INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 46

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1995 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 46

Algebras de Boole monádicas libres

I. VIGLIZZO

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1995

Algebras de Boole monádicas libres

por

Ignacio Viglizzo

Seminario sobre álgebras de Boole monádicas

Profesor: Luiz Monteiro.

Universidad Nacional del Sur.

Diciembre de 1991.

Algebras de Boole monádicas libres

La determinación del álgebra de Boole monádica con un número n finito de generadores libres ha sido resuelto por diversos autores, utilizando cada uno de ellos diferentes técnicas.

El primer trabajo se publicó en 1946 y se debe a R. Carnap [3]. Luego aparecen los trabajos de H. Bass [1] en 1958, P. Halmos [5] en 1959, Héng-Shan Gao [4] en 1963, L. Henkin, D. Monk y A. Tarski [8] en 1971 y L. Monteiro [12] en 1978. Los resultados de Halmos tambin aparecen en su libro *Algebraic logic* [7].

Es bien conocido que el concepto de álgebra de Boole es equivalente al concepto de anillo booleano (G. Birkhoff,[2]). A. Massé [9] en 1970 hace una exposición sobre anillos booleanos monádicos con un número finito de generadores libres, basándose en los resultados de H. Bass.

Halmos en su trabajo [5] indica la construcción de un álgebra de Boole monádica con un conjunto arbitrario de generadores libres, para lo cual utiliza nociones de topología. Aquí presentamos una exposición de los resultados de Halmos para el caso en que el conjunto de generadores libres es finito, caso este en que no son necesarias las nociones topológicas. De este modo ampliamos el espectro de posibles lectores e indicamos las simplificaciones que se introducen al considerar el caso de un conjunto de generadores finito.

Hemos dividido la presente exposición en tres partes, dedicando la primera a repasar algunos resultados de la teoría de la álgebras de Boole monádicas e introducir otros que serán necesarios para la comprensión del trabajo. En la segunda parte se define el concepto de *extensión monádica libre* de un álgebra de Boole debida a P. Halmos y se indica una construcción de la misma para el caso finito. Finalmente, en la tercera parte se hace uso de esta construcción para mostrar cuál es el álgebra de Boole monádica libre con n generadores.

1 Introducción

Un álgebra de Boole monádica es un par $(A, \exists)$, donde A es un álgebra de Boole y $\exists$ es una aplicación de A en A que verifica:

$\exists_0$) $\exists 0 = 0$,

$\exists_1$) $p \leq \exists p$ para todo $p \in A$,

$\exists_2$) $\exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q$ para todo $p, q \in A$.

Una aplicación en estas condiciones se dice un *cuantificador existencial.*

Dada un álgebra de Boole monádica A, y un subconjunto B de A, diremos que B es una *subálgebra monádica* de A si dados dos elementos cualesquiera $a, b \in B$, entonces $a \wedge b, a \vee b \in B$, y si $a \in B$ entonces $-a$ y $\exists a \in B$.

Si B es un álgebra de Boole finita no trivial, notaremos con $\mathcal{A}(B)$ el conjunto de todos sus átomos. Con $\mathbf{2}$ notaremos el álgebra de Boole con un átomo. Si X es un conjunto no vacío notaremos con $\mathbf{2}^X$ el conjunto de todas las funciones de X en $\mathbf{2}$. Este conjunto algebrizado en la forma natural es un álgebra de Boole.

Si X es un subconjunto de A, llamaremos subálgebra monádica generada por X a la menor de las subálgebras monádicas que contienen a X, y la notaremos con $SM(X)$.

Una aplicación h de un álgebra de Boole A en un álgebra de Boole B se dirá un *hemimorfismo* si:

H_1) $h(0) = 0$,

H_2) $h(p \vee q) = h(p) \vee h(q)$ para todo $p, q \in A$.

Si además se verifica:

H_3) $h(1) = 1$,

diremos que h es un *1-hemimorfismo.*

Todo cuantificador es un 1-hemimorfismo. En efecto,

H_1) es igual a $\exists_0$),

H_2)
1. $0 = -\exists p \wedge p$ luego, $\exists 0 = 0 = \exists(-\exists p \wedge \exists p) = \exists - \exists p \wedge \exists p$, de manera que $\exists - \exists p = -\exists p$.
2. $K(A) = \{p \in A : p = \exists p\}$ es una subálgebra booleana de A.
   Si $p, q \in K(A), p = \exists p$ y $q = \exists q$. Entonces $\exists(p \wedge q) = \exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q = p \wedge q$, i.e. $p \wedge q \in K(A)$. Si $p \in K(A), \exists p = p$ y $\exists - p = \exists - \exists p = -\exists p = -p$; luego $-p \in K(A)$.
3. Si $p \leq q$, entonces $\exists p \leq \exists q$.
   De $p \leq q \leq \exists q$ se deduce que $p \wedge \exists q = p$, y entonces $\exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q = \exists p$, esto es, $\exists p \leq \exists q$.

4. Finalmente, de $p \leq p \vee q$ y $q \leq p \vee q, \exists p \leq \exists(p \vee q)$ y $\exists q \leq (p \vee q)$. Por lo tanto, $\exists p \vee \exists q \leq \exists(p \vee q)$ (i).
   De $p \leq \exists p$ y $q \leq \exists q, p \vee q \leq \exists p \vee \exists q$ y $\exists(p \vee q) \leq \exists(\exists p \vee \exists q) = \exists p \vee \exists q$ (ii).
   Por (i) y (ii) resulta $\exists(p \vee q) = \exists p \vee \exists q$.

H_3) Por $\exists_1), 1 \leq \exists 1$; luego $1 = \exists 1$.

Lema 1.1 *Si A es un álgebra de Boole finita no trivial, un hemimorfismo h de A en un álgebra de Boole B está determinado por los valores que h toma en los átomos de A.*

Dem. Sea $\mathcal{A}(A) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de los átomos de A, y supongamos conocidos los $h(a_i), 1 \leq i \leq n$.

Si $x \in A$, y $x = 0$, por $H_1), h(x) = 0$; si $x \neq 0$, como A es un álgebra de Boole finita, x puede ser expresado (de una única manera) como supremo de elementos en $\mathcal{A}(A)$:

$$x = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(A) : a \leq x\}.$$

De esta manera

$$\begin{aligned} h(x) &= h(\bigvee\{a \in \mathcal{A}(A) : a \leq x\}) = \\ &= \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(A), a \leq x\}. \end{aligned}$$

□

Lema 1.2 *Si B es un álgebra de Boole finita no trivial, y h es un hemimorfismo de B en* **2**, *entonces h es un homomorfismo si y solamente si existe un único átomo a_h de B tal que $h(a_h) = 1$.*

Dem. Sea h un homomorfismo y supongamos que para todo $a \in A(B), h(a) = 0$. Entonces, por el Lema 1.1, $h(1) = 0$, absurdo pues h es un homomorfismo. Luego, existe al menos un elemento $a_h \in \mathcal{A}(B)$ tal que $h(ah) = 1$. Supongamos ahora que existen a_h y $a'_h \in \mathcal{A}(B), a_h \neq a'_h$ y tales que $h(a_h) = 1 = h(a'_h)$. Como $a_h, a'_h \in \mathcal{A}(B)$ y $a_h \neq a'_h, a_h \wedge a'_h = 0$, luego $0 = h(a_h \wedge a'_h) = h(a_h) \wedge h(a'_h) = 1 \wedge 1 = 1$. Absurdo.

Sea h un hemimorfismo y a_h el único átomo de B tal que $h(a_h) = 1$, luego $h(a) = 0$ cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}(B) - \{a_h\}$. Veamos que h es un homomorfismo. Para ello nos basta probar que $h(1) = 1$ y $h(p \wedge q) = h(p) \wedge h(q)$.

$$\begin{aligned} h(1) = h(\bigvee\{a : a \in \mathcal{A}(B)\}) &= \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(B)\} = \\ &= h(a_h) \vee \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(B) - \{a_h\}\} = \\ &= 1 \vee \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(B) - \{a_h\}\} = 1. \end{aligned}$$

Sean $x, y \in B$, y distingamos los siguientes casos:

- $a_h \leq x$ y $a_h \leq y$.
  En este caso, $a_h \leq x \wedge y$, y por lo tanto, $h(x \wedge y) = 1 = 1 \wedge 1 = h(x) \wedge h(y)$.

- $a_h \leq x$ y $a_h \not\leq y$.
  a_h no precede a $x \wedge y$ pues en este caso $a_h \leq x \wedge y \leq y$, luego $h(x \wedge y) = 0 = 1 \wedge 0 = h(x) \wedge h(y)$.

- $a_h \not\leq x$ y $a_h \leq y$.
  Este caso es igual al anterior.

- $a_h \not\leq x$ y $a_h \not\leq y$.
  Es claro que $a_h \not\leq x \wedge y$, y por lo tanto, $h(x \wedge y) = 0 = 0 \wedge 0 = h(x) \wedge h(y)$.

□

Lema 1.3 *Si B es un álgebra de Boole finita no trivial y h es un 1- hemimorfismo de B en $\mathbf{2}$, entonces existe un homomorfismo que lo precede.*

Dem. Como h es un 1-hemimorfismo de B en $\mathbf{2}$, existe un $a \in \mathcal{A}(B)$ tal que $h(a) = 1$. En efecto, si para todo $a \in \mathcal{A}(B), h(a) = 0$ entonces $h(1) = h(\bigvee\{a : a \in \mathcal{A}(B)\}) = \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(B)\} = 0$. Absurdo.

Sea $a \in \mathcal{A}(B)$ tal que $h(a) = 1$ y definamos una función $y_a : B \mapsto \mathbf{2}$ del siguiente modo: $y_a(0) = 0$; $y_a(a) = 1$; $y_a(b) = 0$, cualquiera que sea $b \in \mathcal{A}(B) - \{a\}$; y si $p \in B - (\mathcal{A}(B) \cup \{0\}), y_a(p) = \bigvee\{y_a(b) : b \in \mathcal{A}(B), b \leq p\}$.

Es claro que y_a es un homomorfismo. Veamos que $y_a \leq h$. En efecto $y_a(0) = 0 \leq h(0), y_a(a) = 1 \leq h(a) = 1$, si $y_a(b) = 0 \leq h(b)$ cualquiera que sea $b \in \mathcal{A}(B) - \{a\}$.
Si $p \in B - \mathcal{A}(B)$ y $a \leq p$ entonces por definición $y_a(p) = 1$.
$h(p) = h(a) \vee \bigvee\{h(b) : b \in \mathcal{A}(B) - \{a\}, b \leq p\} = 1 \vee \bigvee\{h(b) : b \in \mathcal{A}(B) - \{a\}, b \leq p\} = 1$. Si $p \in B - \mathcal{A}(B)$ y $a \notin \{b \in \mathcal{A}(B) : b \leq p\}$, luego $y_a(p) = 0 \leq h(p)$. □

Lema 1.4 *Si B es un álgebra de Boole finita no trivial e $Y = Hom(B,\mathbf{2})$ el conjunto de todos los homomorfismos de B en $\mathbf{2}$, entonces B es isomorfa al álgebra de Boole $\mathbf{2}^Y$.*

Dem. Dado $p \in B$, pongamos por definición $\varphi(p) = P$, donde P es la función de Y en $\mathbf{2}$ definida del siguiente modo: $P(y) = y(p)$, cualquiera que sea $y \in Y, p \in B$ (p fijo).

Probemos que φ es un isomorfismo de B en $\mathbf{2}^Y$.

1. $\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) \wedge \varphi(q)$.
   Sean $h = p \wedge q, \varphi(h) = H, \varphi(p) = P, \varphi(q) = Q$. Luego $H(y) = y(h) = y(p \wedge q) = y(p) \wedge y(q) = P(y) \wedge Q(y) = (P \wedge Q)(y)$. Es decir, $H = P \wedge Q$, como queríamos demostrar.

   Análogamente se prueba:

2. $\varphi(p \vee q) = \varphi(p) \vee \varphi(q)$.

   Representaremos con $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ las funciones de Y en $\mathbf{2}$ definidas del siguiente modo: $\mathbf{0}(y) = 0$, $\mathbf{1}(y) = 1$ cualquiera que sea $y \in Y$. Es fácil ver que:

3. $\varphi(0) = \mathbf{0}$, y

4. $\varphi(1) = \mathbf{1}$. Acabamos así de probar que φ es un homomorfismo.

5. φ es inyectiva. Sean $p, q \in B$, tales que $\varphi(p) = \varphi(q)$, esto es $P(y) = Q(y)$ cualquiera que sea $y \in Y$, luego $y(p) = y(q)$ cualquiera que sea $y \in Y$. Por lo tanto $y(p \vee -q) = 1 = y(q \vee -p)$ cualquiera qua sea $y \in Y$, y en consecuencia $p \vee -q, q \vee -p \in Nuc(y)$ cualquiera que sea $y \in Y$. Luego $p \vee -q = q \vee -p = 1$ de donde resulta $p = q$.

6. φ es sobreyectiva. Sea $Q \in \mathbf{2}^Y$. Por el lema 1.2 sabemos que para cada $z \in Hom(B,\mathbf{2})$ existe un único $a_z \in \mathcal{A}(B)$ tal que $z(a_z) = 1$. Sean $U = Q^{-1}(1)$, y $p = \bigvee\{a_z : z \in U\} = \bigvee\{a_z : Q(z) = 1\}(*)$. Pongamos $\varphi(p) = P$ y probemos que $P = Q$, i.e. $P(w) = Q(w)$ cualquiera que sea $w \in Y = Hom(B,\mathbf{2})$.

   Si $w \notin U, Q(w) = 0$ y $P(w) \overset{def.}{=} w(p) \overset{(*)}{=} \bigvee\{w(a_z) : z \in U\}$. Como el único átomo a de B tal que $w(a) = 1$ es a_w, y $w \notin U$ entonces $w(a_z) = 0$, luego $P(w) = 0$.

   Si $w \in U$, entonces $Q(w) = 1, P(w) = w(p) = \bigvee\{w(a_z) : z \in U\} = w(a_w) \vee \bigvee\{w(a_z) : z \in U - \{w\}\} = 1 \vee \bigvee\{w(a_z) : z \in U - \{w\}\} = 1$.

□

Al conjunto $Y = Hom(B,\mathbf{2})$ se lo denomina espacio dual del álgebra de Boole B. De acuerdo con el lema anterior, podemos indicar un elemento de B mostrando cuánto vale cada homomorfismo del espacio dual en dicho elemento. Si X es el espacio dual de un álgebra de Boole A y f una función de Y en X, entonces se define la función dual de $f, f^* : A \mapsto \mathbf{2}^Y \cong B$ como sigue :

$$f^*(p)(y) = \bigvee\{x(p) : f(y) = x\} \text{ para todo } y \in Y, p \in A, \tag{1}$$

y se prueba que f^* es un homomorfismo. También se prueba que f^* es epimorfismo si y sólo si f es inyectiva y que f^* es monomorfismo si y sólo si f es sobreyectiva. (Es interesante ver que esta definición coincide con la de Sikorski de homomorfismo inducido por una función puntual [13] en el caso en que se considera al conjunto $\mathcal{A}(B)$ como espacio dual, o espacio de representación del álgebra B.)

Lema 1.5 *Todo 1-hemimorfismo de un álgebra de Boole finita no trivial A en $\mathbf{2}$ es supremo de los homomorfismos que lo preceden.*

Dem. En vista del resultado del lema 1.1, bastará con probar que para cada $a \in \mathcal{A}(A)$,

$$h(a) = \bigvee\{y(a) : y \in Hom(B, \mathbf{2}), y(x) \leq h(x) \text{ para todo } x \in A\}.$$

Supongamos que $h(a)$ es 1. Sea y_a el homomorfismo tal que a es el único átomo tal que $y_a(a) = 1$. Es claro que $y_a \leq h$,y por lo tanto $\bigvee\{y(a) : y \in Hom(B, \mathbf{2}), y \leq h\} = 1$.

Si $h(a) = 0$ entonces para todo $y \leq h, y(a) \leq h(a) = 0$, luego

$$\bigvee\{y(a) : y \in Hom(B, \mathbf{2}), y \leq h\} = 0.$$

□

Finalmente recordemos que si X es un subconjunto finito de un reticulado superior R con primer elemento 0, notaremos con $s(X)$ al conjunto de todos los elementos de R que se obtienen haciendo el supremo de partes finitas no vacías de X, esto es $z \in s(X)$ *sssi* $z = \bigvee\{y : y \in Y, Y \subseteq X, Y$ finito no vacío$\}$.

Dada un álgebra de Boole B, si ponemos por definición $x + y = (-x \wedge y) \vee (x \wedge -y)$, en particular $x + 0 = x$ y $x + 1 = -x$ para todo $x \in B$. Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq B$ y $B_n = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) : b_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$, se define $m_b(G) = \bigwedge_{i=1}^{n}(g_i + b_i)$ y $m(G) = \{m_b(G) : b \in B_n\}$. Si notamos con $SB(G)$ la subálgebra booleana generada por G, entonces $SB(G) = s(m(G)) \cup \{0\}$. Si $(B, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ entonces $SM(G) = SB(m(G) \cup \exists m(G))$. En el caso en que G es una subálgebra booleana de B es fácil ver que $m(G) = \mathcal{A}(G) \cup \{0\}$.

2 Extensiones monádicas libres

Diremos que un álgebra de Boole monádica A es una *extensión monádica libre* (P. Halmos, [5]) de un álgebra de Boole B si:

(i) B es una subálgebra booleana de A,

(ii) A es la subálgebra monádica generada por B, i.e. $A = SM(B)$,

(iii) todo homomorfismo booleano g de B en un álgebra de Boole monádica arbitraria C se extiende a un homomorfismo monádico (necesariamente único) f de A en C.

A continuación daremos una construcción de la extensión monádica libre para el caso en que el álgebra B sea finita, siguiendo los pasos indicados en el trabajo de P. Halmos.
Supongamos que B es el álgebra de Boole con t átomos, lo que nos permitirá calcular el número de elementos de A.

- **Primer paso.** Sea $W = \mathbf{2}^B$, es decir el conjunto de funciones de B en $\mathbf{2}$. Es claro que el número de elementos en W es $2^{(2^t)}$.

- **Segundo paso.** Sea $Y = Hom(B,\mathbf{2})$, el conjunto de los homorfismos de B en $\mathbf{2}$, y consideremos el conjunto $Y \times W$; este conjunto tiene $t \cdot 2^{(2^t)}$ elementos.

- **Tercer paso.** Sea V el conjunto de los 1-hemimorfismos de B en $\mathbf{2}$. $h \in W$ será un 1-hemimorfismo si y sólo si h aplica alguno de los átomos de B en 1 (Ver lema 1.3). Luego, V tiene $2t - 1$ elementos, e $Y \times V, t \cdot (2t - 1)$ elementos.

  Sea $X \subseteq Y \times V, X = \{(y, v) : y \in Y, v \in V, y \leq v\}$.

  De los lemas 1.1, 1.2 y 1.3, se desprende que para cada homorfismo en Y, hay $2t - 1$ hemimorfismos que lo dominan. En consecuencia, X tiene $t \cdot (2t - 1)$ elementos.

- **Cuarto paso.** Sea A el álgebra de Boole de todas las funciones de X en $\mathbf{2}$, y definamos para todo $p \in A$,

$$(\exists p)(y, v) = \bigvee \{p(u, v) : u \in Y, u \leq v\} \tag{2}$$

Para ver que $(A, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica bastará probar las siguientes propiedades:

$\exists_1$) $\exists 0 = 0$ resulta inmediato de la definición 2

$\exists_2$) Para todo $p \in A, p \leq \exists p$.
Es claro que para todo par $(y, v) \in X$,

$$p(y, v) \leq \bigvee \{p(u, v) : u \leq v\} = (\exists p)(y, v).$$

$\exists_3$) Para todo $p, q \in A$, vale que para cada par $(y, v) \in X$,

$$\begin{aligned}
\exists(p \wedge \exists q)(y,v) &= \bigvee_{u \leq v} (p \wedge \exists q)(u,v) \\
&= \bigvee_{u \leq v} [p(u,v) \wedge (\exists q)(u,v)] \\
&= [\bigvee_{u \leq v} p(u,v)] \wedge [\bigvee_{u \leq v} (\exists q)(u,v)] \\
&= (\exists p)(y,v) \wedge [\bigvee_{u \leq v} (\bigvee_{w \leq v} q(w,v))] \\
&= (\exists p)(y,v) \wedge (\bigvee_{w \leq v} q(w,v)) \\
&= (\exists p)(y,v) \wedge (\exists q)(y,v) \\
&= (\exists p \wedge \exists q)(y,v)
\end{aligned}$$

Luego $\exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q$ para todo $p, q \in \mathbf{2}^X$.

Lo que probaremos en realidad no es que el álgebra de Boole monádica A es la extensión monádica libre de B, sino de una subálgebra de A que es isomorfa a B.

Esta inmersión de B en A se hará de la siguiente manera: si consideramos a los elementos de X como el espacio dual de A, se ve que hay una proyección natural $c : X \mapsto Y$ definida por $c(y, v) = y$.

c es una función sobreyectiva: si $y \in Y$, es claro que el par (y, y) está en X y $c(y, y) = y$. Luego h, el homomorfismo dual de c, es un monomorfimo, de manera que B es isomorfa a $h(B)$.

Queda claro que $h(B)$ es una subálgebra de A, y es en este sentido que se verifica (i).

De acuerdo a la definición 2,

$$\begin{aligned}
(hp)(y,v) &= \bigvee\{x(p) : c(y,v) = x\} = \\
&= \bigvee\{y(p) : c(y,v) = y\} = y(p).
\end{aligned} \tag{3}$$

De 3 y el lema 1.5, se obtiene:

$$\begin{aligned}
(\exists hp)(y,v) &= \bigvee_{u \leq v} (hp)(u,v) = \\
&= \bigvee_{u \leq v} u(p) = v(p).
\end{aligned} \tag{4}$$

Veamos ahora que se verifica (ii), es decir, que $SM(h(B)) = A$. Por lo indicado anteriormente, $SM(h(B)) = SB(m(h(B)) \cup \exists m(h(B)))$, y como $h(B)$ es una subálgebra booleana,

$$\begin{aligned}
SM(h(B)) &= SB(\mathcal{A}(h(B)) \cup \exists \mathcal{A}(h(B))) = \\
&= SB(h(\mathcal{A}(B)) \cup \exists h(\mathcal{A}(B))). \text{ (h es homomorfismo.)}
\end{aligned}$$

Como A es un álgebra finita, bastará probar que sus átomos estan en $SM(h(B))$ para probar que $SM(h(B)) = A$. Los átomos de A son funciones de la forma:

$$f_{y,v}(u,w) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u,w) \neq (y,v), \\ 1 & \text{si } (u,w) = (y,v). \end{cases} \qquad (y,v),(u,w) \in X.$$

Veamos que

$$f_{y,v} = ha_y \wedge (\bigwedge_{va_z=1} \exists ha_z) \wedge (\bigwedge_{va_z=0} -\exists ha_z), \tag{5}$$

con lo que quedará probado que $\mathcal{A}(A) \subseteq SB(h(\mathcal{A}(B) \cup h(\mathcal{A}(B)))$.

Sea

$$\begin{aligned} q(u,w) &= ha_y \wedge (\bigwedge_{va_z=1} \exists ha_z) \wedge (\bigwedge_{va_z=0} -\exists ha_z) \\ &= ua_y \wedge (\bigwedge_{va_z=1} wa_z) \wedge (\bigwedge_{va_z=0} -wa_z)(\text{por 3 y 4}). \end{aligned}$$

Si $(u,w) = (y,v)$,

$$q(y,v) = ya_y \wedge (\bigwedge_{va_z=1} va_z) \wedge (\bigwedge_{va_z=0} -va_z) = 1.$$

Si $(u,w) \neq (y,v)$, entonces $u \neq y$ ó $w \neq v$. En el primer caso, es decir si $u \neq y$, entonces $ua_y = 0$ y

$$q(u,w) = ua_y \wedge (\bigwedge_{va_z=1} wa_z) \wedge (\bigwedge_{va_z=0} -wa_z) = 0.$$

Si $w \neq v$, entonces (lema 1.1) existe j tal que $wa_j \neq va_j$. Si, por ejemplo $va_j = 0$, entonces $wa_j = 1$ y $-wa_j = 0$, por lo tanto $\bigwedge_{va_z=0} -wa_z = 0$ y $q(u,w) = 0$.

Acabamos así de probar que $q = f_{y,v}$.

Sea ahora C un álgebra de Boole monádica arbitraria, y g un homomorfismo booleano de $h(B)$ en C. Si probamos que existe un homomorfismo monádico de A en C, habremos probado que A es la extensión monádica libre de $h(B)$.

Consideremos en C la subálgebra monádica generada por $g(h(B))$, i.e. $S = SM(g(h(B)))$. Como $S = SB(g(h(B)) \cup \exists g(h(B)))$, es claro que S es finita y podemos considerar su espacio dual Z =*Hom*(S,**2**). Si probamos que g tiene por extensión a f, un homomorfismo monádico de A en S, como $S \subseteq C, f$ será un homomorfismo monádico de A en C. Construyamos para eso una función $r : Z \mapsto Y$ de la siguiente manera: Sean $a : Z \mapsto Y$ definida por

$$(az)p = zghp;$$

y $b : Z \mapsto V$ definida por

$$(bz)p = z\exists ghp \text{ (donde el cuantificador corresponde al álgebra } C.)$$

Que az es un homomorfismo de B en $\mathbf{2}$ resulta inmediatamente de la forma en que está definido (es composición de homomorfismos). Análogamente, bz es un hemimorfismo de B en $\mathbf{2}$. (Notemos aquí que $\exists$ es un hemimorfismo de C en C). Sea $r(z) = (az, bz)$.

$(az, bz) \in X$ pues para todo $p \in B, ghp \leq \exists ghp$, y luego $zghp \leq z\exists ghp$, es decir $(az)p \leq (bz)p$.

Sea f el homomorfismo dual de la función r. Es decir, si $q \in A, fq \in S$ es el elemento tal que para todo $z \in Z$,

$$z(fq) = q(az, bz).$$

Para demostrar que se verifica (iii) queda por probar que f restringida a $h(B)$ es igual a g, y que f es un homomorfismo monádico.

En primer lugar, si $q \in h(B), q = h(p)$ para algún $p \in B$ y

$$zfq = q(az, bz) = h(p)(az, bz) \stackrel{3}{=} (az)(p) \stackrel{def}{=} zghp = zgq, \text{ para todo } z \in Z,$$

es decir que $fq = gq$.

Resta ahora ver que para todo $q \in A\exists fq = f\exists q$, i.e. para todo $q \in A, z \in Z, z\exists fq = zf\exists q$.

Si $q = h(p)$ para algún $p \in B$,

$$\begin{aligned} zf\exists q &= zf\exists hp = (\exists hp)(az, bz) = (bz)p = z\exists ghp = \\ &= z\exists fhp = z\exists fq. \end{aligned}$$

Si $q \in \mathcal{A}(A)$, entonces para algún $(y, v) \in X$,

$$q = ha_y \wedge (\bigwedge_{va_w=1} \exists ha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w=0} -\exists ha_w).$$

Luego

$$\begin{aligned} zf\exists q &= (\exists q)(az, bz) = \\ &= \exists[ha_y \wedge (\bigwedge_{va_w=1} \exists ha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w=0} -\exists ha_w)](az, bz) = \\ &= [\exists ha_y \wedge (\bigwedge_{va_w=1} \exists ha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w=0} -\exists ha_w)](az, bz) = \\ &= (\exists ha_y)(az, bz) \wedge [\bigwedge_{va_w=1} (\exists ha_w)(az, bz)] \wedge [\bigwedge_{va_w=0} -(\exists ha_w)(az, bz)] = \\ &= (bz)a_y \wedge [\bigwedge_{va_w=1} (bz)a_w] \wedge [\bigwedge_{va_w=0} -(bz)a_w] = \\ &= z\exists gha_y \wedge [\bigwedge_{va_w=1} z\exists gha_w] \wedge [\bigwedge_{va_w=0} -z\exists gha_w)] = \\ &= z\exists[fha_y \wedge (\bigwedge_{va_w=1} \exists fha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w=0} -\exists fha_w)] = \\ &= z\exists[fha_y \wedge (\bigwedge_{va_w=1} f\exists haw) \wedge (\bigwedge_{va_w=0} -f\exists ha_w)] = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= z\exists f[ha_y \wedge (\bigwedge_{va_w=1} \exists ha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w=0} -\exists ha_w)] = \\
&= z\exists fq.
\end{aligned}
$$

Como todo elemento en A es supremo de elementos en $\mathcal{A}(A)$ (A es finita), y $\exists$ es un hemimorfismo, podemos concluir que para todo $p \in A$, $f\exists p = \exists fp$.

3 El álgebra de Boole monádica con n generadores libres

Si G es un conjunto finito arbitrario, los resultados precedentes pueden ser aplicados al álgebra de Boole libre generada por G. Una aplicación arbitraria de G en un álgebra de Boole monádica C tiene una extensión (necesariamente única) a un homomorfismo booleano g que aplica B en C. El homomorfismo booleano g tiene, a su vez una extensión monádica (única) f que aplica A en C. De esto se concluye que la extensión monádica libre de un álgebra de Boole libre es un álgebra de Boole monádica libre.

Es bien sabido que el álgebra de Boole con n generadores libres es aquella que tiene 2^n átomos. Entonces, de acuerdo a lo dicho en la segunda parte, el álgebra monádica libre con n generadores tendrá $2^n \cdot 2^{(2^n-1)}$ átomos, y por lo tanto, $2^{[2^n \cdot 2^{(2^n-1)}]}$ elementos.

Este álgebra libre es única (a menos de isomorfismos). Conocemos ya la unicidad del álgebra de Boole libre B. Si A_1 y A_2 son extensiones monádicas libres de B y g_1, g_2 las inyecciones naturales de B en A_1 y A_2 respectivamente, entonces existen homomorfismos monádicos $f_1 : A_2 \mapsto A_1$ y $f_2 : A_1 \mapsto A_2$ que extienden a g_1 y g_2. Como $f_1 \circ f_2$ es un endomorfismo monádico de A_1 que coincide con la identidad en B, debe ser igual a la identidad sobre todo A_1 y, similarmente, $f_2 \circ f_1$ debe ser la identidad sobre A_2. Luego, f_1 es un isomorfismo de A_2 sobre A_1, con inversa f_2.

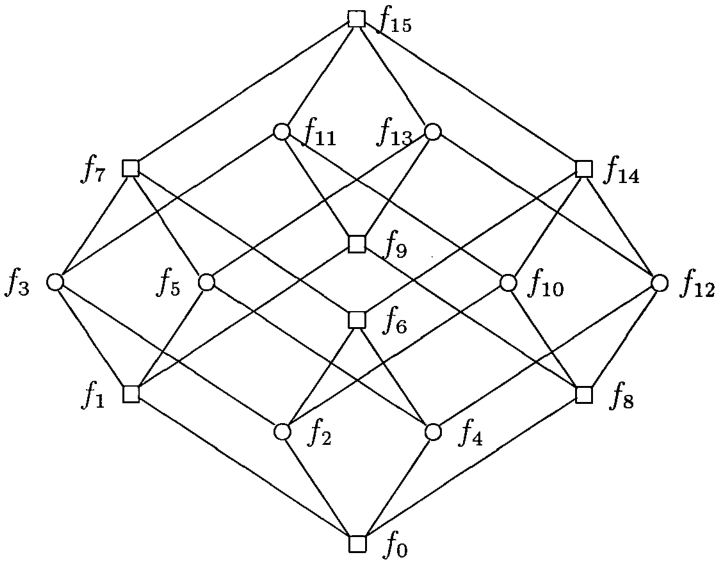
Tomemos como ejemplo el caso en que $n = 1$. Si $G = \{g\}$, sabemos que el álgebra de Boole libre generada por G tiene como átomos a g y $-g; B = \{0, g, -g, 1\}$.

	0	g	$-g$	1
h_1	0	1	0	1
h_2	0	0	1	1
h_3	0	1	1	1

Los homomorfismos de B en $\mathbf{2}$ son las funciones h_1, h_2 indicadas en la tabla anterior. Los 1-hemimorfismos son h_1, h_2, h_3; $X = \{(h_1, h_1), (h_1, h_3), (h_2, h_2), (h_2, h_3)\}$.

	(h_1,h_1)	(h_1,h_3)	(h_2,h_2)	(h_2,h_3)
f_0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1
f_2	0	0	1	0
f_3	0	0	1	1
f_4	0	1	0	0
f_5	0	1	0	1
f_6	0	1	1	0
f_7	0	1	1	1
f_8	1	0	0	0
f_9	1	0	0	1
f_{10}	1	0	1	0
f_{11}	1	0	1	1
f_{12}	1	1	0	0
f_{13}	1	1	0	1
f_{14}	1	1	1	0
f_{15}	1	1	1	1

La tabla anterior muestra los elementos del álgebra $\mathbf{2}^X$; usando la fórmula (2) indicada en el párrafo 2, podemos calcular $\exists f_i, 0 \leq i \leq 15$.



Ya sabemos que $(A,\exists)$ es el álgebra de Boole monádica con un generador libre. ¿Cuál es ese generador? Para saberlo bastará con ver cuál es $h(g)$ ya que h es la inmersión de B en A y g el generador libre de B.

$$h(g)(h_1,h_1) = h_1 g = 1,$$

$$h(g)(h_1, h_3) = h_1 g = 1,$$
$$h(g)(h_2, h_2) = h_2 g = 0,$$
$$h(g)(h_2, h_3) = h_2 g = 0.$$

Luego, $h(g) = f_{12}$.

Digamos que si $f : Y \times V \mapsto \mathbf{2}$ es tal que $f(y, v) = f(y, v')$, cualesquiera que sean y, v, v', entonces la función f es *independiente* de V. Análogamente, si $f(y, v) = f(y', v)$ cualesquiera que sean y, y', v, f se dirá *independiente* de Y.

Observando 3, resulta claro que las funciones en $h(B)$ son independientes de V. Recíprocamente, si $q \in A$ y q es independiente de V, q puede considerarse como la restricción de una función $r : Y \times V \mapsto \mathbf{2}$ independiente de V. Por el lema 1.4 de la sección 1, existe $p \in B$ tal que $r(y, v) = yp$ para todo par (y, v), y por lo tanto $q = h(p)$. Así hemos demostrado que $h(B)$ consiste exactamente en aquellas funciones en A que son independientes de V.

En forma similar se ve, a partir de 4 que las funciones en $\exists h(B)$ son independientes de Y, y se puede probar además que todas las constantes en A son independientes de Y. Como V tiene $(2^{2^n - 1})$ elementos, la subálgebra booleana de las constantes de A tiene $2^{(2^{2^n}-1)}$ elementos.

References

[1] Bass,H., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958),258-268.

[2] Birkhoff, G.,*Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 25, 3rd. ed., Providence (1967).

[3] Carnap, R., *Modalities and quantification*, J. Symbolic Logic 11 (1946), 33-64.

[4] Héng-Shan Gao,*A simple proof of a theorem of H. Bass*, Shuxuc Jinzhan 6 (1963),92-95, errata 6(1963), 306 (trabajo redactado en chino)

[5] Halmos, P. R., *Free monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959),219-227.

[6] Halmos, P. R.,*Algebraic logic, I. Monadic Boolean algebras*, Compositio Math. vol 12 (1955) 217-249.

[7] Halmos, P. R.,*Algebraic logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[8] Henkin, L., Monk, D. and Tarski, A., *Cylindric Algebras, Part I.* North-Holland Publishing Company.(1971).

[9] Massé, A.,*Anneaux monadiques libres sur un ensemble fini (I) et (II).* Exposés 13 et 14. Seminaire de Logique Algebraique, Tome II. Departement de Mathematiques. Faculté des Sciences. Université de Lyon.

[10] Monteiro, A., *Cursos de Algebras de Boole y Algebras de Boole mondicas.* UNS.

[11] Monteiro, L., *Cursos de Algebras de Boole y Algebras de Boole monádicas.* UNS.

[12] Monteiro, L., *Algèbres de Boole monadiques libres*, Algebra Universalis 8 (1978). 374-380.

[13] Sikorski, R., *On the inducing of homomorphisms by mappings.* Fund. Math. 36 (1949). 7-22.

[14] Sikorski, R., *Boolean Algebras*, Springer-Verlag. 2^{nd}. ed. (1964).

[15] Sikorski, R., *Algebras de Boole*, Notas de Lógica Matemática No. 4 (1968). Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina.

Bibliografía

[1] Bass,H., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958),258-268.

[2] Birkhoff, G.,*Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 25, 3rd. ed., Providence (1967).

[3] Carnap, R., *Modalities and quantification*, J. Symbolic Logic 11 (1946), 33-64.

[4] Héng-Shan Gao,*A simple proof of a theorem of H. Bass*, Shuxuc Jinzhan 6 (1963),92-95, errata 6(1963), 306 (trabajo redactado en chino)

[5] Halmos, P. R., *Free monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959),219-227.

[6] Halmos, P. R.,*Algebraic logic, I. Monadic Boolean algebras*, Compositio Math. vol 12 (1955) 217-249.

[7] Halmos, P. R.,*Algebraic logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[8] Henkin, L., Monk, D. and Tarski, A., *Cylindric Algebras, Part I.* North-Holland Publishing Company.(1971).

[9] Massé, A.,*Anneaux monadiques libres sur un ensemble fini (I) et (II).* Exposés 13 et 14. Seminaire de Logique Algebraique, Tome II. Departement de Mathematiques. Faculté des Sciences. Université de Lyon.

[10] Monteiro, A., *Cursos de Algebras de Boole y Algebras de Boole mondicas.* UNS.

[11] Monteiro, L., *Cursos de Algebras de Boole y Algebras de Boole monádicas.* UNS.

[12] Monteiro, L., *Algèbres de Boole monadiques libres*, Algebra Universalis 8 (1978). 374-380.

[13] Sikorski, R., *On the inducing of homomorphisms by mappings.* Fund. Math. 36 (1949). 7-22.

[14] Sikorski, R., *Boolean Algebras*, Springer-Verlag. 2^{nd}. ed. (1964).

[15] Sikorski, R., *Algebras de Boole*, Notas de Lógica Matemática No. 4 (1968). Instituto de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina.