INFORME TECNICO INTERNO

N°. 5

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

I. T. I. Nº 5

INTRODUCCION A LA TEORIA DE FUNCIONES ANALITICAS

ENTERAS

por

M. Casamitjana de Virkel y R. Panzone

Estas notas redactadas por la Lic. Casamitjana son parte de un curso dictado por el Dr. Panzone en 1983.

1984

§ 1. PRODUCTOS INFINITOS.

Sea dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales o complejos. Se llama producto infinito al "producto de todos los elementos de la sucesión" y se escribe

$$a_1 . a_2 ... a_n ... = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si con p_n indicamos el producto parcial n-ésimo, esto es,

$$p_n = a_1 . a_2 ... a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

podríamos decir que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si es convergente a un número p la sucesión $\{p_n\}$ de productos parciales y convenir en que

$$p := \prod_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Sin embargo esta definición no sería acertada ya que todo producto que tuviera un factor igual a cero sería convergente sin tener en cuenta el comportamiento de los demás factores. La definición siguiente resulta más adecuada.

DEFINICION 1.1 Dada la sucesión $\{a_n\}$ de números reales o complejos, sea $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$

a) Si $a_n \neq 0$ para todo n, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge cuando existe un número $p \neq 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$.

En tal caso p es, por definición, el valor del producto. Esto es,

$$p := \prod_{n=1}^{\infty} a_n .$$

b) Si existe un número n tal que para todo $j > n$ es $a_j \neq 0$, se dice que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si converge $\prod_{j=n+1}^{\infty} a_j$.

En este caso el valor del producto es, por definición

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 . a_2 ... a_n . \prod_{j=n+1}^{\infty} a_j .$$

El producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice divergente si no es convergente.

TEOREMA 1.1 La condición necesaria y suficiente para que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente es que para todo $\varepsilon > 0$, exista un n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$|a_{n+1}.a_{n+2}\dots a_{n+k}-1| < \varepsilon, \text{ para } k = 1,2,3\dots$$

DEMOSTRACION: Supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Podemos suponer que $a_i \neq 0$ para todo i.

Sea $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Por hipótesis, existe el $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $p \neq 0$. Por lo tanto, existe un $w > 0$ tal que $|p_n| > w$, si $n \geq n_0(w)$. Además, como $\{p_n\}$ es una sucesión convergente satisface la condición de Cauchy, esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe n_1 tal que si $n \geq n_1$ entonces

$$|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon.w, \text{ para } k = 1,2,3\dots$$

Dividiendo la desigualdad por $|p_n|$, $n \geq n_0 \vee n_1$, se tiene que:

$$|a_{n+1}.a_{n+2}\dots a_{n+k} - 1| \leq \frac{\varepsilon w}{|p_n|} < \varepsilon$$

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ es $|a_{n+1}.a_{n+2}\dots a_{n+k}-1| < \varepsilon$; para $k = 1,2,3\dots$

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, sea n_0' el correspondiente n_0, y consideremos el producto

$$p_n' = a_{n_0'+1}.a_{n_0'+2}\dots a_n \quad , \quad \text{si } n > n_0'.$$

Entonces

$$|p_n' - 1| \leq \frac{1}{2} \text{ para todo } n \geq n_0'$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{2} \leq |p_n'| \leq \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto si $\{p_n'\}$ converge su límite es distinto de cero.

Veamos que efectivamente $\{p_n'\}$ es convergente.

Sea $\varepsilon > 0$ y escribamos para n suficientemente grande:

$$\left| \frac{a_{n_0'+1} \cdot a_{n_0'+2} \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots a_{n+k}}{a_{n_0'+1} \cdot a_{n_0'+2} \cdots a_n} - 1 \right| = \left| \frac{p'_{n+k}}{p'_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

Multiplicando por $|p'_n|$ se obtiene:

$$|p'_{n+k} - p'_n| < \varepsilon\, |p'_n| < \varepsilon \cdot \frac{3}{2} \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Esto es, $\{p'_n\}$ satisface la condición de Cauchy, luego es convergente y como hemos observado, su límite es distinto de cero, lo que implica que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

COROLARIO 1.1. Si $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces el $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

OBSERVACION 1.1 Escribiendo los factores de un producto infinito en la forma $a_n = 1 + u_n$, la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ implica, por el corolario anterior, que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

TEOREMA 1.2 Sea $u_n \geq 0$ para todo n. El producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ es convergente si y sólo si es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

DEMOSTRACION: Se tiene en cuenta la desigualdad

$$1 + x \leq e^x$$

la cual es válida para todo x real. (Esta desigualdad sigue del teorema del Valor medio para $f(x) = e^x$)

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ y $p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+u_k)$.

Es evidente que:

(1.1) $$p_n \geq 1 + S_n.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la desigualdad mencionada anteriormente, se tiene que:

$$p_n = (1+u_1).(1+u_2)\ldots(1+u_n) \leq e^{u_1}.e^{u_2}\ldots e^{u_n} = e^{S_n}$$

Sea entonces $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergente. Esto es, existe el $\lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$.

Entonces, como $\{p_n\}$ es monótona no decreciente, es convergente y de la desigualdad (1.1) se deduce que si p es su límite, p es distinto de cero. Recíprocamente, si $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $p \neq 0$, como la sucesión $\{S_n\}$ es monótona no decreciente, de (1.1) se deduce que $\{S_n\}$ es convergente. QED.

DEFINICION 1.2 El producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ se dice absolutamente convergente si es convergente el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|u_n|)$.

OBSERVACION 1.2 Por el teorema anterior, el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|u_n|)$ es absolutamente convergente si y sólo si es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

TEOREMA 1.3 Si el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ converge absolutamente entonces:

a) $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ converge

b) $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ converge incondicionalmente.

c) Cualquier reordenación converge al mismo límite.

DEMOSTRACION. a) y b). Supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ converge absolutamente. Esto es, $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|u_n|)$ es convergente y por lo tanto se verifica la condición necesaria de convergencia: para todo $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$\left|(1+|u_{n+1}|).(1+|u_{n+2}|)\ldots(1+|u_{n+k}|) - 1\right| < \varepsilon, \; k = 1,2,3\ldots$$

De

$$\left|(1+u_{n+1}).(1+u_{n+2})\ldots(1+u_{n+k})-1\right| \leq \left|(1+|u_{n+1}|).(1+|u_{n+2}|)\ldots(1+|u_{n+k}|)-1\right|$$

se ve que se verifica también la condición suficiente de convergencia para el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$.

c) Sea $k_1, k_2, \ldots k_n, \ldots$ una permutación de los índices $1, 2, \ldots n, \ldots$ y pongamos:

$$p_n = (1+u_1).(1+u_2)\ldots(1+u_n); \quad p'_n = (1+u_{k_1}).(1+u_{k_2})\ldots(1+u_{k_n}).$$

Supongamos:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \neq 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} p'_n = p' \neq 0.$$

Probemos que $p = p'$ de lo cual seguirá c).

Es posible calcular el cociente p'_n/p_n y, eliminando los factores comunes, obtendremos:

$$\frac{p'_n}{p_n} = \frac{(1+u_{k_1})(1+u_{k_2})\ldots(1+u_{k_n})}{(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)} = \frac{(1+u_{i_1})\ldots(1+u_{i_r})}{(1+u_{h_1})\ldots(1+u_{h_r})},$$

$i_1<i_2<\ldots<i_r$ y $h_1<h_2<\ldots<h_r$,

donde $k_1 = k_1(n)$ y $h_1 = h_1(n)$ tienden a ∞ con n.

Como

$$|(1+u_{h_1})\ldots(1+u_{h_r})-1| \leq (1+|u_{h_1}|)\ldots(1+|u_{h_r}|)-1 \leq e^{|u_{h_1}|+\ldots+|u_{h_r}|}-1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} (1+u_{h_1})\ldots(1+u_{h_r}) = 1,$$

lo que implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{p'_n}{p_n} = 1$, o sea, $\lim_{n\to\infty} p'_n = \lim_{n\to\infty} p_n$. QED.

TEOREMA 1.4 Si $v_n \geqq 0$ para todo n, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-v_n)$ converge sí y sólo sí la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es convergente.

DEMOSTRACION. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} |-v_n|$ es convergente, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-v_n)$ es absolutamente convergente y, por el teorema anterior, es incondicionalmente convergente.

Para probar la recíproca usaremos la desigualdad

$$1-x \leqq e^{-x} \quad \text{para} \quad x \geqq 0.$$

Supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-v_n)$ converge. Entonces el $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Podemos suponer, prescindiendo de algunos términos si fuese necesario, que $1-v_n > 0$.

Sea

$$S_n = v_1+v_2+\ldots v_n.$$

Considerando la desigualdad anteriormente mencionada se tiene que:

$$p_n = (1-v_1).(1-v_2)\ldots(1-v_n) \leqq e^{-(v_1+v_2+\ldots+v_n)} = e^{-S_n}$$

Además, como $\prod_{n=1}^{\infty}(1-v_n)$ converge, existe $\lim_{n\to\infty} p_n = p > 0$.

Por consiguiente S_n no puede ser divergente, esto es, existe el $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. QED.

§ 2. PRODUCTOS FUNCIONALES.

Consideraremos productos infinitos de la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n(z)$$

donde a veces escribiremos:

$$\alpha_n(z) = 1+u_n(z),$$

con z perteneciente a una cierta región G del plano complejo y $\{u_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en G.

TEOREMA 2.1 Sea $\{u_n(z)\}$ una sucesión de funciones holomorfas en G tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge uniformemente sobre G a una función $\Phi(z)$. Entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$ converge uniformemente a una función F(z) holomorfa en G, si $\Phi(z)$ es acotada allí. Además $F(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in G$ sí y sólo si existe n_0 tal que $1+u_{n_0}(z_0) = 0$.

DEMOSTRACION. La convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ en G implica la convergencia puntual de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$. Esto es, existe F(z) tal que si $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k(z))$ entonces $\lim_{n\to\infty} p_n(z) = F(z)$.

Debemos probar que la convergencia a F(z) es uniforme y que F(z) es holomorfa en G.

La hipótesis implica que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k(z)| < C, \text{ para todo } z \in G, \text{ para todo } n.$$

Por otra parte, como $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k(z))$, entonces

$$|p_n(z)| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|u_k(z)|) \leq e^{\sum_{k=1}^{n}|u_k(z)|} \leq e^C = M$$

Escribamos

$$p_n(z) = p_{n-1}(z)(1+u_n(z)),$$

entonces

$$p_n(z) - p_{n-1}(z) = p_{n-1}(z).u_n(z).$$

Además

$$p_n(z) = p_1 + \sum_{k=2}^{n}(p_k - p_{k-1}) = p_1 + \sum_{k=2}^{n} p_{k-1} \cdot u_k(z)$$

Como

$$|p_{k-1}(z)u_k(z)| \leq M|u_k(z)|,$$

los términos de la serie $\sum p_{k-1}(z)u_k(z)$ están acotados por los términos de la serie $M.\sum |u_k(z)|$, lo que implica que la serie $\sum p_{k-1}(z)\, u_k(z)$ es uniformemente convergente. Por consiguiente $p_n(z)$ converge uniformemente a una función $F(z)$ que es holomorfa por ser límite uniforme de funciones holomorfas. QED

En lo que sigue usaremos el siguiente resultado:

LEMA 2.1 Sea G una región simplemente conexa del plano complejo $\mathbb{C}$ y $F(z)$ una función holomorfa no nula en G. Entonces existe una rama holomórfica de $\log F(z)$.

TEOREMA 2.2 El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es convergente sí y sólo sí es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} \alpha_n$, supuesto que $\alpha_n \neq 0$ para todo n.

DEMOSTRACION: Sea

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \qquad ; \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} \alpha_k$$

Observemos que

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} e^{\operatorname{Log} \alpha_k} = e^{S_n} \neq 0 \text{ para todo n.}$$

Por lo tanto, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} \alpha_n$ es convergente, la sucesión $\{p_n\}$ es convergente.

Recíprocamente: supongamos ahora que

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad , \quad p \neq 0$$

y que

$$S_n = \text{Log } p_n + i\, 2\pi q_n \quad ; \; q_n \text{ número entero.}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} \text{Arg } \alpha_i = \text{Arg } p_n + 2\pi q_n$$

entonces

$$\text{Arg } \alpha_{n+1} - (\text{Arg } p_{n+1} - \text{Arg } p_n) = 2\pi(q_{n+1} - q_n)$$

Como $\alpha_n \to 1$ y $p_n \to p \neq 0$ resulta que

$$\text{Arg } \alpha_{n+1} \to 0$$

y que

$$\text{Arg } p_{n+1} - \text{Arg } p_n \to 0.$$

Entonces

$$q_{n+1} - q_n \to 0, \; (n \to \infty).$$

Esto es, existe un número entero q y un entero n_0 tal que $q_n = q$ para todo $n > n_0$. Por consiguiente S_n converge a $S = \text{Log } p + i2\pi q$. QED.

TEOREMA 2.3 Sea $\{\alpha_n(z)\}$ una sucesión de funciones holomorfas, no nulas, en una región G, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \log \alpha_n(z)$ converge uniformemente en G (aquí $\log \alpha_n(z)$ es una función holomorfa obtenida con alguna determinación del logaritmo que puede cambiar con n) y sus sumas parciales están uniformemente acotadas allí. Entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n(z)$ converge uniformemente a una función p(z) holomorfa en G.
(La demostración se deja al lector).

EJERCICIO 2.1 Demostrar el siguiente resultado.
Sea $\{u_n\}$ una sucesión tal que $0 < |u_n| < 1$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |\text{Log}(1+u_n)|$ es equiconvergente con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.(Sugerencia: Si $0 < |u_n| < {}^1/_2$ en- $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{\text{Log}(1+u_n)}{u_n}\right| \leq \frac{3}{2}$).

§ 3. TEOREMA DE WEIERSTRASS.

Introduciremos las siguientes funciones:

$$E(u,p) = (1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}}, \quad \text{para } p=1,2,3\ldots;\ u \in \mathbb{C}$$

Convenimos en que

$$E(u,0) = 1 - u.$$

y si escribimos $p_n(u) = u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^n}{n}$; $n = 1,2,3\ldots$

$$E(u,n) = (1-u)e^{p_n(u)}$$

LEMA 3.1 Sea $|u| \leqq \varepsilon < 1$ y $p = 0,1,2\ldots$ Entonces

$$|\text{Log } E(u,p)| \leqq \frac{1}{1-\varepsilon}\, |u|^{p+1}$$

En efecto, recordemos que en $|z| < 1$, $\text{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Entonces

$$\text{Log } E(u,p) = \text{Log}(1-u)+u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p} = -\sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{|u|^j}{j}$$

Por lo tanto

$$|\text{Log } E(u,p)| \leqq |u|^{p+1} \sum_{j=0}^{\infty} |u|^j \leqq \frac{1}{1-\varepsilon}|u|^{p+1}. \qquad \text{QED}$$

TEOREMA DE WEIERSTRASS. Sea $f(z)$ una función entera y no nula. Sea $\{z_1,z_2,\ldots\}$ la familia de ceros no nulos de $f(z)$ ordenada de manera tal que $0 < |z_1| < |z_2| < \ldots$, contando los ceros tantas veces como su orden de multiplicidad. Entonces existe una función entera $g(z)$ tal que

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} E({}^{z}/_{z_n}, n),$$

donde m es el orden de multiplicidad de 0.

DEMOSTRACION. Observemos que la familia $\{z_1,z_2,\ldots\}$ puede ser vacía, finita ó infinita. En lo que sigue supondremos que la familia es infinita, pues los casos restantes están contenidos en la argumentación de la demostración del teorema.

Probaremos primero que $\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, n)$ converge uniformemente en $|z| \leqq R$, para todo R.

Fijado R, sea n_0 tal que $|z_n| > 2R$ para todo $n \geqq n_0$.

El lema 3.1 implica, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, que:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |\text{Log } E(z/z_n, n)| \leqq 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} |z/z_n|^{n+1} \leqq 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{n+1}, \text{ si } |z| \leqq R$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} \text{Log } E(z/z_n, n)$ converge uniforme y acotadamente en el círculo $|z| \leqq R$.

Del Teorema 2.3 sigue que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, n)$ converge uniformemente a una función holomorfa $\phi(z)$ en $|z| \leqq R$.

Como R es arbitrario, $\phi(z)$ es una función entera y sus ceros no nulos son los de $f(z)$ y sólo ellos.

Sea

$$h(z) = \frac{f(z)}{z^m \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, n)},$$

entonces $h(z)$ es una función entera, sin ceros en todo el plano complejo. Según el lema 2.1, existe una rama $g(z)$, entera, de Log $h(z)$. Esto es,

$$\text{Log } h(z) = g(z),$$

por consiguiente

$$h(z) = e^{g(z)}. \qquad \text{QED.}$$

OBSERVACION 3.1. En la demostración se ve que la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z/z_n|^{n+1} < \infty \tag{3.1}$$

implica la convergencia uniforme del

$$\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, n) = \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p_n)$$

Supongamos que exista q entero, $q \geqq 0$ tal que

(3.2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}} < \infty$$

(La condición (3.2) dice que el crecimiento de f(z) no es muy rápido).

Entonces

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |\mathrm{Log}\ E(z/z_n;q)| \leq 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} |z/z_n|^{q+1} = 2|z|^{q+1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}} \leq$$

$$\leq 2|R|^{q+1} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}}$$

para $|z| \leq R$.

Por consiguiente, $\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, q)$ es convergente en $|z| < R$ para todo R, y ese producto puede reemplazar a $\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, n)$ en el Teorema de Weierstrass.

Para tales q escribiremos:

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, q).$$

DEFINICION 3.1 Se llama "género de P(z)" a $p = \inf \left\{ q: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}} < \infty \right\}$ y el producto $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p)$ se llama "producto canónico de género p".

OBSERVACION 3.2 Si la familia $\{z_n\}$ de ceros no nulos de una función f(z) verifica la condición (3.2), el resultado del Teorema de Weierstrass puede expresarse:

$$f(z) = z^m . e^{g(z)} . P(z)$$

donde P(z) es el producto canónico de género p y $p = \inf \left\{ q: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}} < \infty \right\}$

(Esta es la forma que nos interesará).

DEFINICION 3.2 Sea f(z) una función entera, f(z) se dice de tipo exponencial si existen dos constantes A y B tales que

$$|f(z)| \leq A\, e^{B|z|}$$

DEFINICION 3.3 Sea $f(z)$ una función entera, $n(r)$: = número de ceros de $f(z)$ en $|z| \leq r$.

El siguiente resultado será demostrado más adelante.

TEOREMA 3.1 Si $f(z)$ es una función entera de tipo exponencial entonces $n(r) = O(r)$, si $f(0) \neq 0$.

EJERCICIO 3.1 Si $f(z)$ es tal que $n(r) = O(r)$ entonces $\sum \frac{1}{|z_n|} < \infty$ o bien, $\sum \frac{1}{|z_n|^2} < \infty$. (Esto es, p=0 ó p=1).

§ 4. CRECIMIENTO DE UNA FUNCION ENTERA. ORDEN. EXPONENTE.

Sea $f(z)$ una función entera y sea

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$$

Si $f(z)$ no es una función constante, $M(r)$ es una función no decreciente en r que en virtud del Teorema de Liouville satisface la condición

$$\lim_{n\to\infty} M(r) = \infty.$$

Más aún, usando el teorema del módulo máximo se ve que si $f(z)$ no es constante entonces $M(r)$ es estrictamente creciente con r.

TEOREMA 4.1 Si $M(r) = O(r^n)$ entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que n.

Demostraremos un resultado ligeramente más general.

TEOREMA 4.2 Sea $\{r_j\}$ una sucesión tal que $r_j\to\infty$ si $j\to\infty$ y $M(r_j)=O(r_j^n)$. Entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que n.

DEMOSTRACION

$$f^{(n+k)}(0) = \frac{(n+k)!}{2\pi i} \int_{|z|=r_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+k+1}} \, d\zeta.$$

$$\left|f^{(n+k)}(0)\right| \leq \frac{(n+k)!}{2\pi} \max_{|\zeta|=r_j} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^n}\right| \frac{2\pi r_j}{r_j^{k+1}}$$

Como, por hipótesis, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\max_{|\zeta|=r_j} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^n}\right| \leq C$$

y $r_j \to \infty$ cuando $j \to \infty$, entonces, para todo $k \geq 1$, las derivadas $f^{(n+h)}(0)=0$. Luego, el desarrollo de $f(z)$ en serie de Taylor será de la forma

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j(0)\, z^j}{j!}. \qquad \text{QED}$$

DEFINICION 4.1 Se dice que la función $f(z)$ es de orden finito, o bien, $f(z)$ tiene orden finito de crecimiento, si existe un número positivo k tal que

$$M(r) \leq e^{r^k}, \text{ para } r > r_0(k)$$

DEFINICION 4.2 Se llama orden de $F(z)$ al número

$$\rho = \inf \left\{ k : \exists\, r_0(k) \text{ tal que } M(r) \leq e^{r^k}, \text{ si } r > r_0(k) \right\}$$

OBSERVACION 4.1 De acuerdo con la definición anterior, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $r_1(\varepsilon)$ tal que

$$M(r) \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{si} \quad r > r_1.$$

EJERCICIO 4.1 $\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \dfrac{\operatorname{Log} \operatorname{Log} M(r)}{\operatorname{Log} r}$ si $f(z) \neq 0$.

EJERCICIO 4.2 Verificar la siguiente tabla

Función	ρ
Polinomio	0
e^z	1
$\cos z$	1
$\cos\sqrt{z}$	$\frac{1}{2}$
de tipo exponencial	≤ 1
e^{e^z}	∞

TEOREMA 4.3 Sea $f(z)$ una función entera de orden finito ρ. Entonces $n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon})$, para todo $\varepsilon > 0$, si $f(0) \neq 0$.
(Se demostrará más adelante)

DEFINICION 4.3 Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos. Se llama exponente de convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ al número

$$\lambda = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}} < \infty\right\}$$

si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}}$ es divergente para todo $\alpha > 0$, $\lambda = \infty$.
Si la sucesión es finita, $\lambda = 0$.

EJERCICIO 4.3 Verificar la siguiente tabla.

$\{z_n\}$	λ
e^n	0
$(\beta > 0)$ $n^{1/\beta}$	β — $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lvert z_n\rvert^{\lambda}} = \infty$
$n(\log^2 n)^{1/\beta}$	β — $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lvert z_n\rvert^{\lambda}} < \infty$
$\log n$	∞

TEOREMA 4.4 (Hadamard) Sea $f(z)$ una función entera de orden finito ρ y λ el exponente de convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ de ceros no nulos de $f(z)$. Entonces $\lambda \leq \rho$.

DEMOSTRACION Supongamos $\{z_n\}$ ordenada tal que $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ y sea $\alpha > \rho$.
Sea β tal que $\alpha > \beta > \rho$.

El teorema 4.3 implica que $n(r) \leq Cr^{\rho+\varepsilon}$, C=cte, $r \geq a > 0$.

Sea $\rho+\varepsilon=\beta$, luego $n(r) \leq Cr^{\beta}$.
Si $r = |z_n|$ entonces

$$n \leq n(r) \leq C|z_n|^{\beta}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{|z_n|^{\alpha}} \leq C^{\alpha/\beta} \frac{1}{n^{\alpha/\beta}} \qquad (\alpha/\beta > 1)$$

En consecuencia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}}$ es convergente para todo $\alpha > \rho$, lo que implica que $\lambda \leq \rho$. QED.

TEOREMA 4.5 Sea $f(z)$ una función de orden finito ρ. Sea $\{z_n\}$ la familia de ceros no nulos de $f(z)$. Entonces el producto de Weierstrass toma la forma

$$(*) \qquad f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p)$$

donde $p \leq \rho$ y es el menor entero q tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-q-1} < \infty$

DEMOSTRACION: Sea q entero tal que $q + 1 > \rho \geq q$. Por el teorema anterior: $q+1 > \lambda$, por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{q+1}}$ es convergente lo que implica la tesis. QED.

Al producto $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p)$ se lo denomina "producto canónico" y queda unívocamente determinado por la sucesión de ceros no nulos $\{z_n\}$.

(*) es la "factorización canónica" de f. En ella cada uno de los factores está unívocamente determinado.

COROLARIO 4.5-1. Si p es el género del producto canónico $P(z)$, entonces $p \leq \lambda \leq p+1$.

LEMA 4.1

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}|1-e^{i\theta}|d\theta = 0$$

DEMOSTRACION: Probaremos primero que si $r < 1$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}|1-re^{i\theta}|d\theta = 0$$

La función $h(z) = \mathrm{Log}(1-z)$ es holomorfa en $\{z:|z| < 1\}$, por lo tanto

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Log}(1-z) = \mathrm{Log}|1-z|$$

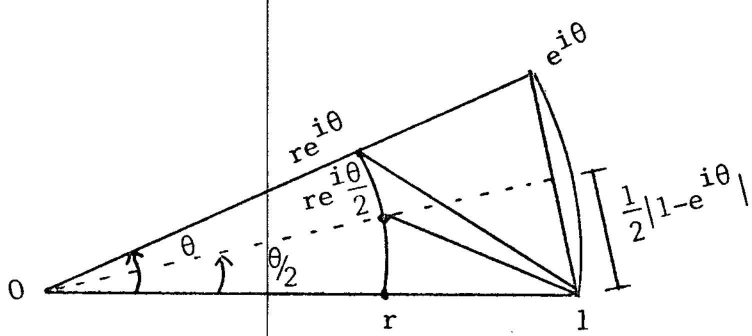
es una función armónica en ese recinto, luego si $z=re^{i\theta}$, $r < 1$, se verifica:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}|1-re^{i\theta}|d\theta = \mathrm{Log}|1-z|\Big|_{z=0} = 0$$

Probemos ahora que para todo $r < 1$, la función $\mathrm{Log}|1-re^{i\theta}|$ está acotada por una función integrable. El teorema de convergencia dominada de Lebesgue implicará la demostración del lema.

Tal acotación sólo es necesaria para valores de r próximos a uno y valores de θ próximos a cero.

De acuerdo con la figura se tiene la siguiente desigualdad para $|\theta| < \varepsilon$ y $|1-r| < \varepsilon$, ε convenientemente pequeño:



$$1 > |1-re^{i\theta}| \geq |1-re^{i\frac{\theta}{2}}| \geq \frac{1}{2}|1-e^{i\theta}| \geq \frac{1}{2}|\mathrm{sen}\ \theta| \geq \frac{1}{\pi}|\theta|$$

Por consiguiente:

$$\mathrm{Log}|1-re^{i\theta}| \leq |\mathrm{Log}\pi| + |\mathrm{Log}|\theta||$$

siendo el segundo miembro de la desigualdad una función integrable en $(-\pi, \pi)$. QED.

EJERCICIO 4.4 Mostrar que

$$\int_0^{\pi} \mathrm{Log\ sen}\ \theta\ d\ \theta = -\pi\ \mathrm{Log}\ 2.$$

FORMULA DE JENSEN.

Sea $f(z)$ una función analítica en $|z| < R$ tal que $f(0) \neq 0$. Sean z_1, $z_2, \ldots z_n$ los ceros de $f(z)$ en $\{z:|z| \leq r\}$ con $0 < r < R$. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|d\theta = \operatorname{Log}|f(0)| + \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Log}\left(\frac{r}{|z_k|}\right)$$

(Si f tuviera un cero de orden k en cero, la fórmula puede aplicarse a la función $\frac{f(z)}{z^k}$. Obsérvese que los ceros se cuentan según su multiplicidad).

DEMOSTRACION Consideraremos tres casos:

a) $f(z) \neq 0$ para todo $z: |z| \leq r$.

En tal caso $n = 0$. La función $\operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|$ es armónica y por consiguiente verifica que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|d\theta = \operatorname{Log}|f(0)|.$$

b) $f(z) \neq 0$ para todo $z: |z| < r$.

Sea

$$g(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{z_k}{z_k - z} \quad ;$$

$g(z) \neq 0$ para todo $z: |z| \leq r$. Por consiguiente, a) implica que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|g(re^{i\theta})|d\theta = \operatorname{Log}|g(0)| = \operatorname{Log}|f(0)|$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|g(re^{i\theta})|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|d\theta - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|1-e^{i(\theta-\theta_k)}|d\theta .$$

El Lema 4.1 implica que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|1-e^{i(\theta-\theta_k)}|d\theta = 0,$$

y por consiguiente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|d\theta = \operatorname{Log}|f(0)|.$$

c) $f(z)$ es tal que $z_k \in \{z: |z| \leq r\}$ para $k = 1,2,\dots n$.

Sea

$$F(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{r^2 - \bar{z}_k . z}{r(z_k - z)}$$

Si $|z| < r$ entonces $F(z) \neq 0$.

Si $|z_k| = r$ entonces $\dfrac{r^2-\overline{z}_k z}{r(z_k-z)} = \dfrac{\overline{z}_k}{r}$ y $F(z_k) = 0$.

Como para estos k, $r^2-\overline{z}_k z$ no se anula en $z \neq z_k$, concluimos que en otros puntos que no sean los z_k es $F(z) \neq 0$ en $|z| = r$, y en $|z| = r$ tiene exactamente los mismos ceros que $f(z)$.

Notemos que si $|z| = r$ entonces

$$\left|\frac{r^2-\overline{z}_k z}{r(z_k-z)}\right| = 1$$

y por lo tanto

$$|F(z)| = |f(z)|.$$

Luego $F(z)$ cumple la hipótesis de b); o sea,

$$\operatorname{Log}|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|F(re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Como

$$\operatorname{Log}|F(0)| = \operatorname{Log}|f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}\left(\frac{r}{|z_k|}\right),$$

obtenemos la tesis. QED.

Probaremos ahora los teoremas 3.1 y 4.1 ya enunciados.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3.1 (Si $f(z)$ es una función entera de tipo exponencial entonces $n(r) = O(r)$.)

Si $f(0) = 0$ y m es el orden de multiplicidad de cero, entonces

$$f(z) = z^m g(z) \quad \text{y} \quad g(0) \neq 0.$$

La función

$$h(z) = \frac{g(z)}{g(0)}$$

es tal que

$$h(0) = 1.$$

Luego, sin pérdida de generalidad se puede suponer $f(0) = 1$.

Estimaremos

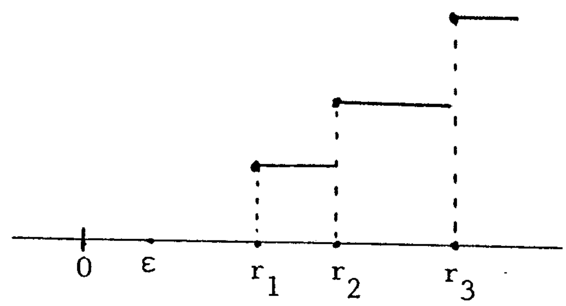
$$\sum_{k=1}^{n=n(r)} \operatorname{Log}\left|\frac{r}{z_k}\right| = n(r).\operatorname{Log} r - \sum_{k=1}^{n=n(r)} \operatorname{Log}|z_k|$$

La función

$$n(t) = \text{nº de ceros de } f(z) \text{ en } |z| \leq t,$$

es no decreciente en $(0,r)$ y a puros saltos; por lo tanto podemos considerar la integral de Stieltjes:

$$\int_0^r \operatorname{Log}(t)dn(t) = \int_\varepsilon^r \operatorname{Log}(t)dn(t) = \sum_{k=1}^{n=n(r)} \operatorname{Log}|z_k|.$$



Por consiguiente:

$$\sum_{k=1}^{n=n(r)} \operatorname{Log}\left|\frac{r}{z_k}\right| = n(r) \operatorname{Log} r - \int_\varepsilon^r \operatorname{Log}(t)dn(t) = \int_\varepsilon^r n(t)\, d\operatorname{Log}(t) =$$

$$\int_\varepsilon^r \frac{n(t)}{t}dt = \int_0^r \frac{n(t)}{t}dt$$

Llevando esta expresión a la fórmula de Jensen y teniendo en cuenta que $f(0)=1$, obtenemos:

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|f(re^{i\theta})|d\theta = \int_0^r \frac{n(t)}{t}dt$$

Como $f(z)$ es de tipo exponencial, entonces

$$|f(z)| = |f(re^{i\theta})| \leq Ae^{Br} \quad (A,B \text{ ctes})$$

Teniendo en cuenta (*) y esta última desigualdad se obtiene:

$$n(r) \operatorname{Log} 2 = \int_r^{2r} \frac{n(r)}{t}dt \leq \int_r^{2r} \frac{n(t)}{t}dt \leq \int_0^{2r} \frac{n(t)}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|f(2re^{i\theta})|d\theta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\operatorname{Log} A + 2Br)d\theta = O(r).$$

QED.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.3 (Si $f(z)$ es entera de orden finito ρ, entonces para todo $\varepsilon > 0$ es $n(r) = O(r^{\rho+\varepsilon})$).

$$|f(z)| = |f(re^{i\theta})| \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \quad \text{si } r \geq r_0(\varepsilon).$$

Del teorema anterior:

(**) $$n(r)\ \mathrm{Log}\ 2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}|f(2re^{i\theta})|d\theta$$

implica

$$n(r)\ \mathrm{Log}\ 2 \leq (2r)^{\rho+\varepsilon}$$

si r es suficientemente grande, y por lo tanto

$$n(r) \leq Kr^{\rho+\varepsilon}, \quad \text{para todo } r \text{ y cierto } K. \qquad \text{QED.}$$

-Los dos teoremas que siguen se demostrarán más adelante. Recordemos que $\lambda \leq \rho$, $p \leq \rho$, $p \leq \lambda \leq p + 1$.

TEOREMA 4.6 (Borel) Sea $P(z)$ un producto canónico y sea λ el exponente de convergencia de la familia de ceros no nulos de $P(z)$. Entonces $\lambda = \rho$.

TEOREMA 4.7 Sea $P(z)$ un producto canónico de orden de crecimiento ρ. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\{r_j\}$, $r_j \to \infty$, tal que

$$|P(z)| \geq e^{-r_j^{\rho+\varepsilon}}, \quad \text{para todo } z\text{: } |z| = r_j.$$

El siguiente resultado mejora un criterio ya visto y permite determinar si una función entera es un polinomio atendiendo solamente al crecimiento de su parte real.

TEOREMA 4.8 (Hadamard, 1893). Sea $H(z)$ una función entera. Si para todo $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de circunferencias de radios $r = r_j$, $r_j \to \infty$, tal que

$$\mathrm{Re}H(z) \leq r^{\rho+\varepsilon} \quad \text{para } |z| = r,$$

entonces $H(z)$ es un polinomio de grado no superior a ρ.

DEMOSTRACION. Sea $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint H(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

Sea $n > 0$, $\varepsilon > 0$ y elijamos $r = r_j(\varepsilon)$:

$$\oint_{|z|=r} \overline{H(z)}\frac{dz}{z^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m r^{m-n} \int_0^{2\pi} e^{-i(m+n)\theta} i d\theta = 0$$

Entonces

$$\oint_{|z|=r} 2\,\mathrm{Re}H(z)\frac{dz}{z^{n+1}} = \oint_{|z|=r} H(z)\frac{dz}{z^{n+1}} ,$$

luego, si $n > 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=r} \mathrm{Re}H(z)\frac{dz}{z^{n+1}} \quad \text{y}$$

$$\pi\,|a_n|r^n \leq \int_0^{2\pi} \left|\mathrm{Re}H(re^{i\theta})\right| d\theta.$$

Por otra parte, si $n = 0$, se tiene:

$$2\,\mathrm{Re}\,a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}H(re^{i\theta})d\theta.$$

Luego,

$$2\,\mathrm{Re}\,a_0 + |a_n|r^n \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} (0 \vee \mathrm{Re}H(re^{i\theta}))d\theta \leq 4\,r^{\rho+\varepsilon}$$

Se deduce entonces que $a_n = 0$ para todo $n > \rho$. QED.

Para una función entera $f(z)$ de orden de crecimiento finito ρ se verifica:

$$p \leq \lambda \leq \rho < \infty.$$

Luego en el producto infinito que aparece en el teorema de Weierstrass podemos sustituir el factor $E(z/z_n, n)$ por $E(z/z_n, p)$ donde p es el género de f, o sea, el menor entero q tal que $\sum_{n=1} |z_n|^{-q-1} < \infty$.

Entonces:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p).$$

TEOREMA DE HADAMARD 4.9 Sea $f(z)$ una función entera de orden de crecimien to finito ρ y $f(z) = z^m e^{g(z)} P(z)$ la factorización canónica de $f(z)$. Entonces $g(z)$ es un polinomio de grado no superior a ρ.

DEMOSTRACION Como el exponente de convergencia de la familia de ceros no nulos de $P(z)$ es igual a λ, del Teorema 4.4 y del Teorema 4.6 (Borel) resulta que

$$\text{orden de crecimiento de } P(z) = \lambda \leq \rho.$$

Por el Teorema 4.7, dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de circunferencias de radio $r = r_j$, $r_j \to \infty$, tal que

$$|P(z)| > e^{-r^{\lambda+\varepsilon}} \quad \text{para todo } z: |z| = r.$$

Luego

$$\operatorname{Log} |P(z)| > -r^{\lambda+\varepsilon} \geqq -r^{\rho+\varepsilon}$$

Como

$$e^{g(z)} = \frac{f(z)}{z^m \, P(z)} \quad ,$$

entonces

$$e^{\operatorname{Re} g(z)} = \left| \frac{f(z)}{z^m P(z)} \right|$$

Considerando la última desigualdad y la hipótesis resulta que

$$\operatorname{Re} g(z) \leq \operatorname{Log}|f(z)| - \operatorname{Log} r^m - \operatorname{Log}|P(z)| \leq 3r^{\rho+\varepsilon}$$

Luego, del teorema anterior sigue que $g(z)$ es un polinomio de grado no superior a ρ. QED.

EJERCICIO 4.5 El orden de crecimiento de un producto de funciones enteras es menor ó igual que el máximo de los órdenes de los factores.

COROLARIO 4.9-1 Si $f(z)$ es de orden de crecimiento finito ρ entonces $\rho = \text{máx}\ (\lambda, \text{grado de } g(z))$.

En efecto, ya hemos observado que $\lambda \leq \rho$, por lo tanto $\lambda \vee \text{grado } g(z) \leq \rho$. El Corolario sigue ahora del ejercicio precedente.

COROLARIO 4.9-2 Sea $f(z)$ de orden de crecimiento finito ρ y tal que ρ no es entero. Entonces $\lambda = \rho$ y $p = [\rho]$,

DEMOSTRACION: grado $g(z) \leqq [\rho]$ implica $\rho = \lambda$.

Luego, si ρ no es entero se tiene

$$[\rho] < \lambda < [\rho] + 1.$$

Entonces

$$p = [\rho]$$

EJEMPLO 4.1 Sea $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{z}{n})e^{z/n}$. $P(z)$ es un producto canónico de género $p = 1$ y como el exponente de convergencia de $z_n = n$ es $\lambda = 1$, su orden de crecimiento es $\rho = \lambda = 1$.

Lo mismo vale para $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+\frac{z}{n})e^{-z/n}$.

EJEMPLO 4.2 $P(z) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{z}{n (\log n)^2}\right)$ es un producto canónico de género $p=0$ pues $z_n = n(\log n)^2$ y $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|z_n|} < \infty$; además $\lambda = \rho = 1$.

EJEMPLO 4.3 La función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}}$ es una función entera y tiene orden de crecimiento $\rho = 1/2$.

Ella admite una factorización canónica de la forma $f(z) = C. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{n^2}\right)$; (C: constante) ya que $f(z)$ no se anula en el origen y $g(z)$ es constante (pues grado $g(z) \leq \frac{1}{2}$).

Como $f(0) = 1$ entonces $C = 1$. Por lo tanto

$$\frac{\operatorname{sen} \pi \sqrt{z}}{\pi \sqrt{z}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{n^2}\right)$$

$$\operatorname{sen} \pi w = \pi w \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{w^2}{n^2}\right) = \pi w \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{w}{n}\right)\left(1-\frac{w}{(-n)}\right) =$$

$$= \pi w \lim_{n\to\infty} \prod_{\substack{j=-n \\ j\neq 0}}^{n} \left(1-\frac{w}{j}\right) = \pi w \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(1-\frac{w}{n}\right).$$

EJERCICIO 4.6 Demostrar que si $f(z)$ es de tipo exponencial, $f'(z)$ también lo es. (Sugerencia: usar la expresión integral del coeficiente a_1)

EJERCICIO 4.7 Demostrar que $f(z)$ y $f'(z)$ tienen el mismo orden de crecimiento. (Sugerencia: usar teorema de Cauchy y fórmula de Barrow-Newton)

EJEMPLO 4.4 Sea $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = z.e^{\gamma z}.\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n}$,

(γ es el número de Euler).

El orden de crecimiento de $f(z)$ es $\rho \leq 1$. Probaremos que $\rho = 1$. Para ello basta probar que $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$ no es de tipo exponencial.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen } \pi z} \implies \Gamma(z) \text{ sen } \pi z = \frac{\pi}{\Gamma(1-z)}$$

Supongamos que $\frac{1}{\Gamma(z)}$ es de tipo exponencial.

Esto es, existen constantes A y B tales que

$$\left|\Gamma^{-1}(z)\right| \leq Ae^{B|z|}$$

Luego

$$|\Gamma(z) \text{ sen } \pi z| \leq \pi|\Gamma^{-1}(1-z)| \leq C\ e^{B|1-z|};\ C\text{: constante.}$$

Si $z = n+\frac{1}{2}$ se tiene que:

$$(n-1)! = \Gamma(n) \leq |\Gamma(n+1/2)| \leq C\ e^{B(n-1/2)} = C'\ e^{B(n-1)},$$

lo cual es un absurdo, pues para n suficientemente grande es

$$(n-1)! > C'\ e^{B(n-1)}$$

EJERCICIO 4.8 Sea $f(z)$ una función entera de orden de crecimiento finito y no entero. Entonces $f(z) = 0$ tiene infinitas raíces. (Sugerencia: Usar el Corolario 4.9-2).

La definición siguiente es equivalente a la Definición 3.2.

DEFINICION 4.4 Se dice que una función $f(z)$ entera es de tipo exponencial si

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\text{Log } M(r)}{r}$$

es finito, donde

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

El número

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mathrm{Log}\ M(r)}{r}$$

es llamado el "exponente de f(z)".

Teniendo en cuenta esta última definición, f(z) es una función entera de tipo exponencial y con exponente σ si para cada $\varepsilon > 0$, se verifican las dos desigualdades siguientes:

$$M(r) \leqq e^{(\sigma+\varepsilon)r},$$

para $|z|=r$ suficientemente grande,

$$M(r) > e^{(\sigma-\varepsilon)r_j},$$

para una sucesión de valores arbitrariamente grandes de r: $r_1, r_2, \ldots r_j \ldots$.

Llamaremos E_σ a la clase de funciones enteras de exponente σ.

EJEMPLO 4.5 Las siguientes funciones pertenecen a E_σ: $e^{\sigma z}$. P(z); $\cos(\sigma z+\alpha)$. P(z), donde P(z) es un polinomio arbitrario.

TEOREMA 4.10 Si f(z) pertenece a E_σ entonces

$$\sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|c_n|}$$

donde $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$

DEMOSTRACION. Probaremos primero que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mathrm{Log}\ M(r)}{r} \leq \sigma \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{e} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \sigma \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|c_n|} \leq \sigma$$

La última equivalencia es inmediata teniendo en cuenta la fórmula de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

o lo que es lo mismo

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n [1+o(1)],$$

lo que permite probar que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{n}{e} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\,|c_n|}$$

Supongamos ahora que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\text{Log } M(r)}{r} \leq \sigma.$

Esto implica que dado $\varepsilon > 0$ existe $r_0(\varepsilon)$ tal que

$$M(r) \leq e^{(\sigma+\varepsilon)r}, \text{ para todo } r > r_0(\varepsilon),$$

y en virtud de la desigualdad de Cauchy:

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad (n=0,\ 1,\ 2...),$$

se tiene que

$$|c_n| \leq \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)r}}{r^n} \text{ para todo } r > r_0(\varepsilon).$$

Para $n \geq n_0(\varepsilon)$ puede elegirse r de manera que

$$(\sigma+\varepsilon).r = n,\ r > r_0(\varepsilon).$$

Por lo tanto, para $r = \frac{n}{\sigma+\varepsilon}$ es:

$$|c_n| \leq \frac{e^n}{\left(\frac{n}{\sigma+\varepsilon}\right)^n} \Longrightarrow \frac{n}{e}\sqrt[n]{|c_n|} \leq \sigma+\varepsilon.$$

luego

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \left(\frac{n}{e}\right) \sqrt[n]{|c_n|} \leq \sigma$$

Probemos ahora que

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{n!\,|c_n|} \leq \sigma \Longrightarrow \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\text{Log } M(r)}{r} \leq \sigma.$$

Como $f(z) = c_0+c_1z+c_2z^2+...$, entonces

$$M(r) \leq |c_0|+|c_1|r+|c_2|r^2+...$$

La hipótesis implica que dado $\varepsilon > 0$, para todo $n > N(\varepsilon)$ es:

$$|c_n| \leqq \frac{(\sigma+\varepsilon/2)^n}{n!}$$

en consecuencia

$$M(r) \leqq \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| r^j \leqq \sum_{j=0}^{N} |c_j| r^j + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(\sigma+\varepsilon/2)^j r^j}{j!} \leqq e^{(\sigma+\varepsilon)r}$$

para $r > r_0(\varepsilon)$ y para todo $\varepsilon > 0$.

Por lo tanto

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\operatorname{Log} M(r)}{r} \leqq \sigma, \text{ QED.}$$

Probaremos ahora los teoremas 4.6 y 4.7 ya enunciados

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.6 (Sea $P(z)$ un producto canónico y λ el exponente de convergencia de la familia de ceros no nulos de $P(z)$. Entonces $\lambda = \rho$)

Bastará probar que $\lambda \geqq \rho$.

Sea $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p)$; $z \neq z_n$ para todo n, $r = |z|$, $r_n = |z_n|$

Sea n_0 tal que para todo $n > n_0$ es $r_n > 2r$, entonces

$$\operatorname{Log}|P(z)| = \sum_{r_n \leqq 2r} \operatorname{Log}|E(z/z_n, p)| + \sum_{r_n > 2r} \operatorname{Log}|E(z/z_n, p)| = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Del lema 3.1, con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $u = \frac{z}{z_n}$, se deduce que:

$$\operatorname{Log}|E(z/z_n, p)| \leqq 2(r/r_n)^{p+1} \quad , \quad \text{si } r_n > 2r.$$

Entonces,

$$\Sigma_2 = \sum_{r_n > 2r} \operatorname{Log}|E(z/z_n, p)| \leqq \sum_{r_n > 2r} 2\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} = 2r^{p+1} \sum_{r_n > 2r} \frac{1}{(r_n)^{p+1}}$$

Consideremos dos casos: $\lambda = p + 1$, $\lambda < p + 1$

Sea $\lambda = p + 1$; la serie $\sum \frac{1}{|r_n|^{p+1}}$ es convergente, por lo tanto

$$\Sigma_2 = O(r^\lambda)$$

Si $\lambda < p + 1$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda + \varepsilon < p + 1$, entonces la serie $\sum \frac{1}{|r_n|^{\lambda+\varepsilon}}$ es convergente. Como

$$2r^{p+1} \cdot \sum_{r_n>2r} \frac{1}{(r_n)^{p+1}} = 2r^{p+1} \sum_{r_n>2r} r_n^{\lambda+\varepsilon-p-1} \cdot \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} \leq$$

$$\leq 2r^{p+1}(2r)^{\lambda+\varepsilon-p-1} \cdot \sum_{r_n>2r} \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} ,$$

entonces

$$\sum_2 = O(r^{\lambda+\varepsilon})$$

Luego, hemos probado que en ambos casos ($\lambda=p+1$, $\lambda<p+1$) es $\sum_2 = O(r^{\lambda+\varepsilon})$, donde ε es un número cualquiera positivo y suficientemente pequeño. Probemos ahora que también

$$\sum_1 = \sum_{r_n\leq 2r} \operatorname{Log}|E(z/z_n, p)| = O(r^{\lambda+\varepsilon}).$$

-Sea $p > 0$. Escribamos $u = \frac{z}{z_n}$, $|u| = \frac{r}{r_n}$.

Si $r_n \leq 2r$ entonces

$$|u| \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad 1 \leq (2|u|)^{p-k} \text{ cuando } k \leq p$$

Por consiguiente

$$|u|^k \leq 2^{p-k}|u|^p$$

y de aquí

$$|u|+\left|\frac{u}{2}\right|^2+\ldots+\left|\frac{u}{p}\right|^p \leq |u|^p(2^{p-1}+2^{p-2}+\ldots+1) \leq 2^p|u|^p.$$

Entonces,

$$|E(u,p)| \leq (1+|u|)e^{|u|+\left|\frac{u}{2}\right|^2+\ldots\left|\frac{u}{p}\right|^p} \leq e^{|u|} \cdot e^{2^p|u|^p} \leq e^{(2^{p-1}+2^p)|u|^p} \leq$$

$$\leq e^{2^{p+1} \cdot |u|^p} .$$

Por lo tanto, como $\lambda+\varepsilon>p$ tenemos:

$$\sum_1 \leq 2^{p+1} \cdot \sum_{r_n\leq 2r} \left(\frac{r}{r_n}\right)^p = 2^{p+1} r^p \sum_{r_n\leq 2r} r_n^{\lambda+\varepsilon-p} \cdot \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} \leq$$

$$\leq 2^{p+1}\, r^p\, (2r)^{\lambda+\varepsilon-p} \sum_{r_n\leq 2r} \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} = O(r^{\lambda+\varepsilon}),$$

si $p>0$.

Si $p=0$

$$|E(u,0)| \leq 1+|u| \leq \begin{cases} e^{|u|^{\varepsilon}}, \text{ si } |u| \geq c(\varepsilon) \\ (1+c(\varepsilon))\, e^{|u|^{\varepsilon}} \text{ si } |u| < c(\varepsilon) \end{cases}$$

donde $c(\varepsilon)$ es un número que depende de ε

Luego, como $|u| \geq 1/2$:

$$\text{Log}|E(u,0)| = O(|u|^{\varepsilon}).$$

En consecuencia:

$$\sum_1 \leq K \sum_{r_n\leq 2r} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\varepsilon} = K \sum_{r_n\leq 2r} r_n^{\lambda} \cdot r_n^{-\lambda-\varepsilon} \leq K(2r)^{\lambda} \sum_{r_n\leq 2r} \frac{1}{r_n^{\lambda+\varepsilon}} = O(r^{\lambda}),$$

Esto es

$$\sum_1 = O(r^{\lambda+\varepsilon}) \text{ en todo caso.}$$

Entonces

$$\text{Log}|P(z)| = O(r^{\lambda+\varepsilon})$$

De esto último se deduce que $\rho \leq \lambda$, QED.

LEMA 4.2 Sea $\alpha_1(z), \alpha_2(z), \ldots$ una sucesión de funciones holomorfas en una región G tal que $\infty \notin G$.

Supongamos que el producto $\prod_{j=1}^{\infty} \alpha_j(z)$ converge uniformemente en G a la función holomorfa $F(z)$.

Entonces en todo punto donde $F(z) \neq 0$ es:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j'(z)}{\alpha_j(z)}$$

La serie de derivadas logarítmicas tiene a lo sumo un número finito de términos con singularidades en G. Si descartamos estos, la serie remanente es uniformemente convergente sobre compactos de G.

DEMOSTRACION. $\alpha_j(z) \neq 0$ en G si $j \geq n_0$.

Sea $n > n_0$ y

$$f_n(z) = \alpha_{n_0}(z)\ldots\alpha_n(z) \quad , \quad f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

f(z) es holomorfa en G pues es límite uniforme de funciones holomorfas. Sea K un compacto en G. Como $f\neq 0$ en K, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z)| > \varepsilon$ allí. Luego, si $n \geq n_1(\varepsilon)$ tendremos

$$|f_n(z)| > \varepsilon/2 \text{ en K.}$$

Además la sucesión de derivadas $\{f'_n(z)\}$ tiende uniformemente a $f'(z)$ en K. Luego:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n_1<n}} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n_0}^{n} \frac{\alpha'_j(z)}{\alpha_j(z)} = \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{\alpha'_j(z)}{\alpha_j(z)} \, ,$$

si $z \in K$ y la convergencia es uniforme sobre K

Como

$$F(z) = g(z) \, . \, f(z)$$

y g(z) consta de un número finito de factores el resultado buscado sigue inmediatamente, QED.

Una aplicación interesante del teorema de Hadamard es el siguiente teorema debido a Laguerre:

TEOREMA 4.11 Sea f(z) una función no constante, real en el eje real, de orden $\rho < 2$ y con ceros reales si existen. Entonces:

a) Si f'(z) tiene ceros estos son reales,
b) Estrictamente entre dos ceros de f(z) existe exactamente un cero de f'(z).

DEMOSTRACION

$$p \leq \rho < 2 \Longrightarrow p=0 \text{ o } p=1$$

En cualquiera de los dos casos podemos escribir:

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} (1-z/z_n)\, e^{z/z_n} \, . \, e^{Az+B}.$$

Sea z = u+iv. Como

$$f(u) = \overline{f(u)}$$

tenemos

$$e^{Au+B} = e^{\overline{A}u+\overline{B}}$$

de donde sigue que:

$C=e^{B}$ es real y que $A=\overline{A}$.

Sea ahora $f(z)\neq 0$. Entonces, aplicando el Lema 4.2 obtenemos:

$$(1) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + A + z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n(z-z_n)} = \frac{m}{z} + A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z_n-z}\right)$$

En consecuencia,

$$(2) \qquad \operatorname{Im} \frac{f'(z)}{f(z)} = -\left[\frac{m}{u^2+v^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(u-z_n)^2+v^2}\right] \cdot v$$

Supongamos $v\neq 0$ e $\operatorname{Im}({}^{f'}/_{f})(z)=0$. Entonces de (2) sigue que

$$m=0 \quad y \quad \{z_n\} = \emptyset$$

Luego

$$f(z) = C\, e^{Az}.$$

Así a) queda probada.

Derivando (1) obtenemos:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f'}{f}\right) = -\frac{m}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-z_n)^2},$$

de lo cual sigue que en el segmento comprendido entre dos ceros consecutivos de $f(z)$, $({}^{f'}/_{f})(z)$ tiene derivada negativa. Luego $f'(z)$, que se anula en el segmento abierto cuyos extremos son ceros consecutivos de f, lo hace sólo una vez. QED.

Otro resultado interesante que no demostraremos es el siguiente: Un producto canónico de género cero es una función entera de tipo exponencial y exponente cero.

Hemos visto que si una función entera $H(z)$ verifica:

$$\operatorname{Re} H(z) < r^{\rho+\varepsilon} \quad , \text{si } |z| = r > r_0(\varepsilon) \text{ para todo } \varepsilon > 0,$$

entonces $H(z)$ es un polinomio de grado $\leq \rho$.
Esto puede deducirse también del teorema de Borel-Carathéodory que demostraremos a continuación. De este teorema se deduce para toda función entera la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2} M(R/2) \leq \max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z) + \frac{3}{2} |f(0)|$$

la cual implica el resultado de Hadamard mencionado.
Pero antes recordemos el enunciado del siguiente lema:

LEMA DE SCHWARZ. Sea $f(z)$ holomorfa en $|z| \leq R$; $|f(z)| \leq M$ en $|z| = R$, y $f(0) = 0$. Entonces $|f(re^{i\theta})| \leq \frac{M.r}{R}$, $0 \leq r \leq R$.

TEOREMA DE BOREL-CARATHEODORY Sea $f(z)$ analítica en $|z| \leq R$, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $\max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z) = A(r)$. Sea $0 < r < R$.
Entonces:

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|$$

DEMOSTRACION. Si $f(z)$ es constante, o sea, si $M(r) = |f(0)|$, entonces se verifica que

$$(R-r)\, M(r) \leq 2r\, A(R) + (R+r)|f(0)|$$

Sea $f(z)$ no constante, $f(0)=0$.
Como

$$e^{A(r)} = \max_{|z|=r} |e^{f(z)}|$$

resulta que $A(r)$ es estrictamente creciente. Por lo tanto

$$A(R) > A(0) = 0$$

Sea

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{2A(R)-f(z)} \quad .$$

Como

$$\operatorname{Re}\,(2A(R) - f(z)) \neq o \quad \text{en} \quad |z| \leq R,$$

$\phi(z)$ es holomorfa en $|z| \leq R$, $\phi(0)=0$ y si $f(z)=u+iv$ se tiene que:

$$|\phi(z)|^2 = \frac{u^2+v^2}{(2A(R)-u)^2+v^2} \leq 1,$$

lo que implica, por el lema de Schwarz, que

$$|\phi(z)| \leq \frac{r}{R}$$

Por lo tanto

$$|f(z)| = \left|\frac{2A(R)\phi(z)}{1+\phi(z)}\right| \leq \frac{2A(R).r}{R-r}$$

$$\left(\text{pues } \left|\frac{\phi(z)}{1+\phi(z)}\right| \leq \frac{|\phi(z)|}{1-|\phi(z)|} \leq \frac{r}{R-r}\right)$$

Sea f(z) no constante, $f(0) \neq 0$. Apliquemos la última desigualdad a $f(z) - f(0)$.

Luego

$$|f(z)-f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re}\,(f(z)-f(0)) \leq \frac{2r}{R-r}\,(A(R)-|f(0)|), \quad \text{QED.}$$

COROLARIO 1. Si $A(R) \geq 0$, entonces

$$M(r) \leq \frac{R+r}{R-r}\,(A(R) + |f(0)|)$$

COROLARIO 2. Si $A(R) \geq 0$ entonces

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{2^{n+2}.n!\,R}{(R-r)^{n+1}} \cdot (A(r) + |f(0)|)$$