

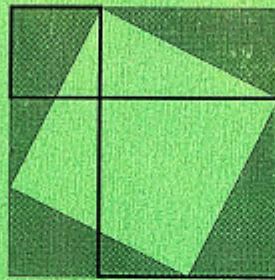


# INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 48

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1995 -



# INFORME TÉCNICO INTERNO N° 48

## Temas de la Teoría de Grafos II. Transitabilidad I

R. CHIAPPA

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1995

<b>UNS-CONICET</b>
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
BIBLIOTECA "Dr. ANTONIO MONTEIRO"
LIBRO No ..... <i>171</i> .....
..... <i>48</i> .....
..... <i>1995</i> .....





En lo que sigue supondremos conocidas la terminología y notaciones de : Temas de la Teoría de Grafos -I- Nociones Básicas. Informe Técnico Interno Nro. 29, INMABB, 1991 . Las numeraciones de las referencias bibliográficas que siguen, extenderán a las de dicho trabajo.

## CAPITULO 3

### TRANSITABILIDAD

En este trabajo sólo se incluirán sus primeros siete párrafos, los ocho restantes serán motivo de otro informe técnico.

Muchas e importantes propiedades de la Teoría de Grafos están referidas a las distintas formas en que se pueden conectar vértices. Por tal motivo consideraremos seguidamente varias nociones que están ligadas a la idea de "recorrer" o "transitar" un multi-di-grafo. A tal efecto son utilizados, en forma explícita o implícita, los conceptos "camino" y "cadena". Dichas nociones son aptas para encarar el análisis de situaciones muy diversas. Habitualmente, éstas se plantean en configuraciones valuadas y las soluciones están ligadas con la determinación de "caminos, o cadenas, optimales" respecto de algún criterio adecuado al problema que se analiza.

En 3.15 daremos una tabla con los nombres más frecuentemente asignados en la bibliografía de lengua inglesa y/o francesa a los conceptos que consideraremos a continuación. Observemos de paso que según indica Roy (R 1), las nociones que en lengua francesa se denominan "circuit" y "cycle" corresponden a las que, habitualmente, en lengua inglesa se denominan "cycle" y "circuit", respectivamente.

### 3.1 CAMINOS Y CIRCUITOS

Dado un multidigrafo  $G = (V,U)$  diremos camino de longitud  $L$  ( $L \geq 1$ ) (o más brevemente  $L$ -camino) a toda sucesión de vértices y de arcos  $C : x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, \dots, x_L, u_L, x_{L+1}$  donde  $u_i = (x_i, x_{i+1})$ ;  $1 \leq i \leq L$ ; no necesariamente  $u_i \neq u_j$ ; eventualmente  $x_i = x_{i+1}$ .

Admitiremos además que cada vértice define un camino nulo (de longitud cero).

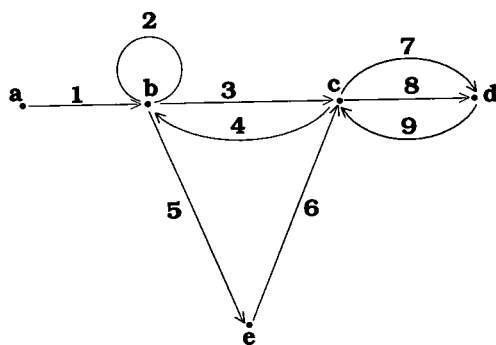
Un camino  $x_1, u_1, \dots, u_L, x_{L+1}$ ;  $L \geq 1$ ; se dirá simple si  $u_i \neq u_j$  y elemental si  $x_i \neq x_j$ , cualesquiera sean  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, L+1\}$  excepto, eventualmente,  $x_1 = x_{L+1}$  que pueden corresponder a un mismo vértice.

De otra forma, un camino no nulo es simple si cada uno de los arcos que lo componen ocurre una única vez en la sucesión que lo define y elemental si sus vértices son distintos dos a dos, excepto ocasionalmente, el inicial de su primer arco y el final del último, los que pueden ser iguales, o equivalentemente, si cada uno de sus vértices es extremo inicial (final) de a lo más uno de los arcos.

Convendremos que todo camino nulo es elemental y simple.

La noción *camino* es esencial y habitualmente, al considerarlos omitiremos la mención de sus vértices y de su longitud.

#### Ejemplo 3.1.1



1,2,3,4,3,7	camino no simple, $L = 6$
1,2,3,7	" simple no elemental
1,3,7	" " y elemental
4,5,6	" " "

Es fácil verificar que :

- La longitud de cada camino simple coincide con el número de arcos que lo componen.
- Todo camino elemental es simple. La recíproca es falsa.
- Si  $G$  carece de arcos paralelos y sólo entonces, cada camino puede darse también por la sucesión de vértices en los que incide.

En el ejemplo anterior a los dos caminos 1,3,7 y 1,3,8 corresponde la misma sucesión de vértices  $a,b,c,d$ .

Dado un camino  $C: u_1, u_2, \dots, u_L$ ;  $L \geq 1$ ; si  $a$  es el vértice inicial de  $u_1$  y  $b$  el vértice final de  $u_L$  diremos que  $C$  lleva desde  $a$  hasta  $b$ . Lo indicaremos con  $C: a \Rightarrow b$ .

No incluiremos en esta notación a los caminos nulos

Si  $C: a \Rightarrow b$ , eventualmente  $a = b$ , diremos que  $a$  ( $b$ ) es el vértice inicial (final) de  $C$ . Los vértices que corresponden a  $x_2, \dots, x_L$  se dicen interiores

Si  $C$  no es elemental su vértice inicial (final) también puede ser interior.

Si  $C: a \Rightarrow b$  se dirá indistintamente:  $a$  precede  $b$ ;  $b$  es sucesor de  $a$ ;  $b$  es descendiente de  $a$ ;  $b$  es accesible desde  $a$ ;  $a$  es ascendiente de  $b$ . Si  $a = b$ , entonces  $a$  es ascendiente (sucesor) impropio de si mismo.

Un camino no nulo  $C: a \Rightarrow b$  se dirá abierto si  $a \neq b$  y cerrado (en  $a$ ) si  $a = b$ .

En el ejemplo anterior:

1,3,4	es camino simple, no elemental, abierto.
1,3,7	" simple, elemental, abierto.
4,5,6	" " " cerrado (en $c$ ).
5,6,4	" " " " (en $b$ ).
6,4,5	" " " " (en $e$ ).

Es conveniente convenir que los conceptos "abierto" y "cerrado" no se apliquen a los caminos nulos.

Cada arco distinto de bucle define un camino abierto y cada bu-

cle uno cerrado, ambos de longitud uno y elementales. Si un bucle es reiterado  $k$  veces se obtiene un camino cerrado de longitud  $k$ .

Se dice camino euleriano (hamiltoniano) de  $G$  a todo camino simple (elemental) que contenga todos los arcos (vértices) de  $G$ .

$G$  se dirá euleriano (hamiltoniano) si contiene un camino euleriano (hamiltoniano) cerrado, y débilmente euleriano (hamiltoniano) si sólo contiene caminos eulerianos (hamiltonianos) que son abiertos.

Se deja al lector verificar que:

- Todo multidigrafo finito  $G$  que carece de caminos cerrados tiene vértices de entrada ( $d_x^- = 0$ ) y vértices de salida ( $d_x^+ = 0$ )  
La recíproca es falsa.
- $G$  carece de caminos cerrados si y sólo si todos sus caminos son elementales. Mas precisamente :
  - Si no hay caminos cerrados de longitud  $L \leq h$  todo  $L$ -camino,  $L \leq h+1$ , es elemental y recíprocamente.
- $G = (V, U)$  carece de caminos cerrados si y sólo si cualquiera sea  $V' \subseteq V$  el submultidigrafo inducido por  $V'$  tiene entradas y salidas.

Dado un  $L$ -camino  $C: u_1, u_2, u_3, \dots, u_L$  el vértice inicial de  $u_1$  o el  $h$ -camino  $u_1, u_2, \dots, u_h$  se dirá  $h$ -subcamino inicial de  $C$ . Análogamente, el vértice final de  $u_L$  o el camino  $u_{L-h+1}, \dots, u_L$  es el  $h$ -subcamino final de  $C$ , ( $0 \leq h \leq L$ ).

En general,  $C': u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+h-1}$  ( $1 \leq i \leq i+h-1 \leq L$ ) define un  $h$ -subcamino ( o  $h$ -sección ) de  $C$ .

Si  $C'$  es subcamino de  $C$ ,  $C$  es extensión de  $C'$ .

Cualquiera sea  $C: p \Rightarrow q$ , excepto si  $p$  es entrada ( $q$  es salida) el camino  $C$  puede ser extendido desde su extremo inicial (final) por un arco de vértice final  $p$  (inicial  $q$ ).

Si  $G$  contiene un camino cerrado, con reiteraciones del mismo es posible determinar caminos de longitud arbitrariamente grande.

En tal caso, para indicar que la longitud máxima no está acotada superiormente diremos que  $G$  admite caminos de longitud infinita. Recíprocamente, si un multidigrafo finito admite tales caminos, contiene caminos cerrados.

Véase que:

- Un camino  $u_1, u_2, \dots, u_L$ ;  $L \geq 2$ ; es elemental - eventualmente cerrado - si y sólo si sus subcaminos  $u_1, \dots, u_{L-1}$  y  $u_2, \dots, u_L$  son elementales y abiertos.

En tal caso, también son elementales y abiertos  $u_1$  y  $u_L$ .

En particular, el camino  $u_1, u_2$  es elemental si y sólo si carece de bucles.

La operación que introduciremos seguidamente fue empleada implícitamente al hablar de caminos de longitud infinita. Con el fin de que esté definida para todo par de caminos, diremos camino vacío ( $\wedge$ ) a la sucesión vacía de arcos y de vértices.

Es claro que el concepto *camino vacío* difiere del de *camino nulo*, el cual corresponde a una sucesión vacía de arcos. Algunos autores denominan "vacío" al camino que decimos "nulo".

Dados los caminos, eventualmente vacíos,  $C_1$  y  $C_2$  por concatenación (o composición) de  $C_1$  con  $C_2$  se obtiene el camino

$C_3 : C_1 \circ C_2$  tal que :

a) Si  $C_1 : x_1, u_1, x_2, u_2, \dots, x_h, u_h, x_{h+1}$   $h \geq 0$   
 $C_2 : x'_1, v_1, x'_2, v_2, \dots, x'_k, v_k, x'_{k+1}$   $k \geq 0$

$C_3 : \left[ \begin{array}{l} x_1, u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_k, x'_{k+1} \text{ si } x_{h+1}; x'_1 \text{ coinciden} \\ \wedge \\ \text{en caso contrario.} \end{array} \right.$

b) Si  $C_1$  ó  $C_2$  es el camino vacío,  $C_3$  es vacío.

De la definición resulta que la concatenación es una operación asociativa, no conmutativa, tal que  $C \circ \wedge = \wedge \circ C = \wedge$ .

Notemos que si los caminos se indican por sus sucesiones de arcos y de vértices esta operación carece de neutro.

En efecto si  $C : u, v, w$  tiene vértice inicial  $p$  y final  $q$ , e indicamos con  $\{p\}, \{q\}$ , los respectivos caminos nulos que ellos definen, se tiene  $C = \{p\} \circ C = C \circ \{q\}$ .

En cambio, si indicamos los caminos sólo por sus arcos, haciendo caso omiso de sus vértices, los caminos nulos y el vacío son indistinguibles y quedan representados por una sucesión vacía de arcos, la que es neutro de la operación de concatenación.

Sabemos que toda operación  $*$  asociativa (operación  $*$  asociativa con neutro  $A$ ) definida en un conjunto  $M$  induce una estructura de semigrupo  $(M, *)$  ( de monoide  $(M, *, A)$  ).

Así entonces, la concatenación introduce en el conjunto de los caminos de  $G$ , incluido el camino vacío, bien una estructura de semigrupo cuando los caminos se dan explicitando sus vértices y sus arcos, o bien una de monoide, cuando de los caminos sólo se indican sus arcos.

Recordemos que los conceptos semigrupo y monoide suelen designarse intercambiando los nombres que hemos elegido.

Bajo el nombre de "composición latina" (ver (K 5), (K 7), (K 13), (H 16)) se propone un método inspirado en el habitual producto de matrices, que responde a la operación precedente y permite enumerar todos los caminos de longitud  $L$  ( $L \geq 1$ ) que satisfacen ciertas propiedades prefijadas, a saber: ser elementales, ser simples, incidir hasta  $k$  veces en un mismo vértice, etc. Sobre esto volveremos en (3.6).

---

#### Proposición 3.1.1.a)

Todo camino  $C : a \Rightarrow b$  (eventualmente  $a = b$ ) contiene subcaminos elementales, sin arcos comunes entre sí, tales que por concatenación de ellos es posible construir un camino elemental  $C' : a \Rightarrow b$ .

#### Demostración

Si  $C$  es elemental, la validez de lo afirmado es inmediata.

Si  $C : a = x_1, u_1, \dots, u_L, x_{L+1} = b$  es no elemental, en la sucesión que lo define existen al menos dos ocurrencias de un mismo vértice. Supongamos que  $x_i$  es la primera de las que tienen esta característica y que  $x_j$  ( $1 \leq i < j \leq L$ ) es la última de las



ocurrencias del mismo vértice representado por  $x_i$ .

En tal caso  $u_i, \dots, u_{j-1}$  es un camino no nulo, cerrado en  $x_i$  y eliminándolo se obtendrá otro, también de la forma  $a \Rightarrow b$ .

Mas precisamente :

- si  $a \neq x_i \neq b$  modificando sólo un par de secuencias de arcos se construye el camino  $u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, \dots, u_L$ .
- si  $x_i = a$  ( $x_j = b$ ) basta retener el subcamino  $u_j, \dots, u_L$  ( $u_1, \dots, u_{i-1}$ )

En los tres casos el razonamiento puede reiterarse tanto como sea necesario, hasta determinar finalmente un camino elemental  $C' : a \Rightarrow b$ ; obtenido por concatenación de subcaminos de  $C$ , elementales arco disjuntos dos a dos y así acabar la demostración.

De la demostración dada es obvio que todos los arcos de  $C'$  pertenecen a  $C$ . Por esto y aún cuando para obtener  $C'$  se han modificado algunas secuencias de arcos, haciendo abuso de lenguaje es habitual reformular la proposición anterior en la forma:

#### Proposición 3.1.1.b)

Todo camino  $C : a \Rightarrow b$  ( eventualmente  $a=b$  ) contiene al menos un camino elemental  $C' : a \Rightarrow b$ .

En realidad sucede que todo camino no elemental  $C : a \Rightarrow b$  se obtiene concatenando caminos abiertos que llevan a construir un camino elemental  $a \Rightarrow b$ , con otros cerrados e incidentes en los vértices extremos de dichos caminos abiertos.

En el Ejemplo 3.1.1 operando de acuerdo con el método indicado al demostrar la Prop.3.1.1.a) del camino 1,3,4,5,6 se obtiene el elemental 1,5,6. Nótese que otro, elemental, con arcos del camino dado es el 1,3. Los tres llevan desde  $a$  hasta  $c$ .

Se deja al lector demostrar :

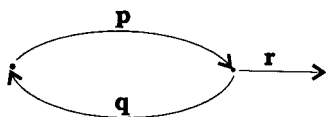
- La restricción empleada al demostrar la Prop. 3.1.1.a) para elegir, en cada reiteración del proceso,  $x_i$  ( $x_j$ ) como la primera (última) de las ocurrencias reiteradas de cierto vértice, hace que el camino elemental  $C' : a \Rightarrow b$  esté unívocamente determinado.

Eliminando dicha restricción pueden obtenerse otros, también elementales,  $a \Rightarrow b$ . Tal el caso del 1,3 indicado poco antes.

- Un L-camino es no elemental si y sólo si puede obtenerse por concatenación de un subcamino inicial de longitud  $l_1 \geq 0$ , de otro, central cerrado de longitud  $l_2 \geq 1$  y de un subcamino final de longitud  $l_3 \geq 0$ , con  $l_1$  y  $l_3$  no simultáneamente nulas y tales que  $l_1 + l_2 + l_3 = L$ .

Nótese que las particiones del tipo indicado no están unívocamente determinadas.

Así por ejemplo el 4-camino  $p, q, p, r$  del digrafo



admite una partición del tipo indicado con  $l_1 = 0, l_2 = 2, l_3 = 2$  y otra con  $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 1$ .

Muy frecuentemente, un abuso de lenguaje similar al que hemos indicado poco más arriba es el que lleva a identificar un camino simple con el conjunto de sus elementos; o sea, con el subdigrafo inducido por sus arcos.

Notemos al respecto que el concepto "camino" lleva implícito el de "sucesión" y que por lo tanto admite ocurrencias reiteradas de un mismo elemento, situación que no es admisible considerándolo como "conjunto".

Para enfatizar, cuando nos referimos al conjunto de elementos de un camino y no a la sucesión que lo determina podríamos convenir en designarlo s-camino ( como apócope de subdigrafo camino) pero esto nos llevaría a una terminología innecesariamente pesada, puesto que del contexto podremos deducir, en cada circunstancia, cuál es la interpretación adecuada.

Al referirnos a caminos no simples cabe una observación análoga, pero respecto de "multiconjuntos" ( es decir, de conjuntos con eventuales ocurrencias repetidas de sus elementos). Por lo precedente y de acuerdo con lo que es usual emplearemos el vocablo *camino* para referirnos, tanto a la sucesión de arcos y vértices que lo determina como al multiconjunto de sus elementos.

Creemos oportuno indicar que de los libros consultados el que mayor énfasis pone en destacar dicho abuso de lenguaje es el de Busacker y Saaty (B 1). Al respecto pueden consultarse detalles que incluimos en 3.15.

El indicado abuso de lenguaje lleva a identificar los caminos elementales con los minimales en sentido conjuntista (es decir, con los que no contienen propiamente otro camino de iguales extremos) y a decir, cuando  $C = C_1 \cup C_2$  que  $C$  es unión de  $C_1, C_2$  sugiriendo así una conmutatividad<sup>1</sup> que<sup>2</sup> no existe.

Lo precedente lleva a enunciar la

#### Proposición 3.1.2

- a) Todo camino  $C : a \Rightarrow b$  (eventualmente  $a = b$ ) es unión de un camino elemental  $C' : a \Rightarrow b$  y de caminos cerrados.
- b) Si  $C$  es simple, dichos caminos cerrados son arco disjuntos con  $C'$  y entre sí.

Por aplicación reiterada de la proposición anterior resulta que los caminos cerrados a los que se hace referencia pueden suponerse elementales, de donde el

#### Corolario

Todo camino cerrado simple es unión de caminos cerrados elementales, arco disjuntos dos a dos.

Nótese que la descomposición implícita en la proposición anterior no está siempre unívocamente determinada.

Así por caso, el camino 1,3,4,5,6,7 del Ejemplo. 3.1.1 puede suponerse obtenido por concatenación del camino abierto 1,3 con el cerrado 4,5,6 y el abierto 7; o bien, a partir de los abiertos 1 ; 5,6,7 y del cerrado 3,4.

---

Dado un camino cerrado  $C : u_1, u_2, \dots, u_L$  ( $L \geq 1$ ) diremos circuito (generado por  $C$ ) a la clase de todos los caminos que se obtienen a partir de  $C$ , por permutación circular de sus elementos. Lo notaremos  $(C) : u_1, u_2, \dots, u_L, (u_1)$

Si  $C$  es minimal, en el sentido de no ser obtenido por concate-

nación de algún subcamino propio consigo mismo, el circuito se dirá de longitud  $L$ .

En el Ejemplo 3.1.1 los tres caminos : 4,5,6 ; 5,6,4 y 6,4,5 definen un mismo circuito de longitud tres.

Clasificaremos los circuitos en simples, elementales, eulerianos o hamiltonianos cuando gozen de esas características los caminos que los generan.

Es inmediato que cada camino cerrado define, en forma canónica, un circuito y que a cada circuito de longitud  $L$  pueden asociarse los  $L$  caminos cerrados minimales que lo generan.

Esto es lo que induce muy frecuentemente, a identificar el concepto "circuito" con el de "camino cerrado" (que a su vez se confunde con el de "s-camino").

Al respecto notemos, que de acuerdo con la terminología de Toranzos (T 1), nuestros caminos simples (caminos elementales) se dirían "caminos" ("caminos simples") si fueran abiertos y "circuito" ("circuito simple") en el caso de ser cerrados. Algo similar ocurre con ciertos autores de lengua inglesa (ver 3-15).

Distinguir entre circuitos y caminos cerrados es fundamental en problemas de recuento o de enumeración así como al aplicar concatenación. No obstante, por comodidad de expresión, siguiendo la costumbre, y sobreentendiendo que el significado correspondiente se deduce del contexto en el que se lo usa diremos "circuito" o "camino cerrado", indistintamente.

Con tal convención podremos afirmar:

- En cada vértice  $x$  de un circuito elemental  $d_x^- = d_x^+ = 1$ .
- Un subdigrafo cubriente, unión de circuitos elementales disjuntos dos a dos, es un 1-di-factor.
- Todo circuito simple es unión de circuitos elementales sin arcos comunes entre sí.

Respecto de la concatenación de circuitos cabe la siguiente observación.

Dados dos caminos cerrados  $C_1$  y  $C_2$  con al menos un vértice en

común, es factible elegir adecuadas permutaciones circulares de sus elementos, de forma que los caminos resultantes  $C'_1$  y  $C'_2$  sean tales que el extremo final de uno coincida con el inicial del restante y puedan concatenarse, dando así lugar a un camino cerrado  $C_3$ .

Salvo casos particulares la sucesión que lo determina no queda unívocamente determinada ni aún a menos de permutación circular. No obstante, para todo  $C_3$  así obtenido, el número de ocurrencias de sus elementos se mantiene.

Tal el caso, por ejemplo, si  $C_1$  y  $C_2$  tienen más de un vértice común o si alguno incide más de una vez en el vértice común.

En particular, con los circuitos  $3,4,(3)$  y  $4,5,6,7,9,(4)$  del Ejemplo. 3.1.1 pueden obtenerse :  $3,4,5,6,7,9,4,(3)$  y también  $3,7,9,4,5,6,4,(3)$ .

Pese a la ambigüedad y sobreentendiendo que se ha fijado uno de los posibles caminos  $C_3$  apelando al citado abuso de lenguaje diremos, de acuerdo con lo habitual, que el circuito definido por  $C_3$  se ha obtenido por concatenación de  $C_1$  con  $C_2$ .

Notemos que es frecuente decir " $C_3$  es unión de  $C_1$  con  $C_2$ ".

De acuerdo con referencia leídas, en (B 12) se hace una extensa recopilación de resultados, conjeturas y bibliografía relativas a circuitos, así como interesantes comparaciones con cuestiones similares para el caso no dirigido y en (R 8) se estudia el número de digrafos sin circuitos

En 3.14 citaremos algunos otros de los trabajos en donde se profundiza el estudio de las nociones que nos ocupan.

---

Para numerosos y variados problemas de la Teoría de Grafos será útil emplear, en lugar de las habituales operaciones del cuerpo real, ciertas "operaciones generalizadas", cuya elección depen-

derá del problema a resolver. En particular, aplicaciones de las "operaciones booleanas" pueden verse en Camion (C 5) Fortet (F 1),(F 2), Hammer-Rudeanu (H 16), Maghout (M 6), etc. Algunas de sus aplicaciones a problemas de transitabilidad serán consideradas oportunamente.

Recurriendo a las operaciones booleanas, Hens (H 17) estudia el problema de hallar, en digrafos fuertemente conexos, un conjunto de circuitos linealmente independientes y el de determinar un conjunto con un número mínimo de vértices cuya eliminación lleve a un digrafo sin circuitos distintos de bucles. Para resolverlos, supone conocer todos los circuitos elementales y reduce el problema a otro, de programación lineal entera, que resuelve siguiendo los lineamientos dados en Fortet y Camion. El enfoque indicado también puede verse en Hammer-Rudeanu.

Por otro lado, en (M 7) se dan "algoritmos de aproximación" para determinar un conjunto mínimo de vértices cuya eliminación lleva a eliminar todos los circuitos y se estudia el problema análogo para el caso no orientado. A su vez en (L 3) se estudia la determinación, con el mismo objeto, de conjuntos mínimos de arcos y de vértices.

Otra cuestión de interés, que está vinculada con el mismo problema es la siguiente :

Como aproximar la relación  $\Gamma$  por una de orden  $\Gamma'$  ( $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ) ?

Referencias bibliográficas y comentarios pueden verse en (D.2).

Por otra parte, muchos problemas de transitabilidad equivalen a resolver sistemas de ecuaciones lineales en estructuras algebraicas apropiadas. En particular, en Gondran (G 7) se generaliza un trabajo de Carré (C 6) y se da un interesante análisis de como diferentes problemas de transitabilidad pueden resolverse, dentro de estructuras algebraicas que dan cabida a variantes de algoritmos clásicos para resolver dichos sistemas (Jacobi-Gauss-Seidel) como así también, formular algunos otros.

La misma temática fue tratada en (G 8),(G 9),(G 10 Ch.3),(G 11). En Roy (R 9), donde se sigue la formulación de Gondran, se hace un extenso estudio de éstas "algebras de caminos".

Además de los numerosos trabajos citados en (G 7),(G 10), (R 9) y de los que citaremos en 3.5, otros en los que también se han considerado operaciones generalizadas, para abordar cuestiones de caminos, son (K 14),(M 8),(M 9),(M 10),(M 11),(R 10).

En particular, en (M 9) se ve que ciertos problemas de transitabilidad no tienen cabida dentro de las formulaciones clásicas de "algebras de caminos" y se los estudia en una estructura algebraica más general. Los algoritmos dados aparecen como generalizaciones de otros, para hallar caminos optimos en digrafos valuados. En (M 10) se da una versión resumida del (M 9).

### 3.2 ACCESIBILIDAD Y FUERTE CONEXIDAD

Al conjunto de vértices de cada multidigrafo  $G$  puede asociarse la siguiente relación de preorden (reflexiva y transitiva) :

$rPs$  si y sólo si  $r = s$  o bien  $s$  es accesible desde  $r$ .

Esta relación que diremos preorden de accesibilidad  $P$  es además de orden (reflexiva, transitiva, antisimétrica débil) si y sólo si  $G$  carece de caminos cerrados distintos de bucles.

Más precisamente, si  $G = (V, \Gamma)$  es un digrafo sin caminos cerrados distintos de bucles y sólo entonces, su relación de precedencia  $\Gamma$  determina una relación de orden.

Recordemos al respecto la cita (D 2) y digamos que en (G 12) y (G 18) se caracterizan los grafos cuyas aristas pueden orientarse de forma que el digrafo resultante sea el de una relación de orden. A su vez en (G 19) se da un algoritmo para resolver este problema. El caso particular en que  $G$  es árbol fue considerado por Wolk (W 6), (W 7).

Por otra parte, sabemos que a cada conjunto finito  $V$  ordenado estrictamente por la relación  $<$  puede asociarse su Diagrama de Hasse (digrafo sin bucles  $H = (V, U)$  tal que  $(a, b) \in U$  si y sólo si  $a$  es cubierto por  $b$ ; es decir, si y sólo si  $a < b$  y no existe otro  $c$  tal que se satisfagan  $a < c < b$ ).

Para el caso de órdenes amplios ( $\leq$ ) correspondería asignar un bucle a cada uno de sus vértices, pero esto, habitualmente, se omite. Así entonces, en ambos casos  $H$  carece de circuitos y de "arcos superfluos".

Un interesante problema vinculado con lo dicho es el siguiente:  
Cuando es factible asignar orientaciones a las aristas de un grafo sin bucles de forma que resulte el Diagrama de Hasse de algún conjunto ordenado ?

Es claro que un tal grafo debe ser "libre de triángulos", es decir, no debe contener como subgrafo a  $K_3$ . Nesetril-Rodl (N 3) demostraron que dicha condición también es suficiente para el caso de grafos planares mientras que para el caso general no caben caracterizaciones tan simples.

La cuestión de los grafos libres de triángulos cuyas aristas no admiten orientaciones que los transformen en Diagramas de Hasse aparece vinculada con la posibilidad de colorear los vértices de un grafo de forma que los adyacentes tengan colores diferentes. Deben tener al menos 11 vértices, tal como el hallado por Grotzsch (G 13) y por Mycielski (M 12); reproducido en Pretzel (P 1). Notemos al respecto que en su interesante trabajo de recopilación, Pretzel observa que el citado grafo fue construido como ejemplo de grafo libre de triángulos, 4-cromático.

La búsqueda de conexiones entre la Teoría de Conjuntos Ordenados y la de los Grafos fue abordada por numerosos autores. Con referencia a este tema sólo citaremos (P 2), (R 11), (R 12), (R 13) y (T 4). En (R 13) se da una extensa lista de resultados propios de la teoría de grafos que pueden aplicarse en la de los conjuntos ordenados.

Si  $P$  es un preorden de accesibilidad y ponemos  $r \in P s$  cuando se satisfacen ambas  $r \in P s$ ;  $s \in P r$  se tiene que  $E$  es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica, transitiva). La designaremos relación de interaccesibilidad.

Las clases que ella determina están constituidas por un único vértice o son tales que para cada par de vértices  $x, y$  existe un camino  $x \Rightarrow y$  y otro  $y \Rightarrow x$ ; o equivalentemente, existe un circuito que los contiene.

Los submultidgrafos de  $G$  que inducen los vértices de esas clases de equivalencia son sus componentes fuertemente conexas.

Si es única,  $G$  es fuertemente conexo.

En particular,  $G = (V, \Gamma)$  es fuertemente conexo si y sólo si para todo  $x$ ;  $\hat{\Gamma}(x) = V$  (idem  $\hat{\Gamma}^{-1}(x) = V$ )

La posible existencia de arcos no incluidos en circuitos impide afirmar que todo multidgrafo puede obtenerse como unión de sus componentes fuertemente conexas.



La noción "cadena" (ver 3.8) nos permitirá introducir, en forma similar, las de "conexidad" y "componente conexa".

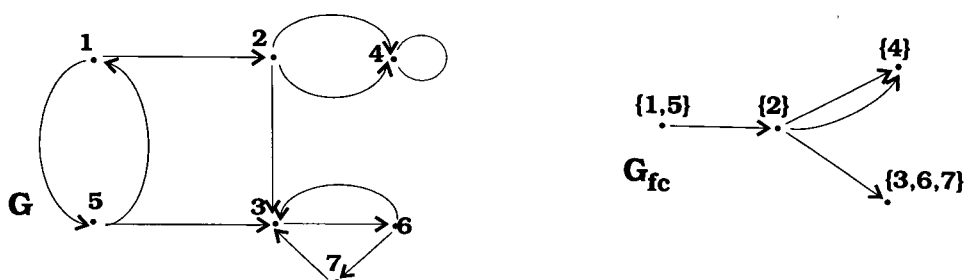
Una determinación por recurrencia, del número de digrafos fuertemente conexos de orden  $n$  y de aquellos de orden  $n$  con  $m$  aristas, puede verse en (L 4).

La precedente relación de equivalencia  $E$  nos lleva a construir, a partir de un multidigrafo  $G$ , otro que notaremos  $G_{fc}$  y diremos cociente de  $G$  por fuerte conexidad.

Más precisamente, las componentes fuertemente conexas de  $G$  se identifican con los vértices de  $G_{fc}$ , que tiene tantos arcos de la forma  $(\underline{x}, \underline{y})$  como arcos  $(p, q)_{fc}$  con  $p \in \underline{x}, q \in \underline{y}$  hay en  $G$ .

De la definición resulta inmediato que  $G_{fc}$  carece de circuitos.

Ejemplo 3.2.1



Se dice condensado (reducido) de  $G$  al digrafo obtenido a partir de  $G_{fc}$  identificando los arcos paralelos.

Su relación de precedencia define una de orden sobre el conjunto de sus vértices, los que a su vez representan clases maximales de vértices de  $G$ , interacesibles dos a dos. Obviamente, los vértices de  $G$  que pertenecen a las clases maximales (minimales) de su condensado no tienen descendientes (ascendentes) fuera de los que están en su propia clase y a los de las restantes clases no se puede volver luego de abandonarla. La determinación de las componentes fuertemente conexas de un multidigrafo  $G$  es de interés en numerosos problemas y en particular para simplificar el análisis de la transitabilidad en  $G$ .

3.2.1- Algoritmo para determinar las componentes fuertemente conexas de un multidigrafo finito .

- 1) Inicialmente ningún vértice está marcado. Se elige un vértice y se lo marca con + y con - .
- 2) Si x está marcado + se marca + todo vértice z tal que exista arco (x,z) y se reitera 2) tanto como sea posible.
- 3) Si x está marcado - se marca - todo vértice z tal que exista arco (z,x) y se reitera 3) tanto como sea posible.
- 4) Los vértices marcados con ambos signos pertenecen a la componente fuertemente conexa que contiene al vértice marcado en ocasión de aplicar 1).
- 5) Se los excluye del multidigrafo en estudio y se vuelve al paso 1, excepto no haya más vértices que considerar.

En (K 5, Cap 3- 27) se da una versión matricial del mismo y se indica que el método fue propuesto por Malgrange.

Es claro que para determinar las componentes en cuestión de cada conjunto de arcos paralelos basta elegir uno. Por ello sin pérdida de generalidad puede suponerse que G es digrafo.

En tal caso, las componentes fuertemente conexas de  $(V, \Gamma)$  están determinadas por la clausura reflexivo-transitiva de  $\Gamma$ .

Más precisamente, el método dado corresponde al hecho de que la componente fuertemente conexa del digrafo  $(V, \Gamma)$  que contiene al vértice x es el subdigrafo inducido por  $\hat{\Gamma}(x) \cap \hat{\Gamma}^{-1}(x)$ .

---

Las componentes fuertemente conexas también pueden hallarse recurriendo al siguiente concepto.

Una matriz A es reducible si existe una permutación  $\pi$  tal que si  $\Pi$  es la matriz con  $\pi_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \pi(i) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$  en la matriz particionada

$$A' = \Pi^{-1} \cdot A \cdot \Pi = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ambas matrices } A'_{11}; A'_{22}$$

son cuadradas y al menos una de las restantes es nula.

Es claro que las filas y columnas de  $A'$  devienen de una adecuada reenumeración de las de  $A$ . Si está elegida adecuadamente, la matriz  $A'$  toma la forma "triangular superior"

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & \\ & A_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & \\ & & & & A_{hh} \end{bmatrix} \quad \text{con matrices } A_{ii}, 1 \leq i \leq h, \text{ cuadradas, posiblemente nulas}$$

**Proposición 3.2.2**

Si  $P$  es la matriz precedencia de un multidigrafo  $G$ , dos de sus vértices están en una misma componente fuertemente conexa si y sólo si, para cierta matriz de permutación  $\Pi$ , sus correspondientes columnas y filas están en un mismo bloque diagonal de la matriz  $\Pi^{-1} \circ P \circ \Pi$ .

**Corolario:**  $G$  es fuertemente conexo si y sólo si su matriz de precedencia es irreducible.

Aplicando lo anterior al Ejemplo. 3.2.1, y para la siguiente  $\Pi$ , donde en lugar 0 pondremos . , se tiene :

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} :0: & :1: & :1 & :0 & :0 & :0 & :0 & :0 \\ :1 & :0: & :0 & :0 & :1 & :0 & :0 & :0 \\ \dots & \dots & :0: & :2 & :1 & :0 & :0 & :0 \\ \dots & \dots & \dots & :1: & :0 & :0 & :0 & :0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & :0: & :1: & :0: & :0: \\ 0 & & & & & :1 & :0 & :1: \\ & & & & & :1: & :0 & :1: \\ & & & & & :1: & :0 & :0: \end{bmatrix}$$

Un algoritmo no matricial para determinar componentes fuertemente conexas es, entre otros, el de Tarjan (T 5).

En (F 3) se da un algoritmo para determinar conjuntos minimales de aristas de cierto grafo  $G$ , cuya contracción lleva a la construcción de un digrafo fuertemente conexo. Dicho algoritmo vale también para configuraciones valuadas.

Luego, en 3.5 y 3.13, indicaremos otras formas de hallar componentes fuertemente conexas.

Se sabe, Robbins (R 14), que asignar direcciones a las aristas de un grafo de manera que resulte un digrafo fuertemente conexo es posible si y sólo si el grafo es conexo sin istmos (o sea, es 2-conexo (ver 3.9)). En (A 3) se propone para ello un algoritmo que recurre a la determinación de un árbol cubriente.

En (N 4) se vuelve sobre resultados de (N 5) que extienden el de Robbins y en (S 6) se estudia la posibilidad de restaurar la fuerte conexidad de un digrafo, reorientando los arcos que restan luego de eliminar uno.

Por otro lado, algunos de los resultados ligados con ésta temática e incluidos en Lovász (L 5) fueron encontrados por Berge en (B 13) y (B 14).

En (D 3) se da un procedimiento que permite, dadas arbitrariamente dos orientaciones fuertemente conexas de un mismo grafo, obtener una de ellas a partir de la otra.

Otro importante problema relacionado con la accesibilidad es el de la "reducción transitiva"; es decir, el de determinar en un digrafo  $G$  un conjunto minimal de arcos tal que el subdigrafo inducido por ellos permita recuperar todos los caminos de  $G$ .

Para el caso de digrafos  $(V, \Gamma)$  sin circuitos, se obtendrá el Diagrama de Hasse del conjunto  $V$ , ordenado por  $\Gamma$ ,

De acuerdo con referencias leídas, los primeros en abordar este problema han sido Moyles-Thompson (M 13) y Hsu (H 18). Sus respectivos algoritmos requieren modificaciones.

Noltemeier (N 6) demuestra que para el caso de digrafos finitos sin circuitos dicha reducción es única y está compuesta de los arcos cuyos extremos no son conectados por caminos de longitud  $L \geq 2$ . Además, da un algoritmo que mejora el de Hsu.

Este problema también fue resuelto por Roy (R 15). En (P 3) se analizan que condiciones imponer a  $G$  para que los resultados de Roy puedan extenderse a grafos infinitos.

En (M 14) se dió un algoritmo para hallarla, supuesta la fuerte conexidad y en (M 15) otro, para digrafos arbitrarios.

A su vez el dado en (G 14) para el caso de digrafos sin circuitos se funda en una modificación del de Roy-Warshall (ver 3.5) para hallar clausuras transitivas.

Otra forma de calcular la reducción transitiva de un digrafo sin circuitos, que hace uso de la representación matricial booleana fue propuesta por Marimont (M 16). Véase Prop. 3.13.4.

Un problema similar al anterior, que parece ser más accesible, es el de construir un digrafo H con número mínimo de arcos, no necesariamente subdigrafo de G, tal que las respectivas clausuras transitivas de H y de G coincidan.

Un algoritmo para resolverlo en el caso de digrafos sin circuitos fue dado en (A 4), donde además, se ve que la complejidad computacional de determinar la reducción transitiva equivale a la de hallar la clausura transitiva.

Dicho problema y el de hallar la clausura transitiva, de digrafos sin circuitos fue estudiado por Goralciková y Koubek (G 15) quienes proponen un algoritmo que mejora el dado en (A 4) y es posible extenderlo para hallar las clausuras transitivas de digrafos arbitrarios. En (G 16) proponen un algoritmo para hallar las reducciones transitivas de digrafos sin circuitos basándose en uno de Schnorr (S 7) para hallar clausuras transitivas.

En (L 6) se analizan, simultáneamente, la determinación de la clausura y la reducción transitiva mejorándose algoritmos dados en (I 1). A su vez, en (B 15) y en (H 19) se consideran relaciones entre ambos problemas para el caso de ciertos digrafos.

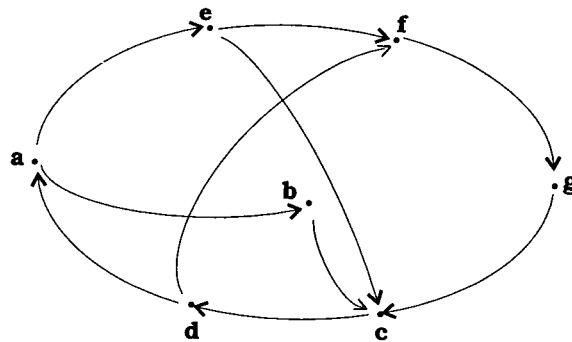
---

Un par de interesantes problemas a considerar en digrafos fuertemente conexos son los siguientes:

- i) Existe alguna relación entre las longitudes de los distintos caminos cerrados que contiene ?
- ii) Hay algún valor L tal que partiendo de un vértice  $x$ , arbitrario, pueda llegarse a todos los restantes y al propio  $x$  con caminos de longitud L ?

#### Ejemplo 3.2.2

El digrafo G dado a continuación contiene, entre otros, los caminos cerrados : a,b,c,d,f,g,c,d,a / a,b,c,d,a / a,e,c,d,a / a,e,f,g,c,d,a / f,g,c,d,f / cuyas respectivas longitudes son : 8, 4, 4, 6, 4.



Visto que los caminos cerrados elementales de  $G$  tienen longitud 4 o bien 6 resulta que en  $G$  todos los posibles caminos cerrados a construir tendrán longitud  $L = 4 + 2.k$ , para algún entero no negativo  $k$ .

Para considerar los problemas i); ii), siguiendo la línea de (K 15 Cap.1) recurriremos al siguiente Lema 3.2.3.

Otra aproximación puede verse en (D 4), donde se recurre al resultado : si  $G$  es fuertemente conexo el máximo común divisor de las longitudes de sus circuitos coincide con el de las longitudes de sus circuitos elementales y con su "índice de imprimitividad".

**Lema 3.2.3 :**

Un conjunto de enteros positivos  $n_i, i \in I$ , que es cerrado bajo adición contiene, excepto a lo sumo un número finito, todos los múltiplos de su máximo común divisor, o equivalentemente, contiene todos sus múltiplos "suficientemente grandes".

**Demostración**

Si el m.c.d. del conjunto en cuestión es  $d > 1$ , dividiendo por  $d$  todos los  $n_i$  se obtiene un conjunto de enteros primos entre sí. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, puede suponerse que el m.c.d. de los enteros dados es  $d = 1$ . En tal caso, se sabe, es posible expresar 1 como combinación lineal entera de dichos enteros, o sea, tener :  $1 = n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots + n_k a_k$  ( $a_i \in \mathbb{Z}$ ).

Si agrupamos, separadamente, los  $n_i$  con coeficientes positivos y aquellos de coeficientes negativos, como por hipótesis, el conjunto dado es cerrado bajo adición deben existir, en el conjunto dado, dos enteros positivos  $m, n$  tales que  $m - n = 1$ .

Si  $q$  es suficientemente grande (por caso  $q \geq n.(n-1)$ ) podemos

poner  $q = a.n + b = (a-b).n + b.m$  ; con  $a \geq n-1$ ;  $0 \leq b < n-1$ . Como por hipótesis el m.c.d. de los enteros considerados es  $d=1$ , el valor  $q$  debe estar en el conjunto en cuestión y esto termina la demostración.

#### Corolario

Si  $d_i$  es el m.c.d de las longitudes de los caminos cerrados que contienen cierto vértice  $i$ , todos los múltiplos "suficientemente grandes" de  $d_i$  son longitudes de algún camino cerrado que contiene el vértice  $i$ .

En efecto, si  $N_{ii}$  es el conjunto de las longitudes de los caminos cerrados que contienen  $i$ , de  $a \in N_{ii}$  ;  $b \in N_{ii}$  resulta que  $(a + b) \in N_{ii}$ . Luego, del Lema resulta que todo múltiplo "suficientemente grande" del valor  $d_i$  está presente en  $N_{ii}$ .

En particular, en el digrafo anterior  $d_i = 2$ , cualquiera sea el vértice  $i$  y se tiene que a excepción del 2 todos los restantes pares son longitud de algún camino cerrado.

#### Proposición 3.2.4

Si  $G$  es un multidigrafo fuertemente conexo y  $d$  el máximo común divisor de las longitudes de sus caminos cerrados, entonces :

Las longitudes de sus caminos  $i \Rightarrow j$  son congruentes mod.  $d$ ,  
cualesquiera sean los vértices  $i, j$ , no necesariamente  $i \neq j$ .

#### Demostración

Por hipótesis  $G$  es fuertemente conexo y por lo tanto el conjunto  $N_{ij}$ , de las longitudes de los caminos  $i \Rightarrow j$ , es no vacío.

Conservando la notación del corolario anterior veamos ahora que cualesquiera sean  $i, j$  vale  $d_i = d_j = d$ .

En efecto, supuesto  $a \in N_{ij}$  ,  $b \in N_{ji}$  por Corolario anterior y para  $k$  suficientemente grande se tienen :  $a + b + k.d_j \in N_{ii}$ ;

$$a + b + (k+1).d_j \in N_{ii}.$$

Así entonces,  $a + b + k.d_j + d_j = \alpha.d_i + d_j = \beta.d_i$ , con  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha, \beta$  naturales; de donde,  $d_j$  es múltiplo positivo de  $d_i$ .

Asímismo, de  $b + a + k'.d_i \in N_{jj}$  y  $b + a + (k'+1).d_i \in N_{jj}$  se obtendrá que  $d_i$  es múltiplo positivo de  $d_j$ .

Por lo tanto  $d_i = d_j = d$ .

Supuesto ahora que :  $a \in N_{ij}$ ,  $b \in N_{ji}$ ,  $c \in N_{ij}$  se tiene que  $(b + a) \in N_{jj}$  y  $(b + c) \in N_{jj}$ ; por lo tanto ambas  $(b + a)$  y  $(b + c)$  son múltiplos de  $d$ .

En consecuencia,  $a \equiv c \pmod{d}$  y esto termina la demostración.

De lo precedente resulta que si  $G$  es fuertemente conexo :

- i) las longitudes de sus caminos  $i \Rightarrow j$  son de la forma  $k.d + t_{ij}$  para cierto  $0 \leq t_{ij} < d$ ; en consecuencia son congruentes con  $t_{ij}$  módulo  $d$ . En particular, los cerrados son congruentes con  $t_{ii} = 0 \pmod{d}$ .
- ii) Además, a partir de cierto  $k_0$ , cualquiera sea  $k \geq k_0$ , resulta que  $k.d + t_{ij}$  es la longitud de algún camino  $i \Rightarrow j$ .
- iii) Si  $p \in N_{ij}$  y  $q \in N_{ji}$  entonces  $(p + q) \in N_{ii}$ . Por lo tanto  $p + q = k_1.d + t_{ij} + k_2.d + t_{ji} = k_3.d + t_{ii}$  de donde  $t_{ij} + t_{ji} \equiv 0 \pmod{d}$
- iv) Si  $p \in N_{ij}$  y  $q \in N_{jk}$  entonces  $(p + q) \in N_{ik}$ . Por lo tanto  $k_1.d + t_{ij} + k_2.d + t_{jk} = k_3.d + t_{ik}$  de donde  $t_{ij} + t_{jk} \equiv t_{ik} \pmod{d}$

De lo anterior resulta que la relación  $R$  definida por  $iRj$  si y sólo si  $t_{ij} \equiv 0 \pmod{d}$  (más precisamente  $t_{ij} = 0$ ) es una



relación de equivalencia en el conjunto de vértices. Sus clases se dirán "clases resto mod.  $d$ " o más brevemente "clases  $R_d$ ".

Como en  $G$  hay caminos de longitud  $L \in \{0,1,2, \dots, d, d+1, \dots\}$  puede afirmarse que hay exactamente  $d$  clases  $R_d$ .

De  $t_{ij} + t_{jk} = t_{ik} \pmod{d}$  resulta que  $t_{ij} = t_{ik}$  si y sólo si  $t_{jk} \equiv 0$  es decir, si y sólo si ambos  $j, k$  están en la misma de las clases  $R_d$ .

Luego, si hay un camino  $i \Rightarrow x$  de longitud  $L = k.d + t_{ij}$  resulta que  $x$  pertenece a la  $R_d$ -clase  $t_{ij}$  y todos los caminos  $i \Rightarrow x$  tienen longitud  $L \equiv t_{ij} \pmod{d}$ ; de donde la

### Proposición 3.2.5

Si  $G$  es fuertemente conexo y el m.c.d. de las longitudes de sus caminos cerrados es  $d \geq 1$  entonces su sostén  $\tilde{G}$  es  $d$ -partido. Luego, sus vértices pueden partirse en  $d$  clases tales que: si  $d > 1$ , los de una misma clase son no adyacentes entre sí)

Si se supone que para recorrer cada arco es necesaria una unidad de tiempo, la longitud de cada camino coincide con el tiempo que lleva recorrerlo.

Con esta convención y lo visto mas arriba puede afirmarse la

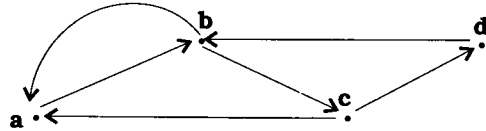
### Proposición 3.2.6

Si  $G$  es fuertemente conexo y el m.c.d. de las longitudes de sus caminos cerrados es  $d$ , cada "mensaje" enviado desde  $i$  en  $t = 0$ , alcanza en tiempo  $T \equiv t_{ij} \pmod{d}$  sólomente a vértices de la  $R_d$ -clase  $t_{ij}$ . Además, si  $T$  es suficientemente grande, todos los vértices de la  $R_d$ -clase  $t_{ij}$  son alcanzados simultáneamente.

Notemos que el "mensaje" vuelve a cada una de dichas clases con periodo  $d$  y que si  $d = 1$  hay una única clase. En este caso a partir de un tiempo "suficientemente grande" el mensaje se recibe simultáneamente en todo vértice.

Ejemplo 3.2.3

En el siguiente digrafo hay caminos cerrados de longitud 2,3,5, 6, etc.; luego  $d = 1$  y todos los vértices pertenecen a la misma  $R_d$ -clase.



A continuación se indican los tiempos en los cuales es recibido, en cada vértice, un mensaje emitido en a, para  $t = 0$ .

a	0	2	3	4	5
b	1	3	4	5	
c	2	4	5		
d	3	5			

Puede verse que a partir de  $t = 5$  todos los vértices lo reciben simultáneamente.

Ejemplo 3.2.4

En el digrafo del Ejemplo 3.2.2 los caminos cerrados tienen longitudes 4,6,8,10,12, etc. pero no los hay de longitud impar y el m.c.d. a considerar es  $d = 2$ .

Su grafo sostén es bipartido y sus clases están formadas, respectivamente, por los vértices  $\{a,c,f\}$ ,  $\{b,d,e,g\}$ .

La siguiente tabla indica tiempos en que sus vértices son alcanzados por un mensaje originado en a, en  $t = 0$ .

a	0	4	6	8
b	1	5	7	9
c	2	4	6	8
d	3	5	7	9
e	1	5	7	9
f	2	4	6	8
g	3	5	7	9

A partir de  $T = 4$  todos los vértices de la clase  $\{a,c,f\}$  son alcanzados en tiempos  $2.k$  y a partir de  $T = 5$  en tiempos  $2.k+1$  se alcanzan todos los de la clase  $\{b,d,e,g\}$ .

### 3.3 CONFIGURACIONES SIN CIRCUITOS

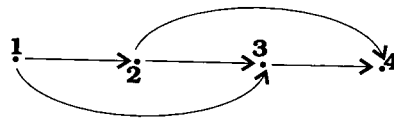
Para destacar la importancia que puede tener el conocimiento de la presencia de circuitos ( o equivalentemente, la de caminos cerrados ) observemos que :

- a toda relación de orden corresponde un digrafo que carece de circuitos distintos de bucles
- si G representa una situación que involucra relaciones de precedencia estricta, la existencia de caminos cerrados implica la de errores en los datos que llevaron a la construcción de G; es decir, denuncia la inconsistencia de los datos considerados.

Por otra parte, puede ser de interés observar que los digrafos sin circuitos permiten representar sistemas de "ecuaciones en cascada"; es decir, del tipo :

$$f_1(x_1) = k \quad ; \quad x_h = f_h(x_1, x_2, \dots, x_{h-1}) \quad ; \quad h \geq 2.$$

Así por ejemplo



corresponde al sistema  $x_1 = k$  ;  $x_2 = f_2(x_1)$  ;  $x_3 = f_3(x_1, x_2)$  ;  $x_4 = f_4(x_1, x_2, x_3)$ .

Si G es un multidigrafo sin circuitos y sólo entonces es factible :

- numerar sus vértices de manera que cada arco sea de la forma  $(i, j)$  con  $i < j$ . Así entonces, el número asignado a cada vértice es estrictamente menor que el de todos sus sucesores
- introducir un orden lineal en su conjunto de arcos, notándolos de forma que si el vértice final de  $v$  coincide con el inicial de  $w$  entonces  $v = u_h$  ;  $w = u_k$  con  $h < k$ .
- idem b) pero con  $h > k$ .

Es claro que si la denominación de los arcos respeta b) y en el orden así inducido  $u_i$  es el primero de los arcos con vértice inicial  $x$ . Para hallar  $i$  todos los caminos que lo tienen por extremo inicial, bastará limitarse a considerar, sólo los  $u_h$  con  $h \geq i$ .

Una afirmación similar cabe para el caso de caminos con vértice final prefijado.

El concepto "pila", que daremos en 3.7 nos permitirá construir un tal orden.

Constatar la existencia de caminos cerrados (o equivalentemente de pares de caminos  $a \Rightarrow b$  ;  $b \Rightarrow a$ ) a partir de la definición o de los resultados que daremos en 3.13 al considerar operaciones matriciales presupone un proceso tedioso y poco práctico.

En cambio, visto que si  $G$  carece de caminos cerrados tiene vértices de entrada y vértices de salida el problema que nos ocupa puede abordarse, en forma cómoda, con el siguiente

3.3.1 - *Algoritmo para verificar si un multidigrafo finito  $G$  carece de caminos cerrados.*

- 1) Marcar todos sus vértices de salida (entrada) y pasar a 2).
- 2) De los vértices restantes marcar todos aquellos que tengan ahora, todos sus sucesores (predecesores) inmediatos marcados y reiterar 2) tanto como sea posible.

El multidigrafo en cuestión carece de caminos cerrados si y sólo si todos sus vértices han sido marcados.

Otra forma de enunciar el algoritmo anterior es la siguiente:

- 1) Eliminar de  $G$  todas sus salidas (entradas) notar  $G'$  al multidigrafo resultante y pasar a 2)
- 2) Reiterar 1) aplicándolo a  $G'$ , en tanto sea posible.

Utilizando la matriz de precedencia y refiriéndonos en particular al caso de los vértices de salida, el algoritmo anterior admite la siguiente forma, que es fácil de implementar.

- 1) Marcar todas las filas con todas sus componentes nulas. Eliminar dichas filas  $f_i$ , sus correspondientes columnas  $c_i$  y pasar a 2).
- 2) Reiterar 1) en la matriz recién construída.

La configuración estudiada carece de circuitos si y sólo si el algoritmo lleva a eliminar todas las filas y columnas. En forma similar podría operarse considerando entradas y columnas en lugar de salidas y filas, o también, analizando simultáneamente filas y columnas.

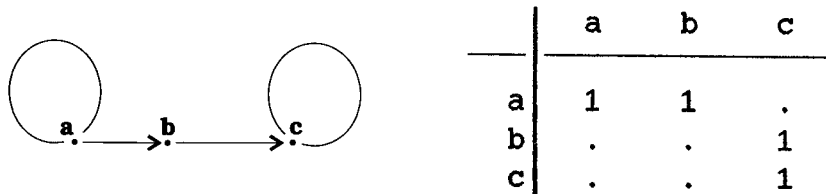
De lo precedente cabe la siguiente reformulación dada por Mari-mont (M 17).

3.3.2 Una matriz es de precedencia de un multidigrafo sin caminos cerrados, (es decir, es de precedencia estricta) si y sólo si cualquier submatriz principal tiene al menos una fila con todos sus elementos nulos.

Según veremos en 3.13, de 3.3.2 resulta una forma cómoda para determinar si una matriz es nilpotente.

Si hay caminos cerrados, aplicando el algoritmo anterior tanto como sea posible se obtiene una "matriz residual" que carece de filas y de columnas constituídas sólo por ceros.

Del ejemplo que sigue resulta, que en tal caso, no puede afirmarse que todos los vértices representados en ella pertenecen a circuitos (idem, que al aplicar el algoritmo 3.3.1 sólo quedan sin marcar los vértices que pertenecen a caminos cerrados).



Una tal matriz no da información completa sobre eventuales interrelaciones entre los circuitos de  $G$ , salvo en casos especiales (ver (H 21), (H 22)). Para un estudio más profundo puede recurrirse al digrafo cociente  $G_{fc}$ .

Por otra parte, el concepto "pila" ( ver 3.7 ) permite resolver el problema anterior aplicando un algoritmo que según señalan en (D 5) es, en general, más eficiente que el de Marimont.

Una caracterización útil es la siguiente.

3.3.3  $G$  carece de caminos cerrados si y sólo si es posible dar una partición de su conjunto de vértices en niveles  $N_i$  ( $i \geq 1$ ) tales que si  $x \in N_j$  todos sus sucesores están en niveles  $N_r$  con  $r > j$ .

En particular, si todos los vértices de cada nivel de  $G$  tienen sus sucesores inmediatos en el nivel siguiente, suele decirse que  $G$  es secuencial.

Los niveles quedan ordenados en forma total y estricta por la relación  $N_i < N_j$  si y sólo si  $i < j$ .

Más precisamente:

Si  $G$  carece de caminos cerrados aplicando las siguientes reglas es posible fijar un "ordenamiento por niveles ascendentes".

- 1) Las entradas de  $G$  constituyen  $N_1$  y se pasa a 2) aplicándola a  $G_1 = G - N_1$ .
- 2) Cualquiera sea  $i \geq 1$ ; si  $G_i$  es vacío el ordenamiento ha terminado, caso contrario las entradas de  $G_i$  conforman  $N_{i+1}$  y se pasa a 3).
- 3) Se nota  $G_{i+1} = G_i - N_{i+1}$  y se repite 2) para  $(i+1)$  en vez de  $i$ .

A partir del ordenamiento generado por las reglas precedentes, para hallar otros, también por niveles ascendentes, basta reiterar la operación que sigue :

Si  $x \in N_h$  y todos sus sucesores están en niveles  $N_k$ ,  $k \geq k_0 > h$  trasladar  $x$  hasta algún  $N_r$  con  $h < r < k_0$ .

En forma análoga, pero considerando las salidas en lugar de las entradas puede darse un "ordenamiento por niveles descendentes".

Las particiones que inducen los ordenamientos por niveles ascendentes y los ordenamientos por niveles descendentes suelen ser diferentes.

El método que hemos indicado para fijar un ordenamiento por niveles ascendentes es fácilmente adaptable para el empleo de la matriz de precedencia (idem de precedencia booleana).

Al respecto enunciaremos el siguiente procedimiento que según (K 5, Cap.3.28) fue propuesto por Demoucron.

3.3.4.-Sean:  $G=(V,U)$  un multidigrafo sin circuitos,  $P$  su matriz de precedencia,  $S_1$  el vector que resulta de sumar todos los vectores filas de  $P$  y  $V_1$  el conjunto de vértices asociados a las componentes nulas de  $S_1$ .

Los vértices de  $V_1$  son las entradas de  $G$  y con ellos se compone el nivel  $N_1$ .

Si  $V' = (V - V_1) = \emptyset$  el ordenamiento ha terminado, caso

contrario se calcula el vector  $S_2$  sumando sólo las filas de los vértices de  $V'$ .

Las componentes nulas de  $S_2$  que no figuran en  $S_1$  determinan los vértices  $V_2$  del nivel  $N_2$ .

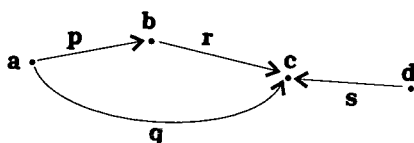
Si  $V' - V_2 = \emptyset$  el ordenamiento ha terminado, caso contrario se reitera lo anterior aplicándolo a  $V'' = (V' - V_2)$ .

Y así sucesivamente.

El método anterior también puede ser utilizado para detectar si hay caminos cerrados. Efectivamente, si existen circuitos y sólo entonces alguno de los  $S_i (i \geq 1)$  carece de componentes nulas

Los anteriores métodos de ordenamiento por niveles están implícitos en los datos para constatar la existencia de caminos cerrados y sin modificaciones esenciales pueden adaptarse para "ordenar por niveles los arcos".

Así por ejemplo, dado



los niveles ascendentes de sus vértices son  $N_1 = \{a, d\}$ ;  $N_2 = \{b\}$ ;  $N_3 = \{c\}$  y los de sus arcos  $N'_1 = \{p, q, s\}$ ;  $N'_2 = \{r\}$ .

Considerando niveles descendentes tendríamos  $N_1 = \{c\}$ ;  $N_2 = \{b, d\}$ ;  $N_3 = \{a\}$  para vértices y  $N'_1 = \{q, r, s\}$ ;  $N'_2 = \{p\}$  en arcos.

Los ordenamientos por niveles de vértices, o de arcos, ayudan a elegir, para el caso de multidigraphos sin circuitos, representaciones topológicas más claras y fácilmente manejables. Son útiles también para el manejo de la información en computadoras.

Por otra parte, los ordenamientos precedentes pueden extenderse parcialmente a los multidigraphos  $G$  que admiten caminos cerrados. Basta, para esto, aplicarlos a las respectivas configuraciones cociente. En tal caso todos los vértices de una misma componente fuertemente conexa de  $G$  pertenecerán a un mismo nivel en  $G_{fc}$ .

### 3.4 ALGUNOS ALGORITMOS PARA DETERMINAR CAMINOS

El problema de hallar caminos, presenta variaciones de distinta índole. Por ejemplo, puede interesar :la determinación de todos ellos o de sólo algunos; idem pero restringiéndonos a los caminos simples, o a los elementales, o a los que tienen longitudes acotadas, o extremos prefijados, etc. Por lo tanto los algoritmos propuestos para tratar esta cuestión son muy diversos y numerosos.

En 3.13 veremos que para decidir sobre el número (o la existencia) de caminos  $a \Rightarrow b$  con determinada longitud, cualesquiera sean los vértices  $a, b$ , puede utilizarse el producto de matrices (o de matrices booleanas). Por esto, para hallar caminos, son frecuentes los algoritmos que recurren a procesos inspirados en el producto de matrices. En particular, un análisis de varios "algoritmos matriciales" puede verse en (K 14 Vol. II).

Pero habitualmente será más eficaz, pues exigen menor número de operaciones, optar por otros, basados en el uso de ordenadores, o en el Algoritmo de Roy-Warshall (3.5), que permite determinar la clausura reflexivo-transitiva de una relación (las componentes fuertemente conexas de un digrafo) sin recurrir al producto de matrices.

La idea básica de dicho algoritmo es :

| Fijada una numeración de los vértices y procediendo recursivamente sobre  $k$ , determinar a partir de  $k = 1$ , caminos  $i \Rightarrow j$  con todos sus vértices interiores numerados a lo sumo  $k$ .

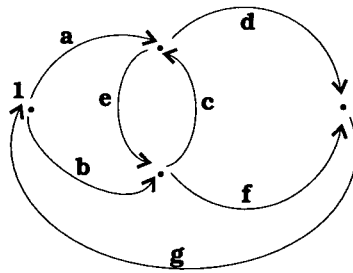
Oportunamente (3.6) daremos algoritmos fundados en el mismo.

A continuación nos referiremos a procedimientos para determinar caminos, sustentados en otras operatorias.

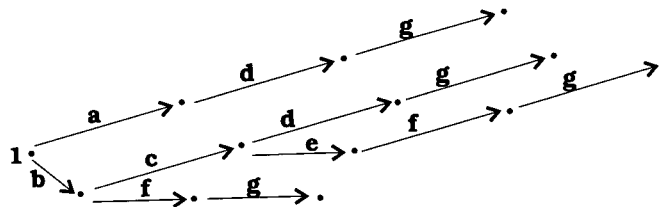
Un procedimiento que permite determinar todos los caminos simples ( elementales ) de un multidigrafo  $G$ , con vértice inicial prefijado, arbitrario, pero que implica "reiterar semiestrellas positivas" es el del "diagrama arborescente" que esbozamos a continuación.



Dado el digrafo



Algunos de sus caminos simples de vértice inicial 1 están indicados en el esquema



Una adecuada modificación del mismo permitiría determinar todos los caminos elementales, maximales, de vértice inicial 1, o sea  $a, d, g$ ;  $a, e, f, g$ ;  $b, c, d, g$ ;  $b, f, g$ .

En general y en virtud del número de operaciones involucradas este método es poco conveniente, además, si sólo interesaran algunos de los caminos el procedimiento anterior sería inútilmente largo.

---

Formalizando la idea de "avanzar tanto como se pueda y retroceder lo mínimo necesario" puede darse el siguiente

3.4.1- *Algoritmo de Trémaux (citado por Lucas (L 7)) para verificar si existen caminos  $a \Rightarrow b$  y en tal caso determinar uno de ellos, que sea simple.*

- 1) Hallar, para algún vértice  $v_1$  un camino simple  $C_1 : a \Rightarrow v_1$  y pasar a 2)
- 2) Si  $b \in C_i$  ( $i \geq 1$ ) el camino hallado es uno de los que

llevan desde  $a$  hacia  $b$  y el objetivo está logrado.

Caso contrario, si existen arcos de vértice inicial  $v_i$  aún no tomados en cuenta para hallar  $C_i$  se lo extiende con alguno de ellos. Se nota  $C_{i+1}$  el camino simple  $a \Rightarrow v_{i+1}$  construido y se reitera 2). aplicándolo a  $i=i+1$ . Si no hay tales arcos pasar a 3).

- 3) Eliminar (por superfluo) el arco final de  $C_i$  ( $i \geq 1$ ) designar  $C_{i+1}$  el camino así obtenido y volver a 2) aplicándola al nuevo camino, excepto si  $C_{i+1}$  es el camino nulo que determina el vértice  $a$  y se han utilizado todos los arcos de extremo inicial  $a$ . En este caso no hay caminos  $a \Rightarrow b$ .

La finitud del número de arcos en  $G$  permite deducir que si al considerar la etapa 2 omitimos el análisis relativo al vértice  $b$  y las reglas se reiteran tanto como es posible, todos los arcos de los caminos de vértice inicial  $a$  serán superfluos en alguna etapa.

Así entonces, si  $b$  es accesible desde  $a$ , cualesquiera sean las sucesivas elecciones de arcos, se determinará un camino simple  $a \Rightarrow b$ .

Por otra parte, es claro que cualesquiera de éstos puede reencontrarse mediante elecciones oportunas al aplicar el método en cuestión.

Nótese que el algoritmo dado lleva a que cada arco se considere en 0, 1, o 2 oportunidades y en este caso, una vez en el sentido de su orientación y la otra en el opuesto.

Por otra parte, sólo requiere "información local", en el sentido de que en cada etapa puede aplicarse sin necesidad de conocer el digrafo en su totalidad.

Si además, para cada vértice se indicara cual fue el arco que permitió alcanzarlo por primera vez, podrían determinarse caminos *elementales* de vértice inicial  $a$ .

---

Visto que todo vértice es accesible desde si mismo, al menos de

forma impropia, resulta que el conjunto de los vértices accesibles desde  $a$  coincide con el de los marcados mediante la aplicación del siguiente procedimiento:

Se marca  $a$  y se reitera tanto como posible la regla :  
Si  $p$  está marcado y existe arco  $(p,q)$ , se marca  $q$ .

Fundado en la misma idea se inscribe el siguiente

3.4.2- *Algoritmo para hallar, supuesto que  $b$  es accesible desde  $a$ , caminos  $a \Rightarrow b$  de menor longitud.*

- 1) Se marca  $a$  con 0 y se pone  $A_0 = \{a\}$ .
- 2) Sea  $A_m$  ( $m \geq 0$ ) el conjunto de vértices marcados  $m$ .  
Si  $b \in A_m$  se pasa a 3), caso contrario se marcan  $m+1$  los vértices finales de arcos cuyo vértice inicial fue marcado  $m$  y se reitera 2) aplicándolo a  $A_{m+1}$ .
- 3) Se determina, en forma regresiva y a partir de  $b$  un camino  $a = x_0, x_1, \dots, x_m = b$  con arcos  $(x_i, x_{i+1})$ ;  $x_i \in A_i$ ;  $0 \leq i \leq m$ .

La justificación del algoritmo puede hacerse por inducción.

Otro problema de sumo interés es el de enumerar y/o contar los caminos elementales y por lo tanto simples.

Este problema, para el cual se han propuesto numerosos métodos, será considerado en 3.6.

---

A continuación reformularemos algunos de los resultados del extenso trabajo monográfico de Derniame y Pair (D 5) en donde se ensaya una descripción algebraica unificada de problemas relativos a caminos. En particular, a partir de algoritmos para hallar caminos se resuelven mediante homomorfismos problemas relativos a la existencia de ellos o a la evaluación de su número.

El esquema adoptado permite abordar problemas atinentes a "longitudes generalizadas", en donde la longitud de un camino puede representar : costo, tiempo, probabilidad, capacidad, etc.

Conservando, en líneas generales, la notación de (D 5) consideraremos en el conjunto de las sucesiones finitas de caminos las operaciones : agregar a continuación ( $\cup$ ) y producto ( $\square$ ) definidas, respectivamente, por :

a)

$$(C_1, C_2, \dots, C_h) \cup (C'_1, C'_2, \dots, C'_k) = (C_1, C_2, \dots, C_h, C'_1, C'_2, \dots, C'_k)$$

b)

$$(C_1, C_2, \dots, C_h) \square (C'_1, C'_2, \dots, C'_k) = (C_1 \circ C'_1, C_1 \circ C'_2, C_1 \circ C'_3, \dots, C_1 \circ C'_k, C_2 \circ C'_1, C_2 \circ C'_2, \dots, C_2 \circ C'_k, \dots, C_h \circ C'_1, \dots, C_h \circ C'_k)$$

En términos informales, el producto  $\square$  de dos sucesiones es la sucesión que se obtiene concatenando todos los elementos de una con todos los de la otra.

Por lo tanto extendiendo lo visto en ocasión de definir la concatenación de caminos resulta que la operación  $\square$  introduce en el conjunto de sucesiones una estructura de semigrupo no conmutativo si los caminos se indican por vértices y arcos, pero una de monoide si de los caminos sólo se dan sus arcos.

Por otra parte, es claro que la operación  $\cup$  es asociativa, no conmutativa y que la sucesión vacía  $\Lambda$  (sucesión carente de caminos) es neutro para dicha operación. Así entonces, en dicho conjunto la operación  $\cup$  introduce una estructura de monoide no conmutativo para el cual

$$(C_1, C_2, \dots, C_h) \square \Lambda = \Lambda \square (C_1, C_2, \dots, C_h) = \Lambda.$$

Para los algoritmos que siguen convendremos que  $K[x, y, i]$  denota una sucesión de caminos  $x \Rightarrow y$  con longitud  $L \leq i$  y que cada arco  $(x, z)$  será indicado  $C_{xz}$ .

Por comodidad, si  $x$  (resp.  $y$ ) se supone prefijado y por ende constante, en lugar de  $K[x, y, i]$  pondremos  $K[y, i]$  (resp.  $K[x, i]$ )

3.4.3- *Algoritmo para determinar todos los caminos de longitud  $L \leq p$ , con extremo final  $y$ , prefijado, arbitrario.*

$$1) \quad K[x, 0] = \begin{cases} \{y\} & \text{si } x = y \\ \wedge & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

- 2) Reiterar, para los sucesivos  $i = 1, 2, \dots, p$ , y para todo vértice  $x$
- $$K[x, i] = K[x, i-1] \cup \left( \bigcup_{z \in V} (C_{xz} \cap K[z, i-1]) \right)$$

Si además, en cada etapa se indicaran los arcos (vértices) de los distintos caminos hallados el proceso anterior permitiría determinar caminos simples (elementales)

Por otro lado, la existencia de caminos  $x \Rightarrow y$  o la evaluación del número de ellos resultan de los siguientes algoritmos, que pueden obtenerse por homomorfismos a partir del 3.4.3 (ver D.5).

3.4.4- Algoritmo para constatar la existencia de caminos  $x \Rightarrow y$ , de longitud  $L \leq p$ , con  $y$  prefijado, arbitrario,

- 1)  $k[x, 0] = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$
- 2) Reiterar para los sucesivos  $i = 1, 2, \dots, p$  y para todo vértice  $x$

$$k[x, i] = k[x, i-1] \vee \left( \bigvee_{z \in V} (c_{xz} \wedge k[z, i-1]) \right)$$

donde  $\begin{cases} c_{xz} & \begin{cases} 1 & \text{si hay arcos } (x, z) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \\ \vee ; \wedge & \text{denotan las operaciones de supremo e ínfimo.} \end{cases}$

3.4.5- Algoritmo para contar los caminos  $x \Rightarrow y$ , de longitud  $L \leq p$ , con  $y$  prefijado, arbitrario.

- 1)  $k[x, 0] = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$
- 2) Reiterar para los sucesivos  $i = 1, 2, \dots, p$  y para todo vértice  $x$ .

$$k[x, i] = k[x, i-1] + \sum_{z \in V} (|c_{xz}| \cdot k[z, i-1]).$$

donde  $|c_{xz}|$  es el número de arcos  $(x, z)$  y  $+$ ,  $\cdot$  denotan las operaciones de suma y de producto habituales.

Otros de los algoritmos dados en (D 5) para determinar los caminos  $x \Rightarrow y$  cualesquiera sean  $x, y$ , se basan en las ideas que sustentan el procedimiento de Dantzig para hallar distancias, o en el de Roy-Warshall (3.5), o en el concepto de pila (3.7).

Según se especifica, de las experiencias hechas resulta que el fundado en la noción pila es, generalmente, más eficaz que los restantes.

En numerosos algoritmos se recurre explícitamente a órdenes totales prefijados sobre los conjuntos de vértices o de arcos. Para algunos, dicho orden es arbitrario, para otros debe satisfacer requerimientos particulares. Dentro de esta última clase se incluye el que daremos a continuación.

3.4.6- *Algoritmo para determinar en un multidigrafo G, sin caminos cerrados, todos sus caminos de extremo final y, con y arbitrario, prefijado.*

Lo puntualizado al comienzo de 3.3 permite suponer que en este caso los arcos de G se han designado  $u_1, u_2, \dots, u_m$  de forma tal que :

si el vértice final de  $u_i$  coincide con el inicial de  $u_j$ ,  $i > j$ .

A efectos de la formalización convendremos que el vértice inicial ( final ) de cada arco  $u_i$  será notado  $w_i$  (  $z_i$  ).

Así entonces, cada vértice admitirá tantas designaciones  $w_i(z_i)$  como arcos lo tengan por vértice inicial (final).

$$1) \quad K[x,0] = \begin{cases} \{y\} & \text{si } x = y \\ \wedge & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

2) Reiterar para los sucesivos  $u_i = (w_i, z_i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$

$$K[w_i, i] = K[w_i, i-1] \cup ( (w_i, z_i) \square K[z_i, i-1] )$$

$$K[x, i] = K[x, i-1] \quad \text{si } x \neq w_i.$$

La eficacia del algoritmo resulta de lo siguiente:

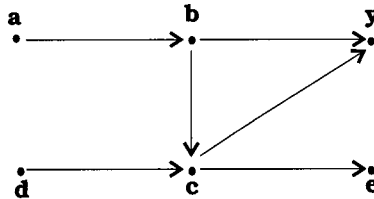
- por aplicación de las reglas dadas se determinan caminos de longitud  $L \leq i$ ;  $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$  con vértice final y.
- cualquiera sea x, todo camino  $C : x \Rightarrow y$  con primer arco  $u_k$ ,  $k \leq i$ , está contenido en  $K[x, i]$ .

La última afirmación puede demostrarse por recurrencia sobre i.

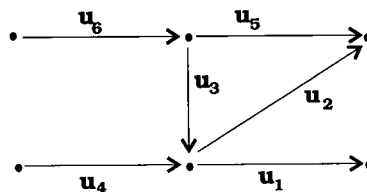
En efecto, si el primer arco de C es  $u_k$ ,  $x = w_k$ . Si  $k < i$

por hipótesis inductiva  $C$  está en  $K[x, i-1]$  y por lo tanto en  $K[x, i]$ . En cambio, si  $k = i$ ,  $C = (w_i, z_i) \sqcup C'$  donde  $C'$  es el camino nulo  $\{y\}$  o cierto camino de vértice final  $y$ , con primer arco  $u_h$ ,  $h \leq k-1$ . También ahora, por hipótesis inductiva, tenemos que  $C$  está en  $K[x, i]$ .

Ejemplo Sea  $G$



Una ordenación de los arcos, compatible con las exigencias del algoritmo, es la que resulta de considerar la sucesión de los índices en el siguiente esquema



Con el orden total así inducido y las notaciones convenidas se tiene:  $a=w_6$ ;  $b=z_6=w_3=w_5$ ;  $c=z_3=z_4=w_1=w_2$ ;  $d=w_4$ ;  $e=z_1$ ;  $y=z_2=z_5$ .

Aplicando el algoritmo tendremos:

para  $i=0$  que  $K[x, 0] = \{y\}$  si  $x = y$  ;  $\Lambda$  si  $x \neq y$ .

para  $i=1$  si  $x=c=w_1$   $K[w_1, 1] = \Lambda \cup ((w_1, z_1) \sqcup \Lambda) = \Lambda$

" si  $x \neq c$   $K[x, 1] = K[x, 0]$

para  $i=2$  si  $x=c=w_2$   $K[w_2, 2] = K[w_2, 1] \cup ((w_2, z_2) \sqcup \{y\}) = u_2$

" si  $x \neq w_2$   $K[x, 2] = K[x, 1]$

En la siguiente tabla se resumen las sucesivas sucesiones de caminos que resultan aplicando el algoritmo en cuestión.

Para obtener los de su  $i$ -ésima columna deben conocerse todos los de la columna  $(i-1)$ .

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$y$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y\}$	$\{y\}$
$a$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$u_6 u_3 u_2 ; u_6 u_5$
$b$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$u_3 u_2$	$u_3 u_2$	$u_3 u_2 ; u_5$	$u_3 u_2 ; u_5$
$c$	$\Lambda$	$\Lambda$	$u_2$	$u_2$	$u_2$	$u_2$	$u_2$
$d$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$u_4 u_2$	$u_4 u_2$	$u_4 u_2$
$e$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$

### 3.5 CLAUSURAS TRANSITIVA Y REFLEXIVO-TRANSITIVA

En 1.3 hemos definido, de acuerdo con lo que es habitual, como "clausura de una relación  $R$  respecto de cierta propiedad  $P$ " a la que es intersección de todas aquellas que contienen  $R$  y satisfacen  $P$ .

Si no hay tales relaciones, la clausura en cuestión es vacía.

En dicha ocasión hemos observado que nuestra "clausura reflexivo-transitiva" habitualmente es designada "clausura transitiva". Al respecto, Roy (R 15) observa que ésto no es algebraicamente correcto pero la adopta por concesión al uso habitual y propone, para la que denominaremos "clausura transitiva" el nombre "fermeture  $\mu$ -transitive". En (D 5) se la designa "fermeture transitive stricte" y en (H 16) "fermeture transitive algébrique".

Dada una relación  $\Gamma \subseteq V \times V$  la determinación de su clausura reflexiva es inmediata, pero no vale igual afirmación respecto de su clausura transitiva, la que está estrechamente ligada con los caminos del digrafo  $(V, \Gamma)$ .

En efecto, dado  $G = (V, \Gamma)$  y notando  $\Gamma^*$  a la clausura transitiva de  $\Gamma$  resulta que  $y \in \Gamma^*(x)$  si y sólo si  $G$  contiene al menos un camino no nulo desde  $x$  hasta  $y$  (eventualmente  $x = y$ ).



Más precisamente :

A cada digrafo  $G = (V, \Gamma)$  puede asociársele su clausura reflexiva incorporándole un bucle en cada vértice que no sea ya soporte de uno ; su clausura transitiva  $G^* = (V, \Gamma^*)$  poniendo  $q \in \Gamma^*(p)$  si y sólo si en  $G$  existe al menos un camino no nulo desde  $p$  hasta  $q$  y su clausura reflexivo-transitiva ( o de preorden )  $\hat{G} = (G, \hat{\Gamma})$ , con  $\hat{\Gamma} = \Gamma^* \cup I$  (  $I =$  identidad )

Es fácil verificar que :

1-  $\hat{\Gamma} = \Gamma^* \cup I = (\Gamma \cup I)^*$

2-  $\Gamma^* = \hat{\Gamma} \circ \Gamma = \bigcup_i \Gamma^i$ , para  $i \geq 1$ .

En particular, si  $\Gamma$  es definida en un conjunto de  $n$  elementos  $\Gamma^* = \bigcup_i \Gamma^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

3-  $x$  es soporte de un bucle en  $G^*$  si y sólo si  $x$  pertenece a caminos cerrados de  $G$ .

4-  $\langle X, \Gamma \rangle$  es fuertemente conexo si y sólo si  $\hat{\Gamma}(x) = V$ , (o equivalentemente  $\hat{\Gamma}^{-1}(x) = V$ ) cualquiera sea el vértice  $x$ .

5-  $G$  es fuertemente conexo si y sólo si en  $G^*$  hay arcos  $(x, y)$ ,  $(y, x)$  cualesquiera sean los vértices  $x, y$ ;  $x \neq y$ .

Retomando lo afirmado en 3.2 respecto del preorden de accesibilidad se tiene :

3.5.1 Si  $G = (V, \Gamma)$  carece de caminos cerrados distintos de bucles y sólo entonces, el preorden asociado a su clausura reflexivo-transitiva, es un orden.

En este caso en  $\hat{G}$  pueden reflejarse todos los conceptos propios de la teoría de los conjuntos ordenados.

Oportunamente consideraremos distintas representaciones matriciales de un mismo multidigrafo  $G$  y veremos como, operando con ellas, puede obtenerse información respecto de sus caminos, es

decir, sobre las clausuras citadas.

En dicho contexto será necesario recurrir a reiterados productos de matrices, pero ésto es poco práctico.

Para decidir sobre la existencia de caminos  $a \Rightarrow b$  un procedimiento eficaz, fácil de implementar y que no conlleva producto de matrices es el propuesto, independientemente, por Warshall (W 5) y por Roy (R 15), (R 16), ver también (H 16).

Aplicado a las matrices de orden  $n$  requiere del orden de  $n^3$  operaciones booleanas, similar al del que implica efectivizar un único producto de dichas matrices.

Al formalizarlo matricialmente el mismo utiliza explícitamente el orden total, pero arbitrario, que se induce en el conjunto de vértices al atender a sus respectivas designaciones.

En términos coloquiales el algoritmo consiste en repetir, tanto como sea posible y a partir de la matriz de la relación, la siguiente operación.

Copiar todos los 1 de la fila  $k$ , en cada fila que tenga un 1 en la columna  $k$ .

Véase que la operación anterior equivale a incorporar un arco  $(i,j)$  supuesto que existan previamente los arcos  $(i,k)$ ;  $(k,j)$  y a conservar los restantes.

En términos algebraicos la operación indicada implica pasar de una matriz booleana de componentes  $a_{i,j}$  a otra de elementos  $b_{i,j}$  con  $b_{i,j} = a_{i,j} \vee (a_{i,k} \wedge a_{k,j})$ .

Al aplicarlo a partir de la matriz precedencia de un digrafo  $G$  se obtiene su clausura transitiva y aplicándolo a partir de la correspondiente a la clausura reflexiva de  $G$  se tiene la de su clausura reflexivo-transitiva.

Para hallar la clausura reflexivo-transitiva de  $G = (V, \Gamma)$  puede calcularse  $\Gamma^*$  y luego incorporar bucles, si es necesario, o bien determinar directamente la clausura transitiva de  $\Gamma \cup I$ .

Creemos, que la primera de las maneras indicadas es más fructífera, pues si bien hallarla a partir de  $\Gamma \cup I$  puede presentar algunas ventajas formales (por ejemplo : lleva a considerar ma-

trices booleanas con diagonal unidad), ello implica perder información (por ejemplo, saber si cierto vértice pertenece a un circuito de  $G$ ).

### 3.5.2 ALGORITMO DE ROY-WARSHALL para determinar la clausura transitiva de una relación.

Dado el digrafo  $G = (V, \Gamma)$  de vértices  $1, 2, \dots, n$  y su matriz de precedencia  $P(G)$  sean :

$$C^0 = P(G)$$

$$C^k = (c_{i,j}^k) \quad \text{con} \quad c_{i,j}^k = c_{i,j}^{k-1} \vee (c_{i,k}^{k-1} \wedge c_{k,j}^{k-1}) ; 1 \leq k \leq n$$

Por recurrencia resulta que las sucesivas matrices  $C^k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) son tales que :

$$c_{i,j}^k = \begin{cases} 1 & \text{si hay arco } (i,j) \text{ o existe camino } i \Rightarrow j \text{ (no necesariamente } i \neq j) \text{ con todos sus vértices interiores numerados a lo sumo } k. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

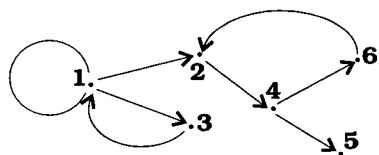
En efecto, los eventuales arcos se conservan y además, existen caminos  $i \Rightarrow j$  (posiblemente  $i = j$ ) con todos sus vértices interiores numerados a lo sumo  $k$ : si ya existen caminos  $i \Rightarrow j$  con todos sus vértices interiores numerados a lo sumo  $k-1$  o si hay caminos  $i \Rightarrow k$  ;  $k \Rightarrow j$  con sus respectivos vértices interiores numerados a lo sumo  $(k-1)$ .

Como en las matrices  $C^k$  se satisface lo dicho y  $G$  es de orden  $n$   $C^n$  da su clausura transitiva.

Es fácil verificar que el algoritmo anterior aplicado a una matriz simétrica da una matriz de igual carácter.

#### Ejemplo 3.5.1

Aplicaremos, ahora, el metodo anterior para hallar la clausura transitiva del siguiente digrafo



$$C^0 = P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$C^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & . & . \end{bmatrix}$$

$$C^3 = C^2$$

$$C^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^5 = C^4$$

$$C^6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obviamente, para tener la matriz de la clausura reflexivo-transitiva del digrafo considerado basta agregar, en la última de las matrices halladas un 1 en la componente de posición 5,5.

Del algoritmo resulta que una componente  $c_{i,j}^{k-1} = 0$  deviene  $c_{i,j}^k = 1$  si y sólo si  $c_{i,k}^{k-1} \wedge c_{k,j}^{k-1} = 1$ .

Además, fijado  $k$  :  $c_{i,k}^k = c_{i,k}^{k-1}$  ;  $c_{k,j}^k = c_{k,j}^{k-1}$  ; por lo tanto para obtener  $c_{i,j}^k$  el valor de  $c_{i,j}^{k-1}$  interesa sólo para  $i \neq k \neq j$ .

Según destaca Sahni (S 1), lo precedente y algunas otras relaciones permiten simplificar el programa de cálculo de  $C^n$ .

En (Z 3) se propone implementarlo empleando árboles con raíz, construídos "ad-hoc".

Por otra parte, como todas las componentes de valor 1 en cierta

$C^h$ , se mantienen en las posteriores, la siguiente operación L (que enunciaremos para cuando  $C^0 = P \vee I$ ) da una forma práctica de operar para obtener las sucesivas  $C^k$ .

A partir de  $C^0 = P \vee I$  y conocida  $C^{k-1}$ , verificar para cada  $c_{i,j}^{k-1} = 0$ , si hay una "L" de términos  $c_{k,k}^{k-1} = c_{i,k}^{k-1} = c_{k,j}^{k-1} = 1$ . Si tal "L" existe,  $c_{i,j}^k = 1$ ; caso contrario  $c_{i,j}^k = 0$

Si  $C^n$  es la matriz clausura reflexivo-transitiva y sus  $i$ -ésima y  $j$ -ésima fila (columna) coinciden, visto que los elementos de su diagonal principal son 1 puede afirmarse que los respectivos vértices están en una misma componente fuertemente conexa.

En efecto, de  $c_{i,i}^n = c_{j,j}^n = c_{i,j}^n = 1$  y la supuesta identidad de la  $i$ -ésima y la  $j$ -ésima fila (columna) resulta  $c_{j,i}^n = 1$  y por lo tanto, que ambos  $i, j$  pertenecen a una misma componente. Por otra parte, si ambos vértices están en una de esas componentes las respectivas filas (columnas) son iguales.

Así entonces, en tal caso, los conjuntos maximales de filas (o de columnas) iguales fijan la partición de vértices cuyas clases inducen las componentes fuertemente conexas de  $G$ .

En el ejemplo anterior ellas están dadas, respectivamente, por los vértices 1,3 // 5 // 2,4,6.

Aplicando el método matricial indicado en 3.2 al Ejemplo 3.5.1 y para la siguiente matriz de permutación  $\Pi$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \end{bmatrix} \quad \text{tendremos} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Por otra parte en (P 4) y (K 16) se estudia la fuerte conexidad de digrafos aleatorios y en (B 16) la existencia de subdigrafos cubrientes, fuertemente conexos, minimales.

En 3.13 veremos otras maneras de hallar las componentes fuertemente conexas, pero recurriendo al uso de potencias de matrices.

El algoritmo de Roy-Warshall fue objeto de generalizaciones.

En particular, Tomescu en (T 6), (T 7) consideró matrices a valores en semigrupos con orden de semireticulado. En (T 8), (T 9) se limita al caso de operaciones booleanas. En (T 7) indica que Nolin en (N 7) utilizando una estructura algebraica similar ha propuesto otra generalización del método y en (T 10) da una mejora del método estudiado en (T 8).

Destaca que el cálculo en cuestión está ligado con la determinación de clausuras reflexivo-transitivas, así como con problemas de transporte, de distancias o de capacidades.

Por su parte Robert y Ferland (R 17) lo extienden a estructuras que incluyen como caso particular a las booleanas. Muestran la utilidad de dicha generalización indicando aplicaciones de ella a problemas relativos a caminos, a distancias, a transportes y a máquinas secuenciales.

### 3.6 CAMINOS ELEMENTALES

Muchos de los métodos para estudiar la transitabilidad recurren al uso de matrices definidas "ad-hoc" y operadas de acuerdo con reglas basadas en el habitual producto de matrices, aún cuando son computacionalmente poco eficaces, ya que ello presupone la ejecución de un elevado número de operaciones.

Posiblemente el más conocido de los métodos que caben dentro de dicho esquema es el denominado "Multiplicación Latina", al cual nos hemos referido brevemente en 3.1. El mismo refleja en términos matriciales la operación de concatenación y permite enumerar simultáneamente, todos los caminos de un digrafo que satisfacen ciertas restricciones prefijadas. Ellos quedan determinados por sucesiones de vértices.

En 3.4 hemos dado varios algoritmos para determinar caminos con diferentes condiciones restrictivas. Nuestro objetivo ahora es

considerar el caso de los caminos elementales.

A este respecto, el citado método de "multiplicación latina" implica aceptar exclusivamente, sucesiones de vértices sin elementos repetidos, a excepción de que sean el primero y el último de la misma.

Más precisamente, dado un digrafo se construye la matriz  $M$  poniendo  $m_{i,j} \begin{cases} ij & \text{si hay arco } (i,j) \\ \emptyset & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

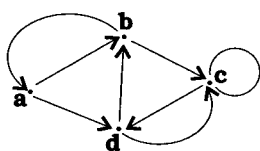
En  $M^{[2]}$  cada componente  $m_{i,j}^{[2]}$  contiene todas las ternas  $ikj$  de elementos  $i \neq k \neq j$  tales que  $m_{i,k} \neq \emptyset$  y  $m_{k,j} \neq \emptyset$  o bien es  $m_{i,j} = \emptyset$  si tales ternas no existen.

Análogamente,  $M^{[h]}$  contiene todas las  $(h+1)$ -uplas  $i, \dots, k, j$  sin elementos repetidos excepto quizás  $i = j$ , posibles de construir con  $h$ -uplas  $i, \dots, k \in m_{i,k}^{[h-1]}$  y pares  $k, j \in m_{k,j}$  supuestos  $i \neq k \neq j$ , o bien es vacío si tales sucesiones no existen.

En (K 5), (K 7), (K 13), (H 16) se da una formulación ligeramente distinta de la precedente, considerándose una matriz  $M'$  cuyos elementos responden a la siguiente definición :

$$m'_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } m_{i,j} = ij \\ \emptyset & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Poniendo . en lugar de  $\emptyset$  ilustraremos este método aplicándolo al siguiente ejemplo.



$$M = \begin{bmatrix} . & ab & . & ad \\ ba & . & bc & . \\ . & . & cc & cd \\ . & db & dc & . \end{bmatrix}$$

$$M' = \begin{bmatrix} . & b & . & d \\ a & . & c & . \\ . & . & c & d \\ . & b & c & . \end{bmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{bmatrix} aba & adb & abc+adc & . \\ . & bab & . & bad+bcd \\ . & cdb & cdc & . \\ dba & . & dbc & dcd \end{bmatrix}$$

$$M^{[3]} = \begin{bmatrix} adba & . & adbc & abcd \\ . & badb+bcdb & badc & . \\ cdba & . & cdbc & . \\ . & . & . & dbad+dbcd \end{bmatrix}$$

La validez de los resultados obtenidos es fácilmente verificable en el esquema precedente.

Para extender el método anterior al caso de multidigrafos propiamente dichos, basta observar que la sustitución de cada conjunto de arcos paralelos por uno único, con iguales extremos, da lugar, a partir de cada multidigrafo  $G$  a un digrafo  $G'$  cuyos caminos elementales determinan, previas adecuadas substituciones de arcos, los caminos elementales de  $G$ .

En (Ch 4) hemos hecho una revisión de numerosos métodos para enumerar o contar caminos elementales, y hemos propuesto uno que es aplicable directamente en multidigrafos, y que sirve de base a otro para decidir sobre la existencia de tales caminos.

El método en cuestión, que recurre a ciertas matrices y operaciones especiales, permite contar los caminos elementales  $i \Rightarrow j$  de longitud  $L$  ( $1 \leq L \leq n$ ) que tienen un mismo arco inicial. La información contenida en dichas matrices permite construirlos.

Destaquemos, que en la bibliografía de (Ch 4) fue omitida, por desconocimiento, la muy completa e interesante publicación de Kaufmann y Pichat (K 14).

Otro método, también considerado en (Ch 4) y en (K 14 Cap 25 B) más eficaz pues presupone menor número de operaciones, pero que no lleva a determinar, directamente, todos los caminos de igual longitud es el siguiente, que se basa en el dado Algoritmo de Roy-Warshal.

De acuerdo con este método, los caminos elementales de cada digrafo  $G$  se irán determinando en un orden que es independiente de sus respectivas longitudes y sólo depende del que induce la designación de sus vértices.

### 3.6.1 Algoritmo para determinar los caminos elementales.

Sea  $G$  un digrafo de orden  $n$  y  $P(G)$  la matriz tal que

$$P_{i,j} = \begin{cases} i,j & \text{si existe arco } (i,j) \\ \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

A partir de  $P(G)$  se construye la matriz  $Q^1 = (q_{i,j}^1)$  con



$$q_{i,j}^1 = \begin{cases} p_{i,j} & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \text{ ; o bien} \\ p_{i,j} & / \text{ el conjunto de sucesiones de la forma } i,1,j \\ & \text{con } i \neq 1 \neq j, \text{ eventualmente } i = j, \text{ siempre} \\ & \text{que } p_{i,1} \neq \emptyset \text{ y } p_{1,j} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Nótese que en  $Q^1$  quedan representados todos los caminos elementales de longitud uno y aquellos de longitud dos cuyo vértice interior es el 1.

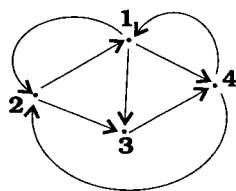
En general, a partir de  $Q^{h-1}$ ,  $1 \leq h-1 < n$ , se construye  $Q^h$  cuyo elemento  $q_{i,j}^h$  es  $q_{i,j}^{h-1}$  agregado al conjunto de sucesiones que resultan de concatenar las sucesiones  $i, \dots, h$  contenidas en  $q_{i,h}^{h-1}$  con las sucesiones  $h, \dots, j \in q_{h,j}^{h-1}$  supuesto que la sucesión  $i, \dots, h, \dots, j$  carezca de elementos reiterados, excepto posiblemente  $i = j$ .

La recurrencia que lleva a la construcción de  $Q^h$  permite afirmar que en ella quedan indicados todos los caminos elementales de longitud uno y aquellos (abiertos o cerrados) con todos sus vértices interiores numerados menor o igual que  $h$ .

Como todo camino elemental es arco o tiene al menos un vértice interior  $1 \leq i \leq n$ , al hallarse  $Q^n$  quedan determinados todos los caminos buscados.

Ejemplo

Dado



y poniendo . en lugar de  $\emptyset$

$$P(G) = \begin{bmatrix} . & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 2,1 & . & 2,3 & . \\ . & . & . & 3,4 \\ 4,1 & 4,2 & . & . \end{bmatrix}$$

$$Q^1 = \begin{bmatrix} . & 1,2 & 1,3 & 1,4 \\ 2,1 & 2,1,2 & 2,3/2,1,3 & 2,1,4 \\ . & . & . & 3,4 \\ 4,1 & 4,2/4,1,2 & 4,1,3 & 4,1,4 \end{bmatrix}$$

omitiendo, por razones de espacio, las "comas" entre los dígitos

se tendrán :

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 121 & 12 & 13/123 & 14 \\ 21 & 212 & 23/213 & 214 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 34 \\ 41/421 & 42/412 & 413/423/4213/4123 & 414/4214 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 121 & 12 & 13/123 & 14/134/1234 \\ 21 & 212 & 23/213 & 214/234/2134 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 34 \\ 41/421 & 42/412 & 413/423/4213/4123 & 414/4214/4134/4234/42134/41234 \end{bmatrix}$$

la cuarta fila y la cuarta columna de  $Q^4$  coinciden con las de  $Q^3$ ; los restantes elementos de las tres primeras columnas son, respectivamente

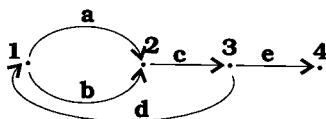
- 1ra.) 121/141/1421/1341/13421/12341 - 21/2341 - 341/3421  
 2da.) 12/142/1342 - 212/2142/2342/23412/21342 - 342/3412  
 3ra.) 13/123/1423 - 23/213 - 3413/3423/34213/34123

Consideraciones similares a las hechas con referencia al método por multiplicación latina permiten extender el procedimiento anterior al caso de multidigrafos propiamente dichos.

Por otra parte notemos que el algoritmo anterior puede aplicarse, sin mayores modificaciones, para determinar caminos *simples* de multidigrafos.

En efecto, si en vez de los vértices extremos de los arcos tomamos en cuenta sus respectivas designaciones, el método precedente permite, previo modificaciones inmediatas, determinar los caminos simples de cualquier multidigrafo.

Así por ejemplo, dado



tendremos

$$P(G) = \begin{bmatrix} \cdot & a/b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot \\ d & \cdot & \cdot & e \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad Q^1 = \begin{bmatrix} \cdot & a/b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot \\ d & da/db & \cdot & e \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} . & a/b & ac/bc & . \\ . & . & c & . \\ d & da/db & dac/dbc & e \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Finalmente,  $Q^3 = Q^4$  están dadas por

$$\begin{bmatrix} acd/bcd & a/b/acdb/bcda & ac/bc & ace/bce \\ cd & cda/cdb & c & ce \\ d & da/db & dac/dbc & e/dace/dbce \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Puede verificarse que la matriz anterior enumera todos los caminos simples del digrafo del ejemplo.

Ahora, pero a diferencia de lo que sucede al determinar caminos elementales, puede suceder que al pasar de  $Q^i$  a  $Q^{i+1}$  se modifique la fila (columna)  $i$ -ésima.

### 3.7 PILAS ASOCIADAS A UN MULTIDIGRAFO

Frecuentemente, al considerar multidigrafos sin circuitos conviene fijar en su conjunto de arcos un orden tal que si el extremo final de  $u$  coincide con el inicial de  $v$  entonces  $u$  es precedido, en dicho orden, por  $v$ .

El arco final de cada camino precede, en un orden así fijado, a los restantes arcos del mismo camino.

Una manera de lograr tal ordenación es emplear la noción "pila asociada".

Antes de dar la definición correspondiente digamos que el concepto "pila" está ligado con el de monoide y formaliza la siguiente idea.

En una *pila* sus elementos sólo pueden agregarse o quitarse de a uno por vez y esto de forma tal que en cada instancia sólo se altera su "extremo superior" (o "cabeza").

Del método operatorio adoptado resulta que el primero (último) de los elementos incorporados es el último (primero) en ser retirado. Por esto, en la bibliografía en lengua inglesa son frecuentemente designadas "LIFO list" (Last In - First Out).

La noción "pila" se muestra útil en cuestiones de tratamiento de información y en particular en teoría de lenguajes. Aparecen naturalmente al considerarse programas de computación para cuya ejecución es necesario apelar a subprogramas auxiliares, los que deben ser completados antes de volver al programa principal, y esto en orden inverso del fijado por sus respectivos llamados. Es útil también para abordar problemas relativos a caminos y a componentes fuertemente conexas.

Esta noción permite dar, al respecto, algoritmos que suelen ser más eficientes que los formulados basándose en otras ideas.

Fué introducida en 1962 por Genuys (G 17) y utilizada, por Pair (P 5) y por Derniame (D 6) en sus respectivas tesis doctorales. En su relación con caminos también fue ampliamente utilizada en (D 5) y (K 14 Vol. II).

El conjunto  $M$  de sucesiones finitas de elementos de cierto conjunto  $U$ , incluida la sucesión vacía  $\Delta$  y la operación de concatenación  $*$  determinan el monoide  $(M, *, \Delta)$ .

Se dice pila sobre  $U$  a toda sucesión finita  $(m_0, m_1, m_2, \dots, m_k)$  de elementos de dicho monoide, tal que:

$$1) \quad m_0 = m_k = \Delta$$

2) para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  existe  $\alpha_i \in U$  tal que

$$\left[ \begin{array}{ll} m_i = m_{i-1} * \alpha_i & (i \text{ es una entrada de } \alpha_i) \\ \text{ó} & \\ m_{i-1} = m_i * \alpha_i & (i \text{ es una salida de } \alpha_i) \end{array} \right.$$

Otra forma habitual de enunciar estas condiciones es :  $m_{i-1}$  ( $m_i$ ) es el factor izquierdo de  $m_i$  ( $m_{i-1}$ ); de longitud menor (mayor) en uno que la de  $m_i$  ( $m_{i-1}$ ).

Los distintos  $m_i$  ( $0 \leq i \leq k$ ) son los estados de la pila (son palabras del monoide) y el último elemento de cada  $m_i \neq \Delta$  es la cima del estado  $m_i$  (o el  $i$ -ésimo tope de la pila).

La mayor de las longitudes de las palabras contenidas en una pila es su altura.

Una pila sobre  $U$  es simple si ninguno de sus elementos tiene más de una entrada y simple cubriente si además en ella aparecen todos los elementos de  $U$ .

Dos pilas construidas sobre el conjunto  $U = \{ p, q, r, s \}$  son :

	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$	$m_8$
$P_1$	^	p	pq	pqq	pqqs	pqq	pq	p	^
$P_2$	^	p	pq	pqr	pq	p	^		

En la primera pila, que es de altura cuatro, 2 y 3 son entradas de  $q$ , mientras que sus respectivas salidas son 7 y 6. La segunda pila es simple tiene siete estados y altura tres.

En una pila simple

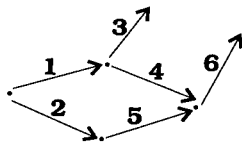
- 1)  $\alpha \in m_i$  si y sólo si : entrada de  $\alpha \leq i <$  salida de  $\alpha$ .
- 2) si  $\alpha$  está presente en cierto estado  $m_i$  y  $\beta$  es el tope de dicho estado, entonces  $\alpha = \beta$  o la entrada de  $\alpha$  es anterior a la de  $\beta$ .

A continuación supondremos que  $G = (V, U)$  es un multidigrafo sin circuitos. Con tal hipótesis las siguientes reglas dan una pila (simple) asociada a  $G$ , según arcos.

- 1) Si  $m_{i-1}$  es no vacío y su último arco  $v$  tiene vértice final  $\underline{x}$ , entonces : si existe un arco  $w$  de vértice inicial  $\underline{x}$  que aún no ha entrado en la pila,  $i$  es entrada de  $w$ ; caso contrario  $i$  es salida de  $v$ .
- 2) Si  $m_{i-1}$  es vacío y existe un arco  $w$  que aún no ha entrado en la pila, entonces  $i$  es entrada de  $w$ ; caso contrario  $m_{i-1}$  es el último estado de la pila.

De la definición resulta que los estados de la pila asociada a  $G$  son caminos simples y que si el  $i$ -ésimo estado corresponde a un camino de longitud  $L \geq 1$ , su cima es el último arco del camino en cuestión.

Distintas pilas simples asociadas al siguiente digrafo



son	$\wedge$ 1 1,4 1,4,6 1,4 1 1,3 1 $\wedge$	$\wedge$ 1 1,3 1 1,4 1,4,6 1,4 1 $\wedge$	$\wedge$ 2 2,5 2,5,6 2,5 2 $\wedge$	$\wedge$ 5 5,6 5 $\wedge$
-----	---	---	---	---------------------------------------

**Proposición 3.7.1 :**

Si  $G$  carece de circuitos, el extremo final de  $v$  coincide con el inicial de  $w$  y ambos aparecen en una pila, entonces, la salida de  $w$  precede a la de  $v$ .

En efecto, si la salida de  $v$  se produjera en el estado  $i$ , la entrada de  $w$  sería anterior a  $i$ .

Si la salida de  $w$  fuera posterior a  $i$ ;  $w$  sería uno de los arcos del estado  $m_{i-1}$  que es un camino con último arco  $v$  pero entonces existiría  $i-1$  un camino desde el vértice inicial de  $w$  al inicial de  $v$ . Luego, habría un circuito, en contradicción con lo supuesto.

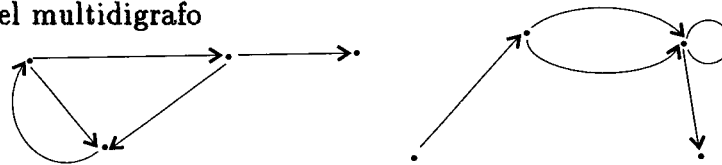
Resulta así que el orden de salida de los arcos de una tal pila satisface los requerimientos necesarios para aplicar el algoritmo 3.4.6.

El concepto anterior, de pila (simple) asociada a  $G$  puede extenderse al caso de multidigrafos que admiten circuitos (ver(K 5),(D 5)).

Por otra parte, sabemos que si no hay arcos paralelos los caminos pueden darse, indistintamente, por la sucesión de sus arcos o la de sus vértices. Esto permite hacer corresponder a cada pila asociada por arcos, otra expresada en términos de sus vértices. Estas últimas pueden ser, también, introducidas en forma directa y de acuerdo con lo observado en (D 5) son, en general, mas cómodas para operar.

### Ejercicios

3-1) Dado el multidigrafo



- determine algunos de sus caminos de longitud  $L = 1, 2, 3$ .  
Cuales de ellos son simples y cuales son elementales?
- determine sus caminos cerrados de longitud 2,3.
- determine sus circuitos de longitud 2,3.

3-2) Demuestre que:

- si un multidigrafo finito carece de entradas, o de salidas, admite caminos cerrados. Que puede afirmar de la recíproca ?
- $G$  carece de caminos cerrados si y sólo si todos sus caminos son elementales
- todo camino  $a \rightarrow b$  contiene subcaminos con los cuales puede construirse otro  $a \rightarrow b$ , elemental.
- todo camino cerrado de longitud impar contiene al menos un camino cerrado elemental de longitud impar. Puede substituirse impar por par ?

3-3) Vea que la concatenación de caminos es una operación asociativa.

3-4) Vea que si  $G$  es un digrafo sin bucles tal que el  $\max_x (\min. d_x^+, \min. d_x^-) \geq h \geq 1$  entonces :

" tiene al menos un camino abierto de longitud $L \geq h$ .
" " " cerrado " " $L \geq h + 1$ .

Puede afirmar lo mismo si  $G$  es multidigrafo?

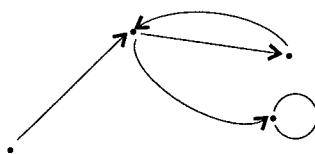
3-5) Vea que si  $G$  carece de circuitos y sólo entonces es posible numerar sus vértices de modo que todos los arcos sean de la forma  $(i, j)$  con  $i < j$ .

- Si existen caminos elementales  $a \rightarrow b, b \rightarrow a$ ; se puede afirmar que existe un camino cerrado simple que incida en ambos vértices?
- Si  $C : p \rightarrow q$  es un camino que incide en  $r$  ( $p \neq r \neq q$ ), puede afirmar que existe un camino elemental  $p \rightarrow q$  incidente en  $r$  ?

- 3-7) Dado un multidigrafo  $G$  notaremos  $U_x^-(U_x^+)$  al conjunto de sus arcos con vértice final (inicial)  $x$ . Sea  $h$  un vértice de  $G$  tal que  $|U_h^-| = |U_h^+| = k$  y  $H^+(H^-)$  un conjunto de  $k$  caminos cuyo conjunto de arcos iniciales (finales) coincide con  $U_h^+$  ( $U_h^-$ ). Vea que si el número de caminos cerrados en  $h$ , contenidos en  $H^+ \cup H^-$  es  $w$ , eligiendo una adecuada biyección  $U_h^- \rightarrow U_h^+$  se podrá :
- si  $0 \leq w \leq k-1$  extender, sin crear circuitos, los caminos de  $H^+$  y los de  $H^-$ .
  - si  $w = k$  engendrar con los  $k$  caminos cerrados un único circuito.

- 3-8) Vea que todo circuito no elemental  $C$ , de longitud  $L$ , da lugar a dos o más circuitos elementales  $C_i$  de longitudes  $L_i$ , tales que  $C = \bigcup_i C_i$ ;  $L = \sum_i L_i$ .

- 3-9) Escriba la matriz precedencia del siguiente digrafo y calcule sus segunda y tercera potencias. Vea que en cada una de ellas, los valores de sus componentes  $i, j$  coinciden, respectivamente, con el número de caminos  $i \rightarrow j$  de longitud dos, y tres.



- 3-10) Demuestre que si  $P$  es la matriz precedencia de  $G$ , y  $P^r$  es su  $r$ -ésima potencia, entonces  $p_{i,j}^{(r)}$  da el número de caminos  $i \rightarrow j$  de longitud  $r$ .

- 3-11) Dado un multidigrafo  $G$ , sea  $G^-$  su sostén, y  $G^*$  su opuesto. Vea que si  $P(A)$  es la matriz precedencia de  $G$  ( adyacencia de  $G^-$ ) entonces :

- $P(G^*) = P(G)^t$  ( $t =$  traspuesta).
- $A(G^-) = P(G) + P(G)^t - D(G)$  donde  $D(G)$  es la matriz de elementos  $d_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$  y  $d_{i,i}$  igual al número de bucles de soporte  $i$ .

- 3-12) Sea  $G$  un digrafo y  $P$  su matriz de precedencia. Vea que :

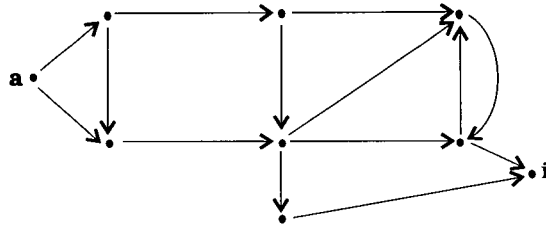
- $(P \cdot P^t)_{i,j}$  da el número de sucesores inmediatos del par de vértices  $i, j$ .
- $(P^t \cdot P)_{i,j}$  " predecesores " " "
- $(P \cdot P^t)_{i,i} + (P^t \cdot P)_{i,i}$  da el grado del vértice  $i$  menos el número de bucles con soporte  $i$ .



- 3-13) Demuestre que un multidigrafo  $G$  admite un conjunto de caminos cerrados simples, arco disjuntos dos a dos, tales que incluyen a todos los arcos de  $G$  si y sólo si es balanceado, es decir, si y sólo si cualquiera sea su vértice  $x$ , se tiene que  $d_x^- = d_x^+$ .
- 3-14) Vea que todo multidigrafo euleriano sin vértices aislados es fuertemente conexo. Vale también la recíproca?
- 3-15) Demuestre la validez, o bien la falsedad, de :
- todo multidigrafo fuertemente conexo de orden  $n$  contiene al menos  $n$  arcos.
  - para todo  $n > 1$  pueden construirse digrafos fuertemente conexos con exactamente  $n$  arcos.
  - todo digrafo fuertemente conexo tiene un subgrafo cubriente  $C$ , que es camino. Se puede afirmar que  $C$  es elemental ?
  - un multidigrafo  $G$  sin vértices aislados es fuertemente conexo si y sólo si existe al menos un circuito que contiene a todos los arcos de  $G$
  - si  $G$  carece de vértices aislados y todos sus arcos pertenecen a algún circuito,  $G$  es fuertemente conexo.
- 3-16) Demuestre que si  $G$  es un digrafo de orden  $n$ , sin bucles y sin vértices aislados, tal que :  $\min_x \{ \min d_x^-, \min d_x^+ \} \geq (n-1) / 2$ , entonces  $G$  es fuertemente conexo.
- 3-17) Vea que si convenimos en notar  $(A,B)$  al conjunto de arcos con vértice inicial en  $A$  y vértice final en  $B$ , el multidigrafo  $G = (V,U)$  es fuertemente conexo si y sólo si para todo  $A, \emptyset \neq A \subset V$ , se tiene que  $(A, \bar{A})$  y  $(\bar{A}, A)$  son no vacíos.
- 3-18) Verifique, aplicando distintos métodos si el digrafo dado por la siguiente tabla carece de circuitos y en tal caso represéntelo por niveles ascendentes y por niveles descendentes

$x$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$\Gamma(x)$	$b,d,f$	$c,e$	$g$	$c,g$	$h$	$b,d$	$h$	$-$

3-19) Dado el digrafo



aplique : a) el algoritmo 3.4.1 para determinar un camino simple  $a \rightarrow i$

b) " 3.4.2 " "  $a \rightarrow i$  de menor longitud

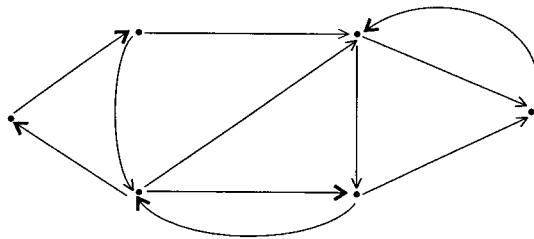
c) " 3.4.3 " todos los caminos de vértice final  $i$ , con  $L \leq 3$ .

3-20) Sea  $G$  el digrafo definido por la siguiente matriz de precedencia. Determine, utilizando los distintos métodos indicados, su clausura transitiva, su clausura reflexivo-transitiva y sus componentes fuertemente conexas.

Utilice el grafo cociente  $G_{fc}$  para dar una representación topológica adecuada.

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$
$a$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1
$b$	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.
$c$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.
$d$	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.
$e$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.
$f$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
$g$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
$h$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
$i$	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.
$j$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.

3.21) Determine, aplicando diferentes métodos, los caminos elementales del digrafo



3.22) Vea que si  $G$  es un torneo de orden  $n$  (es decir, es un digrafo de orden  $n$ , sin bucles tal que para todo par de vértices  $x, y$  existe el arco  $(x, y)$  o bien el arco  $(y, x)$ ) se tiene que  $\sum_{i=1}^n (d_{x_i}^+)^2 = \sum_{i=1}^n (n-1-d_{x_i}^+)^2$

## BIBLIOGRAFIA

### A

- A-3 Atallah, M.J. : *Parallel strong orientation of an undirected graph.*  
Inform. Process. Lett. 18 (1984), 37/39. M.R. 85j # 68038. Zb. 532 # 68065.
- A-4 Aho, A.V. ; Garey, M.R. and Ullman, J.D. : *The transitive reduction of a directed graph.*  
SIAM J. Comput. 1 (1972), 131/137. M.R. 46 # 5159. Zb.247 # 05128.
- A-5 Altman, T. : *A fast parallel closure algorithm.* Congr. Numer. 47 (1985), 29/32.  
M.R. 87d # 68034. Zb. 635 # 05024.

### B

- B-1 Busacker, R.G. and Saaty, T.L. : *Finite graphs and networks. An introduction with applications.*  
Mc. Graw Hill Co. (1965). M.R. 35 # 79. Zb. 146 pg.201
- B-3 Berge, C. : *Théorie des graphes et ses applications.* Dunod (1958-63-67). M.R.21 # 1608.  
*Teoría de las redes y sus aplicaciones.* C.E.C.S.A. (1967))
- B-4 Berge, C. : *Graphes et Hypergraphes.* Dunod. (1970-73). M.R. 50 # 9639/41. Zb. 213 pg. 257.  
*Graphs and hypergraphs.* North Holland (1973-76). M.R. 50 # 9640. Zb.254 # 05101.
- B-12 Bermond, J.C. and Thomassen, C. : *Cycles in digraphs, a survey.*  
J. Graph Theory 5 (1981), 1/43. M.R. 82k # 05053. Zb. 458 # 05035.
- B-13 Berge, C. : *Sur le nombre minimum d'arcs à inverser pour rendre un graphe fortement connexe: application à un problème de trafic.* Cahiers Centre Etudes Rech. Opérat. 25  
Nro.3-4 (1983), 183/186. M.R. 85h # 05047. Zb. 558 # 05023.
- B-14 Berge, C. : *On the minimum number of arcs to reverse to make a graph strongly connected.*  
Lect. Notes in Math. 1073. Springer (1984), 31/34. M.R. 86a # 05051. Zb. 544 # 05030.
- B-15 Bordat, J.P.: *Complexité des problèmes liés aux graphes sans circuits.* Rev. Franc. Aut. Inf Rech.  
Opérat. (RAIRO) 21 (1987), 181/197. M.R. 88j # 68067. Zb. 634 # 68031.
- B-16 Brualdi, R.A. and Manber, R.: *On strong digraphs with a unique minimally strong subdigraph.*  
Discrete Math. 71 (1988), 1/7. M.R. 90a # 05091. Zb. 644 # 05023.

### C

- C-5 Camion, P.: *Une méthode de résolution par l'algèbre de Boole des problèmes combinatoires où interviennent des entiers.* Cahiers Centre Etudes Rech. Opérat. 2 Nro.3 (1960),234/289.  
M.R. 23B # 1031.
- C-6 Carré, B.A. : *An algebra for network routing problems.*  
J. Inst. Math. Appl. 7 (1971), 273/294. M.R. 45 # 1668. Zb. 219 pg. 546.

## CH

- Ch-4 Chiappa, R. A. : *Recuento y enumeración de caminos y de cadenas elementales*.  
Notas de Matemática Discreta, Nro. 2. INMABB- Univ. Nac. del Sur.(1994), 1/43.  
M.R. 95h # 05094.

## D

- D-1 Deo, N. : *Graph theory with applications to engineering and computer sciences*.  
Prentice Hall (1974). M.R. 50 # 12772. Zb. 285 # 05102.
- D-2 Durand, B. : *A propos du problème du nombre minimum d'arcs à enlever pour supprimer les circuits d'un graphe*. Math. et Sciences Humaines 20, (1967) 61/67.
- D-3 Donald, J. and Elwin, J. : *On the structure of the strong orientations of a graph*.  
SIAM J. Discrete Math. 6 (1993), 30/43 . M.R. 93k # 05073
- D-4 Dulmage, A.L. and Mendelsohn, N.S. : *Graphs and matrices*. Graph theory and theoretical physics (Edit. F. Harary). Academic Press (1967), 167/227.  
M.R. 40 # 5468. Zb. 204 pg. 244.
- D-5 Derniame, J.C., Pair C. : *Problèmes de cheminement dans les graphes*.  
Monographies d'Informatique , AFCET-DUNOD, (1971). Zb. 243 # 05117.
- D-6 Derniame, J.C. : *Etude d'algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes finis*.  
Thèse Fac. des Sciences, Nancy, (1966).

## E

- E-8 Eve, J. and Kurki-Suonio, R. : *On computing the transitive closure of a relation*.  
Acta Informat. 8 (1977), 303/314. M.R. 57 # 4595. Zb.349 # 68021.
- E-9 Ebert, J. : *A sensitive transitive closure algorithm*.  
Inform. Process. Lett. 12 (1981), 255/258. M.R. 83e # 68023. Zb. 468 # 68066.

## F

- F-1 Fortet, R.: *L'algèbre de Boole et ses applications en recherche opérationnelle*. Cahiers Centre  
Etudes Rech. Opérat. 1 Nro.4 (1959), 5/36. M.R. 22A # 5601. Zb. 109 pg. 382.
- F-2 Fortet, R.: *Applications de l'algèbre de Boole en recherche opérationnelle*.  
Rev. Franc. Rech. Opérat. (RFRO) IV-ème-14 (1960), 17/25.
- F-3 Frank, A. : *How to make a digraph strongly connected*. Combinatorica 1, (1981), 145/153.  
M.R. 82j # 05061. Zb. 487 # 05033.

## G

- G-7 Gondran, M.: *Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe*. Rev. Franc. Aut. Inf. Rech. Opérat. (RAIRO) 9, (1975), V-1, 77/99. M.R. 51 # 7941. Zb. 311 # 90071.
- G-8 Gondran, M.: *Algèbre des chemins et algorithmes*. Bull. Direction Etudes Recherches Sér. Math. Informat. 2 (1975), 57/64. M.R. 57 # 16134. Zb. 326 # 90060.
- G-9 Gondran, M.: *L'algorithme glouton dans les algèbres des chemins*. Bull. Direction Etudes Recherches Sér. C. Math. Informat. 1 (1975), 25/31. M.R. 57 # 16135.
- G-10 Gondran, M. et Minoux, M. : *Graphes et algorithmes*. Edit. Eyrolles (1979/85). M.R. 82g # 68059; 89i # 90090. Zb. 497 # 05023.  
*Graphs and algorithms*. J. Wiley (1984). M.R. 85d # 90037. Zb. 611 # 90096.
- G-11 Gondran, M.: *Chemins et connexité. A look at graph theory*. (Proc. Colloq. Cerisy 1980). Presses Polytech. Romandes, Lausanne (1980), 11/27. M.R. 83b #05081.
- G-12 Ghouila-Houri, A. : *Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre*. C. Rend. Acad. Sci. Paris 254 (1962), 1370/71. M.R. 30 # 2495. Zb. 105 pg. 355
- G-13 Grötzsch, H. : *Ein Dreifarbensatz für Dreiecksfreie Netze auf der Kugel*. Wiss. Zeitschr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math. Nat. 8 (1958), 109/119.
- G-14 Gries, D. , Martin, A., Snepscheut van de , J.L.A. and Udding, J.T. : *An algorithm for transitive reduction of an acyclic graph*. Sci. Comput. Programming 12 (1989), 151/155. M.R. 91a # 68113. Zb. 678 # 68061.
- G-15 Goralčíková, A. and Koubek, V.: *A reduct-and-closure algorithm for graphs*. Lect. Notes in Comput. Sci. 74. Springer (1979), 301/307. M.R. 82g # 68060. Zb. 408 # 68038.
- G-16 Goralčíková, A. and Koubek, V.: *On a simple modification of Schnorr's algorithm*. Scripta Fac. Sci. Natur. Univ. Purk. Brun. 13 (1983), 321/325. M.R. 88j # 05020.
- G-17 Genuys, F. : *Commentaires sur le langage Algol*. Chiffres 5, (1962), 29/53.
- G-18 Gilmore, P.C. and Hoffman, A.J. : *A characterization of comparability graphs and of interval graph*. Canad. J. Math. 16 (1964), 539/548. M.R. 31 # 87. Zb. 121 pg. 260.
- G-19 Golumbic, M.C. : *The complexity of comparability graph recognition and coloring*. Computing 18 (1977), 199/208. M.R. 58 # 19345.

## H

- H-2 Harary, F.: *Graph theory*. Addison Wesley (1969/72). M.R. 41 # 1566. Zb. 182 pg. 577.
- H-5 Harary, F.; Norman, R.Z. and Cartwright D.: *Structural models. An introduction to the theory of directed graphs*. J. Wiley & Sons Inc. (1965). M.R. 32 # 2345. Zb. 139 pg. 415.  
*Modèles structuraux. Introduction à la théorie des graphes orientés*. Dunod (1968).

- H-16 **Hammer, P.L. et Rudeanu, S.** *Boolean methods in operations research and related areas.*  
Springer-Verlag (1968). M.R. 38 # 4132. Zb. 155 pg. 280.  
*Méthodes booléennes en recherche opérationnelle.* Dunod (1970).  
M.R. 41 # 5035. Zb. 214 pg.186.
- H-17 **Hens, N.:** *Deux problèmes de la théorie des graphes.* Cahiers Centre Etudes Rech. Opérat.  
Vol.5 (3) (1963), 117/123. M.R. 30 # 4633. Zb. 116 pg. 149.
- H-18 **Hsu, H.T. :** *An algorithm for finding a minimal equivalent graph of a digraph.*  
J. Assoc. Comput. Mach. 22 (1975), 11/16. M.R. 58 # 10573. Zb. 316 # 05114.
- H-19 **Habib, M.; Morvan, M. and Rampon, J.X. :** *On the calculation of transitive reduction-closure  
of orders.* Discrete Math. 111 (1993), 289/303. M.R. 93k # 68045.
- H-21 **Harary, F.:** *A graph theoretic method for the complete reduction of a matrix with a view toward  
finding its eigenvalues.* J. Math. Phys. 38 (1959), 104/111. M.R. 22A-678. Zb. 109 pg. 90.
- H-22 **Harary, F.:** *On the consistency of precedence matrices.*  
J. Assoc. Comput. Mach. 7-3 (1960), 255/259. M.R. 24A # 1844.

#### I

- I-1 **Ibaraki, T. and Katoh, N.:** *On line computation of transitive closures of graphs.* Inform. Process.  
Lett. 16 (1983), 95/97. M.R. 84e # 68071. Zb. 514 # 68062.

#### K

- K-5 **Kaufmann, A. :** *Introduction à la combinatoire en vue des applications.*  
Dunod (1968). M.R. 51 # 10109. Zb. 169 pag. 18.  
*Graphs, dynamic programming and finite games.* Acad. Press (1967).  
*Introducción a la combinatoria y sus aplicaciones.* C.E.C.S.A. (1971).
- K-7 **Kaufmann, A. :** *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle. (Tomes 1,2,3).*  
Dunod (1962/64/67). M.R. 34 # 2332, 57 # 18752. Zb. 128 pg. 395.  
Edición revisada del 2do tomo. Dunod (1972). Zb. 324 # 90001.  
*Métodos y modelos de la Programación Dinámica.* (trad. Tomo 2). C.E.C.S.A.(1966).
- K-13 **Kaufmann, A. et Malgrange, Y. :** *Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe.*  
Rev. Franc. Rech. Opérat. 2ème. Nro.7, 7-26 (1963), 61/73.
- K-14 **Kaufmann, A. et Pichat, E. :** *Méthodes mathématiques non numériques et leurs algorithmes.*  
(Vol. I-II). Masson (1977). M.R. 56 # 17190. Zb. 361 # 05047/48.
- K-15 **Kemeny, J.G. and Snell, J.L. :** *Finite markov chains.* Van Nostrand (1960). M.R. 22B # 5998.
- K-16 **Karp, R. M.:** *The transitive closure of a random digraph.* Random Structures Algorithms 1  
(1990), 73/93. M.R. 91j # 05093. Zb. 712 # 68076.

## L

- L-3 Lempel, A. and Cederbaum, I. : *Minimum feedback arc and vertex sets of a directed graph.*  
IEEE Trans. Circuit Theory CT 13 (1966), 399/403. M.R. 39 # 5423.
- L-4 Liskovec, V.A., : *The number of strongly connected oriented graphs.* (en ruso) Mat. Zametki 8  
(1970), 731/732. M.R. 43 # 1890. Zb. 217 pg. 310.
- L-5 Lovász, L. : *Combinatorial problems and exercises.* North Holland (1979).  
M.R. 80m # 05001. Zb. 439 # 05001.
- L-6 La Poutré J.A. and Leeuwen van, J. : *Maintenance of transitive closures and transitive reductions  
of graphs.* Lect. Notes in Comput. Sci. 314, Springer (1988) 106/120.  
M.R. 90k # 68138. Zb. 662 # 68071.
- L-7 Lucas, E. : *Récréations Mathématiques. 1 (1921).* A. Blanchart, Paris (nueva edición 1960).

## M

- M-6 Maghout, K.: *Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes  
linéaires et quadratiques.* Cahiers Centre Etudes Rech. Opérat. Vol.5, (1963), 21/99.  
M.R. 28 # 1985. Zb. 114 pg. 121.
- M-7 Monien, B. and Schulz, R. : *Four approximation algorithms for the feedback vertex set problem.*  
Proc. 7th. Conf. on Graphtheoretic Concepts in Computer Science, Linz ,1981.  
Hanser, (1982) 315/326. M.R. 84m # 68055. Zb. 549 #68064.
- M-8 Minoux, M.: *Structures algébriques généralisées des problèmes de cheminement dans les graphes  
finies, algorithms et applications.*  
C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 282 (1976),17/18. M.R. 54 # 5044. Zb. 316 # 90075.
- M-9 Minoux, M.: *Structures algébriques généralisées des problèmes de cheminement dans les graphes.  
Théoremes, algorithmes et applications.* Rev. Franc. Autom. Inf. Rech. Opér. (RAIRO)  
10 V-2 (1976), 33/62. M.R. 56 # 4788. Zb. 337 # 05122.
- M-10 Minoux, M.: *Generalized path algebras.* Survey of Math. Programming (Proc. Ninth Internat.  
Math. Prog. Symp. Budapest 1976, Vol 2). North Holland (1979), 359/364.  
M.R. 81i # 90075. Zb. 441 # 90105.
- M-11 Manger, R. : *New examples of the path algebra and corresponding graph theoretic path problems.*  
VII Conf. on Applied Math. Univ. Osijek. (1990),119/128.  
M.R. 91m # 05095. Zb. 748 # 05067.
- M-12 Mycielski, J. : *Sur le colorage des graphes.* Colloq. Math. 3 (1955), 161/162. M.R. 16 pg. 1044.
- M-13 Moyles, D.M. and Thompson, G.L. : *An algorithm for finding a minimum equivalent graph  
of a digraph.* J. Assoc. Comput. Machin. 16 (1969), 455/460. Zb. 184 pg. 494.

- R-8 Robinson, R.W. : *Enumeration of acyclic digraphs*. Proc. Second Chapel Hill Conf. 1970. Univ. North Carolina (1970), 391/399. M.R. 43 # 1891. Zb. 219 pg 36.
- R-9 Roy, B. : *Chemins et circuits : énumération et optimisation*. SEMA-METRA- Rapport Recherche 76 (1974), 1/48.
- R-10 Rote, G. : *Path problems in graphs*. Computational graph theory. Springer (1990), 155/189. M.R. 91m # 05122. Zb. 699 # 68088.
- R-11 Rival, I. (Edit.) : *Ordered sets*. Proc. NATO at Banff- Canada-1981. D. Reidel Publ. Co. (1982). M.R. 83e # 06003. Zb. 521 # 06004.
- R-12 Rival, I. (Edit.) : *Graphs and orders*. Proc. NATO at Banff- Canada-1984. D. Reidel Publ. Co. (1985). M.R. 86j #05006. Zb. 549 # 00002.
- R-13 Rival, I. : *A bibliography. Graphs and Order. The role of graphs in the theory of ordered sets and its applications*. Proc. NATO at Banff- Canada-1984. NATO ASI Ser. C 147 (1985), 591/778. Zb. 561 # 00026.
- R-14 Robbins, H.E. : *A theorem on graphs, with an application to a problem of traffic control*. Amer. Math. Monthly 46 (1939), 281/283. Zb. 21 pg 357.
- R-15 Roy, B. : *Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnement*. Metra Nro. 1 - Série Speciale - (1962).
- R-16 Roy, B.: *Transitivité et connexité*. C. R. Acad. Sc. Paris 249 (1959), 216/218. M.R. 22A pg. 677. Zb. 92 pg.159.
- R-17 Robert, P. et Ferland, J.: *Généralisation de l'algorithme de Warshall*. Rev. Franc. Inform. Rech. Opérat. (RIRO) 2ème. Nro.7 (1968), 71/85. M.R. 38 # 3086. Zb. 172 pg. 206.

## S

- S-1 Sahni, S. : *Concepts in discrete mathematics*. The Camelot Publishing (1981).
- S-6 Shi, W.G. and Juels, R.J.: *Connected reorientations of mixed multigraphs*. Networks 19 (1989), 235/246. M.R. 90b # 05084. Zb. 674 # 90022.
- S-7 Schnorr, C.P.: *An algorithm for transitive closure with linear expected time*. SIAM J. Comput. 7 (1978), 127/133. M.R. 80a # 68073. Lect. Notes in Comput. Sci. 48 (1977), 329/338. Zb. 359 # 68045.
- S-8 Schmitz, L. : *An improved transitive closure algorithm*. Computing 30 (1983), 359/371. M.R. 85d # 68066. Zb. 504 # 68042.
- S-9 Simon, K.: *An improved algorithm for transitive closure on acyclic digraphs*. Lect. Notes in Comput. Sci. 226, Springer (1986), 376/386. M.R. 88b # 68076. Zb. 595 # 68044.



## T

- T-1 Toranzos, F. A. : *Introduction a la Teoría de Grafos*.  
 Monografías O.E.A. Serie de Matemática, Nro. 15. (1976).
- T-4 Trotter, W.T. (Jr.) : *Graphs and partially ordered sets*. Selected Topics in Graph Theory 2.  
 (Edit. Beineke, L.W. and Wilson, R.J.) Acad. Press (1983). 237/268.  
 M.R. 87c # 06005. Zb. 522 # 05023.
- T-5 Tarjan, R. : *Depth-first search and linear algorithms*.  
 SIAM J. Comput. 1 (1972), 146/160. M.R. 46 # 3313. Zb. 251 # 05107.
- T-6 Tomescu, I. : *Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux*.  
 C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966), 826/829. M.R. 34 # 7210. Zb. 152 pág. 147.
- T-7 Tomescu, I. : *Sur l'algorithme matriciel de B. Roy* . Rev. Franc. Inform. Rech. Opérat. (RIRO)  
 2ème.Nro.7 (1968), 87/91. M.R. 38 # 1041. Zb. 179 pág. 293.
- T-8 Tomescu, I. : *Méthode pour la détermination de la fermeture transitive d'un graphe fini*.  
 Rev. Franc. Inform. Rech. Opérat. (RIRO) 1er-Nro.4 (1967), 33/37.  
 M.R. 36 # 5020. Zb. 179 pág. 293.
- T-9 Tomescu, I. : *Recent research in the theory of Boolean matrices*. Econom. Comput. Cybernetic  
 Studies Res. 2 (1969), 51/64. M.R. 40 # 1060. Zb. 174 pág. 38.
- T-10 Tomescu, I. : *Méthode pour la détermination de la fermeture transitive d'un graphe fini, II*.  
*La solution du problème en deux étapes*. An. Sti. I. Univ. Cuza. 16 (1970), 199/203.  
 M.R. 46 # 1656. Zb.204 pg. 573.

## W

- W-5 Warshall, S.: *A theorem on boolean matrices*.  
 J. Assoc. Comput. Mach. 9 (1962), 11/12. M.R. 26 # 7173. Zb. 118 pg. 331.
- W-6 Wolk, E.S. : *The comparability graph of a tree*. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 789/795.  
 M.R. 30 # 2493. Zb. 109 pg. 164.
- W-7 Wolk, E.S. : *A note on "The comparability graph of a tree"*. Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965),  
 17/20. M.R. 30 # 2494. Zb. 137 pg. 181.

## Z

- Z 3- Zhu, S. Y.: *A parallel computation of the transitive closure of a relation using Warshall's  
 method*. J. Shanghai Jiaotong Univ. 19 (1985) - 101/107-127. M.R. 87j # 68049.