INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 54

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1996 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 54

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS PARA LA LOGICA FUZZY

ROSANA V. ENTIZNE
DIANA M. BRIGNOLE

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1996

Estructuras Algebraicas para la Lógica Fuzzy

Rosana V. Entizne - Diana M. Brignole

Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

1 Introducción

Este informe tiene como propósito estudiar la estructura algebraica subyacente a los distintos sistemas que se conocen bajo el nombre de *"Lógica y Teoría de Conjuntos Fuzzy"*[1] que se origina en 1965, con el trabajo de Zadeh : *Fuzzy Sets* [2].

En una teoría clásica de conjuntos, dados un elemento x y un subconjunto A de un conjunto universal E, x pertenece a A, o x no pertenece a A. Y por lo tanto, la llamada función característica del conjunto A es una función $\aleph_A$, definida sobre E, y que toma valores 0 ó 1.

$$\aleph_A : E \to \{0, 1\}$$

Obviamente, existe una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos A de E y las funciones $\aleph_A : E \to \{0, 1\}$.

Cuando Zadeh define a los subconjuntos fuzzy A de un universo E (conjunto clásico) por medio de sus funciones características:

$$\mu_A : E \to [0, 1]$$

donde $[0, 1]$ es el intervalo de la recta real, es decir, cuando Zadeh acepta valores intermedios para la pertenencia a un conjunto, inicia una teoría que permitirá modelar matemáticamente la vaguedad, la incertidumbre, la posibilidad, el razonamiento aproximado.

Esta problemática reconoce una larga historia, a la que en el último siglo se incorporan las lógicas multivalentes, el intuicionismo, el principio de incertidumbre y la inteligencia

[1]Si bien en la literatura en castellano los términos *fuzzy* del inglés o *flou* del francés, se encontraban traducidos como *borroso* o *difuso*, se impone actualmente la denominación *fuzzy* en la mayoría de los trabajos científicos, sea cual fuere el idioma en que están escritos.

[2]Publicado en la revista Information & Control, vol. 8.

artificial.

La teoría de conjuntos y la lógica fuzzy tienen un carácter local, y admiten, desde su origen, distintas formas de definir operaciones como la unión, la intersección o el complemento de los conjuntos fuzzy. Se presenta así el problema de precisar la estructura algebraica necesaria , a la que se requiere que admita un producto y un residuo que constituyan lo que se ha llamado *cupla adjunta.*
Citando a Enric Trillas [18][3] *"La lógica fuzzy ha abierto una ventana para , a través de la determinación de la función R y de la operación F en cada contexto, determinar la lógica que un experto humano está usando, en un momento dado, en un razonamiento concreto".*

En los treinta años de su desarrollo se han hecho distintos aportes y enfoques en este sentido. Más aún, la definición original de Zadeh fue rápidamente generalizada, tomando en lugar del $[0, 1]$ un reticulado L con ciertas propiedades.

Entendemos que actualmente existe una coincidencia sobre esta estructura (Höhle,[9]), un cierto tipo de monoide reticulado, que se denomina reticulado residual siguiendo la primitiva denominación de Dedekind [3]. En esta estructura podemos distinguir reticulados residuales integrales, con división, de Girard, etc.

En publicaciones previas estos conceptos se presentan con distintas definiciones, no siempre equivalentes. Por ejemplo, Pavelka [12] asume que el último elemento del reticulado debe ser la unidad del monoide, situación que para nosotros define un reticulado residual integral.

En este marco las álgebras de Boole, De Morgan, Heyting (Brower, quasi-Boole o Gödel), MV-álgebras, etc., aparecen como casos particulares, donde, interpretando el residuo como la implicación, se obtienen las implicaciones clásica, intuicionista y de Lukasiewicz, entre otras.

En el trabajo se aclara, asimismo, la relación entre propiedades de las lógicas no clásicas (caracterizadas por la no validez del principio del tercero excluído). Por ejemplo, que si se supone una conjunción idempotente no es válida la ley de doble negación y recíprocamente, si vale la ley de doble negación, entonces la conjunción no puede ser idempotente. Esto es lo que sucede, respectivamente, con las lógicas intuicionista y de Lukasiewicz.

Creemos interesante mencionar que esta estructura de reticulado residual aparece relacionada con estudios sobre categorías, funciones asociativas, ideales de polinomios,

[3] Cuando Trillas habla de R y F se refiere justamente a la elección de una cupla adjunta (F, R) para cada caso que dependerá de la estructura lógica a analizar.

T-normas, resultados de Gödel, etc.

El plan de trabajo es presentar la teoría de los reticulados residuales, demostrando cómo, en esta estructura, puede definirse una implicación que constituya una *cupla adjunta (o de Gödel)* con el producto del monoide, y, por ende, una T-norma y una T-conorma. Y ubicar en este contexto los resultados de Drewniak [7], Turunen [19], Pavelka [12], Di Nola-Ventre [6], A. Monteiro [11]. Se indican las demostraciones de las propiedades que se enuncian, así como ejemplos y contraejemplos, para facilitar su interrrelación con otras estructuras propias de las álgebras de origen lógico.

Finalmente hemos establecido las condiciones para que sea posible definir una cupla adjunta, y, por ende, una estructura de reticulado residual, en un álgebra implicativa, definida según Rasiowa [13].

2 Reticulados Residuales

Sea $(L, \leq)$ un reticulado con 0 y 1. Es decir, un conjunto no vacío, parcialmente ordenado por $\leq$, tal que existen el ínfimo y el supremo de cualquier subconjunto finito. En particular $\inf \emptyset = 1$, y $\sup \emptyset = 0$, donde 0 y 1 son, respectivamente, el primer y el último elemento de L Sea, además, $\otimes : L \times L \to L$ una operación isótona tal que $(L, \otimes)$ es un monoide ordenado, es decir:

m0) si $x \leq y$ entonces $x \otimes z \leq y \otimes z$ y $z \otimes x \leq z \otimes y$.

m1) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z)$

m2) existe $e \in L$ tal que $e \otimes x = x \otimes e = x$, cualquiera que sea $x \in L$

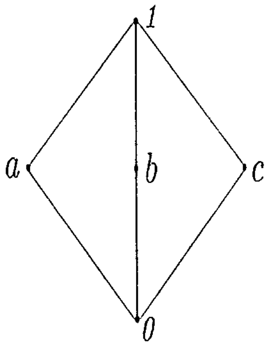
Entonces, *si existen* $\to_1$, $\to_2$, operaciones binarias en L que satisfacen:

$$x \otimes y \leq z \quad sii \quad x \leq y \to_1 z \tag{1}$$

$$x \otimes y \leq z \quad sii \quad y \leq x \to_2 z \tag{2}$$

se dice que $(L, \leq, \otimes)$ es un *reticulado residual generalizado*.(Turunen, [19]) Ejemplo 2.1

Consideremos en el siguiente reticulado:



la operación $\otimes$ definida por la siguiente tabla:

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	c	a
b	0	a	b	c	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

$\otimes$ es claramente asociativa, isótona y no conmutativa. Se pueden definir, entonces $\rightarrow_1$ y $\rightarrow_2$ según las siguientes tablas:

$\rightarrow_1$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	0	0	1
b	0	0	1	0	1
c	0	0	0	1	1
1	0	a	b	c	1

$\rightarrow_2$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	b	c	1
b	0	a	1	c	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

y se verifica

$$x \otimes y \leq z \text{ si y sólo si } x \leq y \rightarrow_1 z$$

$$x \otimes y \leq z \text{ si y sólo si } y \leq x \rightarrow_2 z$$

Observación 2.1

Si $\otimes$ es conmutativa, entonces $\rightarrow_1 = \rightarrow_2$. En efecto:

Sean $y, z \in L$ $\quad y \rightarrow_1 z \leq y \rightarrow_1 z$

$(y \rightarrow_1 z) \otimes y \leq z$ por (1)

$y \otimes (y \rightarrow_1 z) \leq z$ por conmut.

$y \rightarrow_1 z \leq y \rightarrow_2 z$ por(2)

Análogamente se puede ver que $y \rightarrow_2 z \leq y \rightarrow_1 z$, de donde resulta la igualdad.
Estamos en condiciones de afirmar, entonces

$$x \otimes y \leq z \quad \textit{sii} \quad x \leq y \rightarrow z \tag{3}$$

donde $\rightarrow = \rightarrow_1 = \rightarrow_2$ y se denomina el *residuo*, con respecto a la operación binaria $\otimes$ denominada *producto*.

El par $(\otimes, \rightarrow)$ satisfaciendo 3 se dice una *cupla adjunta* o *cupla de Gödel* (Birkhoff, [1])

Observación 2.2

Este residuo, si existe, está unívocamente determinado por

$$x \rightarrow y = \bigvee \{z : x \otimes z \leq y\} \tag{4}$$

En efecto: Sea $Z = \bigvee\{z : x \otimes z \leq y\}$

1. $x \otimes y \leq x \otimes y$
2. $x \otimes (x \rightarrow y) \leq y$ de 1. por 3
3. $x \rightarrow y \in Z$ por 2.
4. $z \leq x \rightarrow y$, cualquiera que sea $z \in Z$ por 3
5. $x \rightarrow y = \bigvee\{z : z \otimes x \leq y\}$ de 3. y 4.

Definición 2.1

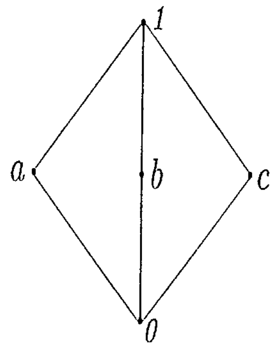
Un *reticulado residual* es una terna $(L, \leq, \otimes)$ donde $(L, \leq)$ es un reticulado con primer y último elemento, $(L, \otimes)$ es un monoide conmutativo y existe una operación binaria $\rightarrow$ en L que satisface:

$$x \otimes y \leq z \quad \text{sii} \quad x \leq y \rightarrow z$$

A partir de (4) se puede inferir que si $(L, \leq)$ es un reticulado completo, para cualquier $\otimes$ tal que $(L, \otimes)$ es un monoide abeliano puede definirse una operación $\rightarrow$ satisfaciendo la condición de cupla adjunta 3 que hace a $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual. Esto, en general, no es cierto. En efecto:

Ejemplo 2.2

Consideremos en el siguiente reticulado:



la operación $\otimes$ definida por la siguiente tabla:

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	0	a	b
c	0	0	a	b	c
1	0	a	b	c	1

Se ve fácilmente que $\otimes$ es asociativa, isótona y conmutativa. Dado que L es finito es completo y por lo tanto existe $\bigvee\{t : y \otimes t \leq z\}$, cualesquiera sean $y, z \in L$ y definimos $\rightarrow$ según la siguiente tabla:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
c	a	1	1	1	1
1	0	a	b	c	1

Pero no es cierto que $(\otimes, \rightarrow)$ sea una cupla adjunta.
En efecto:

$$c \leq c \rightarrow c \text{ y } c \otimes c = b \not\leq c$$

Podríamos observar que en el reticulado anterior el producto definido no distribuye con respecto al supremo. Es decir, no se verifica

$$(a \vee b) \otimes c = (a \otimes c) \vee (b \otimes c) \tag{5}$$

Veamos un ejemplo donde la ecuación 5 es válida.

Ejemplo 2.3

Consideremos en el siguiente reticulado:

la operación $\otimes$ definida por la siguiente tabla:

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	0	a	b
c	0	0	a	b	c
1	0	a	b	c	1

$\otimes$ es asociativa, isótona, conmutativa y distribuye con respecto al supremo. Dado que L es finito es completo y por lo tanto existe $\bigvee\{t : y \otimes t \leq z\}$, cualquiera que sean $y, z \in L$. Definimos $\longrightarrow$ según la siguiente tabla:

$\longrightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	b	c	1	1	1
c	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	1

En este caso podemos verificar que $(L, \leq, \otimes)$ satisface la condición de cupla adjunta 3.

Tomando en consideración los ejemplos anteriores enunciamos el siguiente:

Lema 2.1

Sea $(L, \leq)$ un reticulado completo, $\otimes$ una operación binaria tal que $(L, \otimes)$ es monoide ordenado conmutativo que satisface

$$a \otimes (\bigvee_{i \in I} t_i) = \bigvee_{i \in I} (a \otimes t_i) \tag{6}$$

entonces es posible definir:

$$x \longrightarrow y = \bigvee\{t : x \otimes t \leq y\} \tag{7}$$

satisfaciendo la condición de cupla adjunta 3 , y de manera única (Pavelka, [12])

demostración

Dado que el reticulado es completo para cualquier conjunto no vacío $\{t : x \otimes t \leq y\}$ existe $\bigvee\{t : x \otimes t \leq y\}$. Si $\{t : x \otimes t \leq y\} = \emptyset$ consideramos $\sup\emptyset = 0$. Por otra parte hemos probado 2.2 que en caso de existir el residuo (para un producto dado) está unívocamente determinado por (4), por lo tanto sólo debemos probar que se satisface la condición de cupla adjunta, es decir:

$$x \otimes y \leq z \qquad \text{si y sólo si} \qquad x \leq y \to z$$

($\Rightarrow$)

1. $x \otimes y \leq z$ — hip.
2. $x \in \{t : y \otimes t \leq z\}$ — de 1.
3. $x \leq y \to z$ — de 2.

($\Leftarrow$)

1. $x \leq y \to z$ — hip.
2. $x \otimes y \leq (y \to z) \otimes y$ — de 1.
3. $x \otimes y \leq (\bigvee_{y \otimes t \leq z} t) \otimes y$ — de 2. por 7
4. $x \otimes y \leq \bigvee_{y \otimes t \leq z}(t \otimes y)$ — de 3. por 6
5. $x \otimes y \leq z$ — de 4.

Dualmente enunciamos el siguiente:

Lema 2.2

Sea $(L, \leq)$ un reticulado completo, $\to$ una operación binaria isótona en la primera variable y antítona en la segunda que satisface

$$a \to (\bigwedge_{i \in I} t_i) = \bigwedge_{i \in I}(a \to t_i) \tag{8}$$

entonces es posible definir:

$$x \otimes y = \bigwedge\{t : x \leq y \to t\} \tag{9}$$

satisfaciendo la condición de cupla adjunta 3, y de manera única.

demostración
Igual que en el lema anterior sólo debemos probar que se satisface la condición de cupla adjunta y la unicidad, ya que el reticulado completo asegura la existencia de dicho ínfimo para cualquier $\{t : x \otimes t \leq y\}$ no vacío y de nuevo, si $\{t : x \otimes t \leq y\} = \emptyset$ consideramos $\inf\emptyset = 1$.
Probaremos en primer lugar:

$$x \otimes y \leq z \quad \text{si y sólo si} \quad x \leq y \rightarrow z$$

($\Rightarrow$)

1. $x \otimes y \leq z$ — hip.
2. $\bigwedge\{t : x \leq y \rightarrow t\} \leq z$ — de 9.
3. $y \rightarrow (\bigwedge_{x\leq y\rightarrow t} t) \leq y \rightarrow z$ — de 2. por hip.
4. $(\bigwedge_{x\leq y\rightarrow t}(y \rightarrow t) \leq y \rightarrow z$ — de 3. por 8
5. $x \leq y \rightarrow z$ — de 4.

($\Leftarrow$)

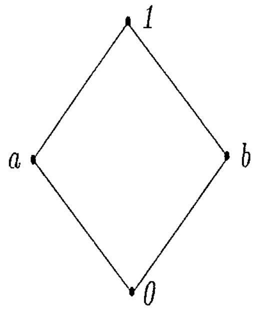
1. $x \leq y \rightarrow z$ — hip.
2. $z \in \{t : x \leq y \rightarrow z\}$ — de 1.
3. $x \otimes y \leq z$ — de 2.

Veamos ahora que es único:
Sea $T = \{t : x \leq y \rightarrow t\}$

1. $x \otimes y \leq x \otimes y$
2. $x \leq y \rightarrow (x \otimes y)$ — por 3
3. $x \otimes y \in T$ — de 2.
4. $x \otimes y \leq t$, cualquiera que sea $t \in T$ — por 3
5. $x \otimes y = \bigwedge\{t : x \otimes t \leq y\}$ — de 3. y 4.

Veamos un ejemplo de construcción del producto a partir del residuo:

Ejemplo 2.4



Con el residuo definido por:

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

es claro que este residuo es isótono en la primera variable, antítono en la segunda y distribuye con respecto al ínfimo. Entonces definimos el producto según 9:

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Así definido $(\otimes, \rightarrow)$ cumple la condición de cupla adjunta, es decir, satisfacen 3.

Lema 2.3

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual. Entonces se verifican:

1) $a \to 1 = 1$

2) i) $a \otimes (a \to b) \leq b$
   ii) $b \leq a \to (a \otimes b)$

3) Si $a \leq b$ entonces $a \otimes c \leq b \otimes c$

4) Si $a \leq b$ entonces:

   i) $c \to a \leq c \to b$
   ii) $b \to c \leq a \to c$

5) $(a \to b) \otimes (b \to c) \leq a \to c$

6) $a \otimes (b \vee c) = (a \otimes b) \vee (a \otimes c)$

7) $a \otimes (b \wedge c) \leq (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$

8) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

9) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$

10) $(a \otimes b) \to c = a \to (b \to c)$

11) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$

12) $(a \to c) \vee (b \to c) \leq (a \wedge b) \to c$

13) $(a \to b) \vee (a \to c) \leq a \to (b \vee c)$

14) $a \otimes (a \to b) = b$ sii existe $c \in L$ tal que $a \otimes c = b$

15) $a \to (a \otimes b) = b$ sii existe $c \in L$ tal que $a \to c = b$

demostración

1)

1. $a \to 1 \leq 1$

2. $1 \otimes a \leq 1$

3. $1 \leq a \to 1$ de 2. por 3

4. $1 = a \to 1$

2)

i)

1. $a \to b \leq a \to b$
2. $(a \to b) \otimes a \leq b$ — de 1. por 3
3. $a \otimes (a \to b) \leq b$ — de 2.

ii)

1. $a \otimes b \leq a \otimes b$
2. $b \otimes a \leq a \otimes b$ — de 1.
3. $b \leq a \to (a \otimes b)$ — de 2. por 3

3)

1. $a \leq b$
2. $b \leq c \to (b \otimes c)$ — por 2-ii)
3. $a \leq c \to (b \otimes c)$ — de 2. y 1.
4. $a \otimes c \leq b \otimes c$ — de 3. por 3

4)

i)

1. $a \leq b$
2. $c \otimes (c \to a) \leq a$ — por 2-i)
3. $c \otimes (c \to a) \leq b$ — de 1. y 2.
4. $c \to a \leq c \to b$ — de 3. por 3

ii)

1. $a \leq b$
2. $a \otimes (b \rightarrow c) \leq b \otimes (b \rightarrow c)$ por 3)
3. $a \otimes (b \rightarrow c) \leq c$ de 2. por 2-i)
4. $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ de 3. por 3

5)

1. $a \otimes (a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \leq b \otimes (b \rightarrow c)$ por 2-i)
2. $b \otimes (b \rightarrow c) \leq c$ por 2-i)
3. $a \otimes ((a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c)) \leq c$ de 2. y 3.
4. $(a \rightarrow b) \otimes (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$ de 3. por 3

6)

1. $b \leq a \rightarrow (a \otimes b)$ por 2-ii)
2. $c \leq a \rightarrow (a \otimes c)$ por 2-ii)
3. $a \rightarrow (a \otimes b) \leq a \rightarrow ((a \otimes b) \vee (a \otimes c))$ por 4-i)
4. $a \rightarrow (a \otimes c) \leq a \rightarrow ((a \otimes b) \vee (a \otimes c))$ por 4-i)
5. $b \vee c \leq a \rightarrow ((a \otimes b) \vee (a \otimes c))$ de 1., 2., 3. y 4.
6. $a \otimes (b \vee c) \leq (a \otimes b) \vee (a \otimes c)$ de 5. por 3
7. $a \otimes b \leq a \otimes (b \vee c)$ por 3)
8. $a \otimes c \leq a \otimes (b \vee c)$ por 3)
9. $(a \otimes b) \vee (a \otimes c) \leq a \otimes (b \vee c)$ de 7. y 8.
10. $(a \otimes b) \vee (a \otimes c) = a \otimes (b \vee c)$ de 6. y 9.

7)

1. $a \otimes (b \wedge c) \leq a \otimes b$ por 3)
2. $a \otimes (b \wedge c) \leq a \otimes c$ por 3)
3. $a \otimes (b \wedge c) \leq (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$ de 1. y 2.

8)

1. $b \wedge c \leq c$
2. $a \rightarrow (b \wedge c) \leq a \rightarrow c$ por 4-i)
3. $b \wedge c \leq b$
4. $a \rightarrow (b \wedge c) \leq a \rightarrow b$ por 4-i)
5. $a \rightarrow (b \wedge c) \leq (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$ de 2. y 4.
6. $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \leq a \rightarrow b$
7. $a \otimes ((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)) \leq a \otimes (a \rightarrow b)$ de 6. por 3)
8. $a \otimes (a \rightarrow b) \leq b$ por 2-i)
9. $a \otimes ((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)) \leq b$ de 6.,7. y 8.
10. $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \leq a \rightarrow b$ de 9. por 3
11. $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$
12. $a \otimes ((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)) \leq a \otimes (a \rightarrow c)$ de 6. por 3)
13. $a \otimes (a \rightarrow b) \leq c$ por 2-i)
14. $a \otimes ((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)) \leq c$ de 6.,7. y 8.
15. $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$ de 9. por 3
16. $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) = a \rightarrow c$ de 9. y 15.

9)

1. $a \leq a \vee b$

2. $(a \vee b) \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ por 4-ii)

3. $b \leq a \vee b$

4. $(a \vee b) \rightarrow c \leq b \rightarrow c$ por 4-ii)

5. $(a \vee b) \rightarrow c \leq (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$ de 2. y 4.

6. $((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \otimes (a \vee b) = (((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \otimes a) \vee (((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \otimes b)$ por 6)

7. $a \otimes ((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \leq a \otimes (a \rightarrow c)$

8. $b \otimes ((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \leq b \otimes (b \rightarrow c)$

9. $a \otimes (a \rightarrow c) \leq c$ por 2-i)

10. $b \otimes (b \rightarrow c) \leq c$ por 2-i)

11. $((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \otimes (a \vee b) \leq (c \vee c)$ de 6.,7.,8.,9. y 10.

12. $((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \leq (a \vee b) \rightarrow c$ de 11. por 3

13. $(a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$ de 5. y 12.

10)

1. $(a \otimes b) \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c)) = b \otimes (a \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c)))$

2. $(a \otimes b) \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \leq b \otimes (b \rightarrow c)$ de 1. por 2-i)

3. $(a \otimes b) \otimes (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \leq c$ de 2. por 2-i)

4. $a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \otimes b) \rightarrow c$ de 3. por 3

5. $(a \otimes b) \otimes ((a \otimes b) \rightarrow c) \leq c$ por 2-i)

6. $a \otimes ((a \otimes b) \rightarrow c) \leq b \rightarrow c$ de 5. por 3

7. $(a \otimes b) \rightarrow c \leq a \rightarrow (b \rightarrow c)$ de 6. por 3

8. $(a \otimes b) \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c)$ de 4. y 7.

11)

1. $a \to (b \to c) = (a \otimes b) \to c$ — por 10)
2. $(a \otimes b) \to c = (b \otimes a) \to c$
3. $(b \otimes a) \to c = b \to (a \to c)$ — por 10)
4. $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$ — de 1. 2. y 3.

12)

1. $a \to c \leq (a \wedge b) \to c$ — por 4-ii
2. $b \to c \leq (a \wedge b) \to c$ — por 4-ii
3. $(a \to c) \vee (b \to c) \leq (a \wedge b) \to c$ — de 1. y 2.

13)

1. $a \to b \leq a \to (b \vee c)$ — por 4-i)
2. $a \to c \leq a \to (b \vee c)$ — por 4-i)
3. $(a \to b) \vee (a \to c) \leq a \to (b \vee c)$ — de 1. y 2.

14)

$\Rightarrow$

trivial

$\Leftarrow$

1. $a \otimes c = b$ — hip.
2. $a \otimes (a \to b) \leq b$ — 2-i)
3. $c \leq a \to b)$ — de 1. por 3
4. $a \otimes c \leq a \otimes (a \to b)$ — de 3. por 3)
5. $b \leq a \otimes (a \to b)$ — de 1. y 4.

6. $a \otimes (a \to b) = b$ de 2. y 5.

15)

$\Rightarrow$

trivial

$\Leftarrow$

1. $a \to c = b$ hip.
2. $a \otimes b \leq a \otimes b$
3. $b \leq a \to (a \otimes b)$ de 2. por 3
4. $a \otimes b \leq c$ de 1. por 3
5. $a \to (a \otimes b) \leq a \to c$ de 4. por 4-i)
6. $a \to (a \otimes b) \leq b$ de 1. y 5.
7. $a \to (a \otimes b) = b$ de 3. y 6.

Observación 2.3

Muchas lógicas admiten la tesis $x \to x$, esto significa que en el reticulado $x \to x = 1$ o, dicho de otro modo, $x \to x$ es el último elemento del reticulado, cualquiera que sea x. Con las condiciones impuestas hasta el momento no es cierto que se verifique en general.

En efecto: consideremos el reticulado L definido por el siguiente diagrama:

Con el producto definido por:

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	b	1
1	0	a	1	1

y el residuo definido por:

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	1	1
b	0	a	b	1
1	0	a	a	1

En este ejemplo no se verifica $x \rightarrow x = 1$, cualquiera que sea $x \in L$.
En efecto: $b \rightarrow b = b$.

Este hecho motiva la siguiente:

Definición 2.2

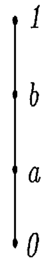
$(L, \leq, \otimes)$ reticulado residual se dice *integral* si el último elemento del reticulado $(L, \leq)$ es la unidad del monoide $(L, \otimes)$.

Observación 2.4

Recordemos que en un reticulado residual $(L, \leq, \otimes)$ existen el 1, último elemento del reticulado $(L, \leq)$ y e la unidad del monoide $(L, \otimes)$. Si $(L, \leq, \otimes)$ es un reticulado residual integral $1 = e$.

Ejemplo 2.5

Veamos un ejemplo de reticulado residual integral:



Con el producto definido por:

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	a	1
1	0	a	b	1

y el residuo según la siguiente tabla:

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	0	1	1	1
b	0	a	b	1
1	0	a	b	1

Veamos ahora cómo caracterizar un reticulado residual integral.

Teorema 2.1

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual, e la unidad de $(L, \otimes)$, 1 el último elemento de $(L, \leq)$ y x un elemento cualquiera en L. Entonces:

a) son equivalentes:

i) $x = e$

ii) $x \leq a \rightarrow b$ si y sólo si $a \leq b$

iii) $a = x \rightarrow a$, cualquiera que sea $a \in L$

b) son equivalentes:

i) $(L, \leq, \otimes)$ es integral

ii) $1 = a \rightarrow b$ si y sólo si $a \leq b$

iii) $a = 1 \rightarrow a$, cualquiera que sea $a \in L$

c) Si existe $c \in L$ tal que $1 \otimes c = e$ entonces $1 = e$

demostración

a)

i) $\Rightarrow$ ii)

1. $x = e$	hip.
2. $e \leq a \rightarrow b$ sii $e \otimes a \leq b$	3
3. $x \leq a \rightarrow b$ sii $a \leq b$	de 1. y 2.

ii) $\Rightarrow$ iii)

1. $a \leq x \rightarrow a$ sii $x \leq a \rightarrow (x \rightarrow a)$	$b = x \rightarrow a$ en ii)
2. $a \rightarrow (x \rightarrow a) = x \rightarrow (a \rightarrow a)$	por lema 2.3.11)
3. $a \leq x \rightarrow a$ sii $x \leq x \rightarrow (a \rightarrow a)$	de 1. y 2.
4. $x \leq x \rightarrow (a \rightarrow a)$ sii $x \leq a \rightarrow a$	por hip.
5. $x \leq a \rightarrow a$ sii $a \leq a$	por hip.
6. $a \leq x \rightarrow a$	de 1. a 5.
7. $x \rightarrow a \leq a$ sii $x \leq (x \rightarrow a) \rightarrow a)$	por hip.
8. $x \leq (x \rightarrow a) \rightarrow a$ sii $x \otimes (x \rightarrow a) \leq a$	por 3

9. $x \otimes (x \rightarrow a) \leq a$ — por lema 2.3.2-i)

10. $x \rightarrow a \leq a$ — de 7. a 9.

11. $x = x \rightarrow a$ — de 6. y 10.

iii) $\Rightarrow$ i)

1. $b = x \rightarrow b$ — hip.
2. $x \rightarrow (x \otimes b) = b$ sii existe b tal que $b = x \rightarrow b$ — por lema 2.3.15)
3. $x \otimes b = x \rightarrow (x \otimes b)$ — por hip., $a = x \otimes b$
4. $x \otimes b = b$ — de 1. 2. y 3.
5. $x = e$ — de 4.

b)

$(L, \leq, \otimes)$ es integral si y sólo si $1 = e$, de donde b) se sigue trivialmente de a)

c)

1. $1 \otimes c = e$ — hip.
2. $1 \otimes (1 \rightarrow e) = e$ — por lema 2.3.14)
3. $1 = e \otimes 1$ — e es unidad de $(L, \otimes)$
4. $1 = (1 \otimes (1 \rightarrow e)) \otimes 1$ — de 2. y 3.
5. $1 = (1 \otimes 1) \otimes (1 \rightarrow e)$ — de 4.
6. $1 \otimes e \leq 1 \otimes 1$ — por lema 2.3.3)
7. $1 \leq 1 \otimes 1$ — de 3. y 6.
8. $1 = 1 \otimes 1$ — de 7.
9. $1 = 1 \otimes (1 \rightarrow e)$ — de 5. y 8.
10. $1 = e$ — de 2. y 9.

Observación 2.5

En todo reticulado residual integral se verifica

1) $a \to a = 1$

2) $1 \to a = a$

3) $0 \to a = 1$

4) $a \otimes b \leq a \wedge b$

5) i) $b \otimes a \leq a$
   ii) $a \otimes b \leq a$

6) $a \leq b \to a$

7) $a \otimes (a \to b) \leq a \wedge b$

8) $a \otimes (b \to c) \leq b \to (a \otimes c)$

9) $((a \wedge b) \to c) \otimes (a \to b) \leq a \to c$

10) $a \to (a \otimes c) \leq a \to c$

En efecto:

1)

1. $1 \otimes a = a$	1 es unidad
2. $1 \leq a \to a$	de 1. por 3
3. $a \to a = 1$	de 2.

2)

1. $a \otimes 1 \leq a$	por $1 = e$
2. $a \leq 1 \to a$	de 1. por 3
3. $1 \to a \leq 1 \to a$	

4. $(1 \to a) \otimes 1 \leq a$ — de 3. por 3

5. $1 \to a \leq a$ — de 4. por $1 = e$

6. $1 \to a = a$ — de 2. y 5.

3)

1. $1 \otimes 0 \leq a$ — $1 = e$
2. $1 \leq 0 \to a$ — de 1. por 3
3. $1 = 0 \to a$ — de 2.

4)

1. $(a \otimes b) \to (a \wedge b) = ((a \otimes b) \to a) \wedge ((a \otimes b) \to b)$ — por lema 2.3.8)
2. $1 \to a \leq b \to a$ — lema 2.3.4-ii)
3. $a \leq b \to a$ — de 2. por teorema 2.1.b-iii)
4. $1 = a \to (b \to a)$ — de 3. por teorema 2.1.b-ii)
5. $a \to (b \to a) = (a \otimes b) \to a$ — lema 2.3.10)
6. $1 = (a \otimes b) \to a$ — de 4. y 5.
7. $1 \to b \leq a \to b$ — lema 2.3.4-ii)
8. $b \leq a \to b$ — de 2. por teorema 2.1.b-iii)
9. $1 = b \to (a \to b)$ — de 3. por teorema 2.1.b-ii)
10. $b \to (a \to b) = (a \otimes b) \to b$ — lema 2.3.10)
11. $1 = (a \otimes b) \to b$ — de 4. y 5.
12. $(a \otimes b) \to (a \wedge b) = 1$ — de 1. 6. y 11.
13. $a \otimes b \leq a \wedge b$ — de 12. por teorema 2.1. b-ii)

5)

i)

1. $b \leq a \rightarrow a$ por 1)

2. $b \otimes a \leq a$ de 1. por 3

ii)

se deduce de la conmutatividad de $\otimes$ y 5i)

6)

1. $a \otimes b \leq a$ de 5-ii)

2. $a \leq b \rightarrow a$ de 1. por 3

7)

1. $a \otimes (a \rightarrow b) \leq b$ lema 2.3.2-i)

2. $a \otimes (a \rightarrow b) \leq a \wedge (a \rightarrow b)$ por 4)

3. $a \otimes (a \rightarrow b) \leq a$ de 2.

4. $a \otimes (a \rightarrow b) \leq (a \wedge b)$ de 1. y 3.

8)

1. $a \otimes b \otimes (b \rightarrow c) \leq a \otimes c$ lema 2.3.2-i)

2. $a \otimes (b \rightarrow c) \otimes b \leq a \otimes c$ de 1.

3. $a \otimes (b \rightarrow c) \leq b \rightarrow (a \otimes c)$ de 2. por 3

9)

1. $a \otimes (a \rightarrow b) \leq a \wedge b$ por 7)

2. $(a \wedge b) \rightarrow c \leq (a \otimes (a \rightarrow b)) \rightarrow c$ de 1. por lema 2.3.4-ii)

3. $((a \rightarrow b) \otimes a) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$ por lema 2.3.10)

4. $((a \wedge b) \to c) \otimes (a \to b) \leq ((a \to b) \to (a \to c)) \otimes (a \to b)$ de 2.y 3.

5. $((a \to b) \to (a \to c)) \otimes (a \to b) \leq (a \to c)$ por lema 2.3.2-i)

6. $((a \wedge b) \to c) \otimes (a \to b) \leq a \to c$ de 4. y 5.

10)

1. $a \otimes c \leq a \wedge c$ por 4)

2. $a \wedge c \leq c$

3. $a \to (a \otimes c) \leq a \to (a \wedge c)$ de 1.

4. $a \to (a \wedge c) \leq a \to c$ de 2.

5. $a \to (a \otimes c) \leq a \to c$ de 3. y 4.

Lema 2.4

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado integral residual. Entonces son equivalentes:

1) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$

2) $a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c)$

3) $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$

demostración

1) $\Rightarrow$ 2)

1. $(b \to c) \vee (c \to b) = 1$ hip.

2. $(a \to (b \vee c)) = ((a \to (b \vee c)) \otimes 1$

3. $(a \to (b \vee c)) = (a \to (b \vee c)) \otimes ((b \to c) \vee (c \to b))$ de 1. y 2.

4. $(a \to (b \vee c)) = ((a \to (b \vee c)) \otimes (b \to c)) \vee ((a \to (b \vee c)) \otimes (c \to b))$ por lema 2.3.6)

5. $(a \to (b \vee c)) \otimes (b \to c) \leq a \to ((b \to c) \otimes (b \vee c))$ por obs.2.5.8)

6. $a \to ((b \to c) \otimes (b \vee c)) = (a \to ((b \to c) \otimes b) \vee (a \to ((b \to c) \otimes c)$ por lema 2.3.6)

7. $a \to ((b \to c) \otimes (b \vee c)) \leq (a \to c) \vee (a \to c)$ de 6. por lema 2.3.2-i)

8. $a \to ((b \to c) \otimes (b \vee c)) \leq (a \to c)$ de 7.

9. $(a \to (b \vee c)) \otimes (c \to b) = (c \to b) \otimes (a \to (b \vee c))$ por conmut.

10. $(c \to b) \otimes (a \to (b \vee c)) \leq a \to ((c \to b) \otimes (b \vee c))$ obs.2.5.8)

11. $(a \to ((c \to b) \otimes b) \vee (a \to ((c \to b) \otimes c)$ 10. por lema 2.3.6)

12. $(a \to (b \vee c)) \otimes (c \to b) \leq (a \to b) \vee (a \to b)$ de 9. a 11.

13. $(a \to (b \vee c)) \otimes (c \to b) \leq (a \to b)$ de 12.

14. $a \to (b \vee c) \leq (a \to b) \vee (a \to c)$ de 4., 8. y 13.

15. $(a \to b) \vee (a \to c) \leq a \to (b \vee c)$ por lema 2.3.13.

16. $a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c)$ de 14. y 15.

2) $\Rightarrow$ 1)

1. $(a \vee b) \to a \leq b \to a$ por lema 2.3.4-ii)

2. $(a \vee b) \to b \leq a \to b$ por lema 2.3.4-ii)

3. $(a \to b) \vee (b \to a) \geq ((a \vee b) \to a) \vee ((a \vee b) \to b)$

4. $((a \vee b) \to a) \vee ((a \vee b) \to b) = (a \vee b) \to (a \vee b)$ por lema 2.3.6)

5. $((a \vee b) \to a) \vee ((a \vee b) \to b) = 1$ de 14. por obs.2.5.1)

6. $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ de 3., 4. y 5.

1) $\Rightarrow$ 3)

1. $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ hip.

2. $(a \wedge b) \to c = ((a \wedge b) \to c) \otimes 1$

3. $(a \wedge b) \to c = ((a \wedge b) \to c) \otimes ((a \to b) \vee (b \to a))$ de 1. y 2.

4. $(a \wedge b) \to c = ((a \wedge b) \to c) \otimes (a \to b)) \vee ((a \wedge b) \to c) \otimes (b \to a))$ de 4. por lema 2.3.4)

5. $((a \wedge b) \to c) \otimes (a \to b) \leq a \to c$ obs.2.5.9)

6. $((a \wedge b) \to c) \otimes (b \to c) \leq b \to c$ obs.2.5.4)

7. $(a \wedge b) \to c \leq (a \to c) \vee (b \to c)$ de 2. 6. y 7.

8. $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$ de lema 2.3.12 y 7.

3) $\Rightarrow$ 1)

1. $(a \to b) \vee (b \to a) \geq a \to (a \wedge b) \vee (b \to (a \wedge b)$ por lema 2.3.4-i)

2. $a \to (a \wedge b) \vee (b \to (a \wedge b) = (a \wedge b) \to (a \wedge b)$ de 1. por hip.

3. $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ de 2. por obs.2.5.1).

Observación 2.6

$(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ Se dice la *ley fuerte de De Morgan.* En un reticulado residual integral que satisface la ley fuerte de De Morgan se verifica:

$(a \wedge b) \to (a \wedge c) = (a \wedge b) \to c$

En efecto:

1. $(a \wedge b) \to (a \wedge c) = ((a \wedge b) \to a) \wedge ((a \wedge b) \to c)$ por lema 2.3.8)

2. $(a \wedge b) \to a = (a \to a) \vee (b \to a)$ por lema 2.4.2)

3. $a \to a = 1$ por obs.2.5.1)

4. $(a \wedge b) \to (a \wedge c) = (a \wedge b) \to c$ de 1. 2. y 3.

Observación 2.7

En un reticulado residual integral que satisface la ley fuerte de De Morgan si se define:

$$\neg a = a \to 0 \tag{10}$$

se tienen las leyes de De Morgan.

1) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

2) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

en efecto:

1)

1. $\neg(a \wedge b) = (a \wedge b) \to 0$ por def.10
2. $\neg(a \wedge b) = (a \to 0) \vee (b \to 0)$ por lema 2.4
3. $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ de 2. por def.10

2)

1. $\neg(a \vee b) = (a \vee b) \to 0$ por def.10
2. $\neg(a \vee b) = (a \to 0) \wedge (b \to 0)$ por lema 2.3.9)
3. $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ de 2. por def.10

Lema 2.5

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual integral que satisface la ley fuerte de De Morgan, entonces:

1) i) $a \otimes b \leq (a \otimes a) \vee (b \otimes b)$
   ii) $(a \otimes a) \wedge (b \otimes b) \leq a \otimes b$

2) $a \otimes (b \wedge c) = (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$

3) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

demostración

1)

i)

1. $(a \otimes b) = (a \otimes b) \otimes ((a \to b) \vee (b \to a)$ por hip.
2. $(a \otimes b) = ((a \otimes b) \otimes (a \to b)) \vee ((a \otimes b) \otimes (b \to a))$ de 1. por 10)
3. $(a \otimes b) \otimes (a \to b) \leq (a \otimes a)$ por lema 2.3.2-i)
4. $(a \otimes b) \otimes (b \to a) \leq (b \otimes b)$ por lema 2.3.2-i)

5. $a \otimes b \leq (a \otimes a) \vee (b \otimes b)$ de 2. 3. y 4.

ii)

1. $(a \otimes a) \wedge (b \otimes b) = ((a \otimes a) \wedge (b \otimes b)) \otimes ((a \to b) \vee (b \to a))$ por hip.
2. $(a \otimes a) \wedge (b \otimes b) = (((a \otimes a) \wedge (b \otimes b)) \otimes (a \to b)) \vee (((a \otimes a) \wedge (b \otimes b)) \otimes (b \to a))$ por lema 2.3.6)
3. $((a \otimes a) \wedge (b \otimes b)) \otimes (a \to b) \leq ((a \otimes a) \otimes (a \to b)$
4. $((a \otimes a) \wedge (b \otimes b)) \otimes (a \to b) \leq a \otimes b$ por lema 2.3.2-i)
5. $((a \otimes a) \wedge (b \otimes b)) \otimes (b \to a) \leq ((b \otimes b) \otimes (b \to a)$
6. $((a \otimes a) \wedge (b \otimes b)) \otimes (b \to a) \leq b \otimes a$ por lema 2.3.2-i)
7. $(a \otimes a) \wedge (b \otimes b) \leq (a \otimes b) \vee (b \otimes a)$ de 2. 5. y 7.
8. $(a \otimes a) \wedge (b \otimes b) \leq (a \otimes b)$ de 7.

2)

1. $(a \otimes (b \wedge c) \leq a \otimes b$
2. $(a \otimes (b \wedge c) \leq a \otimes c$
3. $(a \otimes (b \wedge c) \leq (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$ de 1. y 2.
4. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) = ((a \otimes b) \wedge (a \otimes c)) \otimes ((b \to c) \vee (c \to b))$ por hip.
5. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) = (((a \otimes b) \wedge (a \otimes c)) \otimes ((b \to c)) \vee (((a \otimes b) \wedge (a \otimes c)) \otimes (c \to b))$ de 4. por lema 2.3.6)
6. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) \leq ((a \otimes b) \otimes (b \to c)) \vee ((a \otimes c) \otimes (c \to b))$ de 5.
7. $(a \otimes b) \otimes (b \to c) \leq a \otimes (b \wedge c)$ por obs.2.5.7)
8. $(a \otimes b) \otimes (c \to b) \leq a \otimes (c \wedge b)$ por obs.2.5.7)
9. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) \leq a \otimes (b \wedge c)$ de 6. 7. y 8.
10. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) = a \otimes (b \wedge c)$ de 3.y 9.

3)

1. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$ prop. retic.
2. $(a \wedge (b \vee c)) \to ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) = ((a \wedge (b \vee c)) \to (a \wedge b)) \vee ((a \wedge (b \vee c)) \to (a \wedge c))$ por lema 2.4.2)
3. $(a \wedge (b \vee c)) \to (a \wedge b) = (a \wedge (b \vee c)) \to b$ por obs.2.6
4. $(a \wedge (b \vee c)) \to b \geq (b \vee c) \to b$ por lema 2.3.4-ii)
5. $(a \wedge (b \vee c)) \to (a \wedge c) = (a \wedge (b \vee c)) \to c$ por obs.2.6
6. $(a \wedge (b \vee c)) \to c \geq (b \vee c) \to c$ por lema 2.3.4-ii)
7. $(a \wedge (b \vee c)) \to b \geq ((b \vee c) \to b) \vee ((b \vee c) \to c)$ de 4. y 6.
8. $((b \vee c) \to b) \vee (b \vee c) \to c) = (b \vee c) \to (b \vee c)$ por lema 2.4.2)
9. $(b \vee c) \to (b \vee c) = 1$ por obs.2.5.1)
10. $((a \wedge (b \vee c)) \to ((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) = 1$ de 2. y 9.
11. $((a \wedge (b \vee c)) \leq ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ por teorema 2.1.2-ii)
12. $((a \wedge (b \vee c)) = ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$ de 1. y 11.

Observación 2.8

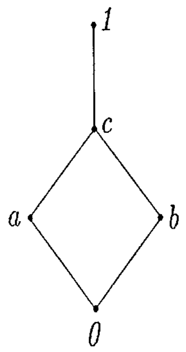
Es decir, según el lema anterior, un reticulado residual integral que satisface la ley fuerte de De Morgan es, necesariamente, distributivo.
La recíproca no es cierta, como se ve en el ejemplo 2.6. En efecto: el reticulado es claramente distributivo pero $(a \to b) \vee (b \to a) = c \neq 1$.

Definición 2.3

Un reticulado residual $(L, \leq \otimes)$ se dice *divisible* si y sólo si para cada par $(a, b) \in L \times L$ con $b \leq a$ existe $c \in L$ tal que $b = a \otimes c$

Ejemplo 2.6

Veamos un ejemplo de reticulado residual divisible:



Con el producto definido por:

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a
b	0	0	b	b	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

y el residuo definido por:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Observación 2.9

Dados $a, b \in L$, con $b \leq a$, puede existir más de un $c \in L$ que verifique $b = a \otimes c$.
En efecto: Consideremos el reticulado del ejemplo 2.6

$$c \leq c < 1$$

$$c = c \otimes c = c \otimes (1 \rightarrow c)$$

$$c = c \otimes 1 = c \otimes (c \rightarrow c)$$

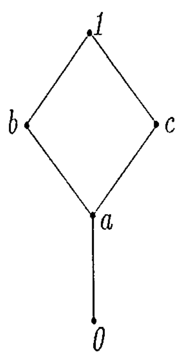
Observación 2.10

Es claro que todo reticulado residual divisible es integral. En efecto:

1. $e \leq 1$
2. $e = 1 \otimes c$, para algún c — de 1. por hip.
3. $e = 1$ — de 2. por teorema 2.1.3)

Observación 2.11

La recíproca no es cierta. Consideremos el siguiente reticulado:



Con el producto definido por:

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	b	b	b
c	0	0	b	b	c
1	0	a	b	c	1

y el residuo definido por:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	a	a	1	1	1
c	a	a	1	1	1
1	0	a	b	c	1

$$a \leq c$$

pero no existe x en L tal que:

$$a = x \otimes c$$

Lema 2.6

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual integral. Entonces son equivalentes:

1) $(L, \leq, \otimes)$ es divisible

2) $a \wedge b = a \otimes (a \to b)$

3) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \otimes ((a \wedge b) \to c)$

demostración:

1) $\Rightarrow$ 2)

1. $a \wedge b \leq a$
2. $a \otimes c = a \wedge b$, para algún c — de 1. por hip.
3. $c = a \to (a \wedge b)$ — de 2. por lema 2.3.14)
4. $a \to (a \wedge b) = (a \to a) \wedge (a \to b)$ — por lema 2.3.8)
5. $a \to a = 1$ — obs.2.5.1)
6. $c = a \to b$ — de 3. 4. y 5.
7. $a \otimes (a \to b) = a \wedge b$ — de 2. y 6.

2) $\Rightarrow$ 3)

1. $a \otimes (a \to b) = a \wedge b$ — hip.
2. $(a \to b) \otimes ((a \wedge b) \to c) = (a \to b) \otimes ((a \otimes (a \to b)) \to c)$ — de 1.
3. $(a \to b) \otimes ((a \otimes (a \to b)) \to c) = (a \to b) \otimes (a \to ((a \to b) \to c))$ — de 2. por lema 2.3.10)
4. $(a \to b) \otimes (a \to ((a \to b) \to c)) = (a \to b) \otimes ((a \to b) \to (a \to c))$ — de 2. por lema 2.3.11)

5. $(a \to b) \otimes ((a \to b) \to (a \to c)) = (a \to b) \wedge (a \to c)$ por hip.

6. $(a \to b) \otimes ((a \to b) \to (a \to c)) = a \to (b \wedge c)$ de 5. por lema 2.3.8)

7. $(a \to b) \otimes ((a \wedge b) \to c) = a \to (b \wedge c)$ de 2. a 6.

3) $\Rightarrow$ 1)

1. $b \leq a$ hip.

2. $(1 \to a) \otimes ((1 \wedge a) \to b) = 1 \to (a \wedge b)$ hip.

3. $a \otimes (a \to b) = (1 \to a) \otimes (a \to b)$ obs.2.5.2)

4. $(1 \to a) \otimes (a \to b) = (1 \to a) \otimes ((1 \wedge a) \to b)$

5. $a \otimes (a \to b) = 1 \to (a \wedge b)$ de 2. 3. y 4.

6. $1 \to (a \wedge b) = 1 \to b$ por 1.

7. $a \otimes (a \to b) = b$ de 5. y 6. por obs.2.5.2)

Lema 2.7

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual divisible, entonces:

1) Si a es idempotente $a \wedge b = a \otimes b$, cualquiera que sea $b \in L$

2) $a \otimes (b \wedge c) = (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$

3) $a \otimes b \leq (a \otimes a) \vee (b \otimes b)$

4) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

demostración

1)

1. $a \otimes a = a$ hip.

2. $a \otimes b \leq a \wedge b$ por obs.2.5.4)

3. $a \wedge b = a \otimes (a \to b)$ por lema 2.6.2)

4. $a \otimes (a \to b) = (a \otimes a) \otimes (a \to b)$ de 1. y 3.

5. $a \otimes (a \otimes (a \to b)) \leq a \otimes b$ por lema 2.3.2-i)

6. $a \wedge b \leq a \otimes b$ de 3. 4. y 5.

7. $a \wedge b = a \otimes b$ de 2. y 6.

2)

1. $a \otimes (b \wedge c) \leq (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$ lema 2.3.7)

2. $a \otimes c \leq a \otimes c$

3. $c \leq a \to (a \otimes c)$ de 2. por 3

4. $(a \to (a \otimes C)) \to b \leq c \to b$ de 3. por lema 2.3.4-ii)

5. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) = (a \otimes b) \otimes ((a \otimes b) \to (a \otimes c))$ lema 2.6.2)

6. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) = a \otimes (b \otimes (b \to (a \to (a \otimes c))))$ de 5. por lema 2.3.10)

7. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) = a \otimes ((a \to (a \otimes c)) \wedge b)$ de 6. por lema 2.6.2)]

8. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) = a \otimes ((a \to (a \otimes c)) \otimes ((a \to (a \otimes c)) \to b))$ de 7. por lema 2.6.2

9. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) \leq (a \otimes c) \otimes (c \to b)$ de 8. por lema 2.3.2-i) y 4.

10. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) \leq a \otimes (b \wedge c)$ de 9. por lema 2.6.2)

11. $(a \otimes b) \wedge (a \otimes c) = a \otimes (b \wedge c)$ de 1. y 10.

3)

1. $a \leq a \vee b$

2. $b \leq a \vee b$

3. $a = c \otimes (a \vee b)$, para algún c de 1. por hip.

4. $b = d \otimes (a \vee b)$, para algún d de 2. por hip.

5. $a \vee b = (c \otimes (a \vee b)) \vee (d \otimes (a \vee b))$ de 3. y 4.

6. $(c \otimes (a \vee b)) \otimes (d \otimes (a \vee b)) = (c \vee d) \otimes (a \vee b)$ por lema 2.3.6)

7. $a \vee b = (c \vee d) \otimes (a \vee b)$ — de 5. y 6.

8. $a \otimes b = (c \otimes (a \vee b)) \otimes (d \otimes (a \vee b))$ — de 3. y 4.

9. $a \otimes b = c \otimes d \otimes ((c \vee d) \otimes (a \vee b)) \otimes (a \vee b)$ — de 7. y 8.

10. $a \otimes b = ((c \otimes d \otimes c) \vee (c \otimes d \otimes d)) \otimes (a \vee b)) \otimes (a \vee b)$ — de 9. por lema 2.3.6)

11. $((c \otimes (a \vee b) \otimes (c \otimes (a \vee b)) \vee ((d \otimes (a \vee b) \otimes (d \otimes (a \vee b))$ — de 10. por lema 2.3.6)

12. $a \otimes b \leq (a \otimes a) \vee (b \otimes b)$ — de 1. 2. y 11.

4)

1. $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

2. $a \wedge (b \vee c) = (b \vee c) \wedge a$

3. $(b \vee c) \wedge a = (b \vee c) \otimes ((b \vee c) \rightarrow a)$ — por lema 2.6.2)

4. $a \wedge (b \vee c) = (b \otimes ((b \vee c) \rightarrow a) \vee (c \otimes ((b \vee c) \rightarrow a)$ — de 3. por lema 2.3.6)

5. $a \wedge (b \vee c) \leq (b \otimes (b \rightarrow a) \vee (c \otimes (c \rightarrow a))$ — de 4. por lema 2.3.2-i)

6. $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ — de 5. por lema 2.6.2)

7. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ — de 1. y 6.

Corolario 2.1

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual. Si L es divisible y satisface la ley fuerte de De Morgan entondes H_M, el conjunto de los elementos idempotentes con respecto al producto, forman un álgebra de Heyting y la implicación en H_M coincide con el residuo del reticulado.

demostración

Recordemos que un álgebra de Heyting es un álgebra $(L, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg)$ donde $\wedge$ y $\vee$ son el ínfimo y el supremo del reticulado y $\neg a = a \rightarrow 0$, verificándose $a \wedge b \leq c$ si y sólo si $a \leq b \rightarrow c$.

Ya que en L se verifica la ley fuerte de De Morgan y es divisible afirmamos, en virtud del lema 2.7, que se trata de un reticulado distributivo.

Sabemos que $\otimes$ es una operación binaria asociativa, conmutativa, isótona e idempotente, por lo tanto $\otimes = \wedge$[4] Es claro, entonces, que $a \wedge b \leq c$ si y sólo si $a \leq b \to c$ en virtud de la condición de cupla adjunta 3.

Sólo resta ver que el conjunto de los idempotentes es cerrado con respecto a las operaciones. Es decir debemos verificar que:

1) $(a \wedge b) \otimes (a \wedge b) = a \wedge b$

2) $(a \vee b) \otimes (a \vee b) = a \vee b$

3) $(a \to b) \otimes (a \to b) = a \to b$

4) $(\neg a) \otimes (\neg a) = \neg a$

En efecto:

Sean a, b elementos idempotentes en L

1)

1. $(a \wedge b) \otimes (a \wedge b) = (a \otimes a) \wedge (a \otimes b) \wedge (b \otimes a) \wedge (b \otimes b)$ por lema 2.7.2)
2. $(a \wedge b) \otimes (a \wedge b) = a \wedge (a \otimes b) \wedge b$ por hip.
3. $(a \wedge b) \otimes (a \wedge b) = a \wedge b$ de 1. y 2. por obs.2.5.4)

2)

1. $(a \vee b) \otimes (a \vee b) = (a \otimes a) \vee (a \otimes b) \vee (b \otimes a) \vee (b \otimes b)$ por lema 2.3.6)
2. $(a \vee b) \otimes (a \vee b) = a \vee (a \otimes b) \vee b$ por hip.
3. $(a \vee b) \otimes (a \vee b) = a \vee b$ de 1. y 2. por obs.2.5.4)

3)

1. $a \otimes b = a \wedge b$ lema 2.7.1)

[4]Sea $(A, \circ, 1)$ un monoide conmutativo en el que todo elemento es idempotente. Entonces, existe una única relación de orden $\leq$ sobre A satisfaciendo $a \wedge b = a \circ b$ y $a \leq 1$. En efecto: Es claro que si tal orden existe $a \leq b$ sii $a \circ b = a$. Luego, si existe, es único.
Tomando la condición anterior como definición de $\leq$, de las propiedades de $(A, \circ, 1)$ se sigue que $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado con último elemento 1. Por otra parte definiendo el orden por $a \leq b$ sii $a \circ b = a$ necesariamente $a \circ b$ es el ínfimo de a y b. Luego, $a \wedge b = a \circ b$ y $a \leq 1$ cualquiera que sea $a \in A$.(Johnstone, [10])

2. $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$ de 1. y lema 2.32-i)

3. $(a \rightarrow b) \vee ((a \rightarrow b) \rightarrow b) = (a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b$ lema 2.4.3)

4. $(a \rightarrow b) \vee ((a \rightarrow b) \rightarrow b) = 1$ de 3. y teorema 2.1.b-ii)

5. $(a \rightarrow b) = ((a \rightarrow b) \otimes (a \rightarrow b)) \vee ((a \rightarrow b) \otimes ((a \rightarrow b) \rightarrow b))$ de 4. y lema 2.3.6)

6. $(a \rightarrow b) \otimes ((a \rightarrow b) \rightarrow b) = (a \rightarrow b) \wedge b$ lema 2.6.2)

7. $(a \rightarrow b) \otimes ((a \rightarrow b) \rightarrow b) = (a \rightarrow b) \otimes b$ lema 2.7.1)

8. $(a \rightarrow b) \otimes ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \leq (a \rightarrow b) \otimes (a \rightarrow b)$ de obs2.5.6) y lema

9. $a \rightarrow b = (a \rightarrow b) \otimes (a \rightarrow b)$ de 5. y 8.

4)

inmediato a partir de 3)

Definición 2.4

$(L, \leq, \otimes)$ reticulado residual integral se llama *integral conmutativo de Girard* si verifica:

$$(a \rightarrow 0) \rightarrow 0 = a \tag{11}$$

Observación 2.12

En la obs.2.7 definimos el operador 1-ario $\neg$. Con esta definición podemos afirmar que $(L, \leq, \otimes)$, reticulado residual integral se llama de Girard si y sólo si la negación es una involución. ya que 11 es equivalente a decir:

$$\neg(\neg a) = a \tag{12}$$

Es claro que no todo reticulado residual integral es de Girard, como se ve en el ejemplo 2.6, donde se verifica:

$$(c \rightarrow 0) \rightarrow 0 = 1$$

Ejemplo 2.7

Consideremos el siguiente reticulado:

Con el producto definido por:

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	a	b
1	0	a	b	1

y el residuo según la siguiente tabla:

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	1	1
b	a	b	1	1
1	0	a	b	1

Lema 2.8

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado integral conmutativo de Girard. Entonces:

1) $a \rightarrow b = (a \otimes (b \rightarrow 0)) \rightarrow 0$

2) $(a \wedge b) \rightarrow 0 = (a \rightarrow 0) \vee (b \rightarrow 0)$

3) $(a \rightarrow 0) \rightarrow (b \rightarrow 0) = b \rightarrow a$

demostración

1)

1. $(a \otimes (b \to 0)) \to 0 = (a \to ((b \to 0) \to 0)$ por lema 2.3.10)
2. $(a \otimes (b \to 0)) \to 0 = a \to b$ de 1. por hip.

2)

1. $((a \to 0) \vee (b \to 0)) \to 0 = ((a \to 0) \to 0) \wedge ((b \to 0) \to 0)$ por ref PR 9)
2. $((a \to 0) \to 0) \wedge ((b \to 0) \to 0) = a \wedge b$ por hip.
3. $(a \wedge b) \to 0 = (a \to 0) \vee (b \to 0)$ de 1. y 2.

3)

1. $(a \to 0) \to (b \to 0) = b \to ((a \to 0) \to 0)$ por lema 2.3.10)
2. $a \to 0) \to (b \to 0) = b \to a$ de 1. por hip.

Lema 2.9

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado integral conmutativo de Girard. Entonces son equivalentes:

a) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$

b) $a \otimes (b \wedge c) = (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$

demostración

1) $\Rightarrow$ 2) Ya probado en lema 2.4

2) $\Leftarrow$ 1)

1. $a \to (b \vee c) = (a \otimes (b \vee c) \to 0) \to 0)$ de lema 2.8.1)

2. $(b \vee c) \rightarrow 0 = (b \rightarrow 0) \wedge (c \rightarrow 0)$ — por lema 2.3.9)

3. $a \rightarrow (b \vee c) = (a \otimes ((b \rightarrow 0) \wedge (c \rightarrow 0)) \rightarrow 0$ — de 1. y 2.

4. $a \rightarrow (b \vee c) = ((a \otimes (b \rightarrow 0)) \wedge (a \otimes (c \rightarrow 0))) \rightarrow 0$ — hip.

5. $a \rightarrow (b \vee c) = (((a \otimes (b \rightarrow 0)) \rightarrow 0) \vee ((a \otimes (c \rightarrow 0))) \rightarrow 0)$ — de 4. por lema 2.4.3)

6. $a \rightarrow (b \vee c) = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$ — de 5. por lema 2.8.1)

Definición 2.5

Un reticulado residual tiene *raíces cuadradas* si y sólo si existe una función S, $S : L \rightarrow L$ tal que satisface:

(s1) $S(a) \otimes S(a) = a$

(s2) $b \otimes b \leq a$ entonces $b \leq S(a)$

Observación 2.13

Es obvio que S está unívocamente determinada por s1 y s2.
en efecto:

1. S satisface s1 y s2
2. S' satisface s1 y s2
3. $S'(a) \otimes S'(a) \leq a$ — por s1 de S'
4. $S'(a) \leq S(a)$ — de 3. por s2 de S
5. $S(a) \otimes S(a) \leq a$ — por s1 de S
6. $S(a) \leq S'(a)$ — de 3. por s2 de S'
7. $S(a) = S'(a)$ — de 4. y 6.

Observación 2.14

Habitualmente suele escribirse $S(a) = \sqrt{a}$

Lema 2.10

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual con raíces cuadradas. Entonces:

1) i) $a \leq \sqrt{a}$

   ii) Si $a \leq b$ entonces $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

2) $\sqrt{a} \otimes \sqrt{b} \leq \sqrt{a \otimes b}$

3) $\sqrt{a \rightarrow b} = \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b}$

4) $\sqrt{a \wedge b} = \sqrt{a} \wedge \sqrt{b}$

demostración

1)

i)

1. $a = \sqrt{a} \otimes \sqrt{a}$ — s1
2. $a \leq \sqrt{a}$ — de 1. por lema 2.5.4)

ii)

1. $a \leq b$ — hip.
2. $\sqrt{a} \otimes \sqrt{a} = a$ — s1
3. $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ — de 2. por s2

2)

1. $(\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) = (\sqrt{a} \otimes \sqrt{a}) \otimes (\sqrt{b} \otimes \sqrt{b})$
2. $(\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) = a \otimes b$ — de 1.
3. $\sqrt{a} \otimes \sqrt{b} \leq \sqrt{a \otimes b}$ — de 2. por s2

3)

1. $a \otimes (\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b}) = \sqrt{a} \otimes (\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b}) \otimes \sqrt{a} \otimes (\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b})$
2. $a \otimes (\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b}) \leq \sqrt{b} \otimes \sqrt{b}$ — de lema 2.3.2-i)

3. $a \otimes (\sqrt{a} \to \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{a} \to \sqrt{b}) \leq b$ de 2. por s1

4. $(\sqrt{a} \to \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{a} \to \sqrt{b}) \leq a \to b$ de 3. por 3

5. $\sqrt{a} \to \sqrt{b} \leq \sqrt{a \to b}$ de 4. por s2

6. $\sqrt{a} \otimes \sqrt{a \to b} \leq \sqrt{a \otimes (a \to b)}$ por 2)

7. $\sqrt{a \otimes (a \to b)} \leq \sqrt{b}$ por lema 2.3.2-i)

8. $\sqrt{a} \otimes \sqrt{a \to b} \leq \sqrt{b}$ de 6. y 7.

9. $\sqrt{a \to b} \leq \sqrt{a} \to \sqrt{b}$ de 8. por 3

10. $\sqrt{a \to b} = \sqrt{a} \to \sqrt{b}$ de 5. y 9.

4)

1. $(\sqrt{a} \wedge \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{a} \wedge \sqrt{b}) = (\sqrt{a} \otimes \sqrt{a}) \wedge (\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \wedge (\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \wedge (\sqrt{b} \otimes \sqrt{b})$ por lema 2.7.2)

2. $(\sqrt{a} \wedge \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{a} \wedge \sqrt{b}) = a \wedge (\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \wedge b$ de 1. por s1

3. $(\sqrt{a} \wedge \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{a} \wedge \sqrt{b}) = a \wedge b$ de 2.

4. $(\sqrt{a} \wedge \sqrt{b}) \leq \sqrt{a \wedge b}$ de 3. por s2

5. $a \wedge b \leq a$

6. $a \wedge b \leq b$

7. $\sqrt{a \wedge b} \leq \sqrt{a}$ por 1-ii)

8. $\sqrt{a \wedge b} \leq \sqrt{b}$ por 1-ii)

9. $\sqrt{a \wedge b} \leq \sqrt{a} \wedge \sqrt{b}$ de 7. y 8.

10. $\sqrt{a \wedge b} = \sqrt{a} \wedge \sqrt{b}$ de 4. y 9.

Corolario 2.2

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual integral conmutativo con raíces cuadradas.
Entonces:
Si $b \leq \sqrt{a} \otimes \sqrt{b}$ entonces $b \leq a$

demostración

1. $b \leq \sqrt{a} \otimes \sqrt{b}$ hip.
2. $\sqrt{b} \otimes (\sqrt{a} \wedge \sqrt{b}) = (\sqrt{b} \otimes \sqrt{a}) \wedge (\sqrt{b} \otimes \sqrt{b})$ por lema 2.7.2)
3. $b \leq \sqrt{a} \otimes \sqrt{b} = b$ de 2. por s1
4. $b = \sqrt{b} \otimes (\sqrt{b} \otimes (\sqrt{b} \to \sqrt{a}))$ de 3. por 2.
5. $b = b \otimes (\sqrt{b} \to \sqrt{a}))$ de 5. por 1)
6. $b \leq (\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \otimes (\sqrt{b} \to \sqrt{a}))$ de 5. por 1)
7. $b \leq \sqrt{a} \otimes \sqrt{a}$ de 6. por lema 2.3.2-i)
8. $b \leq a$ de 7. por s1

Corolario 2.3

Sea $M = (L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual integral conmutativo con raíces cuadradas. Entonces las siguientes relaciones son válidas:

1) $\sqrt{a \otimes b} = ((\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \to \sqrt{0}) \to \sqrt{0}$

2) Si M satisface la ley fuerte de De Morgan, entonces:
$\sqrt{a \vee b} = \sqrt{a} \vee \sqrt{b}$

demostración

1)

1. $\sqrt{a \otimes b} = ((\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \to \sqrt{0}) \to \sqrt{0}$ hip.
2. $((\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \to \sqrt{0}) \to \sqrt{0} = (\sqrt{a} \to (\sqrt{b} \to \sqrt{0})) \to \sqrt{0}$ por lema 2.3.10)
3. $((\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \to \sqrt{0}) \to \sqrt{0} = \sqrt{(a \to (b \to 0)) \to 0}$ por lema 2.10.3)

4. $((\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \to \sqrt{0}) \to \sqrt{0} = \sqrt{((a \otimes b) \to 0) \to 0}$ por lema 2.3.10)

5. $((\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \to \sqrt{0}) \to \sqrt{0} = \sqrt{a \otimes b}$ de 4.

2)

1. $\sqrt{a \vee b} = \sqrt{((a \to 0) \wedge (b \to 0)) \to 0}$ por obs.2.6

2. $\sqrt{a \vee b} = (\sqrt{(a \to 0)} \wedge \sqrt{(b \to 0)}) \to \sqrt{0}$ de 1. por lema 2.10.3)

3. $\sqrt{a \vee b} = (\sqrt{(a \to 0)} \to \sqrt{0}) \vee (\sqrt{(b \to 0)} \to \sqrt{0})$ de 2. por obs.2.5.4)

4. $\sqrt{a \vee b} = \sqrt{(a \to 0) \to 0} \vee \sqrt{(b \to 0) \to 0}$ de 2. por lema 2.10.3)

5. $\sqrt{a \vee b} = \sqrt{a} \vee \sqrt{b}$ de 4.por hip.

Observación 2.15

Existen diferentes formas de definir MV-álgebras, todas ellas equivalentes Dado el contexto en el que estamos trabajando, presentamos la siguiente:

Definición 2.6

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual conmutativo integral. Si L satisface la condición:

$$(a \to b) \to b = a \vee b \tag{13}$$

se dice una *MV-álgebra*

Lema 2.11

Sea $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual conmutativo integral. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $(L, \leq, \otimes)$ es MV- álgebra

2) $(L, \leq, \otimes)$ es reticulado residual divisible de Girard.

demostración

1) $\Rightarrow$ 2)

Probaremos que la negación es involución y que el reticulado es divisible.

1. $(a \to 0) \to 0 = a \vee b$ — por hip.
2. $a \leq b$ — hip.
3. $a \to 0 = (a \to 0) \vee (b \to 0)$ — de 2. por lema 2.3.4-i)
4. $a \to 0) = ((a \to 0) \to (b \to 0)) \to (b \to 0)$ — de 3. por hip.
5. $a \to 0 = (b \to a) \to (b \to 0)$ — de 4. por lema 2.3.11)
6. $a \to 0 = (b \otimes (b \to a)) \to 0$ — de 5. por lema 2.3.10)
7. $a = b \otimes (b \to a)$ — de 6. por 1.
8. $(L, \leq, \otimes)$ es reticulado divisible de Girard — de 1. y 7.

2) $\Rightarrow$ 1)

Sabemos que es reticulado residual integral.
Probaremos la condición 2.6.

1. $(a \vee b) \to 0 = (a \to 0) \wedge (b \to 0)$ — por De Morgan
2. $(a \vee b) \to 0 = (b \to 0) \otimes ((b \to 0) \to (a \to 0))$ — lema2.6.2)
3. $(a \vee b) \to 0 = (b \to 0) \to (a \to b)$ — de lema 2.8.3)
4. $a \vee b = ((a \vee b) \to 0) \to 0$ — por hip.
5. $a \vee b = ((b \to 0) \to (a \to b)) \to 0$ — de 3. y 4.
6. $a \vee b) = (a \to b) \to ((b \to 0) \to 0)$ — por lema 2.3.10)
7. $a \vee b = (a \to b) \to b$ — de 6. por hip.

Lema 2.12

En toda MV-álgebra se verifica:

$$a \rightarrow (a \otimes b) = (a \rightarrow 0) \vee b \tag{14}$$

demostración

1. $(a \rightarrow 0) \vee b = b \vee (a \rightarrow 0)$
2. $(a \rightarrow 0) \vee b = (b \rightarrow (a \rightarrow 0)) \rightarrow (a \rightarrow 0)$
3. $(a \rightarrow 0) \vee b = ((a \otimes b) \rightarrow 0) \rightarrow (a \rightarrow 0)$ — de 2. por lema 2.3.10)
4. $(a \rightarrow 0) \vee b = a \rightarrow ((a \otimes b) \rightarrow 0) \rightarrow 0$ — de 3. por lema 2.3.11)
4. $(a \rightarrow 0) \vee b = a \rightarrow (a \otimes b)$ — de 4.

Corolario 2.4

Toda MV-álgebra satisface la ley fuerte de De Morgan.
demostración

Es claro, en virtud del lema 2.11 que toda MV-álgebra es un reticulado de Girard divisible. Por el lema 2.6 afirmamos que L satisface:

$$a \otimes (b \wedge c) = (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$$

y finalmente, el lema 2.8 asegura que esta propiedad en un reticulado de Girard es equivalente a satisfacer la ley fuerte de De Morgan.

Observación 2.16

Sea $(L, \leq, \otimes)$ una MV- álgebra con raíces cuadradas, entonces en L se verifica:
$\sqrt{a \otimes b} = (\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \vee \sqrt{0}$
demostración

1. $\sqrt{a \otimes b} = ((\sqrt{a \otimes b}) \rightarrow \sqrt{0}) \rightarrow \sqrt{0}$ — por cor.2.3.1)
2. $\sqrt{a \otimes b} = (\sqrt{a} \otimes \sqrt{b}) \vee \sqrt{0}$ — de 1. por hip.

Lema 2.13

Sea $M = (L, \leq, \otimes)$ una MV- álgebra con raíces cuadradas entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) M es álgebra de Boole (esto es $\otimes = \wedge$)

2) $\sqrt{0} = 0$

demostración

1) $\Rightarrow$ 2)
Se verifica trivialmente

2) $\Rightarrow$ 1)

1. $\sqrt{0} = 0$ hip.
2. $a \wedge (a \to 0) = \sqrt{a \wedge (a \to 0)} \otimes \sqrt{a \wedge (a \to 0)}$ s1
3. $a \wedge (a \to 0) \leq \sqrt{a} \otimes \sqrt{a \to 0}$ de 2. por lema 2.10.1)
4. $a \wedge (a \to 0) \leq \sqrt{a \otimes (a \to 0)}$ de 3. por lema 2.10.2)
5. $a \wedge (a \to 0) \leq \sqrt{0}$ de 4. por lema 2.3.2-i)
6. $a \wedge (a \to 0) = 0$ de 1. y 5.
7. $a = a \otimes ((a \to 0) \vee a)$ por 2.6

5. $a = a \otimes a$

Ya que todo elemento es idempotente $\otimes = \wedge$ y, en este caso, se tiene un álgebra de Boole.

3 Casos Particulares

3.1 Álgebra de Lindenbaum

Definición 3.1.1

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formalizado de orden 0 y $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \otimes\}$ el conjunto de símbolos lógicos donde $\neg$ es una operación unaria y las demás son binarias.
Los axiomas lógicos de la *lógica monoidal*(Höhle, [9]) son los siguientes axioma-esquemas:

(SC1) $((a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)))$

(SC2) $(a \rightarrow (a \vee b))$

(SC3) $(b \rightarrow (a \vee b))$

(SC4) $((a \rightarrow c) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c)))$

(SC5) $((a \wedge b) \rightarrow a)$

(SC6) $((a \otimes b) \rightarrow a)$

(SC7) $((a \otimes b) \rightarrow (b \rightarrow a)$

(SC8) $((a \otimes (b \otimes c) \rightarrow ((a \otimes b) \otimes c)$

(SC9) $((c \rightarrow a) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow (a \wedge b))))$

(SC10) $((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \otimes b) \rightarrow c))$

(SC11) $(((a \otimes b) \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c)))$

(SC12) $((a \otimes \neg a) \rightarrow b)$

(SC13) $((a \rightarrow (a \otimes \neg a)) \rightarrow \neg a)$

La única regla de inferencia es *Modus Ponens* MP.
El *cálculo proposicional monoidal SC* es el cálculo proposicional usual basado en los a-xiomas SC1 a SC13.

Escribiremos $\vdash a$ para indicar que a es un teorema de SC.

Lema 3.1.1

Sea SC el cálculo proposicional monoidal. Entonces, para cualquier $a, b, c \in \mathcal{L}$:

1) $\vdash (a \rightarrow a)$

2) $\vdash ((a \otimes (a \rightarrow b)) \rightarrow b)$

3) $\vdash (a \rightarrow (b \rightarrow (b \otimes a)))$

4) Si $\vdash a$, entonces $\vdash (b \rightarrow (b \rightarrow a))$

5) $\vdash (a \rightarrow (b \rightarrow a))$

6) $\vdash ((b \rightarrow c) \rightarrow ((a \otimes b) \rightarrow (a \otimes c)))$

Definición 3.1.2

Dados $a, b, \in \mathcal{L}$ definimos una relación de orden en $\mathcal{L}$ por:

$$a \rhd b \qquad \text{si y sólo si} \qquad \vdash (a \to b)$$

En virtud de la ley de silogismo y el lema 3.1.1.1) afirmamos que es, en efecto, una relación de orden.

Definición 3.1.3

Dados $a, b, \in \mathcal{L}$ definimos una relación de equivalencia en $\mathcal{L}$ por:

$$a \sim b \qquad \text{si y sólo si} \qquad \vdash (a \to b) \text{ y } \vdash (b \to a)$$

Sea:

$$L = \mathcal{L}/\sim$$

el conjunto de todas las clases de fórmulas lógicamente equivalentes en $\mathcal{L}$. En particular $\rhd$ induce una relación de orden $\preceq$ en L y, en virtud de esto, $(L, \preceq)$ es un reticulado con último elemento $1 = \{a \in L : \vdash a\}$. Vemos también que el símbolo lógico $\otimes$ define una operación $\star$ en L del siguiente modo:

$$[a] \star [b] = [a \otimes b], \text{ donde } a \in [a], b \in [b]$$

y a partir de los axiomas y el lema 3.1.1.4) podemos concluir que $(L, \preceq, \star)$ es un reticulado integral residual conmutativo.
$(L, \preceq, \star)$ se dice el *álgebra de Lindenbaum* del cálculo proposicional monoidal.

Observación 3.1.1

1) Si agregamos al sistema de axiomas lógicos la *ley de idempotencia*, es decir el axioma-esquema:

(SC14) $(a \to (a \otimes a))$

Entonces los símbolos lógicos $\otimes$ y $\wedge$ son lógicamente equivalentes y el álgebra de Lindenbaum es un álgebra de Heyting.

2) Si agregamos al sistema de axiomas lógicos la *ley de doble negación*, es decir el axioma-esquema:

(SC15) $(\neg\neg a \to a)$

Entonces el álgebra de Lindenbaum es un reticulado de Girard integral conmutativo y obtenemos la *lógica lineal*(Girard, [8]).

3) Si agregamos al sistema de axiomas lógicos la *ley de doble negación* y la *ley de divisibilidad*, es decir los axioma-esquemas:

(SC15) $(\neg\neg a \rightarrow a)$

(SC16) $((a \wedge b) \rightarrow (a \otimes (a \rightarrow b)))$

Entonces el álgebra de Lindenbaum es un reticulado de Girard integral conmutativo divisible , es decir una MV-álgebra y encontramos los *axiomas de Wajsberg* de la *lógica de Lukasiewcz.*

5) Si agregamos al sistema de axiomas lógicos la *ley de idempotencia*, la *ley de doble negación* y la *ley de divisibilidad*, es decir los axioma-esquemas:

(SC14) $(a \rightarrow (a \otimes a))$

(SC15) $(\neg\neg a \rightarrow a)$

(SC16) $((a \wedge b) \rightarrow (a \otimes (a \rightarrow b)))$

Entonces el álgebra de Lindenbaum es un álgebra de Boole y el conjunto de axiomas constituye los *axiomas del cálculo proposicional clásico* .

3.2 Álgebra de De Morgan

Definición 3.2.1

Un *álgebra de De Morgan*

$$\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \neg, 1)$$

es un reticulado distributivo con unidad $(A, \wedge, \vee, 1)$ munido de una operación unaria $\neg$ tal que se satisfacen las leyes de De Morgan 2.6

Un ejemplo característico de álgebra de De Morgan es el intervalo $[0, 1]$ con las operaciones definidas clásicamente. Es decir

$a \wedge b = min(a, b)$

$a \vee b = max(a, b)$

$\neg a = 1 - a$

Observación 3.2.1 Cupla adjunta para el álgebra de De Morgan

Un álgebra de De Morgan no tiene implicación definida y por lo tanto no aparece naturalmente la noción de cupla adjunta. Suele definirse en forma análoga a la implicación que aparece en un ágebra de Boole para la lógica clásica como:

$$a \rightarrow b = \neg a \vee b \tag{15}$$

considerando, al igual que en el álgebra de Boole para la lógica clásica, el ínfimo como producto. Definido de este modo, en general, no satisface la condición de cupla adjunta 3.
En efecto:
consideremos en $L = [0,1]$ $\quad x = 0.7, y = 0.5, z = 0.6$
$x \wedge y = min(0.7, 0.5) = 0.5 < z$
$y \rightarrow z = \neg y \vee z = (1-y) \vee z = max(0.5, 0.6) = 0.6 \not\geq x$
Luego, el álgebra de De Morgan con $(\wedge, \neg a \vee b)$ no constituye un reticulado residual.

Pero, según lo visto en el lema 2.1 si el producto $\otimes$ respeta los supremos, es decir, si satisface:

$$a \otimes (\bigvee_{i \in I} t_i) = \bigvee_{i \in I}(a \otimes t_i)$$

siempre es posible hallar una cupla adjunta definiendo el residuo de acuerdo con 7 por:

$$x \rightarrow y = \bigvee\{t : x \otimes t \leq y\} \tag{16}$$

Dualmente, según lo visto en el lema 2.2 si el residuo $\rightarrow$ respeta los ínfimos, es decir, si satisface:

$$a \rightarrow (\bigwedge_{i \in I} t_i) = \bigwedge_{i \in I}(a \rightarrow t_i)$$

siempre es posible hallar una cupla adjunta definiendo el producto de acuerdo con 9 por:

$$x \otimes y = \bigwedge\{t : x \leq y \rightarrow t\} \tag{17}$$

Si construímos el residuo $\rightarrow$ mediante la fórmula 16 considerando a $\otimes = \wedge$ es claro, en virtud del corolario 2.1, que la estructura del reticulado residual obtenido será un álgebra de Heyting.

Por otra parte, si definimos $\otimes$ a partir de la implicación más usual en álgebras de De Morgan (15) según 17 obtenemos un reticulado residual no integral.

En efecto:
Sabemos que al obtener la cupla adjunta tenemos un reticulado residual. Es fácil ver que en general $a \to a \neq 1$ y en consecuencia el último elemento del reticulado no coincide con la unidad del monoide.
Si se diera el caso, con la implicación definida por $a \to b = \neg a \vee b$, de $a \to a = 1$ para todo a en el reticulado lo que está ocurriendo es que para todo a en el reticulado se verifica $a \vee \neg a = 1$ y nos encontramos en un álgebra de Boole.

3.3 T-normas

Definición 3.3.1

Una *T-norma*[5] (Schweizer and Sklar, [16], [17]), es una operación binaria definida sobre el intervalo real $[0,1]$ que satisface:

1) $T(x,1) = x, \quad T(x,0) = 0$

2) $T(x,y) = T(y,x)$

3) Si $x \leq x', y \leq y'$ entonces $T(x,y) \leq T(x',y')$

4) $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z)$

Es decir, es una operación binaria sobre $[0,1]$ que es conmutativa, asociativa, isótona, con unidad y elemento nulo. [6]
Se plantea, naturalmente, la cuestión de determinar si el monoide $([0,1], T, \leq)$, donde $\leq$ es el orden natural de R, es un reticulado residual.
Para ello debe existir una operación binaria $\to$ en $[0,1]$ satisfaciendo:

$$aTb \leq c \qquad \text{si y sólo si} \qquad a \leq b \to c$$

es decir, una cupla adjunta donde $\otimes = T$ [7]

De acuerdo al lema 6 para que $([0,1], \leq, T)$ sea un reticulado residual conmutativo T debe respetar los supremos, es decir:

$$T(a, \bigvee_{x\in[0,1]} x) = \bigvee_{x\in[0,1]} T(a,x)$$

[5]Una operación $\star : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ se dice una *norma triangular* si es asociativa, conmutativa y no decreciente en ambas variables. Será una *T-norma* si y sólo si tiene como identidad el 1, y una *T-conorma* si y sólo si tiene como identidad el 0. (Drewniak, [7])

[6]En la mayoría de los trabajos sobre lógica fuzzy y sus aplicaciones los operadores que se consideran son las llamadas T-normas y T-conormas (denominación proveniente de la teoría de espacios métricos probabilísticos), que permiten, al operar sobre los valores de las funciones características de los conjuntos difusos, obtener la intersección y la unión de éstos. Zadeh en su trabajo original toma el mínimo como T-norma y el supremo como T-conorma

[7]algunos autores llaman a esta residuo quasi inversa de T (Turunen, [19]).

es decir, T debe ser una T-norma continua a izquierda.

Observación 3.3.1

Si $([0,1], \leq, T)$ es reticulado residual, entonces es un reticulado residual integral de Girard y el residuo está dado por:

$$a \rightarrow b = -T(a, -b) \tag{18}$$

En efecto:

Suponemos que T es continua a izquierda y por lo tanto existe el residuo definido por 7. Por def.3.3.11) y 2) el elemento neutro para T coincide con el último elemento de $[0,1]$ como reticulado y, en consecuencia se trata de un reticulado residual integral.
En $[0,1]$ se define habitualmente $\neg a = 1 - a$ y se nota $-a$. Se ve claramente que esta negación es involutiva y, por lo tanto se trata de un reticulado de Girard.
En virtud del lema 2.8.1)definimos el residuo por 18

Ejemplo 3.3.1

Los operadores T-norma más habituales en la literatura son:

el mínimo u operador de Zadeh:
$T_a(x,y) = min(x,y)$,

el producto aritmético u operador de Mandani:
$T_c(x,y) = x.y$,

y el producto acotado u operador de Lukasiewicz:
$T_m(x,y) = (x + y - 1) \vee 1$.

3.4 Ecuaciones con relaciones fuzzy

Definición 3.4.1

Sea E un conjunto clásico. U, V subconjuntos de E, $(L, \leq, \otimes)$ un reticulado residual generalizado y $\mu_R : U \times V \rightarrow L$ una función. Entonces R se dice una *relación fuzzy* en $U \times V$.
Análogamente al caso clásico se define $R^{-1} \subseteq V \times U$ por $\mu_R^{-1}(v,u) = \mu_R(u,v)$

Definición 3.4.2

Sea E un conjunto clásico. U, V, W, X subconjuntos de E y R, S_1, S_2, T relaciones difusas tales que: $R \subseteq U \times V, S_1, S_2 \subseteq V \times W, T \subseteq W \times X$ entonces:

1) $S_1 \leq S_2$ si $\mu_{S_1}(v,w) \leq \mu_{S_2}(v,w)$ cualesquiera que sean $v \in V, w \in W$

2) la max-$\otimes$-composición $\odot$ de R con S se define por:

$$R \odot S(u,w) = \bigvee_{v \in V} (R(u,v) \otimes S(v,w)), \qquad u \in U, w \in W \tag{19}$$

3) el residuo $\Rightarrow_1$ de S con T se define por:

$$S \Rightarrow_1 T(u,v) = \bigwedge_{w \in W} (S(v,w) \rightarrow_1 T(u,w)), \qquad u \in U, v \in V \tag{20}$$

4) el residuo $\Rightarrow_2$ de R con T se define por:

$$R \Rightarrow_2 T(v,w) = \bigwedge_{u \in U} (R(u,v) \rightarrow_2 T(u,w)), \qquad u \in U, v \in V \tag{21}$$

Observación 3.4.1

Sea E un conjunto clásico. U, V, W, X subconjuntos de E y R, S_1, S_2, T relaciones difusas tales que: $R \subseteq U \times V, S_1, S_2 \subseteq V \times W, T \subseteq W \times X$. Entonces:
$\odot$ es asociativa e isótona en ambas variables.
$\Rightarrow_1, \Rightarrow_2$ son isótonas en la primera variable y antítonas en la segunda.
En efecto:

$R \odot (S \odot T) = (R \odot S) \odot T$

1. $R \odot (S \odot T)(u,v) = \bigvee_{v \in V}((R(u,v) \otimes (\bigvee_{w \in W}(S(v,w) \otimes T(w,x))$
2. $\bigvee_{v \in V}((R(u,v) \otimes (\bigvee_{w \in W}(S(v,w) \otimes T(w,x)) = \bigvee_{w \in W}(\bigvee_{v \in V}(R(u,v) \otimes (S(v,w))) \otimes T(w,x))$
3. $\bigvee_{w \in W}(\bigvee_{v \in V}(R(u,v) \otimes (S(v,w))) \otimes T(w,x)) = (R \odot S) \odot T(u,x)$
4. $R \odot (S \odot T) = (R \odot S) \odot T$ de 1. a 3.

Si $S_1 \leq S_2$, entonces $R \odot S_1 \leq R \odot S_2$

1. $S_1 \leq S_2$ hip.
2. $\bigvee_{v \in V}(R(u,v) \otimes S_1(v,w)) \leq \bigvee_{v \in V}(R(u,v) \otimes S_2(v,w)) u \in U, w \in W$
3. $R \odot S_1 \leq R \odot S_2$ de 2.

Las restantes demostraciones son análogas.

Lema 3.4.1

Sea E un conjunto clásico. U, V, W subconjuntos de E y R, S, T relaciones difusas tales que: $R \subseteq U \times V, S \subseteq V \times W, T \subseteq X \times W$. Entonces:

1) $R \odot S \leq T$ si y sólo si $R \leq S \Rightarrow_1 T$

2) $R \odot S \leq T$ si y sólo si $S \leq R \Rightarrow_2 T$

demostración

1)

1. $R \odot S \leq T$
2. $\bigvee_{v \in V}(R(u,v) \otimes S(v,w)) \leq T(u,w), \quad u \in U, w \in W$
3. $R(u,v) \otimes S(v,w) \leq T(u,w), \quad u \in U, v \in V, w \in W$
4. $(R(u,v) \leq S(v,w) \rightarrow_1 T(u,w) \quad , u \in U, v \in V, w \in W$
5. $(R(u,v) \leq \bigwedge_{w \in W}(S(v,w) \rightarrow_1 T(u,w)), \quad u \in U, v \in V$
6. $R(u,v) \leq S(v,w) \Rightarrow_1 T(v,w)$

2)

1. $R \odot S \leq T$
2. $\bigvee_{v \in V}(R(u,v) \otimes S(v,w) \leq T(u,w), \quad u \in U, w \in W$
3. $(R(u,v) \otimes S(v,w) \leq T(u,w), \quad u \in U, v \in V, w \in W$
4. $(S(v,w) \leq R(u,v) \rightarrow_2 T(u,w), \quad u \in U, v \in V, w \in W$
5. $(S(v,w) \leq \bigwedge_{w \in W}(R(u,v) \rightarrow_2 T(u,w)), \quad u \in U, v \in V$
6. $S(v,w) \leq R(u,v) \Rightarrow_2 T(u,w)$

Corolario 3.4.1

1) $(S \rightarrow_1 T) \odot S \leq T$

2) $R \odot (R \Rightarrow_2 T) \leq T$

Lo que hemos demostrado en este lema es que $(\odot, \Rightarrow_1)$ y $(\odot, \Rightarrow_2)$ son cuplas adjuntas para el reticulado $\mathcal{R}_f$ de las relaciones fuzzy. No hemos afirmado que tiene estructura de reticulado residual generalizado dado que $(\mathcal{R}_f, \odot)$ no constituye un monoide en general.

Observación 3.4.2

Si $\otimes$ es conmutativa, entonces:

1) $(R \odot S)^{-1} = S^{-1} \odot R^{-1}$

2) $R \Rightarrow_2 T = (R^{-1} \Rightarrow_1 T^{-1})^{-1}$

En efecto:
Si $\otimes$ es conmutativa, en virtud de obs.2.1 podemos afirmar $\rightarrow_1 = \rightarrow_2$ y la demostración es trivial.

Teorema 3.4.1

La ecuación en relaciones fuzzy

$$X \odot S = T$$

tiene solución X si y sólo si $S \Rightarrow_1 T$ es solución. Si $S \Rightarrow_1 T$ es solución, entonces es la mayor.
demostración

Es claro que si $S \Rightarrow_1 T$ es solución la ecuación tiene solución. Veamos que es la máxima.

1. $R \odot S = T$ hip.
2. $R \leq S \Rightarrow_1 T$ de 1. por 3

Supongamos ahora que $X \odot S = T$ tiene solución. Sea R tal solución.

1. $R \odot S = T$ hip.
2. $R \leq S \Rightarrow_1 T$ de 1. por 3
3. $R \odot S \leq (S \Rightarrow_1 T) \odot S$ de 1. y 2.
4. $(S \Rightarrow_1 T) \odot S = T$ de 3. por cor.3.4.1.1)

Teorema 3.4.2

La ecuación fuzzy

$$X \odot S = T$$

tiene solución para cualquier $T \subseteq U \times W$ si y sólo si $(S \Rightarrow_1 I) \odot S = I$, donde $I \subseteq W \times W$ está definida por $\mu_I(w_1, w_2) = 1$ si $w_1 = w_2$ y $\mu_I(w_1, w_2) = 0$ en cualquier otro caso.
demostración

$\Rightarrow$

1. $X \odot S = I$ tiene solución	hip.
2. $(S \Rightarrow_1 I) \odot S = I$	de 1. y teo.3.4.1

$\Leftarrow$

1. $X \odot S = I$ tiene solución	hip.
2. $X \odot S = T \odot I$	I es neutro
3. $X \odot S = T \odot ((S \Rightarrow_1 I) \odot S)$	de 2. por 1.
4. $T \odot (S \Rightarrow_1 I)$ es solución	de 3.

Dualmente enunciamos los siguientes teoremas:

Teorema 3.4.3

La ecuación en relaciones fuzzy

$$R \odot Y = T$$

tiene solución Y si y sólo si $R \Rightarrow_2 T$ es solución. Si $R \Rightarrow_2 T$ es solución, entonces es la mayor.

Teorema 3.4.4

La ecuación fuzzy

$$R \odot Y = T$$

tiene solución para cualquier $T \subseteq U \times W$ si y sólo si $R \odot (R \Rightarrow_2 I) = I$, donde $I \subseteq U \times U$ está definida por $\mu_I(u_1, u_2) = 1$ si $u_1 = u_2$ y $\mu_I(u_1, u_2) = 0$ en cualquier otro caso.

E. Sanchez [15] estudió este problema para el caso $([0,1], \leq, \wedge)$ definiendo el residuo como el operador 2-ario α del siguiente modo:

$$x\alpha y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$$

Probó, entonces, que:

1) $X \circ S = T$ tiene solución si y sólo si $(S\alpha T^{-1})^{-1}$ es solución, y si existe es la máxima. (def.3.4.2 y teo.3.4.1)

2) $R \circ Y = T$ tiene solución si y sólo si $(R^{-1}\alpha T)$ es solución, y si existe es la máxima.(def.3.4.2 y teo.3.4.3)

Ejemplo 3.4.1

Sean los conjuntos clásicos:

$X = \{x_1, x_2\}$

$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$

$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$

Y las relaciones difusas $R \subseteq Y \times Z, S \subseteq X \times Y$ definidas por:

R	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0.3	0.2	0.1	1
y_2	0.4	0.5	0.6	0.3
y_3	0.2	0.1	0.3	0.8

Q	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0.3	0.2	0.3	0.8
x_2	0.4	0.5	0.5	0.7

Consideremos la ecuación $X \odot R = S$.
Esta ecuación tiene solución si y sólo si $T = (R\alpha S^{-1})^{-1}$ es solución.

T	y_1	y_2	y_3
x_1	0.8	0.2	1
x_2	0.7	0.5	0.7

Se verifica fácilmente que $(R\alpha S^{-1})^{-1}$ es solución de la ecuación $X \odot R = S$. También es solución la relación Q definida por:

Q	y_1	y_2	y_3
x_1	0.6	0.2	0.8
x_2	0.2	0.5	0.7

4 Álgebras implicativas

Definición 4.0.3

Un álgebra abstracta $(A, 1, \rightarrow)$, donde 1 es una operación 0-aria y $\rightarrow$ es una operacíon 2-aria, se dice un *álgebra implicativa* si: (Rasiowa, [13])

a1) $a \rightarrow a = 1$

a2) Si $a \rightarrow b = 1, b \rightarrow c = 1$, entonces $a \rightarrow c = 1$

a3) Si $a \rightarrow b = 1, b \rightarrow a = 1$ entonces $a = b$

a4) $a \rightarrow 1 = 1$

Definición 4.0.4

Un álgebra abstracta $(A, 1, \rightarrow)$, donde 1 es una operación 0-aria y $\rightarrow$ es una operación 2-aria, se dice un *álgebra implicativa positiva* si:

p1) $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$

p2) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$

p3) Si $a \rightarrow b = 1, b \rightarrow a = 1$ entonces $a = b$

p4) $a \rightarrow 1 = 1$

Observación 4.0.3

Por obs.2.5 es claro que dado $(L, \leq, \otimes)$ reticulado residual integral, $(L, 1, \rightarrow)$, donde 1 es el neutro del monoide y $\rightarrow$ el residuo de $\otimes$, es un álgebra implicativa positiva.
En efecto:
Veamos que se satisfacen p1, p2, p3 y p4:

p1)

1. $a = 1 \rightarrow a$
2. $1 \rightarrow a \leq b \rightarrow a$ — de 1. por teorema 2.3.b-ii)
3. $1 = a \rightarrow (b \rightarrow a)$ — de 2. por 3

p2)

1. $b \leq a \rightarrow b$ — de obs.2.5.6)
2. $b \rightarrow (a \rightarrow c) \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$ — de 2. por lema 2.3.4-ii)
3. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \geq (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow c))$ — de
4. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \geq ((a \otimes b) \rightarrow c)) \rightarrow ((b \otimes a) \rightarrow c))$ de 3. por lema 2.3.10)
5. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \geq 1$ — de 4. por obs.2.5.1)
6. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$ — de 5.

p3)

1. $a \rightarrow b = 1$ — hip.
2. $b \rightarrow a = 1$ — hip.
3. $a \leq b$ — de 1. por teorema 2.1.b-ii)
4. $b \leq a$ — de 1. por teorema 2.1.b-ii)
5. $a = b$ — de 3. y 4.

p4)

1. $a \to 1 = 1$ lema 2.3.1)

Sea $(A, 1, \to)$ un álgebra implicativa, que con una adecuada definición de $\leq$ resultará un conjunto ordenado con último elemento 1. Veamos qué condiciones se requieren para que exista un cupla adjunta.

Dado el teorema 2.1 sabemos que en el caso de encontrar un producto $\otimes$ tal que $(\otimes, \to)$ sea cupla adjunta el reticulado deberá, necesariamente, ser integral, y la relación de orden, en virtud del teorema 2.1.b-ii) deberá satisfacer:

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \to b = 1$$

Por la definición de álgebra implicativa se ve fácilmente que así definida $\leq$ es una relación de orden en A (Rasiowa, [13]) y el 1 es el último elemento.

Lema 4.0.2

Si en un álgebra implicativa se satisfacen:

c1) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$

c2) $(a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b)) = 1$

c3) $1 \to a = a$

entonces $\to$ satisface:

1) Si $a \leq b$ entonces $a \to c \geq b \to c$

2) Si $a \leq b$ entonces $c \to a \leq c \to a$

demostración

1)

1. $a \leq b$ hip.

2. $(a \to b) \to ((b \to) \to (a \to c)) = 1$

3. $1 \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$

4. $(b \to c) \to (a \to c) = 1$

5. $b \to c \leq a \to c$

2)

1. $a \leq b$

2. $(a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b)) = 1$

3. $1 \to ((c \to a) \to (c \to b))$

4. $(c \to a) \to (c \to b) = 1$

5. $c \to a \leq c \to b$

Corolario 4.0.2

Si $\to$ respeta los ínfimos, entonces es posible definir $\otimes$, según el lema 9 de modo tal que $(\otimes, \to)$ constituya una cupla adjunta. Si además con el ínfimo $\wedge$ y el supremo $\vee$ definidos a partir de la relación de orden $\leq$, $(A, \wedge, \vee)$ resulta un reticulado, entonces $(A, \leq, \otimes)$ es un reticulado residual integral.

Lema 4.0.3

Sea $(A, \to, 1)$ un l'algebra implicativa positiva. Entonces se verifican:

1) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$

2) $(a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b)) = 1$

3) $1 \to a = a$

demostración

1) $a \to b \leq ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$ prop.

2. $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1$ de 1. por $\leq$

2)

1. $(a \to b) \leq ((c \to a) \to (c \to b)) = 1$ prop.

2. $(a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b)) = 1$ de 1. por $\leq$

3)

1. $1 \to a = a$ prop.

Teorema 4.0.5

Un álgebra implicativa $(A, 1, \rightarrow)$ en la que $\leq$ determina una estructura de reticulado admite una estructura de reticulado residual si y sólo si se satisface:

$$a \rightarrow (\bigwedge_{i\in I} b_i) = \bigwedge_{i\in I}(a \rightarrow b_i) \tag{22}$$

demostraciónTrivial.

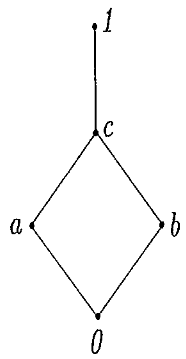
Observación 4.0.4

No en toda álgebra implicativa positiva se satisface 22
En efecto: Consideremos $\mathcal{A} = (A, 1, \rightarrow)$ donde $\rightarrow$ está definida por:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	c	1	1
b	0	c	1	1	1
c	0	c	c	1	1
1	0	a	b	c	1

Este operador satisface las condiciones p1, p2, p3 y p4 y, en consecuencia, afirmamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra implicativa positiva.

La relación de orden inducida por este operador de implicación origina el siguiente diagrama de Hasse para el conjunto A:



Observando la tabla y el diagrama vemos que:

$c \rightarrow (a \wedge b) = c \rightarrow 0 = 0$

$(c \rightarrow a) \wedge (c \rightarrow b) = c \wedge c = c$

$c \neq 0$

es decir, no se satisface la condición 22. Por lo tanto $\mathcal{A}$ no admite una cupla adjunta y, en consecuencia, una estructura de reticulado residual.

[17] B. Schweizer and A. Sklar, *Asociative functions and abstract semigroups*, Publ. Math Debrecem (1962)

[18] E. Trillas, *Pero, ¿ Le importa a la inteligencia artificial el problema cerebro-mente?* El problema cerebro-mente, Francisco Mora(ed) - Alianza Universidad (824AU) Madrid (1995) 135–174.

[19] E. Turunen, *Algebraic structures in fuzzy logic*, Fuzzy sets and systems, North Holland 52 (1992) 181–188.

Diana M. Brignole
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca, Argentina.
e-mail: brignole@criba.edu.ar

Rosana V. Entizne
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca, Argentina.
e-mail: rentizne@criba.edu.ar

Indice