un cálculo sencillo demuestra que cualesquiera sean estas cantidades, el subespacio de combinaciones lineales de $P_n(x)$ y $P_{n+1}(x)$ permanecen sin cambio. Por lo tanto:

$$(x - \bar{\lambda}) \cdot E_n^{\lambda}(x) = a(\lambda) \cdot P_{n+1}(x) + b(\lambda) \cdot P_n(x).$$

Calculando la expresión anterior en $x = \bar{\lambda}$ se deduce la propiedad *h*).

Por la propiedad *d*) el interés está centrado en conocer los ceros de $E_n^{\alpha}$, los cuales son descriptos simplemente mediante la fórmula de la propiedad *h*). En efecto, resulta que:

I) Los ceros de $P_n(x)$ interlazan a los de $P_{n+1}(x)$.

II) Los ceros $\{\beta_i\}$ de $E_n^{\alpha}$ junto con $\alpha$ están uno en cada intervalo entre los ceros sucesivos de $P_{n+1}$, y crecen cuando $\alpha$ crece en su intervalo.

III) Los (n+1) puntos: $\{\alpha,\beta_1,\dots,\beta_n\}$ son determinados fijando uno sólo de ellos.

Por la propiedad *e*) hay (n+1) de ellos excepto si $\alpha$ es un cero de $P_n$, en cuyo caso hay n. Ha mostrado entonces que cada problema de momentos truncado tiene una familia uniparamétrica de medidas representativas elementales atómicas; el parámetro puede tomarse convenientemente para ser el valor preescripto de $P_n(x)/P_{n+1}(x)$.

IV) $E_n^{\lambda}$ puede ser caracterizado como la solución de un problema extremal natural:

PROPOSICION 2:

$$\frac{E_n^{\lambda}(x)}{E_n^{\lambda}(\lambda)}$$

*es un polinomio de* $\Pi_n$ *de norma mínima que toma el valor* 1 *en* $\lambda$*; equivalentemente:*

$$\left\| E_n^{\lambda} \right\|^{-1} = \inf_{S_{n-1}\in\Pi_{n-1}} \left\| 1 - (x-\lambda).S_n \right\|$$

*La mayor masa que puede ser concentrada en* $\alpha$ *por una medida representativa para el problema truncado es:*

$$\left\| E_n^{\alpha} \right\|^{-2}$$

**4.3.- Demostración del TEOREMA A.**

Para retornar al problema de momentos completo, dada una sucesión infinita definida positiva:

$$1 = c_0, c_1, \dots$$

se puede construir una medida representativa elemental atómica $\varphi_n$ para cada sucesión truncada $c_0,\dots,c_{2n}$ y por el teorema de HELLY

encontrar una medida límite con los momentos preescriptos.
Más aún, fijando un punto real $\alpha$, y seleccionando para cada n aquella medida $\varphi_n$ con masa:

$$\left\| E_n^{\alpha} \right\|^{-2}$$

en $x = \alpha$, la medida límite asignará a $\alpha$ la masa:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| E_n^{\alpha} \right\|^{-2} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k(\alpha) \right|^2 \right\}^{-1}$$

En vista de la proposición anterior, ésta es la máxima masa que una medida representativa puede concentrar en $\alpha$.■

**4.4.- Comportamiento límite.**

Con la intención de demostrar el **TEOREMA B**, comienza estudiando el comportamiento de las medidas representativas $d\varphi_n$, cuando n crece. Demuestra el siguiente resultado [L]:

<u>PROPOSICION</u> 3: *Dado un elemento A de un espacio de Hilbert y un escalar* a, *la ecuación:*

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{n-1}(x - \bar{\lambda}).T_n = \mathcal{P}_{n-1}A \\ (1\ ,\ T_n) = a \end{cases} \tag{2.22}$$

*tiene una única solución* $T_n \in \Pi_n$ . *Cuando n crece, soluciones sucesivas* $T_n$ *cambian por incrementos ortogonales, es decir* $\mathcal{P}_n T_{n+1} = T_n$, *y por lo tanto converge si y solo si* $\|T_n\|$ *permanece acotado.*

Introduce ahora el polinomio $F_n^{\lambda}(x) \in \Pi_n$ que resuelve:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{n-1}(x - \bar{\lambda}).F_n^{\lambda} = 1 \\ (1\ ,\ F_n^{\lambda}) = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Recordando el comportamiento de $E_n^{\lambda}$, es natural preguntarse el efecto de $F_n^{\lambda}$ en el polinomio de evaluación. Vale el siguiente resultado:

$$(S_n \,,\, F_n^{\lambda}) = \left[\frac{S_n(x) - S_n(\lambda)}{x - \lambda} \,,\, 1\right].$$

Esto motiva la definición de un operador $A_\lambda$ definido por:

$$A_\lambda : \Pi_n \to \Pi_n$$

$$A_\lambda\, S = \frac{S_n(x) - S_n(\lambda)}{x - \lambda} \,.$$

Para cada n:

$$A_{\overline{\lambda}}\, P_n = \frac{P_n(x) - P_n(\overline{\lambda})}{x - \overline{\lambda}}$$

que satisface una ecuación del tipo (2.22):

$$\mathcal{P}_{n-1}(P_n(x) - P_n(\overline{\lambda})) = - P_n(\overline{\lambda})$$

$$(P_n \,,\, F_n^{\lambda}) = \left[\frac{P_n(x) - P_n(\lambda)}{x - \lambda} \,,\, 1\right].$$

Pero también:

$$\mathcal{P}_{n+1}(x - \overline{\lambda})\left\{ (F_n^{\lambda} \,,\, P_n).E_n^{\lambda} - (E_n^{\lambda} \,,\, P_n).F_n^{\lambda} \right\} =$$

$$= (F_n^{\lambda} \,,\, P_n) \,.\, \mathcal{P}_{n+1}(x - \overline{\lambda})E_n^{\lambda} - (E_n^{\lambda} \,,\, P_n) \,.\, \mathcal{P}_{n+1}(x - \overline{\lambda})F_n^{\lambda} =$$

$$= - P_n(\overline{\lambda}).$$

Además:

$$\left[(F_n^{\lambda} \,.\, P_n).E_n^{\lambda} - (E_n^{\lambda} \,,\, P_n).F_n^{\lambda} \,,\, 1\right] =$$

$$= (F_n^{\lambda} \,,\, P_n).(E_n^{\lambda} \,,\, 1) - (E_n^{\lambda} \,,\, P_n).(F_n^{\lambda} \,,\, 1) =$$

$$= (F_n^{\lambda} \,,\, P_n) \,.$$

Por la última proposición, la solución de (2.22) es única, por lo tanto:

$$A_{\bar\lambda}\, P_n = \frac{P_n(x) - P_n(\bar\lambda)}{x - \bar\lambda} = (F_n^\lambda\ ,\ P_n).E_n^\lambda - (E_n^\lambda\ ,\ P_n).F_n^\lambda \qquad (2.24)$$

de donde resulta que, si $n \to \infty$, $A_{\bar\lambda} P_n$ tiende a una combinación lineal de $E$ y $F$ con coeficientes que, por la proposición anterior, son las componentes de $E$ y $F$ en la base ortonormal:

$$\left\{P_k(x)\right\}_{0\le k\le n}$$

y por lo tanto son de cuadrado sumable sobre n. Supongamos ahora que $T$ es ortogonal a $\Pi_n$, entonces:

$$T = \sum_{k=n+1}^{N} \tau_k . P_k\ ,\qquad \|T\|^2 = \sum_{k=n+1}^{N} |\tau_k|^2 .$$

Entonces, por (2.24):

$$A_{\bar\lambda}\, T = \sum_{k=n+1}^{N} \tau_k \left\{(F\ ,\ P_k).E_k^\lambda - (E\ ,\ P_k).F_k^\lambda\right\}$$

y por las desigualdades de MINKOWSKY y SCHWARTZ:

$$\frac{\left\| A_{\bar\lambda}\, T \right\|}{\|\ T\ \|} \le \|\ E\ \| . \left\{\sum_{k=n+1}^{N} |(F\ ,\ P_k)|^2\right\}^{1/2} + \|\ F\ \| . \left\{\sum_{k=n+1}^{N} |(E\ ,\ P_k)|^2\right\}^{1/2}$$

El miembro derecho tiende a cero si n tiende a infinito, y como por definición:

$$F_n^{\bar\lambda}(x) = \overline{F_n^\lambda(x)} \qquad \text{y} \qquad E_n^{\bar\lambda}(x) = \overline{E_n^\lambda(x)}$$

reemplazando $\lambda$ por $\bar\lambda$ se establece el mismo resultado para $A_\lambda$. Se ha demostrado el siguiente resultado:

<u>PROPOSICION</u> 4: *Si $E_n^\lambda$ y $F_n^\lambda$ convergen cuando $n \to \infty$, el operador $A_\lambda$ es completamente continuo: para $T$ ortogonal a $\Pi_n$:*

$$\|\ A_\lambda T\ \| \le \varepsilon_n \|\ T\ \|$$

*donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Explotando la completa continuidad de $\Lambda_\lambda$, encuentra el siguiente resultado:

PROPOSICION 5: *Si* $E_n^\lambda$ *y* $F_n^\lambda$ *convergen cuando* $n \to \infty$ *para un punto* $\lambda$ *real o complejo, entonces convergen para cualquier punto* $\nu$.

**4.5.- Una demostración simple del TEOREMA B.**

En primer lugar, utilizando la correspondencia biunívoca entre medidas representativas elementales atómicas y polinomios de evaluación muestra que, si $d\tau(x)$ es una medida representativa para el problema de momentos $(\tau(-\infty) = 0,\ \tau(\infty) = 1)$ y, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\| E_n^\alpha \| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces $\tau(\alpha)$ está unívocamente determinada. Por lo tanto resulta que si la medida no es única, el conjunto de puntos $\alpha$ en los cuales $\| E_n^\alpha \| \to \infty$ no puede ser denso. Entonces, existe un intervalo $I$ y una constante C tal que:

$$\| E_n^\alpha \| \le C, \qquad \text{para } \alpha \in I \tag{2.25}$$

y de aquí resulta que entonces $E_n^\nu$ converge para cada $\nu$, cuando $n \to \infty$.

Sigue entonces la demostración del TEOREMA B, pues si la medida representativa no es única, $\| E_n^\alpha \|^2 \to m_\alpha < \infty$ para cada $\alpha$, y entonces considerando límites de sucesiones de medidas representativas elementales atómicas $d\varphi_n(x)$ con masas $\| E_n^\alpha \|^{-2}$ en $x = \alpha$ vemos que existe una medida representativa que lleva la masa positiva $m_\alpha^{-1}$ en $x = \alpha$.

Estos argumentos muestran también que la dicotomía básica del TEOREMA B es reflejada en el hecho que, cuando $n \to \infty$, los ceros de $P_n(x)$ tienden a ser densos o no densos en la recta real.

## 5.- COMPARACION DE AMBOS ENFOQUES.

La representación obtenida en la propiedad *h*) es la fórmula de CHRISTOFFEL-DARBOUX, que aquí se deriva en forma sencilla. Similarmente las combinaciones lineales de $P_n$ y $P_{n+1}$ con coeficientes reales son los *polinomios quasiortogonales* cuyo significado ahora es claro, ya que sus ceros determinan polinomios de evaluación mutuamente ortogonales, y por lo tanto medidas representativas. El operador:

$$P_{n-1}\times T_n$$

corresponde a la ecuación de recursión de tres términos satisfecha por los polinomios ortogonales $P_k(x)$. (ecuación (2.4)).
Este es el análogo discreto de un operador diferencial de STURM-LIOUVILLE de segundo orden definido en $0 \leq t < \infty$, con k correspondiendo a t; más precisamente, en esta identificación el valor de una función en t corresponde a la componente de un elemento de un espacio de Hilbert respecto del vector $P_k$. La teoría espectral de tales operadores asegura que si $\Phi(t,\lambda)$ es la solución al problema:

$$D\Phi(t,\lambda) = \lambda.\Phi(t,\lambda)$$

vista como un problema de valores iniciales, la aplicación:

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(t).\Phi(t,\lambda)\ dt$$

genera una transformación unitaria de $f \in L^2(0,\infty)$ sobre $L^2(d\varphi)$ para un $d\varphi$ apropiado, llamada *una medida espectral*.
En el contexto de ecuaciones diferenciales, es natural probar esto imponiendo una condición de frontera autoadjunta en $t = T$, mostrando que aquellos $\Phi(t,\lambda_j)$ que lo satisfacen forman un sistema mutuamente ortogonal en $L^2(0,T)$, expandiendo $f \in L^2(0,T)$ en este sistema y finalmente haciendo tender T a infinito.
Aquí el rol de $\varphi(t,\lambda)$ en $0 \leq t \leq T$ lo juega $E_n^\lambda$. La condición de frontera autoadjunta en $t = T$ corresponde a:

$$a.P_{n+1}(\lambda) - b.P_n(\lambda) = 0 \qquad (2.26)$$

y por lo tanto los valores de $\lambda_j$ para los cuales (2.26) vale generan la sucesión:

$$\left\{ E_n^{\lambda_j} \right\}$$

de polinomios de evaluación mutuamente ortogonales. La medida espectral corresponde ahora al límite de las medidas representativas $d\varphi_n$ generadas cuando $n \to \infty$ con $(a/b)$ fijo.
Entonces, una medida representativa para el problema de momentos se corresponde con la recursión de tres términos. Tambien se puede

dar una interpretación simple a la demostración de la unicidad. Como ya se ha visto, consiste en introducir la transformada de STIELTJES:

$$\int \frac{d\varphi(x)}{x - \lambda}$$

con $\lambda$ en el semiplano superior y $d\varphi$ una medida representativa, describiendo cuando está determinado con unicidad y pasando a $\varphi$ por una fórmula de inversión. Pero dicha transformada puede pensarse como el producto escalar de 1 con $1/(x - \bar{\lambda})$ en $L^2(d\varphi)$, o, equivalentemente, como $1 \in \Pi_n$, como el producto escalar de 1 con la proyección de $1/(x - \bar{\lambda})$ sobre $\Pi_n$ en $L^2(d\varphi)$. Entonces sea $d\varphi$ una medida representativa para el problema de momentos truncado, y sea:

$$V^{\lambda}_{\varphi,n}(x)$$

la proyección de $1/(x - \bar{\lambda})$ sobre $\Pi_n$ en $L^2(d\varphi)$. Por definición:

$$\frac{1}{x - \bar{\lambda}} \equiv V^{\lambda}_{\varphi,n}(x) + U(x) \tag{2.27}$$

con $U(x)$ (no necesariamente un polinomio), ortogonal en $L^2(d\varphi)$ a todos los polinomios de $\Pi_n$.

Veamos como $V^{\lambda}_{\varphi,n}(x)$ depende de $\varphi$ :

$$w = \int \frac{d\varphi(x)}{x - \lambda} = \int \overline{V^{\lambda}_{\varphi,n}(x)}\, d\varphi(x) = \left[1 \ , \ V^{\lambda}_{\varphi,n}(x)\right] \tag{2.28}$$

pues $d\varphi$ representa un producto escalar sobre $\Pi_n$. De (2.27):

$$1 - (x - \bar{\lambda}).V^{\lambda}_{\varphi,n}(x) \equiv (x - \bar{\lambda}).U(x)$$

y por lo tanto $(x - \bar{\lambda}).U(x)$ es un polinomio de grado $n+1$. Consecuentemente:

$$\left[S_{n-1}, \ (x - \bar{\lambda}).U(x)\right] = \int S_{n-1}(x).\overline{(x - \bar{\lambda})}.\overline{U(x)}\ d\varphi(x) =$$

$$= \int (x - \lambda).S_{n-1}(x).\overline{U(x)}\ d\varphi(x) = 0$$

Entonces $(x - \bar{\lambda}).U(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de $\Pi_{n-1}$, es decir:

$$0 = \mathcal{P}_{n-1}(x - \bar{\lambda}).U(x) = \mathcal{P}_{n-1}\left[1 - (x - \bar{\lambda}).V_{\varphi,n}^{\lambda}(x)\right]$$

y por lo tanto:

$$\mathcal{P}_{n-1}(x - \bar{\lambda}).V_{\varphi,n}^{\lambda}(x) = 1 \tag{2.29}$$

De: (2.28), (2.29), (2.19), (2.20), (2.23) y proposición 3 resulta que:

$$V_{\varphi,n}^{\lambda}(x) = \bar{w}\, E_n^{\lambda}(x) + F_n^{\lambda}(x)$$

y como $F_n^{\lambda}$ es independiente de $\varphi$, $V_{\varphi,n}^{\lambda}(x)$ depende de $\varphi$ solo a traves de w.

Como $V_{\varphi,n}^{\lambda}(x)$ es una proyección de $1/(x - \bar{\lambda})$ en $L^2(d\varphi)$, su norma no puede exceder la de $1/(x - \bar{\lambda})$, por lo tanto:

$$\| \bar{w}\, E_n^{\lambda} + F_n^{\lambda} \|^2 \leq \int \frac{d\varphi(x)}{|x - \bar{\lambda}|} = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \left[ \int \frac{d\varphi(x)}{x - \lambda} - \int \frac{d\varphi(x)}{x - \bar{\lambda}} \right] =$$

$$= \frac{w - \bar{w}}{\lambda - \bar{\lambda}} \tag{2.30}$$

Ahora, sea $\Delta^{\lambda}$ el conjunto de puntos w generado por (2.28), para $Im\ \lambda > 0$, cuando $d\varphi$ varía sobre el conjunto de medidas representativas para el problema de momentos completo; por (2.30) y proposición 3 para cada $w \in \Delta^{\lambda}$ :

$$\bar{w}.E_n^{\lambda} + F_n^{\lambda}$$

converge cuando $n \to \infty$.

Ahora, si $\Delta^{\lambda}$ consiste de un único punto para cada $\lambda$ en $Im\ \lambda > 0$, entonces:

$$\int \frac{d\varphi(x)}{x - \lambda}$$

está unívocamente determinado en el semiplano superior, y la fórmula de inversión de STIELTJES muestra que $\varphi$ es única. Por otro lado, si para un único $\lambda$, $\Delta^{\lambda}$ contiene más de un punto, la medida representativa evidentemente no puede ser única, más aún, la convergencia de:

$$\bar{w}_1 . E_n^\lambda + F_n^\lambda \qquad \text{y} \qquad \bar{w}_2 . E_n^\lambda + F_n^\lambda$$

implican la convergencia de todas las combinaciones lineales, y por lo tanto de $E_n^\lambda$ y $F_n^\lambda$. Por proposición 5:

$$\| E_n^\alpha \|^2$$

se acerca a un límite finito $m_\alpha$ , para cada $\alpha$, y por lo tanto existe una medida representativa que tiene masa $m_\alpha^{-1}$ en $x = \alpha$.

CAPÍTULO 3

# EL PROBLEMA CLÁSICO DE MOMENTOS Y SU RELACIÓN CON EL ANÁLISIS

## 1.- INTRODUCCION

El problema de momentos de Hamburguer, también llamado el problema clásico de momentos, ocupa un lugar central en el análisis, debido a su conexión con tópicos importantes. Este capítulo se ocupa de la relación con la representación espectral de operadores, los problemas de interpolación generales en la teoría de funciones y la extensión de funcionales definidas positivas.

## 2.- INCLUSION EN LA TEORIA ESPECTRAL DE OPERADORES.

Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert separable y sea $\{e_k\}_{0\leq k<\infty}$ una base ortonormal. Se sabe [A] que las sucesiones positivas normalizadas ($c_0 = 1$) están en correspondencia biunívoca con las matrices de Jacobi (o J-matrices) que son aquellas de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{bmatrix}, \quad a_k \in \mathbb{R},\ b_k \geq 0. \tag{3.1}$$

Para incluir el problema de momentos en la teoría espectral de operadores AKHIEZER [A] utiliza la matriz de Jacobi correspondiente a la sucesión positiva del problema.
Busca definir un operador lineal A tal que la J-matriz (3.1) se pueda considerar como la matriz de tal operador. Con este propósito, define en primer lugar el operador A para los vectores unitarios $e_k$ de la siguiente forma:

$$Ae_k = b_{k-1}\cdot e_{k-1} + a_k\cdot e_k + b_k\cdot e_{k+1} \quad (k = 0,1,2\ldots;\ b_{-1} = 0) \tag{3.2}$$

Debido a la linealidad, el operador A está también determinado para todos los vectores finitos:

$$g = \sum x_k\cdot e_k \tag{3.3}$$

Como de la definición (3.2):

$$(Ae_m, e_n) = (e_m, Ae_n) \quad , \quad m,n = 0,1,2\ldots)$$

sigue que para dos vectores finitos cualesquiera f,g vale la igualdad:

$$(Af,g) = (f,Ag)$$

Pero como el conjunto de estos vectores es denso en $\mathscr{H}$, el operador A es simétrico. Por lo tanto admite una clausura, que es el operador lineal cerrado minimal que satisface la condición (3.2). Llamará A también a este operador. Ahora introduce el operador adjunto $A^*$. El vector:

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} x_k . e_k \in Dom\ (A^*) \longleftrightarrow \exists\ g^* = \sum_{k=0}^{\infty} y_k e_k$$

y verifica:

$$(Ae_k, g) = (e_k, g^*),\ k=0,1,2\ldots$$

Utilizando la ecuación (3.2) esto es equivalente a:

$$(b_{k-1}e_{k-1} + a_k e_k + b_k e_{k+1}, g) = (e_k, g^*) \quad , \ k=0,1,2\ldots$$

de donde sigue que:

$$y_k = b_{k-1}x_{k-1} + a_k x_k + b_k x_{k+1} \ , \ k=0,1,2\ldots$$

y por lo tanto el vector (3.3) pertenece a *Dom* $(A^*)$ si y solo si:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_{k-1}x_{k-1} + a_k x_k + b_k x_{k+1}|^2 < \infty$$

Por la ecuación (3.2) todas las potencias enteras no negativas del operador A están determinadas en cada uno de los vectores unitarios $e_k$, y todos los polinomios en el operador A están por lo tanto determinados. Además se ve que encontrar un vector unitario $e_k$ a partir del vector unitario $e_1$ mediante la ecuación (3.2) requiere realizar las mismas operaciones que para obtener el polinomio $P_k(\lambda)$ del polinomio $1 = P_o(\lambda)$. Entonces:

$$e_k = P_k(A).e_o \quad , \; k=0,1,2...$$

y a la expansión:

$$\lambda^m = \sum_{j=o}^{m} \xi_j^{(m)} P_j(\lambda) \tag{3.4}$$

le corresponde la representación:

$$A^m e_o = \sum_{j=o}^{m} \xi_j^{(m)} P_j(A) e_o = \sum_{j=o}^{m} \xi_j^{(m)} e_j \tag{3.5}$$

De (3.4) se concluye que:

$$c_{m+n} = \mathscr{S}\{\lambda^{m+n}\} = \mathscr{S}\{\lambda^m \lambda^n\} = \sum_{j=o}^{m} \sum_{k=o}^{n} \xi_j^{(m)} \xi_k^{(n)} \delta_{jk}$$

y de (3.5) sigue que:

$$(A^m e_o, A^n e_o) = c_{m+n} \quad , \; (m,n = 0,1,2...)$$

Esta es la fórmula con la cual el problema de momentos se incluye en el problema de la resolución espectral del operador **A**.
Se dirá que el problema de momentos está *asociado* con el operador **A**, o que es *generado* por este operador. Vale el siguiente:

TEOREMA: *Sea $F_x$ una función espectral de un operador* **A**. *En este caso, la fórmula:*

$$\varphi(x) = (F_x e_o, e_o)$$

*da una solución del problema de momentos asociado con el operador* **A** *y cualquier solución del problema de momentos puede ser representada en esta forma.*
(La demostración puede consultarse en [A]).

## 3.- EL PROBLEMA DE MOMENTOS Y LA TEORIA DE FUNCIONES

El problema de momentos puede ser incluído como un caso límite de un problema general de interpolación en la teoría de funciones. Este enfoque del problema de momentos conduce a la descripción de todas las soluciones de este problema en el caso indeterminado.
En los planos de las variables complejas z y w se dan regiones $G_z$ y $G_w$; se dan además dos conjuntos de puntos:

$$Z = \{z_\alpha\} \subset G_z \quad y \quad W = \{w_\alpha\} \subset G_w \ .$$

Se requiere encontrar una función $w = w(z)$ analítica en $G(z)$ (que puede no existir) cuyo rango de valores pertenezca a $G_w$ y que satisfaga la ecuación:

$$w(z_\alpha) = w_\alpha \quad (z_\alpha \in Z)$$

Si el conjunto Z contiene puntos múltiples, estas condiciones deben ser modificadas en la forma natural; una modificación también es necesaria en el caso límite en que un punto $z_\alpha \in Z$ se mueve en la frontera de la región $G_z$. Se asumirá que las regiones $G_z$ y $G_w$ son simplemente conexas.
Si $G_z$ es el semiplano $\text{Im}z > 0$, y $G_w$ es el semiplano $\text{Im}w \geq 0$, la clase de todas las funciones $w = f(z)$ se denomina la clase $N$ (Nevanlinna).
Se demuestra [A] que estas funciones tienen una representación integral:

$$f(z) = \mu . z + \nu + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+xz}{x-z}\, d\tau(x) \tag{3.6}$$

donde $\mu$, $\nu$ son constantes reales, $\mu \geq 0$ y $\tau(x)$ es una función no decreciente de variación acotada. Un caso particular de esta fórmula es:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(x)}{x - z} \tag{3.7}$$

cuando $\varphi(x)$ es una función no decreciente de variación acotada. Esta fórmula es un caso particular de (3.6) cuando:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1 + x^2)\ d\tau(x) < \infty$$

En efecto, escribiendo:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x}(1 + v^2)\ d\tau(v)$$

se puede reescribir (3.6) en la forma:

$$f(z) = \mu . z + \nu + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x-z} - \frac{x}{1+x^2}\right)d\varphi(x)$$

y se obtiene la ecuación (3.7) si $\mu = 0$ y $\nu = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\ d\varphi(x)$.

El problema en la teoría de funciones consistirá en encontrar funciones de la clase $N$ que tengan una cierta representación asintótica:

<u>TEOREMA</u>: *Si una función no decreciente* $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *posee momentos finitos:*

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\ d\varphi(x), \qquad k=0,1,2,...,2n \tag{3.8}$$

*entonces existe una función* $f(z)$ *en la clase* $N$:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-z}\ d\varphi(x) \tag{3.9}$$

*tal que dado cualquier* $\delta$, $0 < \delta < \pi/2$, *fijo pero pequeño, es cierto uniformemente en el rango de ángulos:*

$$\delta \le \arg(z) \le \pi - \delta$$

*que:*

$$\lim_{z\to\infty} z^{2n+1}\left\{f(z) + \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} +\dots+ \frac{c_{2n-1}}{z^{2n}}\right\} = -c_{2n} \qquad (3.10)$$

*Recíprocamente, si para alguna función* $f(z) \in N$ *la relación* (3.10) *es cierta con números reales* $c_k$, *al menos para* $z = i.y$ $(y \to \infty)$ *entonces la funcion* $f(z)$ *permite la representación* (3.9) *cuando* $\varphi(x)$ *es una función no decreciente cuyos momentos son* (3.8).

La demostración puede consultarse en [A].
Este teorema muestra que el problema de momentos es equivalente al problema de encontrar una función $f(z) \in N$ que tenga una expansión asintótica dada.
Usando este resultado se puede probar el teorema de NEVANLINNA, que da una descripción de todas las soluciones del problema de momentos en el caso indeterminado. Antes son necesarias las siguientes definiciones:

<u>DEFINICION</u> 1: *Se llamará* matriz de Nevanlinna *a cualqier matriz:*

$$\begin{pmatrix} a(z) & c(z) \\ b(z) & d(z) \end{pmatrix}$$

*cuyos elementos son funciones trascendentales enteras, si se verifican las siguientes condiciones:*
*a)* $a(z).d(z) - b(z).c(z) = 1$
*b) Para cualquier* t *real y fijo* $(-\infty < t < \infty)$, *la función:*

$$w(z) = \frac{a(z).t - c(z)}{b(z).t - d(z)}$$

*es regular en los semiplanos* $\mathrm{Im} z > 0$ e $\mathrm{Im} z < 0$ *y satisface la desigualdad:*

$$\frac{\mathrm{Im}\, w(z)}{\mathrm{Im}\, z} > 0$$

Dado un problema de momentos se conocen los polinomios $P_k(\lambda)$ y $Q_k(\lambda)$. A partir de ellos se pueden construír los siguientes polinomios:

$$A_n(z) = z \cdot \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(0) . Q_k(z)$$

$$B_n(z) = -1 + z \cdot \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(0) . P_k(z)$$

$$C_n(z) = 1 + z \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P_k(0) . Q_k(z)$$

$$D_n(z) = z \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P_k(0) . P_k(z)$$

que, como demuestra AKHIEZER, verifican:

$$A_n(z).D_n(z) - B_n(z).C_n(z) = 1 \tag{3.11}$$

Si asumimos que el problema de momentos en discusión es indeterminado, entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(z)|^2, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(z)|^2$$

convergen uniformemente en cualquier parte finita del plano complejo. De la desigualdad de CAUCHY-BUYANKOVSKII sigue que, para $n \to \infty$, los polinomios $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$ y $D_n(z)$ tienden uniformemente a sus límites en cualquier parte finita del plano. Entonces sus límites son funciones trascendentales enteras:

$$A(z) = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(0) . Q_k(z)$$

$$B(z) = -1 + z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(0) . P_k(z)$$

$$C(z) = 1 + z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) . Q_k(z)$$

$$D(z) = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) . P_k(z)$$

que, por la condición (3.11) verifican:

$$A(z).D(z) - B(z).C(z) = 1$$

Entonces, la matriz:

$$\begin{bmatrix} A(z) & C(z) \\ B(z) & D(z) \end{bmatrix}$$

perteneciente a un problema de momentos indeterminado es una matriz de Nevanlinna. Ahora se está en condiciones de enunciar el siguiente:

<u>TEOREMA</u>: (NEVANLINNA) *Si:*

$$\begin{bmatrix} A(z) & C(z) \\ B(z) & D(z) \end{bmatrix}$$

*es una matriz de Nevanlinna correspondiente a un problema de momentos indeterminado, la fórmula:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-z}\, d\varphi(x) = -\frac{A(z).\Phi(z)-C(z)}{B(z).\Phi(z)-D(z)}$$

*establece una correspondencia biunívoca entre V, el agregado de todas las soluciones $\varphi(x)$ del problema de momentos en cuestión y el agregado de todas las funciones $\Phi(z)$ de clase N aumentado con la constante $\infty$ (constantes reales finitas estan incluidas en la clase N por definición).*

La demostración puede consultarse en **[A]**.

*Observación*: Para determinar la función $\varphi(x)$ de la función $\Phi(z)$ se puede utilizar la fórmula de inversión de STIELTJES-PERRON.

Los teoremas mencionados se demuestran aplicando el aparato de representaciones integrales al problema general de interpolación, al cual conduce el problema de momentos. Este aparato también se puede aplicar al problema de NEVANLINNA-PICK en la clase *N*:

*Dado un conjunto de números $\{w_\alpha\}$, encontrar condiciones necesarias y suficientes para que exista una función*

$$w = f(z) \in N$$

*que satisfaga las ecuaciones:*

$$f(z_\alpha) = w_\alpha, \qquad z_\alpha \in Z$$

*donde* $Z = \{z_\alpha\}$ *es un conjunto de puntos dado en el semiplano* $\mathrm{Im} z > 0$.

PICK dio la solución del problema para el caso en que Z es un conjunto finito (1920) y NEVANLINNA (1929) extendió esta solución al caso de un conjunto numerable. Para conjuntos Z arbitrarios el problema fue resuelto por KREIN y REKHTMAN, resultado que fue publicado en 1938. Vale el siguiente resultado **[A]**:

<u>TEOREMA</u>: *Para que exista una función* $f(z) \in N$ *que satisfaga la condición:*

$$f(z_\alpha) = w_\alpha \qquad (z_\alpha \in Z)$$

*donde* Z *es un conjunto de puntos dados en el semiplano* $\mathrm{Im} z > 0$ *es necesario y suficiente que todas las formas:*

$$\sum_{j,k=0}^{n} \frac{w_{\alpha_j} - \overline{w_{\alpha_k}}}{z_{\alpha_j} - \overline{z_{\alpha_k}}} \xi_j \cdot \overline{\xi_k}$$

*sean no negativas. Si alguna de estas formas es singular, entonces la función* $f(z)$ *es unica e igual a una fracción racional real.*

## 4.- EL PROBLEMA CLASICO DE MOMENTOS Y EL ANALISIS FUNCIONAL.

### 4.1.- Introducción

Si un problema de momentos se resuelve y se halla la función no decreciente $\varphi(x)$, entonces la funcional $\mathcal{S}$ definida inicialmente en el conjunto de todos los polinomios:

$$\mathcal{S}\,\{x^k\} = c_k\,, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

permite ser extendida al espacio de todas las funciones seccionalmente continuas para $\pm x \to \infty$ que crezcan no más rápido que un polinomio, de la siguiente forma:

$$\mathcal{S}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ d\varphi(x)$$

Con esta extensión se mantiene la nonegatividad de la funcional, pues, para cualquier función $f(x) \geq 0$ en el espacio mencionado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ d\varphi(x) \geq 0$$

Recíprocamente, si por cualquier método se encuentra una extensión de la funcional $\mathcal{S}$ que mantiene la nonegatividad en el espacio en cuestión, entonces en particular la funcional $\mathcal{S}$ puede calcularse en la función que es igual a 1 para $x \leq t$ y 0 para $x > t$, cualquiera sea el número real t fijo. El valor de la funcional $\mathcal{S}$ para esta función dará la solución $\varphi(t)$ del problema en discusión. Entonces, el problema se incluye en el análisis funcional como un cierto problema de extender una funcional. Se puede dar en este contexto otra demostración del TEOREMA A, que se basa en aplicar a $\mathcal{S}$ un principio de extensión general de M. RIESZ que asegura que una funcional lineal dada originalmente sobre una subvariedad, y positiva en la intersección de dicha subvariedad con un cono convexo, puede ser extendida a todo el espacio conservando la positividad en el cono. En la siguiente sección se da una demostración más detallada.

**4.2.- Demostración del Teorema A.**

Se da un cierto espacio lineal real $\mathcal{X}$ y una variedad lineal $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$. Se asume además que se da un cierto cono convexo en $\mathcal{X}$ (ie., una variedad convexa tal que junto con un elemento arbitrario $x$ contiene al rayo $\alpha x$ ($\alpha \geq 0$)).

Una funcional aditiva y homogénea $\mathcal{P}(x)$ definida en $\mathcal{M}$ se llamará K-*positiva* si para cualquier elemento $x \in K \cap \mathcal{M}$. vale la desigualdad: $\mathcal{P}(x) \geq 0$.

<u>TEOREMA</u>: *Para cualquier* $y \in \mathcal{X}$, *sean:*

$$\{x \in \mathcal{M} : x - y \in K\} \neq \emptyset \quad y \quad \{x \in \mathcal{M} : y - x \in K\} \neq \emptyset$$

*Entonces, cualquier funcional* K-*positiva dada en* $\mathcal{M}$ *puede*

---

3. EL PROBLEMA CLASICO DE MOMENTOS Y SU RELACION CON EL ANALISIS

*extenderse a todo el espacio $\mathscr{E}$, conservando la K-positividad.*

La demostración puede consultarse en [A].

Retornando al problema de momentos, se dirá que una sucesión $\{c_k\}_o^n$ $(n \leq \infty)$ es nonegativa respecto al intervalo (a,b) si, para cualquier polinomio $R(x)$ deß grado menor o igual que n, la desigualdad $R(x) \geq 0$, $(a < x < b)$, implica la desigualdad $\mathscr{S}$ $\{R\} \geq 0$.

*Observacion:* El intervalo (a,b) puede ser finito o infinito; en este caso para simplificar la formulación del siguiente teorema, se supone $b = \infty$.

<u>TEOREMA</u>: (M. RIESZ)

*Para que exista una función no decreciente $\varphi(x)$ $(a \leq x \leq b)$ tal que:*

$$c_k = \int_a^b x^k \, d\varphi(x) \quad , \; k=0,1,\ldots,n-1. \tag{3.12}$$

$$c_n \geq \int_a^b x^n \, d\varphi(x) \tag{3.13}$$

es necesario y suficiente que la sucesión $\{c_k\}_o^\infty$ sea no negativa respecto al intervalo (a,b). Cuando el intervalo (a,b) es el eje real y $n < \infty$, este número n se asume par.

Si el intervalo (a,b) es finito, entonces el signo $\geq$ en (3.13) puede ser reemplazado por el signo igual.

*Dem.*: La demostración de la condición necesaria es trivial.

Para demostrar que la condición es suficiente, se toma un conjunto numerable de puntos $S = \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que sea denso en (a,b). Entonces se define:

$$g_t(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x < t \\ 0 & t \leq x < b \end{cases}$$

Se llamará $\mathscr{M}$ al agregado de todos los polinomios reales de grado menor o igual que n, considerados sólo en el intervalo (a,b), y el espacio lineal obtenido agregando a $\mathscr{M}$ todas las funciones $g_t(x)$

$(t \in S)$ será $\mathscr{C}$. En este caso, el cono K es el agregado de todas las funciones $\sigma(x) \in \mathscr{C}$ tales que:

$$\sigma(x) \geq 0, \quad a < x < b$$

La sucesión positiva $\{c_k\}_0^\infty$ genera una funcional k-positiva $\mathscr{S}$ definida en $\mathscr{M}$. Con la ayuda del teorema anterior, se puede extender esta funcional a $\mathscr{C}$, y escribir:

$$\mathscr{S}_x\left\{g_t(x)\right\} = \varphi(t)$$

De esta forma se obtiene una cierta función $\varphi(t)$ definida en S. Esta función es monótona en el sentido que:

$$t'' > t' \;,\; t'', t' \in S \;\Rightarrow\; \varphi(t'') \geq \varphi(t')$$

En efecto:

$$\varphi(t'') - \varphi(t') = \mathscr{S}_x\left\{g_{t''}(x)\right\} - \mathscr{S}_x\left\{g_{t'}(x)\right\} = \mathscr{S}_x\left\{g_{t''}(x) - g_{t'}(x)\right\}$$

Además, como:

$$g_{t''}(x) - g_{t'}(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x < t' \\ 1 & t' \leq x < t'' \\ 0 & t'' \leq x \leq b \end{cases}$$

y por lo tanto: $g_{t''}(x) - g_{t'}(x) \in K$. Entonces resulta que:

$$\varphi(t'') - \varphi(t') \geq 0$$

Como resultado de la monotonía de $\varphi(t)$ y de la densidad de S en $(a,b)$ la función $\varphi(t)$ puede extenderse de una única manera al intervalo $(a,b)$ preservando su carácter monótono. Resta entonces probar (3.12) y (3.13).

Se asume $a = 0$, $b = \infty$, $n < \infty$, $0 \in S$.

Se eligen puntos:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = B \qquad (B > 1,\; \tau_i = t_{k_i} \in S)$$

de modo que la oscilación de las funciones $x^k$ $(0 \leq k \leq n-1)$ en cada intervalo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ no exceda un número dado. Entonces se forma la función:

$$F_N^k(x) = \sum_{t=0}^{N-1} \tau_i^k \left[g_{\tau_{i+1}}(x) - g_{\tau_i}(x)\right]$$

No es difícil verificar que en el intervalo $[0,\infty)$ vale la siguiente desigualdad:

$$0 \le x^k - F_N^k(x) \le \varepsilon + \frac{x^n}{B} \qquad (3.14)$$

Aplicando la funcional $\mathscr{F}$ a todos los términos de la desigualdad resulta:

$$0 \le c_k - \sum_{i=0}^{N-1} \tau_i^k \left[\varphi(\tau_{i+1}) - \varphi(\tau_i)\right] \le \varepsilon . c_0 + \frac{c_n}{B}$$

Para B fijo y $N \to \infty$, resulta:

$$0 \le c_k - \int_0^B t^k \, d\varphi(t) \le \frac{c_n}{B}$$

y haciendo tender $B \to \infty$ :

$$c_k = \int_0^\infty t^k \, d\varphi(t) \quad (k=0,1,\dots,n-1)$$

Si se hubiera tomado $k = n$, en lugar de (3.14) se hubiera obtenido la desigualdad:

$$0 \le x^n - F_N^n(x) \quad (0 \le x < \infty)$$

Se hubiera obtenido entonces:

$$0 \le c_n - \sum_{i=0}^{N-1} \tau_i^n \left[\varphi(\tau_{i+1}) - \varphi(\tau_i)\right]$$

y por lo tanto:

$$0 \le c_n - \int_0^B t^n \, d\varphi(t)$$

Haciendo tender $B \to \infty$ resulta:

$$c_n \geq \int_0^{\infty} t^n \, d\varphi(t) \qquad ■$$

**4.3.- El problema de momentos de Hausdorff**

En el caso que el intervalo (a,b) sea finito, el problema de momentos se denomina de Hausdorff. Se supone a=0, b=1. Considerando el problema truncado, se extiende el teorema anterior utilizando un criterio respecto a cuando una sucesión $\{c_k\}_{0\leq k\leq n}$ es no negativa respecto al intervalo (0,1).

Este criterio es fácil de obtener mediante el teorema que establece que cualquier polinomio $R_n(x)$ de grado n que es mayor o igual que cero en todos los puntos del intervalo [0,1] puede representarse en la forma:

$$R_n(x) = x.\left[A_m(x)\right]^2 + (1-x).\left[B_m(x)\right]^2, \quad \text{si } n=2m+1$$

y en la forma:

$$R_n(x) = \left[C_m(x)\right]^2 + x.(1-x).\left[D_{m-1}(x)\right]^2 \ , \quad \text{si } n=2m$$

$A_m(x)$, $B_m(x)$, $C_m(x)$ y $D_{m-1}(x)$ son polinomios reales, de grados dados por los subíndices. Con esta representación se puede formular el siguiente resultado:

*El problema de momentos:*

$$c_k = \int_0^1 x^k \, d\varphi(x) \quad (k=0,1,2...,n \ ; \ n < \infty)$$

*tiene una solución no decreciente si y sólo si las formas:*

$$\sum_{i,k=0}^{m} c_{i+k+1} x_i x_k, \quad \sum_{i,k=0}^{m} (c_{i+k} - c_{i+k+1}) x_i x_k \quad \text{para } n=2m+1 \tag{3.15}$$

*y las formas:*

$$\sum_{i,k=0}^{m} c_{i+k} \quad x_i x_k, \quad \sum_{i,k=0}^{m-1} (c_{i+k+1} - c_{i+k+2}) x_i x_k \quad \text{para } n=2m \tag{3.16}$$

*son no negativas.*

La no negatividad de las formas (3.15) y (3.16), $\forall\, m \in \mathbb{N}$ es la condición necesaria y suficiente para que sea soluble el problema de momentos de Hausdorff. Pero, en el caso del problema completo existe otro criterio de solubilidad que tiene algunas ventajas:

TEOREMA: (HAUSDORFF) *Para que el problema de momentos:*

$$c_k = \int_0^1 x^k \, d\varphi(x) \quad , \; k=0,1,2\ldots$$

*sea soluble en la clase de funciones no decrecientes es necesario y suficiente que se verifiquen las desigualdades:*

$$\Delta^m c_k \equiv \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} c_{i+k} \geq 0 \; , \; (m,k = 0,1,2,\ldots)$$

*que pueden ser representadas en la forma:*

$$\mathscr{S}\left\{ x^k (1-x)^m \right\} \geq 0 \; (m,k = 0,1,2,\ldots)$$

*La solución de este problema de momentos es única.*

(La demostración puede consultarse en [A])

**4.4.- El problema de momentos de Stieltjes.**

Otro resultado que se puede obtener como consecuencia directa del teorema de M. RIESZ es el siguiente:

*El problema de momentos de Stieltjes:*

$$c_k = \int_0^\infty x^k \, d\varphi(x) \quad , \; k=0,1,2\ldots$$

*tiene una solución no decreciente si y sólo si las dos formas:*

$$\sum_{i,k=0}^{m} c_{i+k} \, x_i x_k , \qquad \sum_{i,k=0}^{m} c_{i+k+1} \, x_i x_k$$

*son no negativas para cualquier* $m$.

**4.5.- Representación integral de una funcional positiva.**

Otra forma de examinar el problema de momentos como el problema de continuar una funcional positiva, es utilizar técnicas basadas en la teoría espectral de operadores.
Si se tiene en mente el problema de momentos, entonces el dominio de definición de la funcional dada debe tomarse como el conjunto de todos los polinomios. Sin embargo, se discute el problema en forma general. La primera discusión de este tipo se deba a LIVSHITS. Más tarde, KREIN generalizó los conceptos de LIVSHITS. Este fue el origen del *método de dirigir funcionales* de KREIN que probó ser extremadamente efectivo para ciertos problemas en la teoría espectral de operadores diferenciales.
Comienza describiendo aquellas variedades lineales de funciones sobre las cuales formará funcionales y además el significado de los términos *positivo* y *no negativo* aplicados a una funcional.
Considera un cierto agregado lineal $G$ de funciones continuas a valores complejos $f(s)$ $(-\infty < s < \infty)$ y considera todos los posibles productos $f(s).\overline{g(s)}$, donde $f(s)$, $g(s) \in G$. Llama $\mathcal{M}$ al hull lineal de todos esos productos. Este hull lineal será el dominio de definición de las funcionales. Una funcional $\mathcal{P}$ lineal (en el sentido algebraico) dada en $\mathcal{M}$ será llamada *positiva* ( *no negativa*) si para cualquier elemento $\Phi \in \mathcal{M}$ de la forma:

$$\Phi = f(s).\overline{f(s)}$$

donde $f(s) \in G$ y $f(s) \not\equiv 0$ vale la desigualdad:

$$\mathcal{P}(\Phi) > 0 \quad (\mathcal{P}(\Phi) \geq 0).$$

Entonces esta definición del carácter positivo de una funcional no involucra a todas las funciones $\Phi = \Phi(s) \in \mathcal{M}$ para las cuales $\Phi(s) \geq 0$ $(-\infty < s < \infty)$ sino sólo los cuadrados. Esta distinción es sólo aparente algunas veces, por ejemplo en el caso que $G$ es el conjunto de todos los polinomios. La formulación del problema de momentos es la siguiente:
*Encontrar condiciones bajo las cuales una funcional no negativa dada $\mathcal{P}$ definida sobre $\mathcal{M}$ permite la representación integral:*

$$\mathcal{P}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t).d\varphi(t) \quad (\Phi \in \mathcal{M}) \tag{3.17}$$

*con una función $\varphi(t)$ no decreciente para $-\infty < t < \infty$.*

Evidentemente es suficiente obtener la representación (3.17) para funciones $\Phi(s) = f(s).\overline{f(s)}$, con $f(s) \in G$. Se llamará a éste el *problema de momentos generalizado de* LIVSHITS. Si $G$ es el agregado de todos los polinomios en S, este problema es el de momentos usual.

Para incluir el problema de momentos generalizado en la teoría espectral de operadores es necesario un espacio de Hilbert. Se construye de la siguiente forma:

Se define una métrica en $G$ mediante la funcional positiva $\mathcal{P}$ definiendo el producto escalar entre dos elementos $f,g \in G$ de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$(f,g) = \mathcal{P}\left\{f(s).\overline{g(s)}\right\}$$

Este producto escalar satisface evidentemente las siguientes condiciones:

1) $\overline{(f,g)} = (g,f)$
2) $(f_1 + f_2, g) = (f_1,g) + (f_2,g)$
3) $(\alpha f,g) = \alpha.(f,g)$
4) $(f,f) \geq 0$

Si la funcional $\mathcal{P}$ es positiva la igualdad en la propiedad 4) se da si y sólo si $f(s) \equiv 0$. Sin embargo, asume que $\mathcal{P}$ es no negativa, por lo tanto pueden existir elementos $f_o(s) \not\equiv 0$, $f_o(s) \in G$ tales que $(f_o,f_o) = 0$.

Se puede probar que el conjunto formado por estos elementos $f_o$ forma un agregado lineal $G_o \subset G$. En efecto, de la desigualdad de SCHWARTZ - BUNYAKOVSKII:

$$|(f_o,g)| \leq \sqrt{(f_o,f_o)}\ .\ \sqrt{(g,g)}$$

que sigue de la propiedad 4) y por lo tanto la ecuación $(f_o,f_o) = 0$ es sólo posible para aquellos elementos $f_o \in G$ tales que para cualquier $g \in G$ se verifica: $(f_o,g) = 0$, y esta última relación es homogénea y lineal con respecto a $f_o$. Se considerarán ahora idénticos en $G$ dos elementos cualesquiera $f_1$ y $f_2$ tales que $f_1 - f_2 \in G_o$. Entonces el producto escalar satisface ahora todas las propiedades necesarias. Entonces basta cerrar la variedad lineal $G$

para obtener un espacio de Hilbert que se notará $\mathscr{H}$.
Se impone otra restricción adicional al conjunto $G$ que es la siguiente: que el agregado $D$ de todos aquellos elementos g(s) $\in G$ para los cuales s.g(s) $\in G$, sea denso en $G$, y por lo tanto también en $\mathscr{H}$. Bajo estas condiciones se puede introducir en $\mathscr{H}$ el operador de multiplicación por la variable independiente s, habiéndolo definido inicialmente en el agregado $D$. Este operador es simétrico ya que el conjunto $D$ es denso en $\mathscr{H}$ y:

$$(f(s),\ s.g(s)) = \mathscr{P}\left\{f(s).s.\overline{g(s)}\right\} = (s.f(s),g(s))$$

para cualquier f(s), g(s) $\in D$. Entonces se puede clausurar este operador. Esta clausura es la que se llamará el operador $\mathscr{A}$. Para verificar que este operador está bien definido, se mostrará que el resultado de aplicar el operador $\mathscr{A}$ será el mismo para todos los elementos que se asumen idénticos, es decir, si:

$$(f_o(s),f_o(s)) = 0$$

se mostrará que:

$$(s.f_o(s),s.f_o(s)) = 0$$

Evidentemente es suficiente mostrar este hecho para $f_o(s) \in D$.
Pero la ecuación:

$$(f_o(s),\ f_o(s)) = 0$$

significa que:

$$(f_o(s),g(s)) = 0$$

para cualquier g(s) $\in G$ y en particular para cualquier g(s) = s.h(s), h(s) $\in D$. Entonces, para cualquier h(s) $\in D$ se tiene:

$$(s.f_o(s),\ h(s)) = (f_o(s),\ s.h(s)) = 0$$

y por lo tanto, como $D$ es denso en $G$ vale la ecuación:

$$(s.f_o(s),s.f_o(s)) = 0$$

CAPÍTULO 4

# EL PROBLEMA DE MOMENTOS EN UN ESPACIO DE HILBERT

## 1.- INTRODUCCION

En este capítulo se trata el problema de momentos en espacios de Hilbert. En la sección 2 se formula el problema y se dan algunas definiciones y resultados que serán de utilidad en el capítulo 5. En la sección 3 se dan ciertos criterios de solubilidad que establece KOROBEINIK [K] en un trabajo publicado en 1979. En la sección 4 se dan algunas propiedades del espacio de momentos que también se necesitarán en el capítulo siguiente.
En la sección 5 se incluye un criterio de resolubilidad para el problema de momentos general en un espacio de Hilbert contable, con el objeto de obtener un criterio de tipo algebraico para resolver el problema de interpolación general en varios espacios de funciones. Se establece para ello una relación entre el problema de interpolación general en espacios reflexivos y el problema de momentos correspondiente. Por último se detalla un problema de control que motiva el estudio del espacio de momentos que se efectúa en el último capítulo.

## 2.- CONCEPTOS BASICOS

### 2.1.- El problema de momentos en espacios de Hilbert.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre el campo de los números reales y sea:

$$\left\{f_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ tal que cualquier subfamilia de esta sucesión es linealmente indeperdiente (tales sucesiones se llamarán *sistemas linealmente independientes*).

<u>DEFINICION</u> 1: Se llamará *n-ésimo momento de* $\varphi \in \mathcal{H}$ al número:

$$(\varphi, f_n)$$

y la sucesión:

$$\left\{(\varphi, f_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

será la *sucesión de momentos de* $\varphi$.

DEFINICION 2: Se llamará *espacio de momentos de* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y se notará $\mathcal{M}$ a la colección de todas las sucesiones de momentos, es decir:

$$\mathcal{M} = \left\{ c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \exists\ \varphi \in \mathcal{H}\ ,\ (\varphi, f_k) = c_k\ ,\ \forall\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

*Observación:* $\mathcal{M}$ es un espacio vectorial con la suma puntual y la multiplicación por un escalar.

Dada una sucesión de escalares $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se dirá que el problema de momentos tiene solución si existe $\varphi \in \mathcal{H}$ tal que:

$$(\varphi, f_n) = c_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

Surgen inmediatamente las siguientes preguntas:

*a) Cuándo una sucesión dada de escalares pertenece a* $\mathcal{M}$*, es decir, bajo que condiciones sobre* $\{c_k\}$ *el problema de los momentos:*

$$(\varphi, f_n) = c_n \quad ,\ n = 1,2,\dots$$

*admite por lo menos una solución ?*

*b) Si hay solución, es esta única?*

*c) Como pueden recuperarse la soluciones, si existen, a partir de* $c = \{c_n\}$?

La respuesta de la unicidad es trivial: para que el sistema de ecuaciones (4.1) admita a lo sumo una solución para cualquier elección de los escalares $c_1, c_2, \dots$, es necesario y suficiente que:

$$\left\{ f_n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

sea completo. Vale el siguiente resultado:

PROPOSICION 1: *Sea:*

$$\left\{ f_n \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

*una sucesión de vectores pertenecientes a un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Si para alguna sucesión de escalares* $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *el sistema* (4.1) *tiene una solución* $\varphi \in \mathcal{H}$*, entonces tiene una única solución de norma mínima.*

*Dem:* [Y].

*Observación:* Si $\left\{f_k\right\}_{1\le k\le n}$ es un conjunto de vectores de $\mathcal{H}$, linealmente independientes, entonces el problema de momentos finito:

$$(\varphi, f_k) = c_k, \quad k=1,2,\dots,n$$

tiene por lo menos una solución $\varphi \in \mathcal{H}$, para cualquier elección de los escalares $\{c_k\}_{1\le k\le n}$. En efecto: la única solución de norma mínima está dada explícitamente por:

$$\varphi = -\frac{1}{D_n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ c_1 & (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_1, f_n) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ c_n & (f_n, f_1) & (f_n, f_2) & \dots & (f_n, f_n) \end{vmatrix}$$

donde $D_n$ es el determinante de Gram de $\{f_1, \dots, f_n\}$:

$$D_n = \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \dots & (f_n, f_1) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \dots & (f_2, f_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ (f_n, f_1) & (f_n, f_2) & \dots & (f_n, f_n) \end{vmatrix}$$

El determinante $D_n$, llamado el *determinante de Gram*, es positivo.

El siguiente teorema da un criterio necesario y suficiente para que el probelma de momentos tenga una solución. Si bien es de difícil aplicación en práctica, este criterio es de uso frecuente en ausencia de información adicional acerca de los $f_i$.

TEOREMA: *Sea* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de vectores de* $\mathcal{H}$, *y* $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de escalares. Para que las ecuaciones:*

$$(\varphi, f_n) = c_n, \quad n = 1,2,\dots$$

*admitan por lo menos una solución* $\varphi \in \mathcal{H}$, *tal que* $\| \varphi \| \le M$, *donde* $M$ *es una constante, es necesario y suficiente que:*

$$| \sum a_n . \bar{c}_n | \le M . \| \sum a_n f_n \|$$

*para cualquier sucesión finita de escalares* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

*Dem:* [Y].

## 2.2.- Sucesiones de BESSEL y de RIESZ - FISCHER.

La desigualdad de BESSEL y el teorema de RIESZ - FISCHER sintetizan juntos una de las características fundamentales de una base ortonormal: *el espacio de momentos es* $\ell^2$. Debido a su importancia intrínseca, estas propiedades han sido abstraídas:

<u>DEFINICION</u> 1: *Una sucesión* $\{f_1, f_2, \ldots\}$ *de vectores pertenecientes a un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *se dice una* sucesión de BESSEL si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, f_n)|^2 < \infty \ , \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{H}$$

<u>DEFINICION</u> 2: *La sucesión* $\{f_1, f_2, \ldots\}$ *es una* sucesión de RIESZ - FISCHER *si el problema de momentos:*

$$(\varphi, f_n) = c_n \ , \qquad n = 1,2,\ldots$$

*admite al menos una solución* $\varphi \in \mathcal{H}$, *toda vez que* $\{c_n\} \in \ell^2$.

*Observación:* $\{f_n\}$ es una sucesión de BESSEL siempre que su espacio de momentos sea un subconjunto de $\ell^2$, y es de RIESZ - FISCHER siempre que su espacio de momentos contenga a $\ell^2$.

<u>PROPOSICION</u>: *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de vectores en* $\mathcal{H}$. *Si es una sucesión de* BESSEL *entonces existe una constante* M *tal que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, f_n)|^2 \leq M.\ \| \varphi \|^2, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{H}$$

*Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión de RIESZ - FISCHER entonces existe una constante* m *tal que el problema de momentos:*

$$(\varphi, f_n) = c_n \ , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

*tiene al menos una solución* $\varphi$ *que satisface:*

$$\|\varphi\|^2 \leq \frac{1}{m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

*dado que* $\{c_n\} \in \ell^2$.

El siguiente teorema da una caracterización fundamental de las sucesiones de BESSEL y de RIESZ-FISCHER en un espacio de Hilbert.

<u>TEOREMA</u>: *Sea* $\{f_1, f_2, \ldots\}$ *una sucesión de vectores en* $\mathcal{H}$. *Entonces:*

i) $\{f_1, f_2, \ldots\}$ *es una sucesión de* BESSEL *con cota* $M$ *si y sólo si vale la siguiente desigualdad para toda sucesión finita de escalares* $\{c_n\}$:

$$\|\Sigma\, c_n f_n\|^2 \leq M.\Sigma\, |c_n|^2$$

ii) $\{f_1, f_2, \ldots\}$ *es una sucesión de* RIESZ-FISCHER *con cota* $m$ *si y sólo si la desigualdad:*

$$m\, .\Sigma\, |c_n|^2 \leq \|\Sigma\, c_n f_n\|^2$$

*es válida para toda sucesión finita de escalares* $\{c_n\}$.

*Dem:* [Y].

El criterio del TEOREMA último puede ser escrito, más suscintamente, en el lenguaje de operadores. Entonces, $\{f_1, f_2, \ldots\}$ es una sucesión de BESSEL si y solo si dada una base ortonormal cualquiera $\{e_1, e_2, \ldots\}$ de $\mathcal{H}$, existe un operador lineal acotado:

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
$$Te_n = f_n$$

para $n = 1, 2, \ldots$

$\{f_1, f_2, \ldots\}$ es una sucesión de RIESZ-FISCHER si y solo si existe un operador lineal acotado:

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
$$Sf_n = e_n$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Una formulación equivalente en términos de la matriz de GRAM:

$$G = \Big( (f_i, f_j) \Big)_{i,j=1}^{\infty}$$

es también útil:

$\{f_1, f_2, \ldots\}$ *es una sucesión de* BESSEL *con cota* $M$ *si y sólo si* $G$ *define un operador acotado (autoadjunto) en* $\ell^2$ *con norma que no excede* $M$.

En efecto, pues $G$ es acotado por $M$ si y solo si la forma cuadrática asociada:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i, f_j) c_i \bar{c}_j$$

es acotada por $M$, y esta forma iguala a:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i \right\|^2$$

Similarmente, $\{f_1, f_2, \ldots\}$ *es una sucesión de* RIESZ-FISCHER *con cota* m *si y sólo si las secciones de* G *son acotadas por debajo por la constante* m, *es decir:*

$$m.\|c\| \leq \|G_n c\|$$

*para toda* n-*upla* $c = (c_1, \ldots, c_n)$, *y para todo* n. *Aquí las normas son euclídeas y* $G_n$ *es la matriz* n x n :

$$G_n = \Big[(f_i, f_j)\Big]_{i,j=1}^{n}$$

Esto es equivalente a lo siguiente:

*a) Para todo* n *y para todo* c *vale la siguiente desigualdad:*

$$m.\|c\|^2 \leq (G_n c, c)$$

y además es equivalente a la siguiente afirmación:

*b) Para todo n:*

$$\|G_n^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$$

En efecto, veamos primero la equivalencia con *a)*:

$$m.\|c\|^2 \leq (G_n c, c) \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{(G_n c, c)}{\|c\|^2}$$

de donde resulta que:

$$m^2 \leq \max_{\|x\| \neq 0} \frac{(G_n^{-2} x, x)}{\|x\|^2} = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{(G_n^{-1} x, G_n^{-1} x)}{\|x\|^2}$$

Por lo tanto:

$$m \leq \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|G_n^{-1} x\|}{\|x\|} = \min_{\|c\| \neq 0} \frac{\|G_n c\|}{\|c\|}$$

donde $c = G_n^{-1} x$. Entonces:

$$m.\|c\| \leq \|G_n c\|$$

Recíprocamente, si para todo $c \neq 0$:

$$m.\|c\| \leq \|G_n c\|$$

entonces:

$$m \leq \min_{\|c\|\neq 0} \frac{\|G_n c\|}{\|c\|} = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|G_n^{-1} x\|}{\|x\|}$$

Por lo tanto:

$$m^2 \leq \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|G_n^{-1} x\|^2}{\|x\|^2} = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{(G_n^{-1}x, G_n^{-1}x)}{\|x\|^2} = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{(G_n^{-2}x, x)}{\|x\|^2}$$

La última expresión es el cuadrado del maximo autovalor de $G_n^{-1}$, de donde resulta que:

$$m \leq \min_{\|c\|\neq 0} \frac{(G_n c, c)}{\|c\|^2}$$

Entonces:

$$m.\|c\|^2 \leq (G_n c, c)$$

Resta entonces verificar la equivalencia con *b*):
Si:

$$m.\|c\| \leq \|G_n c\|$$

cualquiera sea la n-upla $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, eligiendo $d = G_n^{-1}c$ , resulta que:

$$m.\|d\| \leq \|G_n d\|$$

y por lo tanto:

$$\sup_{c} \frac{\|G_n^{-1} c\|}{\|c\|} \leq (1/m)$$

de donde resulta que:

$$\|G_n^{-1} c\| \leq (1/m)$$

Recíprocamente:

$$m.\|c\| = m.\|G_n^{-1}.G_n c\| \leq m.\|G_n^{-1}\|.\|G_n c\| \leq \|G_n c\|$$

como se quería demostar.

## 3.- CRITERIOS DE SOLUBILIDAD.

Nos ocuparemos del siguiente problema:
*¿Existe un elemento $\varphi \in \mathcal{H}$ tal que:*

$$(\varphi, f_k) = c_k \ , \ k = 1,2,\dots ? \qquad (4.2)$$

El primero que dio una solución completa en el caso que $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ fue aparentemente S.S.Levin, alrededor de 1930. Sus argumentos y resultados se transfieren sin modificaciones al caso de un espacio de Hilbert general $\mathcal{H}$ y fue realizado por Akhiezer y Glazman en 1961 **[AG]**. Algunos de estos resultados son los siguientes **[K]**:

Sea $G_n$ la matriz de Gram del sistema linealmente independiente $\{f_k\}_{1\le k\le n}$ :

$$G_n = \begin{bmatrix} (f_1,f_1) & (f_1,f_2) \dots (f_1,f_n) \\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2) \dots (f_2,f_n) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ (f_n,f_1) & (f_n,f_2) \dots (f_n,f_n) \end{bmatrix}$$

La matriz $G_n$ es no singular, y su determinante , llamado el determinante de Gram es positivo. Sea $G_n^{-1}$ la matriz inversa de $G_n$, y notaremos $\sigma_{ij}^{(n)}$ al elemento $(i,j)$ de la matriz $G_n^{-1}$. Consideremos la sucesión:

$$\left\{\lambda_n(c)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

donde:

$$\lambda_n(c) = \sum_{j,k=1}^{n} \bar{c}_j c_k \sigma_{jk}^{(n)} = \left(c_{(n)}, G_n^{-1} c_{(n)}\right)$$

donde $c_{(n)} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Como $G_n$ y $G_n^{-1}$ son matrices hermitianas, la sucesión:

$$\left\{\lambda_n(c)\right\}$$

es una sucesión de números reales que no decrece cuando n crece.

<u>TEOREMA</u> 1: *El problema* (4.2) *es resoluble si y sólo si:*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(c) < \infty \tag{4.3}$$

Sea $span\{f_k\}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $\{f_k\}$ y sea $(f_k;\mathcal{H})$ la clausura de $span\{f_k\}$ en $\mathcal{H}$. Junto con (4.2) se considera el problema truncado:

$$(\varphi.f_k) = c_k \ , \ k=1,2,\ldots,n.$$

Una solución de este problema en $span\{f_k\}_{k=1}^{n}$ es única y es de la forma:

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk}^{(n)} c_k \right) f_j$$

Más aún:

$$\lambda_n(c) = \|\varphi_n\|^2$$

y la condición (4.3) es equivalente a la acotación del conjunto $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$. Si la condición (4.3) es satisfecha, entonces la sucesión $\varphi_n$ converge en $\mathcal{H}$ a un elemento $\varphi \in (f_k;\mathcal{H})$ tal que verifica (4.2).

Si $\psi$ es una solución arbitraria de (4.2) , entonces:

$$\psi = \varphi + \psi_1$$

donde $\psi_1$ es un elemento del subespacio $\mathcal{H}_1$ ortogonal a $(f_k;\mathcal{H})$. Entonces:

$$\|\psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi_1\|^2$$

y por lo tanto: $\|\psi\| \geq \|\varphi\|$.

A la solución $\varphi$ se la llamará *minimal* (LEVIN la llamó *solucion principal*). Por lo tanto, si se satisface la condición necesaria y suficiente (4.3) para la resolución del problema (4.2), entonces la solución minimal $\varphi$ puede ser determinada efectivamente:

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n \ .$$

La forma general de una solución de (4.2) en $\mathcal{H}$ es:

$$\psi = \varphi + \nu$$

donde $\nu$ es un elemento arbitrario de $\mathscr{K}$.

**4.- EL ESPACIO DE MOMENTOS: PROPIEDADES.**

KOROBEINIK [K] introduce en su trabajo un espacio que nos será de utilidad más adelante: el espacio $\mathcal{M}$ de sucesiones numéricas $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ para las cuales:

$$\lambda(c) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(c) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(c) < \infty..$$

La norma en $\mathcal{M}$ es definida de la siguiente manera:

$$\|c\|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j,k=1}^{n} \bar{c}_j c_k \sigma_{jk}^{(n)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(c_{(n)}, G_n^{-1} c_{(n)}\right).$$

$\mathcal{M}$ es un espacio de Banach. En efecto:

Sea

$$\{c^m\}_{m\in\mathbb{N}}$$

una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}$, entonces:

*Dado* $\varepsilon > 0$ $\exists$ $N > 0$ *tal que* $\forall$ $p,q > N$:

$$\| c^p - c^q\|_{\mathcal{M}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(G_n^{-1})^{1/2}(c^p_{(n)} - c^q_{(n)})\| < \varepsilon.$$

Entonces:

$$\|(G_n^{-1})^{1/2}(c^p_{(n)} - c^q_{(n)})\| < \varepsilon , \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

de donde resulta que:

$$\left\{(G_n^{-1})^{1/2} \ c^p_{(n)}\right\}_{p\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto

$$\left\{c^p_{(n)}\right\}_{p\in\mathbb{N}}$$

también lo es.

Como $\mathbb{R}^n$ es completo existe $z_{(n)} \in \mathbb{R}^n$ tal que, cuando $p \to \infty$ :

$$c^p_{(n)} \to z_{(n)} \quad \text{en } \mathbb{R}^n$$

y por lo tanto, cuando $p \to \infty$ :

$$c^p_i \to z_i \qquad \forall\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Además:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (c^p_i - z_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} (c^p_i - z_i)^2 < \varepsilon\ ,\ \forall\ p > R$$

y entonces:

$$c^p_{(n-1)} \to z_{(n-1)} = \left[z_{(n)}\right]_{(n-1)}.$$

Por lo tanto:

$$\exists\ z \in \omega\ ,\ z = (z_i)_{i\in\mathbb{N}}\ :\ c^p_{(n)} \to z_{(n)}\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Debemos probar que:

*a*) $z \in \mathcal{M}$.

*b*) $c^m \to z$ en $\mathcal{M}$ .

*a*) $$\|(G_n^{-1})^{1/2} z_{(n)}\| = \|(G_n^{-1})^{1/2}(z_{(n)} - c^p_{(n)}) + (G_n^{-1})^{1/2} c^p_{(n)}\| \le$$

$$\le \|(G_n^{-1})^{1/2}(z_{(n)} - c^p_{(n)})\| + \|(G_n^{-1})^{1/2} c^p_{(n)}\| \le$$

$$\le \|(G_n^{-1})^{1/2}(z_{(n)} - c^p_{(n)})\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(G_n^{-1})^{1/2} c^p_{(n)}\|\ ,\ \forall\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\|(G_n^{-1})^{1/2} z_{(n)}\| \le \lim_{p\to\infty} \|(G_n^{-1})^{1/2}(z_{(n)} - c^p_{(n)})\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(G_n^{-1})^{1/2} c^p_{(n)}\| =$$

$$= \|(G_n^{-1})^{1/2}(z_{(n)} - \lim_{p\to\infty} c^p_{(n)})\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(G_n^{-1})^{1/2} c^p_{(n)}\| =$$

$$= \|(G_n^{-1})^{1/2}(z_{(n)} - z_{(n)})\| + \|c^p\|_{\mathcal{M}} = \|c^p\|_{\mathcal{M}}\ .$$

Pero como $\{c^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}$, es acotada;

entonces existe una constante $M > 0$ tal que:

$$\|(G_n^{-1})^{1/2} z_{(n)}\| \leq M \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(G_n^{-1})^{1/2} z_{(n)}\| = \|z\|_{\mathcal{M}} \leq M$$

de donde resulta que:

$$z \in \mathcal{M} .$$

*b*) Probaremos que: *dado* $\varepsilon > 0$ $\exists$ $N = N(\varepsilon) > 0$ *tal que:*

$$\|c^m - z\|_{\mathcal{M}} < \varepsilon \ , \ \forall\, m > N$$

*es decir:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(G_n^{-1})^{1/2}(c^m_{(n)} - z_{(n)})\| < \varepsilon.$$

Como $\{c^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$\|c^p - c^q\|_{\mathcal{M}} < \varepsilon \ , \ \forall\, p,q > N$$

por lo tanto:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(G_n^{-1})^{1/2}(c^p_{(n)} - c^q_{(n)})\| < \varepsilon \ , \ \forall\, p,q > N.$$

Entonces:

$$\|(G_n^{-1})^{1/2}(c^p_{(n)} - c^q_{(n)})\| < \varepsilon \ , \ \forall\, p,q > N \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Resulta entonces que:

$$\lim_{q\to\infty} \|(G_n^{-1})^{1/2}(c^p_{(n)} - c^q_{(n)})\| < \varepsilon \ , \ \forall\, p > N \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\|(G_n^{-1})^{1/2}(c^p_{(n)} - \lim_{q\to\infty} c^q_{(n)})\| = \|(G_n^{-1})^{1/2}(c^p_{(n)} - z_{(n)})\| < \varepsilon, \ \forall p>N, \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(G_n^{-1})^{1/2}(c^p_{(n)} - z_{(n)})\| = \|c^p - z\|_{\mathcal{M}} < \varepsilon \ , \ \forall\ p > N.$$

Entonces:

$$c^m \to z \text{ en } \mathcal{M} \quad \blacksquare$$

La topología introducida en $\mathcal{M}$ se llamará *hermitiana*; es más fina que la topología de la convergencia coordenada a coordenada. Sea L el operador definido por:

$$L : \mathcal{H} \to \omega$$
$$Ly = \{(y, f_k)\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

KOROBEINIK [K] prueba que L es un isomorfismo de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{M}$. Supone entonces que L es un operador continuo que lleva $\mathcal{H}$ a un espacio $\mathcal{B}$, Hausdorff y localmente convexo, de sucesiones numéricas con la topología generada por el sistema de prenormas $P = \{\rho\}$. Entonces $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$, y además de la topología hermitiana $\tau_1$ se puede introducir en $\mathcal{M}$ la topología $\tau_2$ inducida por $\mathcal{B}$. Demuestra que:

$$\tau_1 \geq \tau_2$$

y por lo tanto, la topología hermitiana es *la más fina en* $\mathcal{M}$ para la cual L es continuo de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{M}$. Entonces $\mathcal{M}$ está embebido en $\mathcal{B}$ en forma continua:

$$\forall\ \rho \in P \quad \exists\ Q_\rho < \infty \ : \ (\rho(c))^2 \leq Q_\rho . \lambda(c) \ , \ \forall\ c \in \mathcal{M} .$$

Pero esta desigualdad se satisface si:

$$c \in \mathcal{B} \quad y \quad c \notin \mathcal{M}$$

pues en este caso $\lambda(c) = +\infty$. Entonces si L es un operador continuo de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B};\ \forall\ \rho \in P \quad \exists\ Q_\rho \in (0,+\infty):\ (\rho(c))^2 \leq Q_\rho . \lambda(c),\ \forall\ c \in \mathcal{B} \qquad (4.4)$$

Asume que la topología generada en $\mathcal{B}$ por la familia de seminormas $\{\rho\}$ satisface las siguientes condiciones:

*A*) Las seminormas $\rho$ son funciones numéricas definidas en el conjunto $\omega$ de todas las sucesiones numéricas y toma valores del intervalo $[0,+\infty)$.

*B*) $c \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \rho(c) < \infty \;,\; \forall\, \rho \in P$.

Entonces la relación (4.4) es equivalente a la siguiente:

$$\forall\, \rho \in P \quad \exists\, Q_\rho \in (0,+\infty) \quad : \quad (\rho(c))^2 \leq Q_\rho . \lambda(c) \;,\; \forall\, c \in \omega \qquad (4.5)$$

Recíprocamente, si las condiciones *A*), *B*) y (4.5) se satisfacen, $\mathcal{M}$ es embebido en $\mathcal{B}$ en forma continua, lo cual implica que L es un operador continuo de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{B}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

*a*) L es un operador continuo de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{B}$.

*b*) $\mathcal{M}$ es embebido en forma continua en $\mathcal{B}$.

*c*) Vale la relación (4.5).

Se dirá que $\mathcal{B}$ es un espacio de clase $H_2$ si, además de las propiedades *A*) y *B*) posee la siguiente propiedad:

*C*) Si el operador L definido por (4.5) actúa de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{B}$, entonces L es un operador continuo de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{B}$.

La clase $H_2$ es no vacía, pues siempre contiene a $\mathcal{B}$. Obtiene el siguiente resultado:

<u>TEOREMA</u>: *Si $\mathcal{B}$ es un espacio de clase $H_2$, entonces el operador* L *actúa de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{B}$ si y sólo si vale* (4.5).

Asume ahora que el operador L mapea $\mathcal{H}$ sobre un $\mathcal{B}$-espacio $\mathcal{F}$ de sucesiones $c = \{c_k\}$ con norma $\|c\|$ en forma continua. Entonces $\mathcal{M} = \mathcal{F}$, y además de la topología $\tau_2$, se puede definir en $\mathcal{F}$ la topología hermitiana $\tau_1$. Más aún:

$$\tau_1 \geq \tau_2$$

y $\mathcal{F}$ es completo en ambas topologías. Por lo tanto, $\tau_1 = \tau_2$, ie.:

$$\lambda(c) \leq q. \|c\|^2, \; \forall\, c \in \mathcal{F} \qquad (4.6)$$

Si un $\mathcal{B}$-espacio $\mathcal{F}$ satisface las condiciones *A*) y *B*), entonces

(4.6) es equivalente a:

$$\lambda(c) \leq q.\|c\|^2, \ \forall \ c \qquad (4.7)$$

Entonces obtiene el siguiente resultado:

TEOREMA: *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{B}$-espacio de clase $H_2$. Entonces* $L(\mathcal{H}) = \mathcal{F}$ *si y sólo si vale* (4.7) *y:*

$$\|c\|^2 \leq Q.\lambda(c), \ \forall \ c \qquad (4.8)$$

*Observación:* La condición (4.8) es equivalente a la (4.5).

Aplicando este teorema en el caso en que $\mathcal{F} = \ell^2$ (quizas el caso más importante, según comenta KOROBEINIK) resulta el siguiente:

TEOREMA: $L(\mathcal{H}) = \ell^2$ *si y sólo si los autovalores de la matriz de Gram* $G_n$ *son acotados (uniformemente en* n) *inferior y superiormente.*

## 5.- EL PROBLEMA DE MOMENTOS EN ESPACIOS DE HILBERT CONTABLES.

Obtiene el siguiente criterio de resolubilidad:

TEOREMA: *El problema de momentos:*

$$y(f_k) = c_k, \ k=1,2,\ldots \qquad (4.9)$$

*es resoluble en un espacio de Hilbert contable $\mathcal{H}$ si y sólo si existe* $n_o = n_o(c)$ *tal que:*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^k_{n_o}(c) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k_{n_o}(c) < \infty .$$

Introduciendo el espacio de Banach:

$$\mathcal{M}_n = \left\{ c \in \omega : \lim_{k\to\infty} \lambda^k_n(c) = \|c\|_n < \infty \right\}$$

el teorema anterior puede reformularse como sigue:

TEOREMA: *El problema de momentos* (4.9) *tiene solución en el espacio de Hilbert contable $\mathcal{H}$ si y sólo si:*

$$c \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n = \tilde{\mathcal{M}} .$$

## 6.- CIERTOS PROBLEMAS DE INTERPOLACION Y EL PROBLEMA DE MOMENTOS.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Hausdorff localmente convexo, $\varphi_k \in \mathcal{X}'$, $k=1,2,...$, y sea $\{d_n\}$ una sucesión de números complejos. Se desea saber bajo qué condiciones sobre los $d_k$ existirá en $\mathcal{X}$ un elemento x tal que:

$$\varphi_k(x) = d_k \ , \ k=1,2,... \tag{4.10}$$

Se llamará a este problema *el problema de interpolacion general.*
Si el espacio $\mathcal{X}$ es reflexivo:

$$\varphi_k(x) = (x,\varphi_k) = x(\varphi_k)$$

donde $x \in \mathcal{X}'' = (\mathcal{X}')'$, y el problema (4.10) es equivalente al problema de momentos en $\mathcal{X}'_\beta$ para la sucesión $\{d_k\}$ dada:

$$x(\varphi_k) = d_k \ , \ k=1,2,..., \ \varphi_k \in \mathcal{X}'_\beta \ ,$$

donde $\mathcal{X}'_\beta$ es el dual fuerte de $\mathcal{X}$.
Entonces en un espacio reflexivo $\mathcal{X}$, el problema de interpolación general en $\mathcal{X}$ es equivalente al problema de momentos en $\mathcal{X}'_\beta$. En particular, si $\mathcal{X}'_\beta$ es un espacio de Hilbert contable, el criterio obtenido puede aplicarse al problema de interpolación general.

## 7.- UN PROBLEMA DE CONTROL Y EL PROBLEMA DE MOMENTOS.

### 7.1.- Introducción

Fattorini y Russell [FR] consideran un sistema de control cuya evolución en el tiempo es descrpita por una función $y = y(x,t)$ definida en $0\le t \le T$, $0\le x \le X$, donde X y T son ambos positivos. La función $y$ satisface la ecuación diferencial parcial parabólica:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x).\frac{\partial y}{\partial x}\right] + q(x).y + b(x).f(t) \tag{4.11}$$

y las condiciones de borde:

$$\begin{cases} A_0\, y(0,t) + B_0 \dfrac{\partial y}{\partial x}(0,t) = g_0(t), & A_0^2 + B_0^2 \neq 0 \\ A_1\, y(x,t) + B_1 \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t) = g_1(t), & A_1^2 + B_1^2 \neq 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

donde p es una función positiva y dos veces diferenciable en $[0,X]$, q es continua en $[0,X]$, y b pertenece al espacio de Hilbert real $L^2[0,X]$. Las funciones a valores reales $f, g_0$ y $g_1$ son interpretadas como funciones de control admisible si $f, g_0'$ y $g_1'$ están en $L^2[0,T]$. El control f es un control distribuído mientras que $g_0$ y $g_1$ son controles de borde.
Bajo estas hipótesis, si se da un estado inicial:

$$y(x,0) = y_0(x) \in L^2[0,X] \tag{4.13}$$

el problema "*mixed initial-boundary value*" (4.11), (4.12), (4.13) tiene una única solución $y(x,t)$ en $0 \leq x \leq X$, $0 \leq t \leq T$ en el siguiente sentido:

*i*) Para cada $t \in [0,T]$, $y(.,t) \in L^2[0,X]$, y si $t > 0$,

$$\frac{\partial y}{\partial x}(.,t) \quad y \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(.,t)$$

existen en el sentido de la teoría de las distribuciones y ambas están en $L^2[0,X]$.

*ii*) La función $y(.,t):[0,T] \rightarrow L^2[0,X]$ es continua en $[0,T]$ y continuamente diferenciable en $(0,T]$, en ambos casos con respecto a la norma de $L^2[0,X]$. En particular, la condición inicial (4.13) es satisfecha en el sentido que:

$$\lim_{t\rightarrow 0^+} \|y(.,t) - y_0(.)\|_{L^2[0,X]} = 0$$

*iii*) Para cada $t \in (0,T]$ la ecuación (4.11) es satisfecha por casi todo $x \in [0,X]$, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ definidas como en *i*), mientras que $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ es definida como se nota en *ii*).

*iv*) Las condiciones (**4.12**) son satisfechas para $t \in (0,T]$.

El problema de controlabilidad más general para el sistema (**4.11**),(**4.12**) puede ser formulado como sigue: *Sea la condición inicial como* (**4.13**) *y una condición terminal:*

$$y(x,T) = y_T(x) \in L^2[0,X] \qquad (4.14)$$

*dada, ¿existen controles admisibles* $f$, $g_0$, $g_1$ *tal que la solución* $y$ *de* (**4.11**), (**4.12**), (**4.13**) *también satisface* (**4.14**) ?

Está claro inmediatamente de *i*) que la respuesta a esta pregunta no puede ser afirmativa, sin restricciones sobre $y_T$, al menos. Se demuestra en este trabajo, que las restricciones son bastante severas.

El tratamiento de este problema de controlabilidad general se facilita considerando los casos especiales $y_0 = 0$ e $y_T = 0$, que se llaman los problemas de *alcanzabilidad nula* y *controlabilidad nula*, respectivamente. En un trabajo de FATTORINI [F] se demuestra que bajo ciertas hipótesis muy generales, el conjunto de estados terminales (**4.14**) alcanzables en un tiempo T desde un estado inicial cero (el conjunto *alcanzable nulo*) y el conjunto de estados iniciales (**4.13**) que pueden ser llevados a un estado terminal (el conjunto *controlable nulo*) son ambos densos en $L^2[0,X]$, para cualquier $T > 0$. En este trabajo se da una descripción más precisa de ambos conjuntos.

Con este propósito se reducen los problemas de control a problemas de momentos en $[0,T]$.

### 7.2.- Reducción al problema de momentos.

Sea **A** el operador en $L^2[0,X]$ definido por:

$$(Ay)(x) = \left[p(x).y'(x)\right]' + q(x).y(x)$$

con dominio $\Delta$ que consiste de todas las funciones $y$ en $L^2[0,X]$ tales que $y'$ e $y''$, tomadas en el sentido de la teoría de distribuciones pertenecen a $L^2[0,X]$ y tal que:

$$A_0 y(0) + B_0 y'(0) = A_1 y(X) + B_1 y'(x) = 0$$

Se sabe [DS] que **A** es autoadjunto y posee una sucesión $\{-\lambda_n\}$ de autovalores reales distintos que satisfacen:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots$$

con $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. De hecho, si:

$$L = \int_0^X p(x)^{-1/2} dx$$

se sabe que existe una constante real $\alpha$ tal que:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{L^2}(n + \alpha)^2 + O(1), \; n \to \infty \tag{4.15}$$

(La demostración puede encontrarse en [CH]).
Las autofunciones normalizadas correspondientes a los autovalores $\{\lambda_n\}$ forman una base ortonormal para $L^2[0,X]$; cada función $z \in L^2[0,X]$ tiene una expansión:

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n(x) \quad , \quad \xi_n = \int_0^X z(x).\varphi_n(x) dx$$

convergente en $L^2[0,X]$.
La hipótesis $b \in L^2[0,X]$ y las propiedades $(i)$-$(iv)$ de la solución $y$ de (4.11), (4.12) y (4.13) permite escribir los desarrollos:

$$b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n(x) \tag{4.16}$$

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n(x) \tag{4.17}$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \varphi_n(x)$$

con:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t)^2 < \infty.$$

Si un estado terminal (4.14) es dado con:

$$y_T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \varphi_n(x)$$

es claro que los controles $f, g_0$ y $g_1$ conducen a este estado terminal si y solo si:

$$\eta_n(T) = \nu_n \ , \ n = 1,2,\ldots \qquad (4.18)$$

Para cada n fijo, $n \in \mathbb{N}$, la función:

$$w(x,t) = \varphi_n(x).e^{\lambda_n(t-T)} \qquad (4.19)$$

es una solución $C^{\infty}$ de la ecuación diferencial parcial:

$$w_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x).\frac{\partial w}{\partial x}\right] - q(x).w$$

en el dominio:

$$\mathcal{D} = \left\{(x,t) \ : \ 0 < x < X \ , \ 0 < t < T\right\}$$

con condiciones de frontera homogéneas ($g_0 = g_1 = 0$) de la forma **(4.12)**. Esto, junto con las propiedades $(i)-(iv)$ de $\psi$ dadas en la sección 1, utilizando el teorema de la divergencia y las propiedades **(4.19)**, **(4.15)**, **(4.16)** y **(4.17)** demuestra que:

$$\eta_n(t) = e^{-\lambda_n T}\mu_n + \int_0^T e^{-\lambda_n(T-t)}\left[\beta_n f(t) + \beta_n^0 g_0(t) + \beta_n^1 g_1(t)\right]dt$$

donde:

$$\beta_n^1 = \begin{cases} \dfrac{p(X)}{B_1}\varphi_n(X) & (B_1 \neq 0) \\[2mm] \dfrac{-p(X)}{A_1}\varphi_n'(X) & (B_1 = 0) \end{cases}$$

$$\beta_n^0 = \begin{cases} -\dfrac{p(0)}{B_0}\varphi_n(0) & (B_0 \neq 0) \\[2mm] \dfrac{p(0)}{A_0}\varphi_n'(0) & (B_0 = 0) \end{cases}$$

Si se desea alcanzar el estado terminal **(4.14)** entonces debe valer (4.18) y por lo tanto se pide que:

$$\int_0^T e^{-\lambda_n(T-t)}\left[\beta_n f(t) + \beta_n^0 g_0(t) + \beta_n^1 g_1(t)\right]dt = \nu_n - e^{-\lambda_n T}\mu_n, \quad n=1,2,\ldots$$

El hecho que $\varphi_n(x)$ satisfaga una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden puede utilizarse para mostrar que:

$$\beta_n^0 \neq 0 \ , \ \beta_n^1 \neq 0, \qquad n=1,2,\ldots$$

Si el conjunto de todos los estados que son alcanzables nulos o controlables nulos vía control distribuído solamente, tiene que ser denso en $L^2[0,X]$, se debe asumir $\beta_n \neq 0$ , $n=1,2,\ldots.$
Considera entonces un problema de momentos general de la forma:

$$\int_0^T e^{-\lambda_n t}\, h(t)dt = c_n \ , \ n=1,2,\ldots \tag{4.20}$$

Asumiendo que este problema de momentos tiene soluciones, es claro que (4.20) tiene en general infinitas soluciones, que pueden ser obtenidas resolviendo tres problemas:

$$\int_0^T e^{-\lambda_n t}\, h_i(t)dt = c_n^i \ , \ n=1,2,\ldots, \ i=1,2,3.$$

con:

$$h_1(t) = f(T-t), \qquad h_2(t) = g_0(T-t), \qquad h_3(t) = g_1(T-t)$$

y

$$c_n^1 = \left[\tilde{c}_n^1 / \beta_n\right], \quad c_n^2 = \left[\tilde{c}_n^2 / \beta_n^0\right] \qquad c_n^3 = \left[\tilde{c}_n^3 / \beta_n^1\right]$$

$$\tilde{c}_n^1 + \tilde{c}_n^2 + \tilde{c}_n^3 = \nu_n - e^{-\lambda_n T}\mu_n \tag{4.21}$$

Los problemas de alcanzabilidad nula y de controlabilidad nula se resuelven tomando $\mu_n = 0$ (respectivamente $\nu_n = 0$) en (4.21). Como consecuencia de estos resultados se ve que identificar al conjunto de estados alcanzables nulos, o el conjunto de estados controlables nulos para un tiempo dado $T > 0$ es equivalente a la identificación de aquellas sucesiones de números reales $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para las cuales el problema de momentos:

$$\int_0^T e^{-\lambda_n t}\, h(t)dt = c_n \ , \ n=1,2,... \qquad (4.22)$$

tiene una solución $h \in L^2[0,T]$.

Supone que se puede construir una sucesión $\psi_n$ de funciones biortogonales al conjunto:

$$\left\{e^{-\lambda_n t}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

en $L^2[0,T]$, es decir, tal que:

$$\int_0^T e^{-\lambda_n t}\, \psi_m(t)dt = \delta_{nm}, \qquad n,m \geq 1$$

Entonces, el problema de momentos (4.22) tiene una solución formal:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\ \psi_n(t) \qquad (4.23)$$

Según comentan en su trabajo [FR], es muy difícil caracterizar todas las sucesiones $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para las cuales (4.23) es convergente, y sólo se ocupan de aquellas sucesiones $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para las cuales (4.23) es absolutamente convergente, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, \|\psi_n\|_{L^2[0,T]} < \infty$$

Esto es lo que motivó nuestro interés en caracterizar el espacio de momentos de esta sucesión de exponenciales.

# CAPÍTULO 5

# EL ESPACIO DE MOMENTOS DE UNA SUCESIÓN DE EXPONENCIALES

1.- INTRODUCCION

El objetivo de este capítulo es caracterizar las sucesiones:

$$\left\{c_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

que son representables en la forma:

$$c_k = \left( F , e^{-\lambda_k t} \right) \quad , \forall k \in \mathbb{N}$$

para algún elemento $F \in L^2(0,T)$. El resultado obtenido es el teorema que se demuestra en la sección 2.4, que asegura que este conjunto de sucesiones es la imagen de $\ell^2$ por la transformación lineal generada por la raíz cuadrada de la matriz de Gram:

$$G = \left( e^{-\lambda_i t} , e^{-\lambda_j t} \right)_{i,j} \quad .$$

Para el desarrollo de las secciones anteriores a la demostración del teorema (2.2, 2.3) se consideran aquellas sucesiones $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_k < \infty$$

Esta condición asegura que la sucesión de exponenciales:

$$\left\{ e^{-\lambda_i t} \right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

no es densa en $L^2(0,T)$, que, como se comentó en la sección 7 del capítulo 4, es el caso que se trata en el trabajo que motiva nuestro problema [FR].

2.- EL ESPACIO DE MOMENTOS DE UNA SUCESION DE EXPONENCIALES

**2.1.- El problema de momentos.**

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre el cuerpo de los números reales. Sea:

$$\left\{f_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ tal que cualquier subfamilia finita de esta sucesión es linealmente independiente, y sea $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de números reales. El siguiente problema aparece en la teoría de momentos: *¿existe un elemento* $f \in \mathcal{H}$ *tal que:*

$$(f,f_k) = c_k \quad , \; k=1,2,\ldots?$$

El número:

$$(f,f_k)$$

es llamado el *k-ésimo momento de* f y la sucesión:

$$\left\{(f,f_k)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

es la *sucesión de momentos de* f.

El *espacio de momentos* $\mathcal{M}$ de la sucesión:

$$\left\{f_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

es el conjunto de todas las sucesiones de momentos, ie.:

$$\mathcal{M} = \left\{(f,f_k) \; : \; f \in \mathcal{H} \right\}$$

Entonces, una sucesión numérica $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pertenece a $\mathcal{M}$ si y sólo si existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $c_k=(f,f_k)$ $k=1,2,\ldots.$

$\mathcal{M}$ es un espacio de Banach en la métrica:

$$\|c\|^2_{\mathcal{M}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k,l=1}^{n} \sigma^{(n)}_{l,k} c_k\bar{c}_l = \lim_{n\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} \sigma^{(n)}_{l,k} c_k\bar{c}_l$$

donde $\sigma^{(n)}_{l,k}$ es el elemento $(l,k)$ de la matriz inversa de la matriz de Gram $G_n$ de $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ y la última igualdad es válida pues:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \sigma^{(n)}_{l,k} c_k\bar{c}_l$$

no decrece cuando n crece [K].

**2.2.- Algunas propiedades de $\mathcal{M}$.**

Sea $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T) = L^2(0,T)$, $0 < T \leq \infty$ y sea

$$f_k(t) = e^{-\lambda_k t} \quad k=1,2,\ldots,$$

donde $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos tal que:

$$\lambda_1 < \lambda_2 <\ldots< \lambda_n < \lambda_{n+1}<\ldots \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 1/\lambda_k <\infty \,.$$

Sea $\mathcal{M}(T)$ el espacio de momentos del sistema:

$$\{e^{-\lambda_k t}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

si $0 < T < \infty$, y $\mathcal{M}$ en el caso $T = \infty$. Estudiaremos propiedades de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}(T)$.

Sea $G_n(T)$ $(G_n)$ la matriz de Gram de

$$\{e^{-\lambda_k t}\}_{1\le k\le n}$$

si $T < \infty$ $(T = \infty)$ y $G(T)$ $(G)$ la matriz de Gram de

$$\{e^{-\lambda_k t}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

si $T < \infty$ $(T = \infty)$

<u>LEMA</u> 1: *$\mathcal{M}$ es un espacio de Hilbert.*

*Dem:*

Sean $x,y \in \mathcal{M}$ . Entonces:

$$\|x\|^2_{\mathcal{M}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[ x_{(n)}, G_n^{-1} x_{(n)} \right] = \lim_{n\to\infty} \left[ x_{(n)}, G_n^{-1} x_{(n)} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} x_{(n)} \right\|^2 .$$

Entonces:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} (x+y)_{(n)} \right\|^2 + \lim_{n\to\infty} \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} (x-y)_{(n)} \right\|^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} x_{(n)} + \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} y_{(n)} \right\|^2 + \lim_{n\to\infty} \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} x_{(n)} - \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} y_{(n)} \right\|^2 =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left\|\left(G_n^{-1}\right)^{1/2}x_{(n)}+\left(G_n^{-1}\right)^{1/2}y_{(n)}\right\|^2+\left\|\left(G_n^{-1}\right)^{1/2}x_{(n)}-\left(G_n^{-1}\right)^{1/2}y_{(n)}\right\|^2\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} 2.\left\{\left\|\left(G_n^{-1}\right)^{1/2}x_{(n)}\right\|^2+\left\|\left(G_n^{-1}\right)^{1/2}y_{(n)}\right\|^2\right\} = 2.\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) \blacksquare$$

<u>LEMA</u> 2: $\mathcal{M}(T) \subseteq \ell^2$ , $\forall\ T > 0$

*Dem:*

Sean $i,j \in \mathbb{N}$ tales que $1 \le i,j \le n$. Entonces:

$$\left(G_n(T)\right)_{ij} = \left(e^{-\lambda_i t}, e^{-\lambda_j t}\right) = \int_0^T e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}\,dt = \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\left(1-e^{-(\lambda_i+\lambda_j)T}\right)$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$ , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , entonces:

$$(x, G_n(T)x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1-e^{-(\lambda_i+\lambda_j)T}}{\lambda_i+\lambda_j}\, x_i\, x_j \le \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\,|x_i|\,|x_j| =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{\lambda_i+\lambda_j}\ \frac{|x_i|}{\sqrt{\lambda_i}}\ \frac{|x_j|}{\sqrt{\lambda_j}} \le \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{|x_i|}{\sqrt{\lambda_i}}\ \frac{|x_j|}{\sqrt{\lambda_j}} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\lambda_i}\right).\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) = TrG_n\ \|x\|^2$$

$\therefore\ \|G_n\| \le TrG_n$. Entonces, si $\gamma_1^{(n)}(T)$ es el mayor autovalor de $G_n(T)$:

$$\gamma_1^{(n)}(T) = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ x\neq 0}} \frac{(x, G_n(T)x)}{\|x\|^2} \le TrG_n \le TrG\ ,\quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

$\therefore\ \{e^{-\lambda_k t}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel, de donde resulta que:

$$\mathcal{M}(T) \subseteq \ell^2 \blacksquare$$

LEMA 3: $\mathcal{M}(T) \neq \ell^2$ , $\forall\ T > 0$.

*Dem:*

Sea $\gamma_n^{(n)}(T)$ el menor autovalor de $G_n(T)$ . Entonces:

$$\gamma_n^{(n)}(T) = \min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{(x,G_n(T)x)}{\|x\|^2} \leq \frac{(x_o,G_n(T)x_o)}{\|x_o\|^2}$$

cualquiera sea $x_o \in \mathbb{R}^n, x_o \neq 0$. En particular, si $x_o^T=(0,0,\dots,1)$, resulta:

$$\gamma_n^{(n)}(T) \leq \frac{1-e^{-2\lambda_n T}}{2\lambda_n} \text{ , y } \therefore \quad \gamma_n^{(n)}(T) \to 0 \text{ , si } n \to \infty .$$

$\therefore \left\{e^{-\lambda_i t}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión de Riesz-Fischer. Entonces:

$$\mathcal{M}(T) \supseteq \ell^2 \ \blacksquare$$

LEMA 4: $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}$ , $\forall\ T > 0$.

*Dem:*

Resulta del siguiente:

LEMA 5: *Existe una constante positiva* $K=K(T)$ *tal que:*

a) $\frac{1}{K(T)} G_n \leq G_n(T) \leq G_n$

b) $\frac{1}{K(T)} G_n^{-1}(T) \leq G_n^{-1} \leq G_n^{-1}(T)$

En efecto, supongamos por un momento que vale el LEMA 5. Entonces veamos que se verifica:

*i)* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(T)$

*ii)* $\mathcal{M}(T) \subseteq \mathcal{M}$

*i)* Sea $c \in \mathcal{M}$, entonces:

$$\left[c_{(n)}\ ,\ G_n^{-1}(T)c_{(n)}\right] \leq \left[c_{(n)}\ ,K(T).G_n^{-1}c_{(n)}\right] \leq K(T).\ \|c\|_{\mathcal{M}}$$

$$\therefore\ \|c\|_{\mathcal{M}(T)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[c_{(n)},G_n^{-1}(T)c_{(n)}\right] \leq K(T)\ .\ \|c\|_{\mathcal{M}}$$

*ii)* Resulta de inmediato pues $G_n^{-1} \leq G_n^{-1}(T)$

De *i)* y *ii)* sigue que $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}\ ,\ \forall\ T > 0$ ∎

*Demostración* LEMA 5:

a) Veamos primero que $G_n(T) \leq G_n$. Sean $i,j \in \mathbb{N}$ tales que $1\leq i,j\leq n$. Entonces:

$$\left[G_n(T)\right]_{i,j} = \int_0^T e^{-\lambda_i t}.e^{-\lambda_j t}\ dt \quad ; \quad \left[G_n\right]_{i,j} = \int_0^\infty e^{-\lambda_i t}.e^{-\lambda_j t}\ dt$$

$$\therefore\ \left[G_n - G_n(T)\right]_{i,j} = \int_0^\infty e^{-\lambda_i t}.e^{-\lambda_j t}\ dt - \int_0^T e^{-\lambda_i t}.e^{-\lambda_j t}\ dt =$$

$$= \int_T^\infty e^{-\lambda_i t}.e^{-\lambda_j t}\ dt$$

$\therefore\ G_n - G_n(T)$ es un gramiano, y por lo tanto definido positivo, de donde resulta:

$$G_n \geq G_n(T) \tag{5.1}$$

Veamos ahora que existe $K(T)$ tal que:

$$\frac{1}{K(T)}\ G_n \leq G_n(T).$$

Sea $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \omega$. Entonces:

$$\left[c_{(n)}, G_n c_{(n)}\right] = \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \int_0^{\infty} e^{-\lambda_i t} \cdot e^{-\lambda_j t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\lambda_i t}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{-\lambda_j t}\right) dt = \|P(t)\|^2_{L^2(0,\infty)} \quad \text{, donde:}$$

$$P(t) := \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\lambda_i t}.$$

Análogamente:

$$\left[c_{(n)}, G_n(T) c_{(n)}\right] = \|P(t)\|^2_{L^2(0,T)} \;.$$

Por un lema de Schwartz [S], resulta que existe $K=K(T)$ tal que:

$$\|P\|_{L^2(0,\infty)} \leq K(T)\ \|P\|_{L^2(0,T)}$$

$\therefore\ \forall\ c \in \omega$:

$$\left[c_{(n)},\ G_n c_{(n)}\right] \leq K(T) . \left[c_{(n)},\ G_n(T) c_{(n)}\right] \quad , \ \forall\ T > 0$$

$$\therefore\ \left[c_{(n)}, (K(T) G_n(T) - G_n)\ c_{(n)}\right] \geq 0,$$

y entonces:

$$\frac{1}{K(T)}\ G_n \leq G_n(T) \tag{5.2}$$

De (5.1) y (5.2) sigue que:

$$\frac{1}{K(T)}\ G_n \leq G_n(T) \leq G_n.$$

*b*) Sea L una transformación lineal tal que [CH]:

$$i)\quad L^T G_n(T) L = Id. \tag{5.3}$$

$$ii)\quad L^T G_n L = D \tag{5.4}$$

donde $\mathbf{D}$ es la siguiente matriz diagonal:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & 0 \\ & \rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho_n \end{bmatrix}$$

De (5.1) sigue que:

$$L^T\left[G_n - G_n(T)\right]L \geq 0 \Rightarrow L^T G_n L - L^T G_n(T) L \geq 0 \Rightarrow \mathbf{D} - \mathrm{Id} \geq 0.$$

Entonces:

$$\rho_i \geq 1 \ , \ \text{si } 1 \leq i \leq n.$$

Además, de (5.3) sigue que:

$$L^{-1}G_n^{-1}(T)(L^T)^{-1} = \mathrm{Id} \tag{5.5}$$

y (5.4) implica que:

$$L^{-1}G_n^{-1}(L^T)^{-1} = \tilde{\mathbf{D}} \tag{5.6}$$

donde:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1/\rho_1 & & & 0 \\ & 1/\rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\rho_n \end{bmatrix}$$

Pero de (5.5),(5.6) y del hecho que $1/\rho_i \leq 1$, si $1 \leq i \leq n$, sigue que:

$$\mathrm{Id} - \tilde{\mathbf{D}} \geq 0.$$

Entonces de (5.5) y (5.6):

$$L^{-1}G_n^{-1}(T)(L^T)^{-1} - L^{-1}G_n^{-1}(L^T)^{-1} \geq 0 \ .$$

Por lo tanto:

$$L^{-1}\left[G_n^{-1}(T) - G_n^{-1}\right](L^T)^{-1} \geq 0 \Rightarrow L\left[L^{-1}\left[G_n^{-1}(T) - G_n^{-1}\right](L^T)^{-1}\right]L^T \geq 0$$

y entonces:

$$G_n^{-1}(T) - G_n^{-1} \geq 0 \;\Rightarrow\; G_n^{-1}(T) \geq G_n^{-1}.$$

Análogamente resulta:

$$G_n^{-1}(T) \leq K(T).G_n^{-1} \quad \blacksquare$$

LEMA 6: *$\mathcal{M}$ es denso en $\ell^2$*

*Dem:*

Sea $x \in \ell^2$ tal que $(x,c)_{\ell^2}=0$, $\forall\, c \in \mathcal{M}$. Demostraremos que de aquí resulta que $x = 0$.

Como $c \in \mathcal{M}$, existe $\Psi(t) \in L^2(0,T)$ tal que:

$$\int_0^T \Psi(t).e^{-\lambda_j t}\, dt = c_j \ , \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Como $(x,c)_{\ell^2} = 0$ , $\forall\, c \in \mathcal{M}$, resulta que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i c_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \int_0^T \Psi(t).e^{-\lambda_i t}\, dt = 0 \quad , \ \forall\, \Psi \in L^2(0,T).$$

Por continuidad del producto interno:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} x_i \int_0^T \Psi(t).e^{-\lambda_i t}\, dt = 0 \qquad , \ \forall\, \Psi \in L^2(0,T)$$

$$\therefore \lim_{N\to\infty} \int_0^T \left( \sum_{i=1}^{N} x_i e^{-\lambda_i t} \right) \Psi(t)\, dt = 0 \ , \ \forall\, \Psi \in L^2(0,T) \qquad (5.7)$$

Pero:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i e^{-\lambda_i t} \in L^2(0,T).$$

En efecto; como

$$\left\{ e^{-\lambda_i t} \right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión de Bessel, el gramiano es un operador acotado, y por lo tanto, la forma cuadrática asociada es acotada, es decir, existe una constante M > 0 tal que:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda_i t},e^{-\lambda_j t}\right)x_i\bar{x}_j \le M\ \|x\|_{\ell^2}\ ,\ \forall\ x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$$

$$\therefore\ \left\|\sum_{i=1}^{\infty}x_i e^{-\lambda_i t}\right\|^2_{L^2(0,T)} \le M\ \|x\|_{\ell^2} \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{\infty}x_i e^{-\lambda_i t} \in L^2(0,T).$$

Entonces de (5.7) sigue que:

$$\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{\infty}x_i e^{-\lambda_i t}\right]\Psi(t)\ dt = 0\ ,\ \forall\ \Psi(t) \in L^2(0,T).$$

En particular, si $\Psi(t) = g_i(t)$, donde $\left\{g_i(t)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un sistema biortogonal a $\left\{e^{-\lambda_i t}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ resulta que:

$$\int_0^T x_j\ dt = 0,\quad \forall\ j \in \mathbb{N}$$

y por lo tanto, $x_j = 0$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$, de donde sigue que $x = 0$.
Entonces, $\mathcal{M}$ es denso en $\ell^2$ ∎

<u>LEMA</u> 7: *La inclusión* $i:\mathcal{M} \to \ell^2$ *es continua.*

*Dem:*
Si $\gamma_1^{(n)}$ es el mayor autovalor de $G_n$, entonces $\gamma_1^{(n)} \le Tr\ G$.
Sea $c \in \mathcal{M}$, entonces:

$$\left(c_{(n)},\ G_n^{-1}c_{(n)}\right) = \|c_{(n)}\|^2\ \frac{\left(c_{(n)},\ G_n^{-1}c_{(n)}\right)}{\|c_{(n)}\|^2}\ \ge\ \|c_{(n)}\|^2 \min_{\substack{x\neq 0\\ x\in\mathbb{R}^n}} \frac{\left(x, G_n^{-1}x\right)}{\|x\|^2} =$$

$$= \|c_{(n)}\|^2\ \left(TrG\right)^{-1}.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq TrG \left(c_{(n)},\ G_n^{-1} c_{(n)}\right) \leq TrG\ \|c\|_{\mathcal{M}}^2 \qquad ,\forall\ n \in \mathbb{N}$$

de donde resulta que:

$$\|c\|_{\ell^2}^2 \leq TrG\ \|c\|_{\mathcal{M}}^2 \qquad \blacksquare$$

**2.3.- Una aproximación de la matriz de Gram.**

La matriz de Gram del sistema:

$$\left\{e^{-\lambda_i t}\right\}_{i \in \mathbb{N}}$$

definida por:

$$G = \left(g_{i,j}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right)_{1 \leq i,j < \infty}$$

genera un operador, que notaremos también $G: \ell^2 \rightarrow \ell^2$, y las matrices de Gram $G_n$ de:

$$\left\{e^{-\lambda_i t}\right\}_{1 \leq i \leq n}$$

definidas por:

$$G_n = \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

generan operadores: $G_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

<u>LEMA</u> 8: $G \in \mathcal{B}(\ell^2)$

*Dem:*

Resulta en particular de lo siguiente: sea

$$G = \left(g_{i,j}\right)_{1 \leq i,j < \infty}$$

una matriz de Gram de un sistema de vectores linealmente independientes $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_{i,i} < \infty$$

Entonces:

$$|g_{i,j}| = |(f_i, f_j)| \le \|f_i\|\cdot\|f_j\| \le \sqrt{g_{i,i}}\ \sqrt{g_{j,j}} \quad , \quad 1\le i, j\le\infty$$

y entonces:

$$\left|\sum_{i,j=1}^{\infty} g_{i,j}\ x_i x_j\ \right| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_{ii}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)$$

de donde resulta que:

$$\|G\| \le \sum_{i=1}^{\infty} g_{ii} = TrG \quad \blacksquare$$

*Observacion:* $\|G\| < Tr\ G$.

LEMA 9: *La sucesión de operadores* $\tilde{G}_n : \ell^2 \to \ell^2$ *,* $n \in \mathbb{N}$*, definidos por:*

$$\tilde{G}_n := \begin{bmatrix} G_n \dots & 0 \\ & \vdots \\ 0 \dots & 0 \end{bmatrix}$$

ie., si notamos $\tilde{g}_{ij}$ al elemento $(i,j)$ de la matriz $\tilde{G}_n$:

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{cases} g_{ij} & , 1\le i, j\le n \\ 0 & , i>n \text{ o } j>n \end{cases}$$

*es tal que* $\tilde{G}_n \to G$ *en* $\mathcal{B}(\ell^2)$ *, si* $n \to \infty$.

*Dem:*

Sea $R_n := G - \tilde{G}_n$ , y sea $x \in \ell^2$. Entonces, si $y = R_n x$ se tiene que:

$$y_i = \sum_{j=n+1}^{\infty} g_{i,j}\, x_j \quad , \; i=1,2,\ldots n.$$

$$y_{n+i} = \sum_{j=1}^{\infty} g_{n+i,j}\, x_j \qquad i=1,2,\ldots$$

Entonces, si $1 \le i \le n$:

$$y_i^2 = \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} g_{ij}\, x_j\right]^2 \le \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} g_{ij}^2\right] \cdot \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j^2\right]$$

y análogamente para $i=1,2,\ldots$ se tiene que:

$$y_{n+i}^2 = \left[\sum_{j=1}^{\infty} g_{n+i,j}\, x_j\right]^2 \le \left[\sum_{j=1}^{\infty} g_{n+i,j}^2\right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2\right].$$

Como:

$$g_{i,j} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{\sqrt{\lambda_i}\,\sqrt{\lambda_j}}{\lambda_i + \lambda_j} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\;\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$$

entonces:

$$g_{i,j} \le \frac{1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\;\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} .$$

Luego:

$$g_{i,j}^2 \le \frac{1}{4}\;\frac{1}{\lambda_i}\;\frac{1}{\lambda_j}$$

cualesquiera sean $i,j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $1 \le i \le n$ :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \left[\sum_{i=1}^{n}\;\sum_{j=n+1}^{\infty} g_{ij}^2\right] \cdot \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j^2\right] \le \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\right]\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\right]\left[\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\tau \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\right)\|x\|^2_{\ell^2} \quad , \text{ donde } \tau := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\ .$$

Si $i \geq n+1$:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} y_i^2 \leq \left(\sum_{i=n+1}^{n}\ \sum_{j=1}^{\infty} g_{ij}^2\right)\cdot\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j^2\right) \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\tau \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\right)\|x\|^2_{\ell^2}.$$

Entonces:

$$\|y\|^2_{\ell^2} \leq \tau \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\right)\|x\|^2_{\ell^2}.$$

En consecuencia:

$$\|G - \tilde{G}_n\|^2 \leq \tau \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\right) \rightarrow$$

de donde sigue que $\tilde{G}_n \rightarrow G$ en $\mathcal{B}(\ell^2)$ si $n \rightarrow \infty$ ■

*Observacion:* LEMA 9 es válido si $G = \left(g_{i,j}\right)_{1\leq i,j<\infty}$ es una matriz de Gram tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_{ii} < \infty\ .$$

La demostración es análoga.

<u>LEMA</u> 10: *Los operadores* $G$ *y* $\tilde{G}_n$ , $n \in \mathbb{N}$ , *son compactos y positivos.*

*Dem:*

Los operadores $\tilde{G}_n$ son de rango finito, y por lo tanto compactos. Por el LEMA 9 resulta que el operador $G$ también es compacto.

Recordemos que un operador lineal y acotado T en un espacio de Hilbert es positivo si $(Tf,f) \geq 0$ para todo vector f del espacio.

Como:

$$\tilde{G}_n \geq 0 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

resulta que G también es un operador positivo, pues:

$$(x,Gx) = \lim_{n\to\infty} (x,\tilde{G}_n x) \geq 0 \ \blacksquare$$

Como:

$$\left(x, \ \tilde{G}_n x\right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} g_{i,j} \ x_i x_j \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_{ii}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\ 2}\right) \leq \tau \ \|x\|^2_{\ell^2}$$

resulta que

$$0 \leq \tilde{G}_n \leq \tau . Id \quad \forall \ n \in \mathbb{N}, \ y \qquad 0 \leq G \leq \tau . Id.$$

Entonces, para todo número natural n existe un único operador $T_n \geq 0$ tal que:

$$T_n^2 = \tilde{G}_n$$

y un único operador $T > 0$ tal que:

$$T^2 = G$$

que notaremos :

$$\tilde{G}_n^{\ 1/2} \qquad y \quad G^{1/2}$$

respectivamente [KR]. Si llamamos $Q_n$ a la única matriz definida no negativa tal que $Q_n^2 = G_n$ , de la unicidad mencionada sigue que:

$$T_n = \tilde{G}_n^{\ 1/2} = \begin{bmatrix} Q_n \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

<u>LEMA</u> 11: $\quad \tilde{G}_n^{\ 1/2} \to G^{1/2}$ *en* $\mathcal{B}(\ell^2)$ *si* $n \to \infty$ .

*Dem:*

Consideremos la función continua $F(\lambda)=\sqrt{\lambda}$ , $\lambda \in [0,\tau] \leq \mathbb{R}$, y sea:

$$\left\{ P_k(\lambda) \right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

una sucesión de polinomios a coeficientes reales tal que converge uniformemente a la función $F(\lambda)$. Consideremos la sucesión de operadores $P_k(T)$ , $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$. Si $Q(\lambda)$ es un polinomio a coeficientes reales tal que $|Q(\lambda)| \leq M$ , $\forall\ \lambda \in [0,\tau]$ , donde M es una constante, entonces es claro que también se verifica que:

$$0 \leq \left[Q(T)\right]^2 \leq M^2\ Id.$$

En efecto:

$$\|Q(T)x\|^2_{\ell^2} = \left[Q(T)x\ ,\ Q(T)x\right] = \left[Q(T)^2x,x\right] \leq M^2\ \left[x,x\right] = M^2\|x\|^2_{\ell^2}.$$

En consecuencia, vale que:

$$\|P_m(T) - P_n(T)\| \leq \max_{\lambda\in[\ ,\tau]} \|P_m(\lambda) - P_n(\lambda)\| .$$

Como $P_n(\lambda) \to F(\lambda)$ uniformemente cuando $n \to \infty$ en $[0,\tau]$, resulta que:

$$\left\{P_n(T)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(\ell^2)$. Luego existe un operador $\tilde{T}$ tal que:

$$P_n(T) \to \tilde{T}$$

y resulta natural llamar $\tilde{T} = T^{1/2}$. Este operador verifica las siguientes condiciones:

*i)* $\tilde{T}^2 = T$

*ii)* $\tilde{T} \geq 0$

*iii)* $\tilde{T}$ es el único operador con las propiedades *i)*-*ii)*.

Sea ahora $\varepsilon > 0$; fijemos $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \geq k_o$:

$$\sup_{\lambda \in [0,\tau]} |P_k(\lambda) - \sqrt{\lambda}\,| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Entonces:

$$\|P_k(T) - T^{1/2}\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

cualquiera sea el operador T tal que $0 \leq T \leq \tau.Id$, $\forall\, k > k_o$. En particular:

$$\|P_k(G) - G^{1/2}\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.8}$$

$$\|P_k(\tilde{G}_n) - \tilde{G}_n^{\,1/2}\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad , \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{5.9}$$

Además, como $\tilde{G}_n \to G$ , si $n \to \infty$, resulta que: $P_k(\tilde{G}_n) \to P_k(G)$ si $n \to \infty$ , es decir, existe $n_o = n_o(\varepsilon)$ tal que $\forall\, n \geq n_o$:

$$\|P_k(\tilde{G}_n) - P_k(G)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.10}$$

Luego, si $n > N = (n_o \vee k_o)$ , de (5.8), (5.9) y (5.10) sigue que:

$$\|\tilde{G}_n^{\,1/2} - G^{1/2}\| \leq \|P_k(\tilde{G}_n) - \tilde{G}_n^{\,1/2}\| + \|P_k(\tilde{G}_n) - P_k(G)\| +$$

$$+ \|P_k(G) - G^{1/2}\| < \varepsilon.$$

Entonces:

$$\tilde{G}_n^{\,1/2} \to G^{1/2} \qquad , \text{si } n \to \infty \quad \blacksquare$$

**2.4.- Una caracterización de $\mathcal{M}$.**

<u>TEOREMA</u>: $\mathcal{M} = G^{1/2}(\ell^2)$.

*Dem:* *i)* $\mathcal{M} \leq G^{1/2}(\ell^2)$

Sea $c \in \mathcal{M}$. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}(n) c_i c_j \leq M \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

o, equivalentemente:

$$\left(c_{(n)}, G_n^{-1} c_{(n)}\right) \leq M \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Si llamamos:

$$x(n) := \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} c_{(n)}$$

se tiene que $\|x(n)\| \leq M$. Notemos $\tilde{x}_n$ al elemento de $\ell^2$ tal que:

$$\tilde{x}_{n,i} := \begin{cases} x_i(n) & , \text{ si } 1 \leq i \leq n \\ 0 & , \text{ si } i > n \end{cases}$$

es decir: $\tilde{x}_n = (x_1(n),\ x_2(n), \ldots, x_n(n), 0, 0, \ldots)$.

Por ser:

$$\|\tilde{x}_n\|_{\ell^2} = \|x(n)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

podemos suponer que $\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente convergente en $\ell^2$ (de lo contrario, basta considerar una subsucesión de $\{\tilde{x}_n\}$ con esa propiedad). Entonces, existe $x \in \ell^2$ tal que:

$$\left(\tilde{x}_n, y\right) \to \left(x, y\right) \quad \text{si } n \to \infty, \qquad \forall\, y \in \ell^2.$$

Como $G^{1/2}$ es un operador compacto:

$$G^{1/2}\tilde{x}_n \to G^{1/2}x \ , \text{ si } n \to \infty .$$

Pero:

$$G^{1/2}\tilde{x}_n \to c \ , \ \text{si } n \to \infty$$

pues, si $\tilde{c}_n = (c_1, c_2, \dots, c_n, 0, 0, \dots)$ entonces:

$$\|G^{1/2}\tilde{x}_n - c\| \le \|G^{1/2}\tilde{x}_n - \tilde{c}_n\| + \|\tilde{c}_n - c\| = \|G^{1/2}\tilde{x}_n - \tilde{G}_n^{1/2}\tilde{x}_n\| +$$

$$\|\tilde{c}_n - c\| \le \|G^{1/2} - \tilde{G}_n^{1/2}\| \, \|\tilde{x}_n\| + \|\tilde{c}_n - c\| \le M \, \|G^{1/2} - \tilde{G}_n^{1/2}\| +$$

$$+ \|\tilde{c}_n - c\|$$

y eligiendo n suficientemente grande resulta que:

$$\|G^{1/2}\tilde{x} - c\| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad c = G^{1/2}x.$$

*ii)* $G^{1/2}(\ell^2) \subseteq \mathcal{M}$

Sea $c \in G^{1/2}(\ell^2)$ ; entonces existe $x \in \ell^2$ tal que $c = G^{1/2}x$.

Sea $u^{(s)} := \tilde{G}_s^{1/2}x$ . Demostraremos que:

*a)* $u^{(s)} \in \mathcal{M}$ , $\forall s \in \mathbb{N}$

*b)* $c \in \mathcal{M}$

*a)* Sea:

$$\tilde{\mathbb{R}}_s = \left\{\alpha = \left(\alpha_i\right)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : \alpha_i = 0 \ , \ \forall \ i > s\right\}.$$

Veamos que $\tilde{\mathbb{R}}_s \subseteq \mathcal{M}$.

Como:

$$\left\{e^{-\lambda_i t}\right\}_{i \in \mathbb{N}}$$

es una sucesión minimal (ie., cada elemento de la sucesión está fuera del subespacio lineal generado por los demás), existe una sucesión $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ biortogonal, es decir:

$$\left(g_i , \ e^{-\lambda_j t}\right) = \delta_{ij} \ .$$

Sea:

$$g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_s g_s \quad , \quad g \in L^2(0,\infty)$$

y entonces:

$$\left[g,\ e^{-\lambda_i t}\right] = \begin{cases} \alpha_i & , \ i \le s \\ 0 & , \ i > s \end{cases} \qquad \therefore\ u^{(s)} \in \mathcal{M},\ \forall\ s \in \mathbb{N}$$

*b)*

$$\left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} c_{(n)} \right\| \le \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} \left(c_{(n)} - u_{(n)}^{(s)}\right) \right\| + \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} u_{(n)}^{(s)} \right\| \le$$

$$\le \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} \left(c_{(n)} - u_{(n)}^{(s)}\right) \right\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} u_{(n)}^{(s)} \right\|$$

$$\le \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} \left(c_{(n)} - u_{(n)}^{(s)}\right) \right\| + M \ , \ \text{donde } M \text{ es una constante.}$$

Por lo tanto:

$$\left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} c_{(n)} \right\| \le \left\| \left(G_n^{-1}\right)^{1/2} \left(c_{(n)} - \lim_{s\to\infty} u_{(n)}^{(s)}\right) \right\| + M = M$$

pues, como $u^{(s)} \to c$ en $\ell^2$ cuando $s \to \infty$ entonces $u_{(n)}^{(s)} \to c_{(n)} \forall\ n \in \mathbb{N}$. Entonces: $c \in \mathcal{M}$ ■

*Observacion:* El LEMA 2 resulta ahora obvio.

<u>PROPOSICION:</u> $\|G\| < TrG = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_i}$ .

*Dem:*

Por el LEMA 9

$$\tilde{G}_n \to G \text{ en } \mathcal{B}(\ell^2)$$

y por una observación anterior:

$$\|G\| \le TrG.$$

Pero:

$$\|G_n\| = \max_{\|x\|=1} \left[G_n x,x\right] = \gamma_1^{(n)},$$

donde:

$$\gamma_1^{(n)} \geq \gamma_2^{(n)} \geq \ldots \geq \gamma_n^{(n)}$$

son los autovalores de $G_n$, y:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(n)} = TrG_n .$$

Además:

$$\prod_{i=1}^{n} \gamma_i^{(n)} = \det G_n \neq 0$$

y por lo tanto:

$$\gamma_i^{(n)} \neq 0, \ \forall i: \ 1 \leq i \leq n.$$

Entonces: $\|G_n\| = \gamma_1^{(n)} < TrG_n$.

Consideremos la sucesión

$$\left\{\gamma_1^{(n)}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es decir, la sucesión de normas de $G_n$. Es una sucesión de números reales positivos no decreciente y acotada. En efecto: si $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$:

$$\gamma_1^{(n+1)} = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathbb{R}^{n+1}}} \left[G_{n+1} x,x\right] \geq \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathbb{R}^{n+1} \\ x_n = 0}} \left[G_{n+1} x,x\right] = \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathbb{R}^{n}}} \left[G_n x,x\right] = \gamma_1^{(n)}$$

$\therefore \ \gamma_1^{(n)} < TrG$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$.

Entonces, existe $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $\gamma_1 > 0$ tal que: $\gamma_1^{(n)} \to \gamma_1 = \|G\|$, cuando $n \to \infty$.

Consideremos ahora la sucesión:

$$\left\{\gamma_2^{(n)}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

que también es una sucesión acotada de números reales positivos.

## 3.- SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE MOMENTOS.

### 3.1.- Introducción.

Si $\varphi_n$ es la solución de norma mínima del problema finito:

$$\left(\varphi_n \, , \, e^{-\lambda_i t}\right) = c_j \quad , \; j = 1,2,\dots,n \tag{5.11}$$

entonces:

$$\varphi_n = -\frac{1}{a_n}\begin{vmatrix} 0 & f_1 \; . \; . \; . \; f_n \\ c_1 & \\ \vdots & G_n \\ c_n & \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot f_i(t)$$

donde $a_n = \det G_n$ y:

$$\gamma_i(t) = \frac{(-1)^{i+1}}{a_n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} c_j \, a_{n,j,i} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{a_{n,i,j}}{a_n} c_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji}^{(n)} c_j \tag{5.12}$$

($\sigma_{ij}^{(n)}$ representa el elemento $(i,j)$ de la inversa de la matriz de Gram de $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

Ademas el problema de momentos admite al menos una solución si y sólo si:

$$\|\varphi_n\|^2 \leq M \quad , \; \forall \, n \in \mathbb{N}$$

es decir:

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}^{(n)} c_i c_j \right| \leq M \; , \; \forall \, n \in \mathbb{N} \tag{5.13}$$

### 3.2. Calculo de la matriz $G_n^{-1}$.

Calculemos primero $a_n = \det G_n$.

$$g_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_1+\lambda_3} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1+\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_n} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{\lambda_n+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_3} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n} \end{vmatrix}$$

Restando a todas las filas la última, resulta:

$$g_n = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1-\lambda_n}{2\lambda_1(\lambda_n+\lambda_1)} & \frac{\lambda_1-\lambda_n}{(\lambda_n+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2)} & \cdots & \frac{\lambda_1-\lambda_n}{2\lambda_n\ (\lambda_1+\lambda_n)} \\ \frac{\lambda_2-\lambda_n}{(\lambda_n+\lambda_1)\ (\lambda_2+\lambda_1)} & \frac{\lambda_2-\lambda_n}{2\lambda_2(\lambda_n+\lambda_2)} & \cdots & \frac{\lambda_2-\lambda_n}{2\lambda_n\ (\lambda_2+\lambda_n)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i-\lambda_n)}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i+\lambda_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{2\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1+\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_{n-1}} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Restando a todas las columnas la última, resulta que el determinanate anterior es igual a:

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_1-\lambda_n}{2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_n)} & \frac{\lambda_2-\lambda_n}{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_n)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda_1+\lambda_n)} \\ \frac{\lambda_1-\lambda_n}{(\lambda_2+\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_n)} & \frac{\lambda_2-\lambda_n}{2\lambda_2(\lambda_2+\lambda_n)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda_2+\lambda_n)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\lambda_1-\lambda_n}{(\lambda_{n-1}+\lambda_1)(\lambda_n+\lambda_{n-1})} & \frac{\lambda_2-\lambda_n}{(\lambda_2+\lambda_{n-1})(\lambda_n+\lambda_{n-1})} & \cdots & \frac{1}{(\lambda_n+\lambda_{n-1})} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$g_n = \frac{1}{2\lambda_n} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i-\lambda_n)^2}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i+\lambda_n)^2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1+\lambda_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_{n-1}} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_n} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i-\lambda_n)^2}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i+\lambda_n)^2} \, g_{n-1}$$

donde la última igualdad se obtuvo restando a todas las filas la última. Entonces:

$$g_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \prod_{1\le i<k\le n} \left[ \frac{\lambda_i-\lambda_k}{\lambda_i+\lambda_k} \right]^2 \tag{5.14}$$

Notemos $g_{i,j}(n)$ al menor asociado al elemento $(i,j)$ de $G_n$, y si:

$$g_n = g_n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_j,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)$$

entonces:

$$g_{j,j}(n) = g_{n-1}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},\dots,\lambda_n)$$

Por lo tanto:

$$g_{j,j}(n) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \prod_{\substack{1\le i<k\le n\\ i\neq j,\, k\neq j}} \left[\frac{\lambda_i-\lambda_k}{\lambda_i+\lambda_k}\right]^2 \tag{5.15}$$

Entonces:

$$\frac{g_{jj}(n)}{g_n} = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \prod_{\substack{1\le i<k\le n\\ i\neq j,\, k\neq j}} \left[\frac{\lambda_i-\lambda_k}{\lambda_i+\lambda_k}\right]^2}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \prod_{1\le i<k\le n} \left[\frac{\lambda_i-\lambda_k}{\lambda_i+\lambda_k}\right]^2} =$$

$$= 2\lambda_j \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{j-1} \left[\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\right]^2 \prod_{k=j+1}^{n} \left[\frac{\lambda_j-\lambda_k}{\lambda_j+\lambda_k}\right]^2} =$$

$$= 2\lambda_j \prod_{i=1}^{j-1} \left[\frac{\lambda_i+\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right]^2 \prod_{k=j+1}^{n} \left[\frac{\lambda_j+\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}\right]^2 = 2\lambda_j \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \left[\frac{\lambda_i+\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right]^2.$$

Por lo tanto:

$$\frac{g_{jj}(n)}{g_n} = 2\lambda_j \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \left[\frac{\lambda_i+\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right]^2 \tag{5.16}$$

Calculemos ahora $g_{1,2}(n)$:

$$
g_{1,2}(n) = \begin{vmatrix}
\frac{1}{\lambda_2 + \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_3 + \lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_3} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3 + \lambda_n} \\
 & & & \\
\frac{1}{\lambda_n + \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_n + \lambda_3} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n}
\end{vmatrix}
$$

Restando la última fila a todas las demás, resulta:

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2\lambda_1 (\lambda_n + \lambda_1)} & \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{(\lambda_n + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} & \cdots & \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2\lambda_n \ (\lambda_1 + \lambda_n)} \\
\frac{\lambda_2 - \lambda_n}{(\lambda_n + \lambda_1) \ (\lambda_2 + \lambda_1)} & \frac{\lambda_2 - \lambda_n}{2\lambda_2 (\lambda_n + \lambda_2)} & \cdots & \frac{\lambda_2 - \lambda_n}{2\lambda_n \ (\lambda_2 + \lambda_n)} \\
\vdots & & & \vdots \\
\frac{1}{\lambda_n + \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_n + \lambda_3} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \frac{\prod_{i=2}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} (\lambda_i + \lambda_n)}
\begin{vmatrix}
\frac{1}{\lambda_2 + \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_3 + \lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_3} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3 + \lambda_n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{\lambda_{n-1} + \lambda_1} & \frac{1}{\lambda_{n-1} + \lambda_3} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_{n-1}} \\
1 & 1 & \cdots & 1
\end{vmatrix}
$$

Restando a todas las columnas la última, resulta igual a:

$$\frac{\prod\limits_{i=2}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i)}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n} (\lambda_i + \lambda_n)} \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda_n - \lambda_1}{(\lambda_2+\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_n)} & \dfrac{\lambda_n - \lambda_3}{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_n)} & \cdots & \dfrac{1}{(\lambda_1+\lambda_n)} \\ \dfrac{\lambda_n - \lambda_1}{(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_3+\lambda_n)} & \dfrac{\lambda_n - \lambda_3}{2\lambda_3(\lambda_3+\lambda_n)} & \cdots & \dfrac{1}{(\lambda_3+\lambda_n)} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=2}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i)}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n} (\lambda_i + \lambda_n) \prod\limits_{i=2}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_n)} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2+\lambda_3} & \cdots & 1 \\ \dfrac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \dfrac{1}{2\lambda_3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_3} & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=2}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i)}{\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{n} (\lambda_i + \lambda_n) \prod\limits_{i=2}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_n)} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2+\lambda_3} & \cdots & 0 \\ \dfrac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \dfrac{1}{2\lambda_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_{n-1}+\lambda_3} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

donde la última igualdad se obtuvo restando a todas las filas la última. Entonces:

$$g_{1,2}(n) = \frac{1}{2\lambda_n} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq 1,2}}^{n-1} \left[ \frac{\lambda_n - \lambda_i}{\lambda_n + \lambda_i} \right]^2 \frac{(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)}{(\lambda_n + \lambda_1)(\lambda_n + \lambda_2)} \, g_{1,2}(n-1).$$

Si $n > 3$:

$$g_{1,2}(n)= \frac{1}{2\lambda_n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1,2}}^{n-1} \left[ \frac{\lambda_n - \lambda_i}{\lambda_n + \lambda_i} \right]^2 \frac{(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)}{(\lambda_n + \lambda_1)(\lambda_n + \lambda_2)} \frac{(\lambda_{n-1}-\lambda_1)(\lambda_{n-1}-\lambda_2)}{(\lambda_{n-1}+\lambda_1)(\lambda_{n-1}+\lambda_2)}$$

$$\frac{1}{2\lambda_{n-1}} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1,2}}^{n-2} \left[ \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_i}{\lambda_{n-1} + \lambda_i} \right]^2 g_{1,2}(n-2) =$$

$$= \prod_{k=n-1}^{n} \frac{1}{2\lambda_k} \prod_{k=n-1}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1,2}}^{k-1} \left[ \frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right]^2 \prod_{k=n-1}^{n} \frac{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)}{(\lambda_k + \lambda_1)(\lambda_k + \lambda_2)} g_{1,2}(n-2)=$$

$$=\ldots= \prod_{k=4}^{n} \frac{1}{2\lambda_k} \prod_{k=4}^{n} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1,2}}^{k-1} \left[ \frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right]^2 \prod_{k=4}^{n} \frac{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)}{(\lambda_k + \lambda_1)(\lambda_k + \lambda_2)} g_{1,2}(3)=$$

$$= \prod_{k=4}^{n} \frac{1}{2\lambda_k} \prod_{3\leq i<k\leq n} \left[ \frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right]^2 \prod_{k=4}^{n} \frac{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)}{(\lambda_k + \lambda_1)(\lambda_k + \lambda_2)} g_{1,2}(3)$$

Pero:

$$g_{1,2}(3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3} \\ \frac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_3-\lambda_2}{(\lambda_2+\lambda_1)(\lambda_3+\lambda_1)} & \frac{\lambda_3-\lambda_2}{2\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)} \\ \frac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(\lambda_3+\lambda_1)\, 2\lambda_3} \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(\lambda_3+\lambda_1)\, 2\lambda_3} \begin{vmatrix} \frac{1}{(\lambda_2+\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_3)} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}{(\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_3 + \lambda_2)} \frac{1}{2\lambda_3} \left| \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right| .$$

Por lo tanto:

$$g_{1,2}^{(n)} =$$

$$= \prod_{k=3}^{n} \frac{1}{2\lambda_k} \prod_{3 \le i < k \le n} \left( \frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right)^2 \prod_{k=3}^{n} \frac{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)}{(\lambda_k + \lambda_1)(\lambda_k + \lambda_2)} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{5.17}$$

Pero:

$$g_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_k} \prod_{3 \le i < k \le n} \left[ \frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right]^2 \prod_{k=3}^{n} \left[ \frac{\lambda_k - \lambda_1}{\lambda_k + \lambda_1} \right]^2 \left[ \frac{\lambda_k - \lambda_2}{\lambda_k + \lambda_2} \right]^2 \left[ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right]^2$$

entonces:

$$\frac{g_{1,2}^{(n)}}{g_n} = 2\lambda_1 \; 2\lambda_2 \frac{\displaystyle \prod_{k=3}^{n} \frac{(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)}{(\lambda_k + \lambda_1)(\lambda_k + \lambda_2)} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}}{\displaystyle \prod_{k=3}^{n} \left[ \frac{\lambda_k - \lambda_1}{\lambda_k + \lambda_1} \right]^2 \left[ \frac{\lambda_k - \lambda_2}{\lambda_k + \lambda_2} \right]^2 \left[ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right]^2} =$$

$$= 2\lambda_1 \; 2\lambda_2 \prod_{k=3}^{n} \left[ \frac{\lambda_k + \lambda_1}{\lambda_k - \lambda_1} \right] \left[ \frac{\lambda_k + \lambda_2}{\lambda_k - \lambda_2} \right]^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} .$$

Por lo tanto:

$$\frac{g_{1,2}^{(n)}}{g_n} = 2\lambda_1 \; 2\lambda_2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \prod_{k=3}^{n} \left[ \frac{\lambda_k + \lambda_1}{\lambda_k - \lambda_1} \right] \left[ \frac{\lambda_k + \lambda_2}{\lambda_k - \lambda_2} \right]^2 \tag{5.18}$$

Sea ahora $2 \le j \le n$:

$g_{1,j}^{(n)} \; (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n) =$

$$
= \begin{vmatrix}
\frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_n} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\frac{1}{\lambda_j+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_n+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n}
\end{vmatrix} =
$$

$$
=(-1)^{j-1-2} \begin{vmatrix}
\frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{2\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_n} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\frac{1}{\lambda_j+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_n+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n}
\end{vmatrix} =
$$

$$
=(-1)^{j-2} \begin{vmatrix}
\frac{1}{\lambda_j+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_j+\lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_n} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{2\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_n+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n}
\end{vmatrix} =
$$

$$= (-1)^{j-2}\, g_{1,2}^{(n)}\, (\lambda_1, \lambda_j, \lambda_3, \ldots, \lambda_2, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n).$$

Por lo tanto, si $2 \leq j \leq n$ :

$$g_{1,j}^{(n)}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j,\ldots,\lambda_n) =$$

$$(-1)^{j}\, g_{1,2}^{(n)}(\lambda_1,\lambda_j,\lambda_3,\ldots,\lambda_2,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)$$

Si $1 < i < j \le n$ :

$$g_{1,j}^{(n)}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots,\lambda_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n} \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{i} \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \frac{1}{2\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_n} \\ \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n+\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}.$$

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{\lambda_2+\lambda_i} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_3+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_n} \\
\vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\
\frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_i} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_2+\lambda_i} & \frac{1}{2\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+\lambda_n} \\
\frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_i} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{i-1}+\lambda_n} \\
\vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\
\frac{1}{\lambda_n+\lambda_i} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j-1}} & \frac{1}{\lambda_n+\lambda_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{2\lambda_n}
\end{array}\right|$$

(donde se han intercambiado las columnas primera e i-ésima.)

$$= (-1)^{i+1} g_{1,j}(n)\,(\lambda_i,\lambda_2,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_1,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_j,\ldots,\lambda_n).$$

Por lo tanto, si $1 < i < j \leq n$ :

$$g_{i,j}(n)\,(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots,\lambda_n) =$$

$$= (-1)^{i+1} g_{1,j}(n)\,(\lambda_i,\lambda_2,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_1,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_j,\ldots,\lambda_n) \tag{5.20}$$

y además:

$$g_{i,j}(n)\,(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_j,\ldots,\lambda_n) =$$

$$=(-1)^{i+j+1} g_{1,2}(n)\,(\lambda_i,\lambda_j,\lambda_3,\ldots\lambda_{i-1},\lambda_1,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_2,\lambda_{j+1},\ldots\lambda_n) \tag{5.21}$$

de donde se deduce que:

$$g_{i,j}^{(n)}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_i,\dots,\lambda_j,\dots,\lambda_n) =$$

(5.22)

$$=\frac{(-1)^{i+j+1}}{\lambda_i+\lambda_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{2\lambda_k}\prod_{\substack{1\le r<k\le n\\r,k\neq i,j}}^{n}\left[\frac{\lambda_k-\lambda_r}{\lambda_k+\lambda_r}\right]^2\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\frac{(\lambda_i-\lambda_k)(\lambda_j-\lambda_k)}{(\lambda_k+\lambda_i)(\lambda_k+\lambda_j)}$$

Si escribimos:

$$g_n = \frac{1}{2\lambda_i}\frac{1}{2\lambda_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{2\lambda_k}\prod_{\substack{1\le r<k\le n\\r,k\neq i,j}}^{n}\left[\frac{\lambda_k-\lambda_r}{\lambda_k+\lambda_r}\right]^2\prod_{\substack{k=i+1\\k\neq j}}^{n}\left[\frac{\lambda_i-\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_i}\right]^2$$

$$\prod_{k=j+1}^{n}\left[\frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k+\lambda_j}\right]^2\prod_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{j-1}\left[\frac{\lambda_j-\lambda_r}{\lambda_j+\lambda_r}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2\lambda_i}\frac{1}{2\lambda_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\frac{1}{2\lambda_k}\prod_{\substack{1\le r<k\le n\\r,k\neq i,j}}^{n}\left[\frac{\lambda_k-\lambda_r}{\lambda_k+\lambda_r}\right]^2\prod_{\substack{s=1\\s\neq i}}^{n}\left[\frac{\lambda_i-\lambda_s}{\lambda_i+\lambda_s}\right]^2\prod_{\substack{s=1\\s\neq i,j}}^{n}\left[\frac{\lambda_j-\lambda_s}{\lambda_j+\lambda_s}\right]^2=$$

$$=\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2\lambda_k}\prod_{\substack{1\le r<k\le n\\r,k\neq i,j}}^{n}\left[\frac{\lambda_k-\lambda_r}{\lambda_k+\lambda_r}\right]^2\prod_{\substack{s=1\\s\neq i,j}}^{n}\left[\frac{\lambda_i-\lambda_s}{\lambda_i+\lambda_s}\right]^2\left[\frac{\lambda_j-\lambda_s}{\lambda_j+\lambda_s}\right]^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{g_{i,j}^{(n)}}{g_n} = (-1)^{i+j+1}\frac{\lambda_i+\lambda_j}{(\lambda_i-\lambda_j)^2}4\,\lambda_i\lambda_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\frac{(\lambda_i+\lambda_k)(\lambda_j+\lambda_k)}{(\lambda_k-\lambda_i)(\lambda_k-\lambda_j)} \qquad (5.23)$$

Por lo tanto:

$$\sigma_{jj}(n) = 2\lambda_j \prod_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n} \left[ \frac{\lambda_r + \lambda_j}{\lambda_r - \lambda_j} \right]^2$$

(5.24)

$$\sigma_{ij}(n) = -4 \frac{\lambda_i + \lambda_j}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} \lambda_i \lambda_j \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} \frac{(\lambda_i + \lambda_k)(\lambda_j + \lambda_k)}{(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_j)}$$

$$\sigma_{ij}(n) = -(2\lambda_i)(2\lambda_j) \frac{\lambda_i + \lambda_j}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} \frac{(\lambda_i + \lambda_k)}{(\lambda_k - \lambda_i)} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} \frac{(\lambda_j + \lambda_k)}{(\lambda_k - \lambda_j)} =$$

$$= \frac{2\lambda_i \, 2\lambda_j}{(\lambda_i + \lambda_j)} \frac{\lambda_i + \lambda_j}{(\lambda_j - \lambda_i)} \frac{\lambda_i + \lambda_j}{(\lambda_j - \lambda_i)} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} \frac{(\lambda_i + \lambda_k)}{(\lambda_k - \lambda_i)} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{n} \frac{(\lambda_j + \lambda_k)}{(\lambda_k - \lambda_j)} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)} 2\lambda_i \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} \frac{(\lambda_i + \lambda_k)}{(\lambda_k - \lambda_i)} 2\lambda_j \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \frac{(\lambda_k + \lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_j)} .$$

Si llamamos:

$$\alpha_i(n) = 2\lambda_i \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} \frac{(\lambda_i + \lambda_k)}{(\lambda_k - \lambda_i)}$$

resulta que:

$$\sigma_{ij}(n) = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \alpha_i(n) \, \alpha_j(n) \quad , \forall \, n \in \mathbb{N}$$

**3.3. Una expresión para la solución.**

Podemos ahora reescribir la condición (5.13) como sigue:

$$\|\varphi_n\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}(n)\, c_i\, c_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\alpha_i(n)\,\alpha_j(n)}{\lambda_i + \lambda_j}\, c_i\, c_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}\, \alpha_i(n)\, \alpha_j(n)\, dt\, c_i\, c_j =$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}\, \alpha_i(n)\, \alpha_j(n)\, c_i\, c_j\, dt = \|P_n(t)\|^2$$

donde:

$$P_n(t) := \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t}\, \alpha_i(n)\, c_i \tag{5.25}$$

Resulta entonces que:

$$c = \{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M} \iff \|P_n\|_{L^2(0,\infty)} \le M \,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{5.26}$$

y $\|\varphi_n\| = \|P_n\|$.

Sea:

$$D_n = \begin{pmatrix} \alpha_1(n) & & & 0 \\ & \alpha_2(n) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n(n) \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$G_n^{-1} = D_n\, G_n\, D_n$$

y llamando $A_n = G_n\, D_n$ se tiene que $A_n = A_n^{-1}$.

Además (5.12) puede reescribirse como sigue:

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\, f_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i(n)\,\alpha_j(n)}{\lambda_i + \lambda_j}\, c_i\, e^{-\lambda_j t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i(n)}{\lambda_i + \lambda_j}\, c_i \right] e^{-\lambda_j t}\, \alpha_j(n).$$

Recordando la definición de $P_n$ resulta que:

$$(P_n(t)\ ,\ e^{-\lambda_j t}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n)\ c_i \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i(n)\ c_i}{\lambda_i+\lambda_j}$$

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^{n} (P_n(t)\ ,\ e^{-\lambda_j t})\ \alpha_j(n)\ e^{-\lambda_j t}$$

$$P_n(t) = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_n(t)\ ,\ e^{-\lambda_j t})\ \alpha_j(n)\ e^{-\lambda_j t}$$

Si llamamos:

$$\mathbf{d}(n) = \left[d_i(n)\right]_{i\le n} = \left[(P_n(t)\ ,\ e^{-\lambda_i t})\right]_{i\le n}$$

se tiene que:

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^{n} d_j(n)\ \alpha_j(n)\ e^{-\lambda_j t}$$

$$P_n(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j\ \alpha_j(n)\ e^{-\lambda_j t}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$ entonces existe $\alpha_i = \lim_{n\to\infty} \alpha_i(n)$ ; en efecto:

$$\alpha_i(n) = 2\ \lambda_i \prod_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} \frac{(\lambda_k+\lambda_i)}{(\lambda_k-\lambda_i)} = 2\ \lambda_i \frac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} (\lambda_k+\lambda_i)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} (\lambda_k-\lambda_i)} =$$

$$= 2\ \lambda_i \frac{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} 1 + \frac{\lambda_i}{\lambda_k}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_k}} .$$

Como el numerador y el denominador de la última expresión convergen cuando $n \to \infty$, $\alpha_i^{(n)} \to \alpha_i$ cuando n tiende a infinito [C]. Además existe:

$$d_i := \lim_{n\to\infty} d_i^{(n)} \quad , \ \forall \ i \in \mathbb{N}.$$

En efecto, como $\{P_n\}$ es una sucesión de $L^2(0,\infty)$ con normas crecientes y acotadas superiormente, existe $P \in L^2(0,\infty)$ tal que:

$$P_n \to P \quad , \text{ si } n \to \infty$$

y por lo tanto:

$$(P_n \, , \, e^{-\lambda_i t}) \to (P \, , \, e^{-\lambda_i t}) \quad , \ \forall \ i \in \mathbb{N}$$

Basta entonces definir $d_i = (P \, , \, e^{-\lambda_i t})$ , $\forall \ i \in \mathbb{N}$.

Vale entonces el siguiente resultado:

<u>TEOREMA</u>: *Si existe una constante $\beta > 0$ tal que :*

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i \geq \beta \quad , \ \forall \ i \in \mathbb{N}$$

*y si:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$$

*entonces:*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \, \alpha_j \, e^{-\lambda_j t}$$

*es solución del problema de momentos.*

*Dem:*

Dividiremos la demostración en dos partes:

*a*) Demostraremos que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j \, \alpha_j \, e^{-\lambda_j t} < \infty$$

*b*) Demostraremos que:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \, \alpha_j \, e^{-\lambda_j t}$$

es solución.

*a*) Como $\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n)\, d_i(n)\, e^{-\lambda_i t}$ es solución del problema truncado de orden n, sabemos que existe:

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) \in L^2(0,\infty)$$

que es la solución de norma mínima del problema de momentos completo. Por lo tanto $\varphi(t)$ pertenece a la clausura del subespacio de $L^2(0,\infty)$ generado por la sucesión de exponenciales:

$$\left\{e^{-\lambda_i t}\right\}_{i\in\mathbb{N}} .$$

Un resultado debido a Schwartz [S, pg. 33] permite afirmar que entonces $\varphi(t)$ admite un desarrollo en serie de Dirichlet:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i\, e^{-\lambda_i t}$$

normalmente convergente para $t \geq \varepsilon > 0$.
Sabemos además que existen:

$$\alpha_i = \lim_{n\to\infty} \alpha_i(n) \quad , \quad d_i = \lim_{n\to\infty} d_i(n)$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Veamos que $k_i = \alpha_i \cdot d_i$ , $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n)\, d_i(n)\, e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^{\infty} k_i\, e^{-\lambda_i t} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n)\, d_i(n)\, e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^{\infty} k_i\, e^{-\lambda_i t} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\alpha_i(n)\, d_i(n) - k_i\right] e^{-\lambda_i t}$$

donde se han definido $\alpha_i(n) = d_i(n) = 0$, si $i > n$. Como:

$$\left\{e^{-\lambda_i t}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

es un sistema *minimal* [S., pg. 16] resulta que:
$\lim_{n\to\infty}\left[\alpha_i(n)\, d_i(n) - k_i\right] = 0$ , $\forall\, i \in \mathbb{N}$. Entonces $\alpha_i\, d_i = k_i$ , $\forall\, i \in \mathbb{N}$, y por lo tanto:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j\, \alpha_j\, e^{-\lambda_j t} \in L^2(0,\infty).$$

*b*) Si $\varphi(t)$ fuera solución:

$$\left[ \sum_{i=1}^{\infty} d_i \alpha_i e^{-\lambda_i t} , e^{-\lambda_k t} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \alpha_i \frac{1}{\lambda_k + \lambda_i}$$

entonces debemos probar que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i \alpha_i \frac{1}{\lambda_k + \lambda_i} = c_k \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Si $k \leq n$:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(n) \alpha_i(n) \frac{1}{\lambda_k + \lambda_i} = \left( G_n D_n G_n D_n c(n) \right)_k = c_k$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d_i(n) \alpha_i(n) \frac{1}{\lambda_k + \lambda_i} = c_k \quad , \forall k \in \mathbb{N} .$$

Pero:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i \alpha_i e^{-\lambda_i t} \in L^2(0,\infty)$$

y por lo tanto:

$$c_k = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \alpha_i \frac{1}{\lambda_k + \lambda_i} \qquad \blacksquare$$

**3.4. Otra expresión para la solución.**

Sabemos que $\varphi_n(t)$, la única solución de norma mínima del problema finito de orden n, puede escribirse de la siguiente manera:

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n) \; d_i(n) \; e^{-\lambda_i t}$$

Pero como:

$$G_n D_n c(n) = G_n \begin{bmatrix} \alpha_1(n) & & 0 \\ & \alpha_2(n) & \\ 0 & & \ddots \quad \alpha_n(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(n) \\ d_2(n) \\ \vdots \\ d_n(n) \end{bmatrix}$$

podemos escribir:

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(n) \; e^{-\lambda_i t}$$

donde $\gamma(n) = \left\{\gamma_i(n)\right\}_{1\le i\le n} = D_n \; G_n \; D_n \; c(n).$

Pero $D_n \; G_n \; D_n = G_n^{-1}$ , entonces $\gamma(n) = \left\{\gamma_i(n)\right\}_{1\le i\le n} = G_n^{-1} \; c(n).$

La intención es hallar una expresión análoga para $\varphi(t)$, la solución de norma mínima del problema completo:

$$\left(\varphi(t) \; , \; e^{-\lambda_i t}\right) = c_i \; , \; \forall \; i \in \mathbb{N}.$$

Recordemos que:

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n) \; c_i e^{-\lambda_i t}$$

es una sucesión de elementos de $L^2(0,\infty)$ cuyas normas forman una sucesión creciente y acotada, por lo que existe:

$$P(t) = \lim_{n\to\infty} P_n(t) \in L^2(0,\infty)$$

Por lo tanto $P(t)$ pertenece a la clausura del subespacio de $L^2(0,\infty)$ generado por:

$$\left\{P_n(t)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

y, suponiendo nuevamente que existe una constante $\alpha$ tal que :

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i \ge \alpha > 0 \; , \; \forall \; i \in \mathbb{N}$$

el resultado de Schwartz mencionado en la sección anterior permite entonces afirmar que $P(t)$ admite un desarrollo en serie de Dirichlet:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \; e^{-\lambda_i t}$$

Pero $P(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n) \; c_i e^{-\lambda_i t}$ ; entonces:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n) \; c_i \; e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^{\infty} h_i \; e^{-\lambda_i t} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n) \; c_i \; e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^{\infty} h_i \; e^{-\lambda_i t}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i(n) \; c_i - h_i\right) e^{-\lambda_i t}$$

donde se han definido $\alpha_i(n) = 0$, si $i > n$. Como:

$$\left\{e^{-\lambda_i t}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

es un sistema *minimal* [S., pg.16] resulta que:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\alpha_i(n)\, c_i - h_i\right] = 0$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$. Entonces $\alpha_i\, c_i = k_i$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, y:

$$P(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, \alpha_j\, e^{-\lambda_j t} \in L^2(0,\infty).$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i\, c_i}{\lambda_i + \lambda_k} = \left(P(t)\ ,\ e^{-\lambda_k t}\right) < \infty\ ,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Entonces:

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n)\, d_i(n)\, e^{-\lambda_i t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j(n) c_j}{\lambda_j + \lambda_i}\right] \alpha_i(n)\, e^{-\lambda_i t} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j(n)\alpha_i(n)}{\lambda_j + \lambda_i}\, c_j\, e^{-\lambda_i t}.$$

Como $\varphi(t)$ admite un desarrollo en serie de Dirichlet:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j\, \alpha_j\, e^{-\lambda_j t} = \sum_{j=1}^{\infty} k_j\, e^{-\lambda_j t}$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j(n)\alpha_i(n)}{\lambda_j + \lambda_i}\, c_j\, e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, \alpha_i\, e^{-\lambda_i t} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left[\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\alpha_j(n)\alpha_i(n)}{\lambda_j + \lambda_i}\, c_j - d_i\, \alpha_i\right] e^{-\lambda_i t}$, donde se ha definido $\alpha_i(n) = 0$, si $i > n$. Por lo tanto:

$$\alpha_i d_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j(n)\alpha_i(n)}{\lambda_j + \lambda_i}\, c_j = \lim_{n\to\infty} \alpha_i(n) \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j(n)}{\lambda_j + \lambda_i}\, c_j =$$

$$= \alpha_i \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j(n)}{\lambda_j + \lambda_i}\, c_j.$$

Pero como $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_i\, c_i}{\lambda_i + \lambda_k}$ es convergente:

$$d_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j\, \alpha_j(n) \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, \alpha_j \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} = \Big[ G\ D\ c \Big]_i$$

Por lo tanto:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j\, \alpha_i}{\lambda_j + \lambda_i}\, c_j\, e^{-\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{\infty} [D\ G\ D\ c]_i\, e^{-\lambda_i t}.$$

CAPÍTULO 6

# LAS SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE MOMENTOS

## 1.- INTRODUCCION.

El objetivo de este capítulo es estudiar algunas propiedades de la solución del problema de momentos obtenida en el capítulo anterior, $\varphi(t)=\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j d_j e^{-\lambda_j t}$ .

En la sección **2** se estudia el comportamiento de los coeficientes $\alpha_i$. En la sección **2.4** se obtienen cotas para los coeficientes $\alpha_i$ , estudiando los productos infinitos que forman dichos coeficientes. lo cual se detalla en las secciones **2.2** y **2.3.**

Los resultados obtenidos en las secciones **2.6** y **2.7** se basan en reescribir los coeficientes $\alpha_i$ utilizando ciertas funciones estudiadas en **[B]**, como se muestra en la sección **2.5**.

En la sección **3** se analiza como se pueden obtener otras soluciones del problema de momentos que se está estudiando, en relación con la solución ya obtenida.

## 2.- ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS COEFICIENTES $\alpha_i$.

Recordemos que, para cada i $\in$ N,:

$$\alpha_i = 2\lambda_i \frac{\prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{\infty}{}' \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)}$$

donde $\prod{}'$ indica que el producto se realiza siempre que $k \neq i$ .

### 2.1.- Acotaciones para el numerador.

Sea $P_n = \prod_{k=1}^{n}{}' \left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)$. Entonces :

$$P_n \leq e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_1}} e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_2}} e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_3}} \ldots e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_n}} = e^{\lambda_i\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}\right)} = e^{\lambda_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}} ,k \neq i .$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} P_n \leq e^{\lambda_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}} ,k \neq i$ .

Si notamos $S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$, $S' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$, $k \neq i$, resulta que:

Pero: $$E'(\lambda)=\sum_{s=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{\lambda_s}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\right]=-\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_s}\prod_{k=1}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\right].$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)\le e^{\lambda_i S'}. \qquad \textbf{(6.1)}$$

Además:

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}{}'\left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)\ge 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_k}=1+\lambda_i\sum_{k=1}^{n}{}'\frac{1}{\lambda_k}.$$

Luego:

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}'\left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)\ge 1+\lambda_i S' \qquad \textbf{(6.2)}$$

**2.2.- Acotaciones para el denominador.**

$$Q_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)\le e^{\frac{-\lambda_i}{\lambda_1}}e^{\frac{-\lambda_i}{\lambda_2}}\cdots e^{\frac{-\lambda_i}{\lambda_n}}=e^{-\lambda_i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}}.$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty}Q_n\le\lim_{n\to\infty}e^{-\lambda_i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}}=e^{-\lambda_i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}}$$

es decir:

$$\prod_{k=1}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)\le e^{-\lambda_i\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{\lambda_k}} \qquad \textbf{(6.3)}$$

para i impar, pues $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)\ge 0$ si i es impar.

Si el índice de condensación de $\{\lambda_i\}_{i\in N}$ es cero **[B]**, dada:

$$E(\lambda)=\prod_{k=1}^{\infty}{}'\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)$$

cualquiera sea $\eta\ge 0$ existe un índice i suficientemente grande tal que:

$$|E'(\lambda_i)|\ge e^{-\eta\lambda_i}.$$

Luego:

$$\left|E'(\lambda_i)\right| = \left|\frac{1}{\lambda_i} {\prod_{k=1}^{\infty}}' \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)\right| \geq e^{-\eta\lambda_i} \quad . \tag{6.4}$$

Entonces resulta que:

Si i es impar:
$$ {\prod_{k=1}^{\infty}}' \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \geq \lambda_i \, e^{-\eta\lambda_i} \tag{6.5}$$

Si i es par:
$$ {\prod_{k=1}^{\infty}}' \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \leq -\lambda_i \, e^{-\eta\lambda_i} \tag{6.6}$$

Además, si i es par:

$$\prod_{k=1}^{i-2}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \leq \prod_{k=1}^{i-2}\left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \leq e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_1}} e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_2}} \cdots e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-2}}} \quad \text{y} \quad \prod_{k=i+1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \leq e^{-\lambda_i \sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}}$$

Por lo tanto:

$$\prod_{k=1}^{i-2}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \prod_{k=i+1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \leq e^{-\lambda_i \sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}} e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_1}} e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_2}} \cdots e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-2}}}$$

$${\prod_{k=1}^{\infty}}' \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \geq e^{\lambda_i \sum_{k=1}^{i-2}\frac{1}{\lambda_k}} \; e^{-\lambda_i \sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}} \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right).$$

## 2.3.- Acotaciones para los coeficientes $\alpha_i$.

$$\alpha_i \leq \frac{2\lambda_i \, e^{\lambda_i {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{\lambda_k}}}{e^{\lambda_i \sum_{k=1}^{i-2}\frac{1}{\lambda_k}} \; e^{-\lambda_i \sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}} \left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)} = \frac{2\lambda_i}{\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)} \cdot e^{\lambda_i \left({\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{\lambda_k} - \sum_{k=1}^{i-2}\frac{1}{\lambda_k} + \sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)} =$$

$$\frac{2\lambda_i}{\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)} \cdot e^{\lambda_i \left(\frac{1}{\lambda_{i-1}} + 2\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)} = \frac{2\lambda_i}{\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)} \cdot e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}} \, e^{\left(2\lambda_i \sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)}.$$

Si i es impar, de **(6.1)**, **(6.2)**, **(6.3)** y **(6.5)** resulta que:

$$\alpha_i \leq 2\lambda_i \frac{e^{\lambda_i {\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{\lambda_k}}}{\lambda_i \, e^{-\eta\lambda_i}} = 2 e^{\lambda_i \left({\sum_{k=1}^{\infty}}' \frac{1}{\lambda_k} + \eta\right)}$$

y además:

$$\alpha_i \geq 2\lambda_i \frac{1+\lambda_i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k}}{e^{-\lambda_i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k}}} = 2\lambda_i \left(1+\lambda_i \sum_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k}\right) e^{\lambda_i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k}}$$

Entonces:

$$2\lambda_i \left(1+\lambda_i \sum_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k}\right) e^{\lambda_i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k}} \leq \alpha_i \leq 2e^{\lambda_i \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k} + \eta\right)}$$

Por lo tanto $\alpha_i \to \infty$, para $i \to \infty$, i impar.

Si i es par, de **(6.2)** y **(6.6)** resulta que:

$$\alpha_i \geq 2\lambda_i \frac{1+\lambda_i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k}}{-\lambda_i e^{-\eta\lambda_i}} = -2\left(1+\lambda_i \sum_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k}\right) e^{\eta\lambda_i}$$

y entonces:

$$-2\left(1+\lambda_i \sum_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{1}{\lambda_k}\right) e^{\eta\lambda_i} \leq \alpha_i \leq \frac{2\lambda_i}{\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)} \cdot e^{\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}} e^{\left(2\lambda_i \sum\limits_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\right)}.$$

Por lo tanto, $\alpha_i \to -\infty$, para $i \to \infty$, i par.

## 2.4.- Otra expresión para los coeficientes $\alpha_i$.

$$\alpha_i = \lim_{n\to\infty} \alpha_i(n) = \lim_{n\to\infty} 2\lambda_i \prod_{k=1}^{\infty} \cdot \frac{\lambda_i + \lambda_k}{\lambda_k - \lambda_i} = \lim_{n\to\infty} 2\lambda_i \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \cdot \left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)^2}{\prod\limits_{k=1}^{n} \cdot \left(1-\frac{\lambda_i^2}{\lambda_k^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \cdot \left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)^2}{\frac{1}{\lambda_i} \prod\limits_{k=1}^{n} \cdot \left(1-\frac{\lambda_i^2}{\lambda_k^2}\right)}.$$

Sean entonces:

$$F_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right)^2, \quad H_n(z) = \frac{1}{\lambda_i} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Luego: $\alpha_i = \lim\limits_{n\to\infty} 2\dfrac{F_n(\lambda_i)}{H_n(\lambda_i)}$

**2.5.- Estudio del comportamiento de $F_n(z), H_n(z)$ cuando $n \to \infty$**

$F_n(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{z}{\lambda_k}\right)^2$, y la serie: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\dfrac{z}{\lambda_k}\right| < \infty$ es uniformemente convergente en toda región cerrada del plano, resulta que:

$$F_n(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right)^2 \to F(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right)^2$$

cuando $n \to \infty$, $F(z)$ analítica en cualquier región cerrada del plano **[Kno]**.

$$H_n(z) = \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right) = \frac{1}{z}\frac{\lambda_i^2}{\left(\lambda_i^2 - z^2\right)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Pero como $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\dfrac{z}{\lambda_k^2}\right| < \infty$ entonces:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right) \to \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Por lo tanto, para $z \neq \lambda_i$ :

$$\mathrm{H}_n(z) \to \frac{\lambda_i^2}{z(\lambda_i - z)(\lambda_i + z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Llamando $C(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$, resulta:

$\mathrm{H}_n(z) \to \dfrac{\lambda_i^2}{z(\lambda_i - z)(\lambda_i + z)}C(z)$, para $z \neq \lambda_i, n \to \infty$ .

Si $z \to \lambda_i$ : $\lim\limits_{z\to\lambda_i}\dfrac{\lambda_i^2}{z(\lambda_i - z)(\lambda_i + z)}C(z) = -\dfrac{1}{2}C'(\lambda_i)$

Definiendo: $H(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i^2}{z\left(\lambda_i^2 - z^2\right)}C(z) & , z \neq \lambda_i \\ -\dfrac{1}{2}C'(\lambda_i) & , z = \lambda_i \end{cases}$

resulta: $H_n(z) \to H(z)$, $si\ n \to \infty$.

Por lo tanto: $|C'(\lambda_i)| = |2H(\lambda_i)|$.

Entonces: $\alpha_i = 2\dfrac{F(\lambda_i)}{H(\lambda_i)} = -4\dfrac{F(\lambda_i)}{C'(\lambda_i)}$, y $|\alpha_i| = 4\left|\dfrac{F(\lambda_i)}{C'(\lambda_i)}\right|$.

Además, el índice de condensación de la sucesión $\{\lambda_i\}_{i\in N}$ es cero, es decir:

$$\delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \log\left|\frac{1}{C'(\lambda_n)}\right| = 0$$

luego:

$$\log|\alpha_i| = \log|F(\lambda_i)| - \log|C'(\lambda_i)|$$

$$\frac{1}{\lambda_i}\log|\alpha_i| - \frac{1}{\lambda_i}\log|F(\lambda_i)| = \frac{1}{\lambda_i}\log\left|\frac{1}{C'(\lambda_i)}\right|$$

$$\therefore \overline{\lim_{i\to\infty}}\left(\frac{1}{\lambda_i}\log|\alpha_i| - \frac{1}{\lambda_i}\log|F(\lambda_i)|\right) = \overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{1}{\lambda_i}\log\left|\frac{1}{C'(\lambda_i)}\right| = 0.$$

Entonces:

$$|\alpha_i| \approx |F(\lambda_i)|$$

**2.6.- Algunas características de $F(z)$.**

Consideremos $\tilde{F}(\lambda_i) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{z}{\lambda_k}\right)$. $\tilde{F}(\lambda_i)$ es un producto canónico con ceros en $\{-\lambda_k\}_{k\in N}$, con la propiedad que $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{|\lambda_k|} < \infty$. Entonces tiene "genus" cero y orden $\rho \le 1$ **[B]**.

Sea $\tilde{M}(r) = \max\left\{|\tilde{F}(\lambda_i)| : |z| = r\right\}$ ,entonces $\tilde{M}(r) \le e^{r\rho}$ , $\rho \le 1$.

Pero además $\tilde{F}(z)$ es una función entera de tipo exponencial cero, $\therefore$

$$\tilde{M}(r) \le e^{\varepsilon r}$$

para cualquier $\varepsilon$ dado, r suficientemente grande. Además, por un teorema **[B]** ,para cada $\varepsilon > 0$:

$$|\tilde{F}(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \ , \rho \le 1$$

sobre círculos $|z|=r$ de radio arbitrariamente grande.Luego:

$$e^{-r^{\rho+\varepsilon}} < |F(z)| < e^{\varepsilon r}.$$

## 3.- SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE MOMENTOS.

Si $\psi(t)$ es otra solución del problema de momentos:

$$0 = \int_0^\infty e^{-\lambda_i t} \left(\psi(t) - \varphi(t)\right) dt.$$

Como la transformada de Laplace es una función analítica, se busca caracterizar aquellas funciones analíticas que se anulan en $\{\lambda_i\}_{i\in N}$, donde esta sucesión es tal que: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$ .

Consideremos el siguiente producto infinito:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Es absolutamente convergente pues:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda_k}\right| < \infty$$

y por lo tanto representa una función entera. Además, la función entera más general sin ceros es de la forma: $e^{K(z)}$, donde $K(z)$ es una función entera **[Cop]**. Luego, la función entera mas general con los ceros en $\{\lambda_i\}_{i\in N}$ es:

$$G_K(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{K(z)}.$$

Entonces, conocida la solución de norma mínima $\varphi(t)$ del problema de momentos, son también soluciones las obtenidas sumándole a $\varphi(t)$ funciones cuyas transformadas de Laplace se anulen en $\{\lambda_i\}_{i\in N}$ , es decir, tales que sus transformadas de Laplace sean de la forma $G_K(z)$, $K(z)$ función entera.

# BIBLIOGRAFÍA


**[S]** SCHWARTZ, Laurent *"Etude des sommes d'exponentielles"*
Deuxieme edition, Paris: Herman (1959)

**[A]** AKHIEZER, N. Y. *"The classical moment problem"*
Oliver and Boyd, Londres (1965)

**[W]** WIDDER, D. V. *"The Laplace Transform"*
Princeton, Univ. Press, New Jersey (1941)

**[ST]** SHOHAT and TAMARKIN, *"The problem of moments"*
Am. Math. Soc. (1943)

**[MC]** MISCHA COTLAR *"El problema de momentos y la teoría de operadores hermitianos"*
Simposium Univ. Nacional de Cuyo y Unesco.

**[L]** LANDAU, H. *"The classical moment problem: Hilbertian proofs"*
Journal of Functional Analysis 38, 255-272 (1980)

**[AK]** AKHIEZER and KREIN *"Some questions in the theory of moments"*
Vol. 2, Translations of Math. Monographs. (1962)

**[Y]** YOUNG, R. *"An introduction to nonharmonic Fourier Series"*
Academic Press. (1980)

**[AG]** AKHIEZER and GLAZMAN *"The theory of linear operators in Hilbert Spaces"*
English Trans. of first de., Ungar, New York (1961)

**[K]** KOROBEINIK, J. *"The moment problem, interpolation and basicity"*
Math. USSR, Izvestija, vol 13, nro. 2 (1979)

**[FR]** FATTORINI, H. - RUSSELL, D. *"Exact controllability theorems for lineal pararbolic equations in one space dimension"*
Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 43, nro.4. p. 272-292 (1971)

**[F]** FATTORINI, H. *"Boundary control systems"*

Siam Journal on Control 6, 349-385 (1968)

**[CH]** COURANT, H. - HILBERT, D. *"Methods of Mathematical Physics"*
Vol. I, New York: Interscience Pub. Co. (1953)

**[DS]** DUNFORD, N. - SCHWARTZ, J. *"Linear operators. Part II"*
New York: Interscience Pub. Co. (1963)

**[Bi]** BIRKHOFF, G. "A source book in classical analysis"
Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press (1973)

**[KN]** KREIN - NUDEL'MAN *"The Markov moment problem and extremal problems"*
Transslations fo Math. Monographs, vol. 50 (1977)

**[D]** DIEUDONNE, J. *"History of functional analysis"*
North Holland. Math. Studies, vol. 77 (1981)

**[Be]** BELL, E. *"Development of Mathematics"*
Mc. Graw Hill (1945)

**[KR]** KREYSYG, E. *"Introductory functional analysis with applications"*
John Wiley and Sons (1978)

**[RP]** REY PASTOR, J. *"Historia de la matemática"*
Espasa Calpe (1951)

**[C]** CAJORI, F. *"A history of mathematics"*
Mc. Millan Company, 2da. ed. (1919)

**[H]** HILLE *"Methods in classical and functional analysis"*
Addison - Wesley (1972)

**[Cop]** COPSON, E. *"An introduction to the theory functions of a complex variable"*
Oxford (1962)

**[Kno]** KNOPP, K. *"Theory of functions"*
New York, Dover Publications.

**[B]** BERNSTEIN, V. *"Lecons sur les progrés récents de la théorie des séries de Dirichlet"*
París, Gauthier - Villas (1933)