INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 56

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1996 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 56

VEINTE AÑOS DE GEOMETRIA FRACTAL

EXCERTA

Edgardo Fernández Stacco y Rafael Panzone

Departamento e Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1996

Veinte años de Geometría Fractal : Excerta.

La presente es una recopilación de comentarios del Mathematical Reviews sobre trabajos en áreas que en la clasificación actual llevan, en su mayoría, los números 28, 11, 12, 51 y 52. Estos temas son de interés para el grupo de investigación que cuenta con el apoyo del CONICET via el PID 3228. Están ordenados por año en forma decreciente y dentro de cada año, alfabéticamente por autor. El período cubierto, salvo algunas excepciones, es el de los comentarios aparecidos entre 1975 y 1995.
Un proyecto más ambicioso contempla publicar todos los comentarios sobre Geometría Fractal aparecidos en ese período. El presente material formará parte de ese volumen.

1996

JACHYMSKI J., Continuous dependence of attractors of Iterated Function Systems, Journal of Math. Anal. and Appl. 198,1(1996)221-226.
(Da un contraejemplo a un lema en el libro de Barnsley, Lemma 3.11.3 y caracteriza los espacios de Banach finito-dimensionales utilizando teoremas de punto fijo.)

1995

BANDT Ch., **GRAF** S., **ZÄHLE** M., Fractal Geometry and Stochastics, Birkhäuser, (1995).
MR

FALCONER K.J., Sub-self-similar sets, Trans. Amer. Math. Soc. 347,8,3121-3129.
MR 95j: 28005
Un conjunto compacto E se dice *subautosemejante* si $E \subset \cup S_i(E)$ donde las S_i, $i=1,\ldots,n$, son semejanzas. Por ejemplo, la frontera de un conjunto autosemejante es subautosemejante.

El resultado principal es el siguiente: si las semejanzas S_i satisfacen la condición de conjunto abierto entonces las dimensiones de Hausdorff y la box-counting de E son iguales.
C. Tricot

FALCONER K.J., On the Minkowski measurability of fractals, Proc. A.M.S., 123,4(**1995**)1115-1124.
MR 95e: 28003
Con F indicamos un conjunto cerrado nunca denso en el intervalo I. Diremos que F es *medible Minkowski* con *contenido de Minkowski* c en dimensión d si la medida de Lebesgue de los ϵ-entornos de F satisface la ley de escala $\lambda(F_\epsilon)\approx c\epsilon^{1-d}$ en el sentido que el cociente tiende a 1 cuando $\epsilon\to 0$. Recientemente M. Lapidus y C. Pomerance probaron un interesante teorema [93k:58217] del que aquí se da una demostración más abreviada. Si I\F es la unión de intervalos $I_1, I_2, \ldots$ con $\lambda(I_n)\geq\lambda(I_{n+1})$ entonces F es medible Minkowski si y sólo si existe una constante c′ con $\lambda(I_n)\approx c' n^{-1/d}$. Se explicita la relación entre c y c′ y se aplica el criterio a conjuntos autosemejantes $F=\cup\varphi_i$ donde $\varphi_i(x)=b_i+c_i x$ y los $\varphi_i(I)$ son disjuntos en I. Si los c_i generan un subgrupo denso en $(R^+,\cdot)$ entonces F es medible Minkowski.
C.Bandt

FLECKINGER J., **LAPIDUS** M.L., Indefinite elliptic boundary value problems on irregular domains, Proc. Amer. Math. Soc. 123,2 (**1995**)513-526.
MR 95c: 35187
F. Prüfer

MATTILA, P., Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44, (**1995**).

TRICOT C., Curves and fractal dimension, Springer Verlag (**1995**)
MR 95i:28005

1994

BANDT C., **GELBRICH**, **GÖTZ**, Classification of self-affine lattice tilings, J. London Math. Soc.(2),50,3(**1994**)581-593.

MR 95g: 52035

Los autores consideran discos cerrados D en R^2 con las siguientes propiedades: sus trasladadas Z^2 embaldosan R^2 y para algún k una unión de k de estas trasladadas es una imagen lineal expandida de D. (Aquí a una función lineal se la considera *expansiva* si todos los autovalores tienen módulo mayor que 1). Un disco en estas condiciones se denomina una *tesela autoafín.* Se discuten nociones naturales de equivalencia de embaldosamientos y se prueba que a menos de esta equivalencia, para cada k hay un número finito de discos D posibles.
En el caso particulasr k=2 se prueba que hay exactamemte tres discos, uno es un rectángulo y los otros dos tienen borde fractal. En el caso k=3 se prueba que hay exactamente 7 posibilidades.
R. Kenyon

BISBAS A., A note on the ditribution of digits in dyadic expansions, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 318,2 (**1994**)105-109.
MR 95f: 11052

BLADT M., Multivariate self-similar processes: second order theory, J. Appl. Probab. 31,1(**1994**)139-147.
MR 94m: 60084

CENTORE P.M., **VRSCAY** E.R., Continuity of attractors and invariant measures for iterated function systems, Canadian Math. Bull. 37,3(**1994**)315-329.
MR 95g: 58126

Sumario: "Probamos resultados folclóricos que ambos, el atractor A y la medida invariante μ de un N-sistema iterado de funciones, varían continuamente con variaciones en las funciones contractivas así como de las probabilidades. Esto representa una generalización del resultado de Barnsley que muestra la continuidad de los atractores con respecto a variaciones de un parámetro que aparece en las funciones del IFS. Se presentan algunas aplicaciones incluyendo aproximaciones de atractores y

medidas invariantes de IFS no lineales así como nuevas aproximaciones de conjuntos de Julia para funciones cuadráticas complejas.
P.M. Makienko

DELIU A., **WINGREN** P., The Takaga operator, Bernoulli sequences, smoothness conditions and fractal curves, Proc. Amer. Math. Soc. 121,3(**1994**)871-881.
MR 94i: 28005

DUBUC S., **HAMZAQUI** R., On the diameter of an attractor of an IFS, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 16,2-3(**1994**)85-90.
MR 95e: 58106
La existencia de una cota superior de los diámetros de IFS se prueba en un espacio n-dimensional. Para IFS afines los autores sugieren un método para el cómputo de esta cota. Un resultado exacto se da para el caso de la carpeta de Sierpinski.
R. Badü

FALCONER K.J., Sets with large intersection properties, J. London Math. Soc., (2)49,2(**1994**)267-280.
MR 95f: 28004
El principal resultado es el siguiente: sea $0<s\leq n$ y sea G^s la clase de todos los subconjuntos $F\subset R^n$ tal que para todas las sucesiones de transformaciones de semejanza $\{f_i\}$,

$$\dim_H\left(\bigcap_1^{\infty} f_i(F)\right)\geq s.$$

Entonces G^s es la clase maximal de conjuntos G_δ de dimensión de Hausdorff por lo menos s que es cerrado bajo intersecciones numerables y semejanzas. Se dan varios ejemplos de conjuntos G^s. Este resultado unifica construcciones previas de conjuntos que tienen "propiedades de intersección grande".
C. Tricot

GATZOURAS D., **LALLEY** S.P., Statistically self-affine sets : Hausdorff and box dimensions, J. Theor. Probab. 7,2 (**1994**) 437-468.
MR 95e: 28005

GRAF S., On the characterization of the Hausdorff measure on a self-similar set, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 42,1 (1994)189-197.

MR 95g: 28018

Una transformación S definida sobre un conjunto $E\subset R^d$ se dice *no expansiva* si $|S(x)-S(y)|\le|x-y|$ para todo x,y de E. El principal resultado de este trabajo establece que si E es autosemejante en R^d y α es la dimensión de semejanza entonces la medida de Hausdorff α-dimensional normalizada es la única medida de probabilidad no expansiva sobre E siempre que $H^\alpha(E) > 0$. Este resultado responde a la cuestión propuesta por C. Bandt sobre la posibilidad de obtener para la medida de Hausdorff α-dimensional un análogo del resultado de Kolmogoroff para la medida de Lebesgue que dice que la medida de Lebesgue d-dimensional es la única medida no expansiva μ sobre sobre R^d para la cual el cubo unidad d-dimesional tiene medida 1.

M.A. Martín

HWANG W-L., **MALLAT** S., Characterization of self-similar multifractals with wavelet maxima, Applied & Computational Harmonic Analysis 1(1994)316-328.

MR

JÄGER M., The Hausdorff dimension of the boundary of a unit interval of a number system, Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Comput. 14, 79-90.

MR 95m: 11083

Sea Θ un número complejo, $|\Theta|>1$ y sea $D=\{0,a_1,\dots,a_N\}$ un conjunto finito de números complejos. El conjunto $H=\{\sum_{-\infty}^{-1} d_i\Theta^i;\ d_i\in D\}$ se denomina el *intervalo unidad* del par (Θ,D). La frontera ∂H ha sido estudiada prviamente, en particular su dimensión de Hausdorff. (Además de las referencias del trabajo ver el de W.J. Gilbert MR 88b:28014). El autor continua tales investigaciones usando las técnicas de los grafos de Mauldin-Williams.

V. Drobot

KENYON R., **PERES** Y., Hausdorff dimensions of affine-invariant sets, *Preprint*, (**1994**).

KENYON R., **PERES** Y., Measures of full dimension on affine-invariant sets, Ergodic Theory and Dynamical Systems, (**1994**).

Abstract: Se determinan las dimensiones de Hausdorff y Minkowski de algunas esponjas autoafines de Sierpinski extendiendo los resultados de McMullen (1989) y Bedford (1984). Este resultado es utilizado para probar que todo compacto invariante bajo un endomorfismo total expansivo el cual es una suma directa de endomorfismos conformes soporta una medida invariante de dimensión completa.

KIGAMI J., Effective resistances for harmonic structures on p.c.f. self-similar sets, Math, Proc. Cambridge Philos. Soc. 115,2(**1994**)291-303.
MR 95h: 28012 (p.c.f. = post-critically finite)

LAGARIAS J.C., **PORTA** H.A., **STOLARSKY** K.B., Asymmetric tent map expansions II. Purely periodic points. Illinois Journal of Math. vol. 39,4(**1994**)574-588.

LIVERPOOL L.S.O., Iteration of complex functions - old and new problems, Complex Analysis and App. (Hong-Kong 1993) Pitman Research Notes Math. Series 305 Longman (**1994**)220-231.
MR 95g: 30035
Este trabajo trata sobre algunos problemas en la teoría de sistemas dinámicos complejos de funciones enteras y polinomiales presentando un breve recuento de conceptos básicos de dinámica compleja y reseñando algunos progresos hacia la resolución de los problemas hasta 1987.
Posteriormente ha habido progresos significativos para funciones polinomiales debidos a A. Douady, J. Hubbard, C. T. McMullen, W. Thurston, M. Shishikura, D.P. Sullivan y J. C. Yoccoz. Por lo tanto yo agregaré algunos resultados. Un buen survey es el reciente trabajo de McMullen [Bull. Amer. Math. Soc. (NS)2,1994, 155-172; MR 95a:58012].

La conjetura fundamental es la conectividad local del conjunto de Mandelbrot M. Un trabajo reciente de Yaccoz, que usa un método de estimación del módulo de un anillo y renormalización, da bastante credibilidad a la creencia que M es localmente conexo. El resultado más notable, probado por Shishikura en 1991, es que la frontera de M tiene dimensión de Hausdorff 2. Uno de los principales objetivos en el estudio de los sistemas dinámicos es el conjunto de Julia. Fue conjeturado que los conjuntos de Julia de funciones polinomiales tienen medida de Lebesgue cero. S. van Strein y T. Nowicki probaron en Mayo de 1994 que existe una función polinomial cuyo conjunto de Julia tiene medida de Lebesgue positiva.
K. Nishizawa

MARTIN M.A., Self-similar fractals and Hölder maps, Publ. Dep. Análisis Matemático, Univ. Complutense, Madrid (**1994**)68-77.

PERES Y., The self-affine carpets of McMullen and Bedford have infinite Hausdorff measure, Math. Proc. Camb. Math. Soc., 116, (**1994**)513-526

PERES Y., The packing measure of self-affine carpets, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 115,3(**1994**)437-450.
MR 95e:28001
La principal clase de conjuntos considerados en este trabajo es la de los autoafines más que los autosemejantes. Para enteros $m<n$ una configuración es un subconjunto

$$D\subset\{0,1,\dots,n-1\}\times\{0,1,\dots,m-1\}$$

el que determina un conjunto compacto $K(T,D)$ en R^2 invariante bajo las aplicaciones $T(x,y)=(nx,my)$ (mod 1). Las dimensiones de Hausdorff y de empaque de $K(T,D)$ fueron calculadas por C.T. McMullen [86h:11061] y T. Bedford [Crinkly curves, Markov partitions and box dimensions in self-similar sets" PhD thesis (1984)]. Estos dos índices para la dimensión coinciden si y sólo si D tiene *fibras horizontales* uniformes (=cardinalidad de filas horizontales de D). En este trabajo el autor considera en detalle el caso de fibras horizontales no uniformes donde la

dimensión de Hausdorff α es menor que la dimensión de empaque σ. Prueba que en este caso no existe una función gauge $\tau(s)$ que haga a la medida de empaque $P_\epsilon(K(T,D))$ finita y positiva. Además, si $\tau(s)=s^\sigma/|\log s|$ entonces $P_\epsilon=\infty$ mientras que si $\tau(s)=s^\sigma/|\log s|^{1+\epsilon}$ entonces $P_\epsilon=0$. Se prueba que estos resultados se extienden a otros conjuntos autoafines.
S.J. Taylor

SAGAN H., Space filling curves, Springer Universitext, (**1994**).
MR 95h: 00001

SCHIEF A., Separation properties for self-similar sets, Proc. Amer. Math. Soc. 122,1(**1994**)111-115.
MR 94k:28012
En este trabajo substancial sobre conjuntos fractales estrictamente autosemejantes en R^n el autor da una respuesta positiva a la pregunta planteada hace mucho tiempo: si la condición del conjunto abierto y la condición del conjunto abierto fuerte son equivalentes. El llena un vacío en una cadena de implicaciones probando que para la positividad de la medida de Hausdorff correspondiente, la condición del conjunto abierto fuerte es necesaria. Usando grandes partes de una demostración de un teorema de caracterización algebraica para conjuntos autosemejantes con medida de Hausdorff positiva dado por C. Bandt y S. Graff (Proc. Amer. Math. Soc. 114,4(1992)995-1001, MR 93d: 28014) y agregando una idea nueva esencial, tiene éxito en construir explícitamente el conjunto abierto buscado . El trabajo tiene consecuencias concernientes a la estructura geométrica.
M. Zähle

SIMPELAERE D., Recurrence and return times of the Sierpinski carpet, J. Stat. Phys. 77, 5-6(**1994**)1099-1103.
MR 95i:58065

STOYAN D., **STOYAN** H., Fractals, random shapes and point fields, John Wiley, (**1994**) ISBN 0-471-93757-6.
MR 95h: 60016

STROMBERG K., **TSENG**. S.J., Simple plane arcs of positive area, Exposition. Math., 12,1(**1994**)31-52.
MR 95b:28004

Los autores se ocupan de la construcción de arcos simples de área positiva en el plano R^2. Ellos prueban primero que para todo α, $0\leq\alpha<1$, existe un conjunto simétrico de Cantor $P\subset[0,1]$ y un arco simple $g:[0,1]\to[0,1]$ con $g(0)=(0,0)$ y $g(1)=(1,1)$ tal que la traza $C=g([0,1])$ de g tiene las propiedades

$$PxP\subset C \quad y \quad \lambda^2(C) = \lambda^2(PxP) = \alpha$$

donde λ^2 es la medida de Lebesgue 2-dimensional.

Con una construcción más complicada los autores también prueban que para todo β tal que $0\leq\beta<1$ existe un arco simple $f:[0,1]\to R^2$ cuya traza $C=f([0,1])$ está en el cuadrado cerrado $S=[0,1]x[0,1]$ e interseca al borde de S únicamente en $f(0)=(0,0)$ y $f(1)=(1,1)$ y satisface $\lambda^2(f(E))=\beta\lambda(E)$ para todo subconjunto E de $[0,1]$, donde λ indica ahora la medida exterior de Lebesgue 1-dimensional. Aunque la existencia de arcos con área positiva, con propiedades similares a las últimas mencionadas aquí, puede probarse a partir de un teorema general (y profundo) de J. Oxtoby, S. Ulam y J. von Neumann, el tratamiento dado por los autores parece ser más apropiado para esta clase de resultados y los hace más transparentes y accesibles.
M.A. Martín

1993

BAMON R., **PLAZA** S., Cantor sets, numerical invariants and Perron-Frobenius theory, Dynamical systems, Pitman Res. Notes Math. Series, 285(**1993**)3-9. Longman Sci. Tech. Harlow (1993).
MR 94b:28001

BARLOW M.T., **BASS** R.F., Coupling and Harnack inequalities for Sierpinski carpets, Bull. Amer. Math. Soc. 29,2(**1993**)208-212.
MR 94a: 60011

BENEDEK A., **PANZONE** R., The set of Gaussian fractions, Proc. of the second "Dr. A. Monteiro" Congress on Mathematics, Bahía Blanca, (**1993**)11-40, Universidad Nacional del Sur.

MR 95f: 11005

Sumario " El conjunto F de los números complejos que tienen una representación binaria en la base b=-1+i con parte entera cero tiene una frontera que es una curva de Jordan J. Exhibimos una representación paramétrica de J. Esta curva es la unión de seis arcos de Jordan semejantes. Cada uno de ellos es autosemejante y satisface la condición del conjunto abierto de Morán [G.A.Edgar 92a:54001], [K.J.Falconer 88d:28001]. El dominio interior de J es un dominio uniforme. La cápsula convexa de J es un octógono y los arcos mencionados son decágonos."

CRILLY A.J., **EARNSHAW** R.A., **JONES** J., (Editors) Applications of fractals and chaos. The shape of things, Springer Verlag, Berlin (**1993**)ISBN 3-540-56492-6.
MR 95h: 58092

DETTMANN C.P., **FRANKEL** N.E., Potential theory and analytical properties of self-similar fractals and multifractal distributions, J. Statist. Phys. 72,1-2(**1993**)241-275.
MR 94f: 28009

DUBUC S., **ELQORTOBI** A., The support function of an attractor, Numer. Funct. Anal. Optim. 14,3-4(**1993**)323-332.
MR 94h:28006

Para un conjunto autoafín $E=\cup S_i(E)$ en un espacio de Banach arbitrario X los autores definen la *función soporte* h sobre X^* en la forma usual

$$h(u)=\sup\{u(x);x\in E\}.$$

Ellos derivan una ecuación funcional para h la cual puede ser iterada para determinar h como punto fijo de la ecuación. Esto conduce a un algoritmo simple para la construcción de la cápsula convexa de E. Los autores también desarrollan un algoritmo más sofisticado que conduce a conv E en tres pasos para ejemplos típicos en el plano.
C. Bandt.

DUVAL P.F.Jr., **EMERT** J.W., **HUSCH** L.S., Iterated function systems, compact semigroups and topological contractions,

Continuum theory and dynamical systems, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, M. Dekker, New York(**1993**)113-115.
MR 94d:54085

Sumario: En este trabajo se consideran semigrupos generados por transformaciones topológicamente conjugadas a contracciones. Se generalizan a estos casos resultados de Hutchinson y Barnsley. En general, se prueba que existen muchos conjuntos invariantes para estos semigrupos pero entre ellos existe un único conjunto invariante minimal. Aparece naturalmente un grupo que tiene información sobre la simetría del conjunto minimal invariante. Se estudia la estructura de este grupo. Se consideran dos clases de ejemplos: conjuntos invariantes para matrices estocásticas y conjuntos invariantes con simetría. Se analizan condiciones bajo las cuales el semigrupo generado por un número finito de transformacionse lineales tiene clausura compacta.

EDGAR G., Classics on Fractals, Addison-Wesley (**1993**).
Zbl Math. 795#28007

FALCONER K.J., The multifractal spectrum of statistically self-similar measures, Report PM-93-01, University of Bristol (**1993**).

FARGE M., **HUNT** J.C.R., **VASSILICOS** J.C., Wavelets, fractals and Fourier transforms, The Clerendon Press (**1993**).
MR 94i:00017

FRANKEL S., **TYSK** J., Behaviour of the Poincare metric near a fractal boundary, Complex Variables Theory Appl. 23,3-4(**1993**) 257-267.
MR 95a: 30036

GU X., The Hausdorff dimension of self-similar sets under a pinching condition, Proc. Amer. Math. Soc. 118,4(**1993**)1281-1289.
MR 94d: 28006

Consideremos los conjuntos autosemejantes F_i en R^n dados por un sistema de ecuaciones $F_i = \cup \varphi_{ij} F_j$ donde las φ_{ij} son contractivas, $C^{1+\epsilon}$, satisfaciendo la condición del conjunto abierto. T. Bedford [91a:58139] probó que para aplicaciones

conformes φ_{ij} la dimensión de Hausdorff está determinada por la fórmula de la presión de Bowen. Aquí se utilizan técnicas similares para dar cotas superior e inferior de la dim F en el caso cuando las φ_{ij} son "casi" conformes.
C.Bandt

GUZMAN M. de, **MARTIN** M. A., **MORAN** M., **REYES** M., Estructuras fractales y sus aplicaciones, Editorial Labor (**1993**).

HATA M., Fractals : on self-similar sets, Sugaku Expo. 6, 1, (**1993**)107-123.

Zbl. Math. 755#58040

Traducción del japonés de un trabajo publicado en 1990.

INDLEKOFER K.H., **KÁTAI** I., **RACSKÓ** P., Some remarks on generalized number systems, Acta Sci. Math. (Szeged) (**1993**)57 1-4,543-553.

MR 94i:11010

En años recientes los sistemas de números complejos han sido estudiados intensivamente, dicen los autores del trabajo. Desde un punto de vista "ingenuo" los problemas que ellos estudian pertenecen al siguiente problema. Dado $\Theta\epsilon\mathbf{C}$, $|\Theta|>1$, es cierto que $\{z\epsilon\mathbf{C}:\ z=\sum_{-L}^{\infty}a_n\Theta^{-n},\ a_n=0,1,\ L\epsilon\mathbf{N}\}=\mathbf{C}$, y de ser así ¿es cierto que salvo un conjunto de medida cero todos los z tienen una única parte entera? La discusión involucra mosaicos, dimensión de Hausdorff y números cuadráticos.
M. Mendès-France

KANEKO M., **ODAGAKI** T., Self-similarity in a class of quadratic-cuasiperiodic chains, J. Phys. Soc. Japan 62,4,(**1993**) 1147-1152.

MR 94h:11018

En los últimos años la sucesión $[(n+1)\alpha]-[n\alpha]$ a fascinado a matemáticos y científicos. En el artículo bajo revisión los autores estudian la sucesión en términos de reglas de renormalización (*inflation rules*). Descubren que la sucesión es autosemejante si y sólo si α es un irracional cuadrático,

$\alpha\epsilon(0,1)$, tal que su conjugado no está en (0,1). Este resultado debe ser comparado con el teorema 3 en el trabajo de D. Crisp et al, Thèorie Nombres Bordeaux 5(1993)123-137.
M. Mendès-France

KIGAMI J., Harmonic calculus on post-critically finite self-similar sets, Trans. Amer. Math. Soc. 335,2(**1993**)721-755.
MR 93d: 39008

KIGAMI J., **LAPIDUS** M.L., Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on P.C.F. self-similar fractals, Commun. Math. Phys. 158(**1993**)93-125.
MR 94m: 58225

KING J.F., **GERONIMO** J.S., Singularity spectrum for recurrent IFS attractors, Nonlinearity, 6,2(**1993**)337-348.
MR 94c: 58018 Zbl Math 791 #28004

KÖRNYEI I., The Hausdorff dimension of the boundary sets $\{z\epsilon\mathbf{C}: z=\sum_1^\infty a_k/\alpha^k,\ 0\le a_k<N(\alpha),\ \deg(\alpha)=2\}$, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. 36(**1993**)179-191.
MR 94j:11073
Sea α una raíz no real de la ecuación $x^2+cx+N=0$, $c,N\epsilon\mathbf{N}$ y sea H^α el conjunto de todos los $z\epsilon\mathbf{C}$ representables en la forma

$$z=\sum_1^\infty a_k/\alpha^k\ ,\quad a_k\epsilon\{0,1,\dots,N-1\}.$$

Se prueba que la frontera $\partial H(\alpha)$ tiene sus dimensiones de Hausdorff y de Pontryagin-Schnirelman igual a

$$k=2\log\mu(\log N)^{-1}$$

donde μ es la mayor raíz real del polinomio

$$x^3-(|c|-1)x^2-(N-|c|)x-N.$$

Además se prueba que la medida k-dimensional de Hausdorff de $\partial H(\alpha)$ es finita.
B. Völkmann.

KUMAGAI T., Regularity, closedness and spectral dimensions on the Dirichlet forms on P.C.F. self-similar sets, J. Math. Kyoto Univ 33(**1993**)765-786.

MR 94i: 28006

P.C.F. significa (conjuntos autosemejantes) críticamente finitos a posteriori.

LACZKOVICH M., Decomposition of sets of small or large boundary, Mathematika 40,2(1993)290-304.
MR 95d: 28009
En un trabajo anterior fue probado por el autor que si $A \subset R^k$ es un conjunto acotado medible de medida positiva entonces A es equivalente a un cubo siempre que $\Delta(\partial A)<k$, donde $\Delta(.)$ indica la dimensión de empaque. Como $\dim_H(E) \leq \Delta(E)$ vale para todo conjunto E acotado, una pregunta natural es la siguiente: ¿puede ser reemplazada la condición $\Delta(\partial A)<k$ por $\dim_H(\partial A)<k$ en el resultado anterior? La respuesta es no.
Otra pregunta es la siguiente. Supongamos que A es equivalente a un cubo ¿esta condición implica que $\Delta(\partial A)<k$ o $\dim_H(\partial A)<k$ por lo menos para conjuntos cerrados? Se prueba aquí que la respuesta es negativa.
R. Giuliano Antonini

LAPIDUS M. L., **KIGAMI** J., Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians of p.c.f. self-similar fractals, Comment. Math. Phys. 158,1(1993)93-95.
MR 94m: 58225

LAU K., **WANG** J., Mean quadratic variations and Fourier asymptotics of self-similar measures, Monatsh. Math. 115,1-2(1993)99-132.
MR 94g: 42018

LEWELLEN G.B., Self-similarity. Rocky Mountain J.Math., 29,3 (1993)1023-1040.
MR 94i: 28007
Se estudia la existencia, unicidad y direccionalidad de conjuntos autosemejantes $E=\cup\{w_l(E):l\in\Lambda\}$ en un espacio métrico. Λ puede ser un conjunto infinito. Resultados similares han sido obtenidos por otros autores [L.M. Anderson, 94d:28005]. Una novedad aquí es equipar a Λ con una topología y estudiar la

continuidad de la función dirección y la dependencia continua de E sobre Λ donde Λ varía sobre conjuntos compactos de un espacio topológico de funciones.
CH. Bandt

MARTIN M. A., **MATTILA** A. P., Hausdorff measures, Hölder continuous maps and self-similar fractals, Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc., 114,1(1993)37-42.
MR 94c: 28007
El trabajo se ocupa de la cuestión de que conjuntos s-dimensionales en R^n pueden intersectar alguna imagen de fA en un conjunto de medida de Hausdorff s-dimensional positiva, donde $A \subset R^m$ y $f:A \to R^n$ es (m/s)-Hölder continua. Los autores dan condiciones, necesarias y suficientes, en términios de propiedades de densidad.
H. Haase

MATÉ L., The Hutchinson-Barnsley theory for certain noncontraction mappings, Periodica Math. Hungar.27,1(1993) 21-33.
MR 95f: 28014
Dadas contracciones $f_1,...,f_n$ de un espacio métrico completo (X,d) en si mismo, es bien conocido que existe un único subconjunto compacto A de X con $A=\cup f_i(A)$. El autor deduce este resultado bajo condiciones contractivas más débiles. por ejemplo, $d(f_i(x),f_i(y)) \leq \varphi(d(x,y))$ donde $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ es una función con $\varphi(t)<t$. Algunos de estos resultados ya han sido probados por M.Hata [86m:54056] pero los métodos de demostración son un poco diferentes. Se discuten también laas medidas autosemejantes.
C. Bandt

PANZONE Pablo A., A note on the convex hull of self-similar sets, Actas 2° Congreso Monteiro (1993)57-64.
MR 94j:52005
El autor considera conjuntos autosemejantes K (no necesariamente convexos) en el espacio euclídeo E^n, es decir,

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} Y_i(K)$$

donde Y_i es una rotación seguida de una transformación homotética contractiva. Encuentra la manera de representar puntos extremales de la cápsula convexa de K. Da condiciones en E^2 para la diferenciabilidad o no de puntos en la frontera de la cápsula convexa de K. Se exhibe también un ejemplo de un conjunto autosemejante K en E^2 que no es un polígono. Bernard Kind.

RIEDI R., An improved multifractal formalism and self-affine measure, PhD thesis, ETH Zürich (1993).

SHALAGINOV A.A., Mappings of self-similar curves, Siberian Math. J., 34,6(1993)1190-1195.
MR 95g: 30027

STARK J., **BRESSLOFF** P., Iterated function systems and their applications, Clarendon Press, (1993)65-90.
MR 94i:00017

STRICHARTZ R.S., Wavelets and self-affine tilings, Const. Approx. 9, #2-3, (1993)327-346.
MR 94f:42039

STRICHARTZ R.S., Self-similar measures and their Fourier transforms, II, Trans. Am. Math. Soc. 336,1,335-361.
MR 93l: 42023 Zbl Math 765-28007

Por una *medida autosemejante* el autor entiende una medida de probabilidad sobre R^n que satisface la ecuación

$\mu = \sum_1^m a_j \mu \circ S_j^{-1}$ donde los pesos a_j son no negativos y satisfacen $\Sigma a_j = 1$ y los S_j son semejanzas contractivas: $S_j x = \rho_j R_j x + b_j$, con $0 < \rho_j < 1$, R_j una transformación ortogonal y $b_j \epsilon R_n$.
En este trabajo el autor define una *distribución autosemejante* como una distribución a soporte compacto satisfaciendo una relación de la forma mas arriba descripta pero con pesos complejos a_j. Se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de distribuciones autosemejantes y se prueba que

el espacio de las distribuciones autosemejantes es siempre de dimensión finita.
En parte I [92k: 42015] el autor obtiene estimaciones para expresiones de la forma

$H(R) = R^{-n+\beta}\int_{|x|\leq R} |\hat{\mu}(x)|^2\, dx$ donde $\hat{\mu}$ es la transformada de Fourier de μ y β está definida por $\sum_1^m \rho_j^{-\beta} |a_j|^2=1$. En este trabajo el resultado se mejora probando que (cuando existen enteros positivos ν_j tales que $\rho_j^{\nu_j} = \rho$ para algún ρ fijo y se satisfacen también hipótesis adicionales) la función $H(R)$ es asintótica (en un sentido conveniente) a una función $\tilde{H}(R)$ que es acotada lejos del cero y periódica en el sentido $\tilde{H}(\rho R)=\tilde{H}(R)$ para $R>0$.
Se prueba una fórmula fractal de tipo Plancherel y hay varias generalizaciones.
S. Thangavelu

STRICHARTZ R.S., Self-similar measures and their Fourier transforms,III. Indiana Univ. Math. J. 42,2,(1993)367-411, (II TAMS 236,1,(1993)335-361).
MR 94j: 42025
Una *medida autosemejante* en R^n es una medida de Borel finita positiva que satisface la identidad

(1) $\mu=\sum_1^m p_j \mu\circ S_j^{-1}$ donde las p_j son probabilidades y las S_j semejanzas con razones r_j, $0<r_j<1$, $j=1,...,m$.
En dos trabajos precedentes el autor estudia medidas autosemejantes en R^n. Es importante observar que son medidas que satisfacen la identidad (1) donde las S_j no son ya semejanzas. La clase más natural de considerar es la clase de las transformaciones conformes ya que ellas son semejanzas infinitesimales. Cuando las S_j son conformes la medida que satisface (1) se denomina *autoconforme*. Ocurre que cuando las S_j no son semejanzas se deben usar familias de medidas para estudiar μ. En este trabajo el autor analiza familias de medidas autosemejantes y autoconformes. Entiende por una familia de

medidas autosemejantes en R^n una familia $(\mu_u : u \in V)$ de medidas de Borel finitas indexadas por los vértices V de un multigrafo dirigido conexo que satisface

(2) $$\mu_v = \sum_{u\in V} \sum_{e\in E_{uv}} p(e)\mu_u \circ S^{-1}(e)$$

para todo $v\in V$ donde E_{uv} es el conjunto de aristas que unen u y v, S(e) es una semejanza contractiva y p(e) un peso positivo satisfaciendo

(3) $$\sum_{u\in V} \sum_{e\in E_{uv}} p(e) = 1 \text{ para todo } u\in V.$$

Cuando todas las S(e) son conformes la familia se dice *autoconforme*. También están las nociones de *autosemejanza relativa y autoconforme* relativa para familias. Asociada a una familia autosemejante de medidas existe por lo menos dos nociones importantes de dimensión: la *dimensión puntual*, dim (μ,x) y la *dimensión* L^p, $\dim_p(\mu)$, $1<p<\infty$. Para una familia autosemejante de medidas que satisfacen el axioma de separación llamado la condición del *conjunto abierto para (separación de) medidas*, el autor computa explícitamente dimensiones L^p. Bajo condiciones adicionales sobre las transformacines conformes se calcula lo mismo para familias autoconformes. Usando la transformada de Fourier el autor da un teorema de existencia para familias autosemejantes de distribuciones a soporte compacto. Otra investigación importante es la conexión entre la dimensión L^p y la espectral asintótica. Si $\exp(\Delta)$ es el semigrupo del calor se prueba que el comportamiento asintótico de la norma L^p de la función $\exp(t\Delta)(\mu)$ está controlado por la dimensión L^p. Para familias autosemejantes de distribuciones a soporte compacto se encuentra un comportamiento asintótico similar.

S. Thangavelu

TAKEO F., Hausdorff dimension of some fractals and Perron-Frobenius theory, en Furuta, Takayuki ed. et al, Contributions to operator theory and its applications. The Tsuyoshi Ando anniversary volume, Basel, Birkäuser, Oper. Theory, Adv. Appl. 62(1993)177-195.

MR 95d: 28011 Zbl. Math. 796#28006

El propósito de este trabajo es calcular la dimensión de Hausdorff de fractales que no son autosemejantes. Sea $(f_1,\dots,f_k)$ un IFS de semajanzas de razón δ en R^d. Sea K el conjunto invariante respecto a este IFS. Si $E^{(w)}$ indica el espacio de sucesiones sobre k símbolos, el autor selecciona un subconjunto finito F de sucesiones finitas de estos símbolos pero únicamente de longitud r+1 y define un subconjunto A(F) en el espacio métrico $E_k^{(w)}$ (la métrica es alguna ultramétrica dependiente de δ).

Se determina la dimension de Hausdorff de A(F) como el logaritmo de base $1/\delta$ del radio espectral de cierta matriz, aplicando la teoría de Perron-Frobenius a esta matriz, la cual es generada por el conjunto F. Si Φ indica la inmersión natural de $E_k^{(w)}$ en K, siempre que se satisfaga algún tipo de condición de conjunto abierto en términos de Φ, F y r, entonces $\Phi(A(F))$ es un subconjunto de R^d y A(F) tiene la misma dimensión de Hausdorff. El principal ejemplo es el borde del dragón. Su dimensión es aproximadamente 1.5236.

H. Haase

YIN Q.H., On Hausdorff dimension for attractors of iterated function systems, J. Aust. Math. Soc. Ser.A, 55,2(1993)216-231.

MR 95b: 28005

Sean T_i, i=1,...,n, aplicaciones de un conjunto métrico compacto (X,d) en si mismo tal que $s_i d(x,y) \le d(T_i x, T_i y) \le t_i d(x,y)$, $0 \le s_i \le t_i \le 1$.

Sea A un atractor de IFS dado por las T_i y la matriz de transición de ceros y unos con rango no nulo. El principal resultado es que $\dim(A) \ge \alpha$ donde el producto de M y la matriz diagonal conteniendo los s_i^α tiene radio espectral 1.

C. Bandt

1992

ANDERSON L.M., Recursive construction of fractals, Ann. Acad. Sc. Fennicae, Series AI, Math. Dissertationes 86(**1992**).
MR 94d: 28005 ZBM 753:28005
Este trabajo trata generalizaciones de conjuntos autosemejantes de Hutchinson: el conjunto de las contracciones que se aplican puede ser infinito y puede diferir para cada nivel. Trabajando dentro del marco de los espacios métricos, el autor da condiciones para la existencia y compacidad de conjuntos invariantes y cotas superior e inferior para la dimension de Hausdorff. Está relacionado con trabajos por aparecer de H. Fernan sobre sistemas iterados de funciones infinitas y los de M. Berger sobre medidas autosemejantes con una infinidad de contracciones.
Ch. Bandt

BANDT C., **FLASCHMEYER** J., **HAASE** H., Eds., Topology, Measure and Fractals, Conference "Topology and Measure VI", Warnemünde Akademic Verlag, (**1991**).
MR 94a:28001

BANDT C., **GRAF** S., Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure. Proc. Amer. Math. Soc. 114,4(**1992**)995-1001.
MR 93d: 28014
Un conjunto compacto no vacío $A \subset R^d$ es *autosemejante* si hay semejanzas continuas f_i, $i=1,\ldots,m$, tales que $A=\cup f_i(A)$. Varios autores han utilizado la condición de conjunto abierto (OSC) para determinar la medida de Hausdorff de conjuntos autosemejantes. Una condición aparentemente más fuerte (SOSC) es denominada *condición del conjunto abierto fuerte*. Esta condición se usa para probar que un conjunto autosemejante tiene medida de Hausdorff positiva en dimensión α, donde α es la dimensión de semejanza, llamada simplemente *medida positiva*. No se conoce cuando la OSC, la SOSC y la medida positiva son equvalentes. Los autores dan un paso importante para resolver este problema probando el siguiente teorema.

Diremos que dos palabras finitas $t=t_1 \ldots t_q$ y $s=s_1 \ldots s_p$ son *incomparables* si para algún k, $s_k \neq t_k$. Definimos

$$F=\{(f_{s_1} \ldots f_{s_p})^{-1}(f_{t_1} \ldots f_{t_q}) : s,t \text{ incomparables}\}$$

y lo consideramos como un subconjunto del grupo topológico de semejanzas sobre R^d con la topología de la convergencia uniforme sobre conjuntos acotados. Entonces, la aplicación idéntica no está en la clausura de F si y sólo si el conjunto autosemejante A tiene medida positiva.

Encuentran también condiciones equivalentes para la OSC y SOSC en términos de no convergencia a la identidad dentro de F.

T. Bedford

BANDT C., **KUSCHEL** T., Self-similar sets 8. Average interior distance in some fractals. Rendiconti (Palermo). Suplemento:Measure Theory. Serie II, 28(**1992**)307-317.
MR 94c: 28010

BANDT C., **RETTA** T., Topological spaces admitting a unique fractal structure, Fund. Math. 141(**1992**)257-268.
MR 94c: 28009

BANDT C., **RETTA** T., Self-similar sets as inverse limits of finite topological spaces, Topological measures and fractals, Warnemünde, (1991)41-46, Math. Res. 66, Akademie Verlag, Berlin, (**1992**).

BARBÉ A.M., On a class of fractal matrices.I.Excess matrices and their self-similar properties. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 2(**1992**)4, 841-860.
MR 94c:58093

BARLOW M., Harmonic analysis on fractal spaces, Séminaire Bourbaki, vol.1991/92, Astérisque 206, exp.775,5(**1992**)345-368.
MR 93m: 60160

BEARDON A., Iteration of rational functions, Springer (**1992**).
MR 92j: 30026

BEN NASR F., Ensembles aléatoires self-affines en loi, Bull. Sc.

Math., 2e série, 116(1992)111-119.
MR 93c: 60008 Zbl Mat 757:28010

BERGER M.A., Random affine iterated function systems: mixing and encoding, Diffusion processes and related problems in Analysis, vol.II, Charlotte N.C. (1990), Progr. Probab. 27, Birkhäuser, Boston, MA (1992)315-346.
MR 93k: 28010
... Finalmente se deducen algunas afirmaciones sobre la cápsula convexa de conjuntos autosemejantes.
C. Bandt

CAWLEY R., **MAULDIN** R.D., Multifractal decompositions of Moran fractals, Advances in Math., 92(1992)196-236.
MR 93b: 58085
Los autores consideran descomposiciones multifractales de Moran con respecto a medidas producto infinitas. Un *fractal de Moran* es un objeto geométrico muy general que puede ser expresado en la forma $K=\bigcap_{m=0}^{\infty} K_m$ donde K_0 es el conjunto semilla (un subconjunto compacto regular de R^N) y K_{m+1} se obtiene de K_m aplicando a éste un número fijo, digamos n, de semejanzas de razones $t_1,\dots,t_n$. Es similar a la construcción de fractales via sistemas iterados de funciones considerados por Barnsley y coautores pero más general en el sentido que la construcción del fractal de Moran no requiere que las mismos semejanzas se apliquen en cada paso, solamente las razones deben permanecer fijas. Como una consecuencia, el fractal de Moran no necesariamente resulta autosemejante. Los puntos sobre el fractal son codificados por una sucesión de enteros de la forma usual : $x\to(\sigma_1(x),\sigma_2(x),\dots)$, aunque un punto puede tener más de un código (address). Los autores consideran luego una medida $\hat{\rho}$ definida en el espacio de las sucesiones $\Omega=\{1,\dots,n\}^N$. La descomposición multifractal de K con respecto a $\hat{\rho}$ está definida por la colección de conjuntos

$$K_\alpha = \{x\epsilon K: \lim_{k\to\infty} \frac{\log \hat{\rho}(\sigma(x)|k)}{\log t(\sigma(x)|k)} = \alpha\}$$

donde $\sigma(x)|k$ es el k-cilindro determinado por los primeros k dígitos en la dirección (código) de x y $t(\sigma(x)|K)$ es su longitud. Los autores hacen un riguroso trabajo para desarrollar las propiedades del espectro de los índices de escala $f_\alpha=\dim (K_\alpha)$ y verifican las propiedades esperadas de suavidad y concavidad de f. En el caso que K se construye via un IFS se prueba que α es la dimensión puntual de la medida inducida sobre K por $\hat{\rho}$. Luego los autores extienden la descomposición multifractal introduciendo un sistema de pesos $w=(w_1,...,w_n)$ y prueban que, entre otras cosas, el espectro $f(\alpha,w)$ no necesariamente es cóncavo.

C.D. Cutler

DUVALL P.F., **HUSCH** L.S., Attractors of iterated function systems, Proc. Amer. Math. Soc. 116,1(1992)279-284.

MR 93d: 54057

Sea X un espacio métrico completo. Una familia $F=\{f_1,...,f_k\}$ de aplicaciones contractantes de X en si mismo se denomina un *sistema iterado de funciones* (IFS). Es bien conocido que para un tal F existe un único conjunto compacto A tal que $A=\cup f_i(A)$. A se dice un *atractor* para F. Los autores investigan el problema de determinar cuáles conjuntos compactos en el espacio euclídeo pueden realizarse como atractores de algún IFS. Se prueba el siguiente teorema: Para cada $n>0$ existe un conjunto de Cantor $C^n\subset R^{2n}$ con la propiedad de que si X es un compacto cualquiera de R^n, el conjunto $C^n\times\{0\}\cup\{0\}\times X\subset R^{3n}$ es el atractor de un IFS. Se sigue que todo espacio compacto de dimensión finita que contiene un subconjunto de Cantor clopen puede sumergirse en algún espacio euclídeo como un atractor. Primero los autores construyen un conjunto de Cantor V^n con la propiedad de que para todo compacto $X\subset R^n$ existe una transformación Lipschitz de V^n sobre X. Entonces, para un cierto conjunto de Cantor C′ en R^2 se construye un IFS de dos contracciones sobre R^2 tales que C′ es un atractor. Finalmente se prueba que el producto n-ésimo

C^n de C' en R^{2n} admite una equivalencia Lipschitz sobre V^n y existe un IFS en R^{2n} donde el atractor es C^n.
Y. Kodama

EDGAR G.A., Fractal dimensions of self-affine sets: some examples, Measure Theory (Oberwolfach, 1990), Rend. Cir. Mat. Palermo, (2)Supp.28(**1992**)341-358.
MR 94a: 28019
Sean $f_1,\ldots,f_r$ contracciones sobre un espacio métrico completo. Existe entonces un único conjunto compacto no vacio K satisfaciendo $K=\cup f_j(K)$. Si las f_j son transformaciones afines en R^d entonces K se dice *autoafín*. En el caso que las f_j sean semejanzas, expresiones para la dimensión de Hausdorff de K son bien conocidas pero existen pocos resultados para el caso general autoafín. El autor discute el teorema de Falconer que dice que si las partes lineales A_j verifican $\|A_j\|<1/3$ para todo j, la dimensión de Hausdorff será constante para casi todas la elecciones de las traslaciones. Se da un ejemplo para ver que la restricción de Falconer no puede ser mejorada más allá de $\|A_j\|<(\sqrt{5}-1)/2=:\tau$. En otro ejemplo considera las transformaciones f_i, i=1,2, en R^2, con partes lineales dadas por $A_1(x,y)=(rx+ry,\ ry)$, $A_2(x,y)=(rx,rx+ry)$ donde $0<r<1$. No es difícil demostrar que estas determinan un K autoafín si $r<\tau$. Para este ejemplo no se conocen ni la dimensión de Hausdorff ni la constante de Falconer (el autor calcula esta última en el caso $r=1/3$).
F.M. Dekking

EDGAR G.A., **MAULDIN** R., Multifractal decompositions of digraph recursive fractals, Proc. London Math. Soc., 65,3(**1992**)604-628.
MR 93h: 28010
Mauldin y Williams [89i:28003] definieron fractales K construídos como límites de una sucesión de conjuntos compactos K_n en los cuales cada K_{n-1} es reemplazado por un número finito de subconjuntos geométricamente semejantes, pero no superpuestos, usando un multigrafo dirigido fijo. En este

trabajo los denominan *digrafos recursivos fractales*. Los autores construyen una cadena de Markov usando las aristas del grafo para transiciones entre vértices. Así a cada e se le asigna una probabilidad $p(e)>0$ tal que $\Sigma p(e)=1$ sumando sobre las aristas que emanan de cada vértice. La única medida invariante para esta cadena de Markov corresponde a una medida de probabilidad μ sobre K. Para esta μ definen:

$$K^{(\alpha)}=\{x\epsilon K:\lim_{\epsilon\downarrow 0} [\log \mu(B_\epsilon(x)) / \log \operatorname{diam} B_\epsilon(x)]=\alpha\}.$$

Entonces $K^{(\alpha)}$ será no vacío para algún rango $\alpha_1\leq\alpha\leq\alpha_2$ aunque usualmente $\mu(K^{(\alpha)})=0$. Estos conjuntos $K^{(\alpha)}$ se denominan *componentes multifractales* de K. Para una construcción general del digrafo se prueba que una elección conveniente de $\{p(e)\}$ conduce a una medida μ tal que $K^{(\alpha)}=\phi$ cuando $\alpha\neq d$ y $K=K^{(d)}$tiene dimensión de Hausdorff y de empaque d. Para cualquier otra elección de $\{p(e)\}$ los autores muestran que existe un intervalo de valores de α para los cuales $K^{(\alpha)}\neq\phi$. Para cada α en ese intervalo las dimensiones de Hausdorff y de empaque de $K^{(\alpha)}$ son el mismo índice $f(\alpha)$ y la función $f(\alpha)$ es estrictamente cóncava. Para algunos casos la *dimensión multifractal* $f(\alpha)$ fue previamente calculada (como dimensión de Hausdorff) por R. Cawley y Mauldin [93b:58085].
S.J. Taylor

ELTON J.H., **PICCIONI** M., Iterated function systems arising from recursive estimation problems, Prob. Theory Rel. Fields 91(1992) 103-114.
MR 93b: 60139

EVERTESZ C.J.G., **MANDELBROT** B.B., Harmonic measure around a linearly self-similar tree, J. Phys. A,7(1992)1781-1797.
MR 93b:28018

FALCONER K.J., The dimension of self-affine fractals,II. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 111,1(1992)169-179.
MR 92m:28010 Zbl 797#28004
Sumario : Una familia $\{S_1,...,S_k\}$ de transformaciones afines contractantes sobre R^n define un conjunto compacto F no vacío,

único y que satisface $F=\bigcup_{1}^{k} S_i(F)$. Obtenemos estimaciones para las dimensiones de Hausdorff y de entropía de tales conjuntos y en particular deducimos una expresión exacta para la dimensión box en ciertos casos. Estas estimaciones están dadas en términos de funciones a valores singulares de transformaciones afines asociadas con las S_i. Este trabajo es continuación de la parte I [Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 103,2(1988)339-350] que presenta una fórmula para las dimensiones que es válida en "casi todos los casos".

FALCONER K.J., **MARSH** D.T., On the Lipschitz equivalence of Cantor sets, Mathematika, 39(**1992**)223-233.
MR 93m: 28011
Si E y F son conjuntos invariantes totalmente desconexos de contracciones conformes $C^{1+\tau}$ en R^d tales que s es la razón de su dimensión de Hausdorff entonces para todo $0<\sigma<1$ existen constantes $0<c,c'<\infty$ y una biyección $f:E\to F$ que satisface:

$$c|x-y|^{s/\sigma}\leq|f(x)=f(y)|\leq c'|x-y|^{s.\sigma}.$$

La idea principal es introducir el conjunto canónico de Cantor C para determinar biyecciones $g:C\to F$ y $h:C\to F$ que satisfacen una cadena de desigualdades semejantes con la norma euclídea $|.|$ reemplazada por alguna ultramétrica de C. La composición $f=h\circ g^{-1}$ es entonces la biyección buscada. Es imposible, en general, obtener el caso Lipschitz $\sigma=1$ si E y F son conjuntos autosemejantes de igual dimensión de Hausdorff. Para probar esto los autores deducen algunos invariantes algebraicos restrictivos para conjuntos autosemejantes totalmente desconexos equivalentes Lipschitz, E y F, en R^d y dan también un ejemplo instructivo.
H.Haase

GAMBAUDO J.M., **TRESSER**, CH., Self-similar constructions in smooth dynamics: rigidity, smoothness and dimension, Common. Math. Phys. 150,1(**1992**)45-58.
MR 93j: 58084

GARDNER M., Fractal music, hypercards and more mathematical recreations from Scientific American Magazine, W.H. Freeman NY, (1992).

ZblM 786-00003

GUMMELT P., Self-similar sets and tilings. Topology measures and fractals (Warnemünde 1991) Akademie Verlag, Berlin (1992)58-65.
MR 94h: 52042
El autor prueba como el embaldosado del tipo de Penrose y Amman [ver B. Grümbaum y G.C. Sheppard, Tilings and Patterns, Freeman, 1987, 88: 52018] pueden obtenerse a partir de familias de conjuntos autosemejantes.
C. Bandt

INDLEKOFER K.H., **KÁTAI** I., **RACSKÓ** P., Number systems and fractal geometry, Prob. Th. and App.,319-334, Math. Appl., 80,Kluwer Acad. Publ. (1992).
MR 94g:11089
Sea Θ un entero algebraico sobre Q y consideremos el cuerpo numérico algebraico $Q(\Theta)$. Supongamos que
$A=\{a_0=0,a_1,\ldots a_{t-1}\}$ es un sistema completo de residuos mod Θ con $A\subset Z[\Theta]$. Entonces para $\alpha\epsilon Z[\Theta]$ existe un único $b\epsilon A$ y un único $\alpha_1\epsilon Z[\Theta]$ tales que $\alpha=\alpha_1\Theta+b$.
Definamos: $J(\alpha)=\alpha_1$. Si $\alpha\epsilon Z[\Theta]$ y existe un entero positivo l tal que $J^l(\alpha)=\alpha$ diremos que α es *periódico*. P denotará al conjunto de los $\alpha\epsilon Z[\Theta]$ que son periódicos. Kátai y Környei (Pub. Math. Debrecen 41(1992)3-4,289-294;MR 93m:11107) observaron que para cualquier $\alpha\epsilon Z[\Theta]$ existe un entero positivo k para el cual $J^k(\alpha)\epsilon P$. Nótese que P depende de Θ y A. Si $P=\{0\}$ diremos que (Θ,A) es un sistema numérico. En este caso cada $\alpha\epsilon Z[\Theta]$ puede ser escrito en la forma $\alpha=\sum_{0}^{l} b_m\Theta^m$ para algún entero positivo l y algún $b_m\epsilon A$. Los autores continuan investigando en esta dirección y obtienen una variedad de resultados. Por ejemplo, sean $\Theta_1,\ldots,\Theta_n$ las conjugadas de Θ y $\Theta=\Theta_1,\ldots,\Theta_{2r}$ las conjugadas no reales y $\Theta_{r+1}=\bar{\Theta}_1$ para $l=\{1,\ldots,r\}$.

Para $\alpha\epsilon Q(\Theta)$ sea $\alpha(\Theta_j)$ el conjugado de α con respecto a Θ_j.

Con K_n se indica el conjunto de vectores $(z_1,\ldots,z_k)\epsilon C^n$ para los que $z_{r+l}=\bar{z}_l$ si $l=1,\ldots,r$ y tales que z_{2r+l} es real si $l=1,\ldots,n-2r$. Con $H\subset K_n$ indicamos aquellos números para los que

$$z_j=\sum_{-\infty}^{-1} b_m\Theta_j^m \quad \text{para } j=1,\ldots,n \quad \text{y} \quad b_m(\Theta)\epsilon A.$$

Para $\alpha\epsilon Q(\Theta)$ sea $\underset{\sim}{\alpha}=(\alpha(\Theta_1),\ldots,\alpha(\Theta_n))$, es decir, $\underset{\sim}{\alpha}\epsilon K_n$. Además con S indiquemos el conjunto de los $\alpha\epsilon Z[\Theta]$ para los que $H\cap(H+\underset{\sim}{\alpha})\neq\emptyset$. Se prueba entonces que $\alpha\epsilon S$ y $\underset{\sim}{\alpha}\epsilon H$ si y sólo si $-\alpha\epsilon P$ y $\alpha\neq 0$.
M. Filaseta.

JÄRVI P., **VUORINEN** M., Self-similar Cantor sets and quasiregular mappings, J. Reine Angew. Math., 424(1992)31-45.
MR 92m: 30041

KIGAMI J., On Laplacians on self-similar sets. Analysis on fractals, Sûgaku 44,1(1992)13-28.
MR 93k: 60003
(El trabajo es de divulgación y está en japonés).
Ishikawa Y.

LALLEY S.P., **GATZOURAS** D., Hausdorff and box dimensions of certain self-affine fractals, Indiana Univ. Math. 41,2,(1992)533-568.
MR 93j: 28011
Los autores consideran una familia de fractales autoafines y determinan el valor de la dimensión de Hausdorff δ_H y la dimensión de Bouligand-Minkowski δ_B de ellos en términos de los parámetros que definen el sistema de aplicaciones asociadas con el fractal autoafín. Encuentran también condiciones necesarias y suficientes para $\delta_H=\delta_B$ respondiendo al mismo tiempo la cuestión de cuando la medida de Hausdorff δ_H correspondiente es positiva y finita.
M.A. Martín

LAPIDUS M. L., Spectral and fractal geometry from the Weyl-Berry conjecture for vibrations of fractal drums to the Riemann zeta function, Proc. UAB Int. Conf. on Math. Phys. and Diff. Eqs.,

Birmingham (March 1990), C. Bennewitz et al eds., Academic Press (1992)151-182.
MR 93f: 58239

PANZONE P. A., On the measure of self-similar sets, Rev. Unión Matem. Arg., 38(1992)48-87.
MR 94m:28015
Sumario: Exhibimos un método por el cual podemos aproximar la medida de Hausdorff de conjuntos auto-semejantes de una cierta clase.

PEITGEN, H.O., **JÜRGENS**, H., **SAUPE**, D., Chaos and Fractals, New frontiers of science, Springer (1992), ISBN, 0-387-97903-4.

PETRISOR E., Symmetric iterated function systems, Anal. Univ. Timisoara, 30,1(1992)89-104.
MR 95m: 58089
Se estima la dimensión de Hausdorff de atractores simétricos de sistemas iterados de funciones aplicando un fórmula de Falconer. Se consideran varias transformaciones y se las ilustra con ejemplos (entre ellos, grupos cíclicos de orden k y el grupo dihedral). Se obtienen también cotas inferiores y superiores analíticas de la dimensiób.
R. Badii

RYNNE B.P., Regular and ubiquitous systems and M^s_∞ dense sequences, Mathematika 39, 2(1992)234-243.
MR 94c:11073
Es bien conocido que las cotas inferiores para la dimensión de Hausdorff son las más dificiles de obtener. Para facilitar la estimación de cotas inferiores se introducen las nociones de *sistemas ubicuos* [M.M. Dodson, B.P. Rynne y J.A.G. Vickers, Mathematika 37,1(1990)59-73, MR 91i:11098] y *sistemas regulares* [A.Baker, W.M.Schmidt, Proc. London Math. Soc.3,21(1970)1-11, MR 42, #5916].
En este trabajo se prueba que luego de algunas modificaciones los dos conceptos son esencialmnete equivalentes. Además los sistemas ubicuos se usan para construir sucesiones M^1_∞-densas

(introducidas por K.J. Falconer, Mathematika 32,2(1985)191-205, MR 87j:28007a].
F.Schweiger

SPEAR D.W., Measures and self-similarity, Adv. Math. 91,2(1992)143-157.
MR 92k: 28013 Zbl. Math. 758-28010

Este trabajo trata con la medida de Hausdorff y empaque de conjuntos autosemejantes obtenidos por *construcciones mediante grafos dirigidos.* El autor prueba que las dimensiones de Hausdorff y empaque así como la box dimension coinciden si la construcción satisface algunas condiciones geométricas. Además la medida de Hausdorff es finita y positiva sobre un conjunto autosemejante y un múltiplo de la medida de empaque siempre que la construcción tenga un grafo conexo y la medida de Hausdorff de todos los puntos comunes a más de una copia más pequeña semejante a la básica, es cero.

H. Haase

TAKAHASHI S., Self-similarity of linear cellular automata, J. Comput. System Sci. 44,1(1992)114-140.
MR 94b: 58058

1991

ARBEITER M., Random recursive construction of self-similar fractal measures, Prob. Theory. and Rel. Fields, 88,4 (1991)497-520.
MR 92m: 60040

BANDT C., Self-similar sets 5. Integer matrices and fractal tilings of R^n, Proc. Amer. Math. Soc. 112,2(1991)549-562.
MR 92d: 58093

Un conjunto cerrado A_I en R^n con interior no vacío se denomina un *m-rep tile* si existen conjuntos $A_2,\dots,A_m$ congruentes con A_I tales que int $A_i \cap$ int $A_j=\phi$ para $i\neq j$ y $A_I\cup\dots\cup A_m=g(A_I)$ para alguna semejanza g. El autor muestra como construir los m-rep tiles en R^n. Se generaliza a la situación en la cual el

requerimiento de que los conjuntos $A_1,...,A_m$ son congruentes con A_I es debilitada pidiendo que ellos sean trasladas de imágenes de A_I bajo un grupo de transformaciones que conmutan con g.
T. Bedford

BANDT C., **KELLER** K., Self-similar sets 2. A simple approach to the topological structure of fractals, Math. Nachr. 154(1991) 27-39.
MR 93e: 28011

BARABÁSI A.L., **SZÉPFALUSY** P., **VICSECK** T., Multifractal spectra of multi-affine functions, Phys. A 178, 1,(1991)17-28.
MR 92g: 58118

BEARDON A., Iteration of rational functions, Complex Analytic Dynamical Systems, Graduate Texts in Mathematics, 132, Springer-Verlag, ISBN 0-387-97589-6.
MR 92j: 30026
Muy buen referato. Contiene abundante material sobre los conjuntos de Fatou y Julia. Demuestra correctamente que el complemento del conjunto de Mandelbrot es simplemente conexo (Douady-Hubbard).
Eremenko

DELIU A., **GERONIMO** J.S., **SHONKWILER** R., **HARDIN** D., Dimensions associated with recurrent self-similar sets, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 110,2(1991)327-336.
MR 92g: 58069
Los *sistemas iterados de funciones (IFS) recurrentes* fueron definidos por H. F. Barnsley, J. H. Elton y D. Hardin [90e:58081]. Ellos definen además ciertas clases de medidas invariantes para esos sistemas. En este trabajo los autores calculan las dimensiones de Hausdorff y box para estas medidas en el caso en que las aplicaciones contractivas sean semejanzas. La dimensión box de un conjunto recurrente autosemejante en dos dimensiones es calculado. Estos cálculos generalizan los de Gerónimo y Hardin [90d:58076] y el revisor [92b:58125], entre otros.

T. Bedford

DUISTERMAAT J. J., Self-similarity of Riemann's non-differentiable function, Nieuw Arch. Wisk. (4)9,3(**1991**)303-337.
MR 93h: 26009

Este es un fascinante y muy bien escrito artículo expositorio concerniente a la función

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} (1/n^2\pi)\mathrm{sen}\; n^2\pi x$$

la cual, de acuerdo con Weierstrass, fue presentada por Riemann en 1872 como ejemplo de una función continua sin derivada. Esta función tiene una historia colorida que el autor presenta elegantemente en la introducción. Resumiendo, ha sido probado por numerosos autores que f tiene una derivada precisamente en aquellos números racionales p/q donde ambos p y q son impares. En este artículo el autor presenta una infinitud de auto-semejanzas del gráfico de f, ignoradas, a partir de las cuales se obtienen las conocidas propiedades de diferenciabilidad de f. Esto proporciona un buen ejemplo de como los gráficos por computadora pueden señalarnos caminos en la Matemática.
M. Evans

GRAF S., Random fractals, Rend. Instituto Mat. (Trieste) XXIII(**1991**)81-144
MR 95f: 28012

Estas conferencias son una introducción a la teoría de fractales aleatorios. La atención se centra preferentemente en los desarrollos relacionados con el concepto de autosemejanza estadísica, un área en que el autor es uno de los expertos líderes en el mundo. En las primeras secciones se muestran las ideas básicas y los principales resultados con ejemplos de conjuntos de Cantor aleatorios y procesos de percolación de Mandelbrot. Esto concierne a la construcción de la teoría de la medida así como a problemas de dimensión fractal y propiedades topológicas. Luego el autor trata conjuntos autosemejantes aleatorios generales desde estos puntos de vista. Finalmente se presenta una excelente puesta al dia del comportamiento fractal

del movimiento browniano y del puente browniano.
M. Zähle

HATA M., Topological aspects of self-similar and singular functions, Fractal Geometry and Analysis (J.Belair and S.Dubuc eds.) Kluwier, Dordrecht (**1991**)255-276.
MR 92f: 58002
Los trabajos no serán comentados individualmente.

ITO S., **OHTSUKI** M , On the fractal curves induced from endomorphisms on a free group of rank 2, Tokyo J. Math. 14,2,(**1991**)277-304.
MR 92m:11078
Sea $G<a,b>$ un grupo libre con generadores a y b y $f:G<a,b>\to Z^2$ un homomorfismo. Entonces, cualquier endomorfismo Θ genera una aplicación lineal $L_\Theta:R^2 \to R^2$, $f\Theta = L_\Theta f$. El trabajo trata con la existencia del fractal $K(\Theta)$ que es el conjunto límite de una sucesión de curvas. El conjunto $F(\Theta)$ que está encerrado por $K(\Theta)$ tiene la propiedad de teselar el plano: $\cup(F(\Theta)+z:z\in Z^2) = R^2$. Se computa la dimensión de Hausdorff de $K(\Theta)$ de ciertas aplicaciones L_Θ.
Schweiger F.

KOVÁCS B., Representation of complex numbers in number systems, Acta Math. Hung., 58,1-2,(**1991**)113-120.
MR 93c:11090

LAPIDUS M.L., Can one hear the shape of a fractal drum ? Partial resolution of the Weyl-Berry conjecture, Geometric Analysis and Computer Graphics (Berkeley CA, 1988) Math. Sci. Math. Res. Inst. Publ. 17(**1991**)119-126.
MR 92d: 58211

LAPIDUS M., Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture, TAMS, vol.325,2(**1991**)465-529.
MR 91j: 58163

LAPIDUS M., **MAIER** H., Hipòthese de Riemann, cordes fractales vibrantes et conjecture de Weyl-Berry modifiée, C. R. Acad. Sci.

Paris Sér.I Math. 313,1(1991),19-24.
MR 92f: 11118

LAUWERIER, H., Fractals, Princeton University Press. (1991).
MR 92f:00004

MANNA S. S., **HERMANN** H. J., Precise determination of the fractal dimensions of Apollonian packing and space-filling bearings, J. Phys. A 24,9(1991)481-490.
MR 92c: 52027
Resumen: "Se exhiben valores numéricos de alta precisión para las dimensiones de empaque de Apolonio y varias formas de llenar el espacio, que tienen aplicación en engranajes, turbulencia y movimiento tectónico. Se encuentra el empaque de Apolonio :

$d_f = 1.305684 \pm 0.000010$."

MARTIN M. A., **TAGUAS** F. J., Some parameters of distributions of mass in self-similar fractals, Real Anal, Exchange 17(1991/92) 2,765-770.
93d: 28017

REYES M., An analytic study of functions defined on self-similar fractals, Real Anal. Exch. 16,1(1991)197-214.
MR 91m: 28007 Zbl. Math. 735:42018

VOLBERG A., On the harmonic measure of self-similar sets on the plane, Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory, Frascati, Plenum (1991)267-280, New York 1992.
MR 94d:30041

1990

BANDT C., **STAHNKE**, J., Self-similar sets 6. Interior distance on deterministic fractals. Preprint. Greifsweld (1990).
Sin referato.

BARLOW M.T., **BASS** R.F., On the resistance of the Sierpinski carpet, Proc. Roy. Soc. London Ser.A 431,1882(1990)345-360.
MR 91h: 28008

BARLOW M.T., **BASS** R.F., **SHERWOOD** J.D., Resistance and spectral dimension of Sierpinski carpets, J. Physi. A 23,6(1990) L253-L258.

MR 91a: 28007

BEDFORD T., **KAMAE** T., Stieltjes integration and stochastic calculus with respect to self-affine functions, Preprint, Delft Univ. of Techn., Reprint n° 90-24.

BEDFORD T., **URBANSKI** M., The box and Hausdorff dimension of self-affine sets, Erg. Theory and Dynamical Systems 10,4(1990) 627-644.

MR 92b:58125

En este trabajo los autores continuan con sus investigaciones de conjuntos autoafines comenzada con anterioridad [cf. Bedford T., MR 91a:58139 y MR 901:58091]. Consideran una curva autoafín $E\subset[0,1]\times R$ (por ejemplo, el gráfico de la función de Weierstrass o de Rademacher) definida por la ecuación $E=\bigcup_{0}^{k-1}\Phi_i(E)$ donde las $\Phi_i:[0,1]\times R\to[0,1]\times R$, $0\le i\le k$, son $C^{1+\alpha}$-difeomorfismos contractivos. Usan el formalismo termodinámico [cf. R. Bowen, Equilibrium states and the Ergodic Theory of Anosov diffeomorfisms, Lecture Notes in Mathematics 470, Springer, Berlin, 1975; MR 56#1364] para el modelo simbólico de E definido por la función continua

$$\pi:\Sigma=\{0,1,\dots,k-1\}^N\to E$$

donde $\pi(w)$ es el único punto del conjunto

$$\bigcap_{1}^{\infty}\Phi_{w_1}\cdot\ldots\cdot\Phi_{w_n}(E).$$

Ellos redemuestran la fórmula [Bedford, citado, 901:58091] $P(tf_w+f_h)=0$ para la (box) dimension de entropía [K. Falconer The Geometry of Fractal Sets, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986; MR 88d:28001] $\dim_B(E)=t+1$ del conjunto E, donde f_w, f_h: $\Sigma\to R$ son las funciones iguales, hablando rápidamente, a los logaritmos de la contracción Φ_{w_1} en el punto $\pi(\underline{w})$ en las direcciones x e y respectivamente y P representa la presión [Bowen, obra citada].

Indicamos con μ el estado de equilibrio sobre Σ para la función

tf_w+f_h. El resultado principal del trabajo es la siguiente fórmula para la dimensión de Hausdorff de la imagen $\pi*\mu$ de la medida μ:

$$\dim(\pi*\mu) = 1 + \sigma\dim((p_h\pi)*\mu)(1-\mu)$$

donde $\sigma=\int f_h d\mu/\int f_w d\mu$ y p_h es la proyección ortogonal sobre el eje y. Esto permite a los autores probar que $\dim((p_h\pi)*\mu)=1$ implica la coincidencia de las dimensiones de Hausdorff y de entropía, es decir, $\dim(E)=\dim_B(E)=t+1$.
M.A. Shereshevsky

BERTOIN J., Hausdorff dimension of the level sets for self-affine functions, Japan J. Appl. Math. 7,2(1990)197-202.
MR 91h: 28009
Usando la noción de función autoafín, X, introducida por el autor, [90c:26023], se calculan los valores exactos de la dimensión de Hausdorff de los conjuntos de nivel de la forma $\{s:X(s)=x\}$ y $\{s;X(s)=X(t)\}$.
Hirst K.E.

EDGAR G.A., Measure, Topology and Fractal Geometry, Springer (1990).
MR 92a:54001

FALCONER K., Fractal Geometry, Foundations and Applications, John Wiley, N.Y. (1990).
MR 92j:28008

GILBERT W.J., Gaussian integers as bases for exotic number systems, The Mathematical Heritage of C.F. Gauss, G.M. Rassias ed. World Scientific (1990).

HEPTING D., **PRUSINKIEWICZ** P., **SAUPE** D., Rendering methods for iterated function systems (1990).
PREPRINT.

HINZ A.M., **SCHIEF** A., The average distance on the Sierpinski gasket, Probab. Theory Related Fields 87,1(1990)129-138.
MR 92b: 58129

JÜRGENS H., **PEITGEN** H.O., **SAUPE** D., The beauty of fractals lab,

Graphics software for the Macintosh, Springer Verlag (**1990**).
MR 92d:00003

KENYON R., Self-similar Tilings, Thesis, Princeton University, (**1990**).

LAPIDUS M.L., **POMERANCE** C., Fonction zéta de Riemmann et conjecture de Weyl-Berry pour les tambours fractals, C. R. Acad. Sc. Paris Sér.I Math. 310(**1990**)343-348.
MR 91d: 58248

SHIOTA Y., Remarks on self-similarity, Japan J. Appl. Math. 7,1(**1990**)171-181.
MR 91f: 54017

Un compacto no vacío K en un espacio métrico separable (X,d) se dice autosemejante con respecto a aplicaciones $f_i:X\to X$, i=1,..., m, si $K=f_1(K)\cup\ldots\cup f_m(K)$. Un resultado básico de Hutchinson dice que para contracciones dadas f_i existe un único conjunto autosemejante K y una transformación continua natural Θ del *espacio de las traslaciones* $\{1,\ldots,m\}^\infty$ sobre K.
K.M. Hata [87g: 58080] probó esto para contracciones débiles y aquí únicamente suponemos que para algún n todas las composiciones $f_{i_1}\circ\ldots\circ f_{i_n}$ son contracciones débiles. El comentarista encontró una condición general para la existencia de K y Θ: para cualquier sucesión $i_1,i_2,\ldots$ las transformaciones $g_k=$ $=f_{i_1}\circ\ldots\circ f_{i_k}$ tienen que converger a una constante $\Theta(i)$ uniformemente sobre conjuntos compactos [Proc. Conf. Top. and Meas. V, Binz, 1987, 8-16; Ernst-Moritz-Arndt Univ. Greifswald, 1988]
El autor aplica este resultado a ciertas funciones autoafines.
C. Bandt

STRICHARTZ R., Self-similar measures and their Fourier transforms, I. Indiana Univ. Math. J. 39,797-817.
MR 92k: 42015 Zbl. Math. 695-28003.

Una *medida de probabilidad* μ de R^n se dice *autosemejante* si satisface $\mu = \sum_1^m a_j\mu\circ S_j^{-1}$, $a_j\geq 0$, $\Sigma a_j=1$ y las S_j son semejanzas contractantes: $S_j x = \rho_j R_j x + b_j$ donde $0<\rho<1$, R_j es una transformación ortogonal y $b_j \epsilon R^n$. Asociada a una medida autosemejante está la *dimensión autosemejante* α definida por

$$\alpha(\sum_1^m a_j \log \rho_j) = \sum_1^m a_j \log a_j$$

El principal resultado de este trabajo es que bajo hipótesis adicionales (por ejemplo, la condición de conjunto abierto) α es el mínimo de la dimensión de Hausdorff de conjuntos que soportan a μ. El resto del trabajo trata de obtener estimaciones, cuando $R\rightarrow \infty$, de expresiones de la forma

$R^{-n+\beta}\int_{|x|\leq R} |\hat{\mu}|^2 dx$ donde $\hat{\mu}$ es la transformada de Fourier de μ.

Cuando μ es la medida de Cantor generalizada se obtiene también una cota inferior.
S. Thangavelu

URBANSKI M., The probability distribution and Hausdorff dimension of self-affine functions, Prob. Theory and Relat. Fields, 84,3(**1990**)377-391.
MR 91I: 58103

URBANSKI M., The Hausdorff dimension of the graphs of continuous self-affine functions, Proc. Amer. Math. Soc. 108,4(**1990**) 921-930.
MR 90g: 26004

1989

BANDT C., Self-similar sets 1. Markov shifts and mixed self-similar sets, Math. Nachr. 142(**1989**)107-123.
MR 90j: 54038
El autor discute las conexiones entre varias construcciones de conjuntos autosemejantes y conjuntos recurrentes, o compuestos, autosemejantes dados por F.M. Dekking [84e:52023], J. Marion [87c:28018] y el comentarista [87g:28004]. Estos conjuntos han sido considerados también por R.M. Mauldin y S.C. Williams [89i: 28003] y M. Barnsley et al [90e: 58081].
El autor prueba que un conjunto autosemejante combinado puede

considerarse como autosemejante con posiblemente una infinidad de contracciones.
T. Bedford

BANDT C., Self-similar sets 3. Constructions with sofic systems. Monatsh. Math. 108(1989)89-102.
MR 91m: 58050
Se da una generalización de la noción de conjunto autosemejante. En la construcción usual un conjunto autosemejante A en un espacio métrico compacto X se define por la ecuación $A=\bigcup_{i=1}^{m} f_i(A)$ donde los f_i son contracciomnes de X. Aquí el autor construye un vector de conjuntos $(C_1,\dots,C_n)$ definidos por n ecuaciones con m transformaciones, $C_i=\bigcup_{(k,j)\in Q_i} f_k(C_j)$, donde para cada i, $Q_j\subset\{1,\dots m\}\times\{1,\dots,n\}$. Se dan algunos ejemplos y la relación con el trabajo de F.M. Dekking [84e:52023] y el de T. Kamae [88i:26014]. Se calcula la dimensión de Hausdorff de una clase de tales conjuntos. Una aproximación similar fue usada por el comentarista para estudiar conjuntos recurrentes [87e:28004]. Otros autores han utilizado la misma aproximación para generalizar conjuntos autosemejantes, entre ellos se cuentan W.J.Gilbert [89a:11017], R.D.Mauldin y S.C.Williams [89i:28003] y M.F.Barnsley, J.H.Elton y D.P.Hardin [90e:58081].
T. Bedford

BARNSLEY M.F., **ELTON** J., **HARDIN** D., Recurrent iterated function systemas, Const. Approxim., 5(1989)8-31.
MR 90l: 58081
Sistemas iterados recurrentes, IFSs, se introducen como generalizaciones de IFS por Barnsley y Demko [87c: 58051]. La aplicación de un conjunto de aplicaciones $w_j:X\to X$, $j=1,\dots,N$, de un espacio métrico completo X, es dirigida por una cadena de Markov NxN con matriz de probabilidad de transición (p_{ij}). La órbita $(x_n)_0^\infty$ de un punto inicial x_0 y símbolo de partida i_0 es generada inductivamente eligiendo i_n para $n\geq 1$ con la probabilidad (condicional) que la $i_n=j$ sea $p_{i_{n-1}j}$. La iterada de x_{n-1}

es entonces $x_n = w_{i_n} x_{n-1}$.
Se prueba primero un teorema de convergencia y ergodicidad bajo una hipótesis de promedios contractivos. Luego, la clase de imágenes que pueden ser codificadas usando estas ideas se extiende con la demostración de un teorema "collage". La dimensión fractal de varios atractores IFS recurrentes se computa. Se dan finalmente aplicaciones a la teoría de conjuntos de Julia, fronteras de IFS, atractores y funciones de interpolación fractales.
A. Osbaldestin

BEDFORD T., Hölder exponents and box dimensions for self-affine fractal functions, Const. Approx. 5,1(1989)33-48.
MR 90f:26003
Las funciones fractales autoafines sugeridas para interpolación por Barnsley y Harrington se extienden permitiendo escalas no lineales. Para esta familia extendida de funciones fractales se obtiene un exponente de Hölder grande definido c.d. que agrega una cota superior - uno de los nuevos resultados del trabajo - a la relación entre la dimensión fractal box y los exponentes de Hölder viejos, h, y los nuevos, h_λ. Esta cota vale para afinidades lineales solamente si $h \leq 2-\dim_B \leq h_\lambda$. Como ocurre a menudo, el nuevo exponente hölderiano "no lineal" h_λ ayuda en el análisis del caso lineal para dar una expresión aplicable al caso lineal únicamente.
El caso no lineal es tratado explícitamente en la última sección donde se extiende la definición de funciones autoafines y se da una serie de lemas así como sus demostraciones sobre funciones relacionadas, medidas de probabilidad y dimensiones fractal y box. El trabajo incluye ejemplos gráficos y analíticos. En las demostraciones se usan herramientas del análisis funcional y la teoría ergódica.
Nima Geffen

BEDFORD T., On Weierstrass-like functions and random recurrent sets, Proc. Cambr. Phil. Soc. 106,2(1989)325-342.

MR 91c: 26010

BEDFORD T., The box dimension of self-affine graphs and repellers, Nonlinearity, 2,1(**1989**)53-71.
MR 90e:58091
La dimensión box de una cierta clase de conjuntos autoafines puede calcularse por una fórmula similar a la de R. Bowen [Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. #50(1979)11-25; MR 81g:57023] para la dimensión de Hausdorff de conjuntos autosemejantes. Ya que la dimensión de Hausdorff y la box no siempre son iguales para esta clase, es la dimensión box más que la de Hausdorff la que generaliza la fórmula de Bowen. El autor usa las técnicas de la singularidad del espectro.
Observación del revisor : la demostración de la continuidad de w en la proposición 1, p.57, no es clara.
H. Haase

BOREL J.P., Self-similar measures and sequences, J. Number Theory, 31,2(**1989**)208-241.
MR 90f:11064

DEVANEY R., An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley,(**1989**).
MR 91a:58124

DEVANEY R.L., **KEEN** L., Eds., Chaos and Fractals: The Mathematics behind the Computer Graphics, Proc. of Symposia in Applied Math., vol. 39, (**1989**).

DINARIEV O.Yu., **MOSOLOV** A.B., The property of self-similarity for subsets of R^n, Current Analysis and its Applications (Russian) "Naukova Damka", Kiev,220(**1989**)44-48.
MR 91d: 28017
En este trabajo los autores obtienen algunos resultados topológicos y geométricos respecto a la propiedad de autosemejanza para subconjuntos de R^n. Definiendo primero el *concepto de λ-centro* de un subconjunto A de R^n donde $\lambda\epsilon[0,1]$ prueban el teorema principal: Sea A un subconjunto cerrado de R^n formado por λ-centros, $\lambda=0,1$ o $\lambda\epsilon[\alpha,\beta]$, $0<\alpha\leq\beta<1$. Entonces, el

conjunto $A_0 \cup A_1$ de todos los 0-centros y 1-centros es denso en A. En particular, esta es la situación para fractales geométricos regulares.
A.Precupanu

DROBOT V., **TURNER** J.C., Hausdorff dimension and Perron-Frobenius theory, Illinois J. Math., 33,1(**1989**)1-9.
MR 90a:11097
Sea $x=\Sigma e(u,x)b^{-n}$ un número real en base $b\geq 2$. Dados dos enteros $0\leq c\leq r$ definimos el conjunto

$$T(c,r) = \{x: \sum_{j=1}^{r} e(n+j,x) \geq c,\ n=0,1,2,\ldots\}.$$

Definimos además una matriz M que en algún sentido selecciona los buenos cilindros. Entonces, dim T(c,r) = log r(M)/log 2 donde r(M) es el radio espectral de la matriz M. Los autores dan una prueba detallada usando las técnicas básicas de cubrimientos por intervalos. El resultado mismo se encuadra bastante bien en el contorno expresado en el teorema general de W. Stradner y el reviewer [Oesterreich Akad. Wiss. Math.-Natur.-Kl. S-B II 180(1972); MR 46:5277].
F. Schweiger

EDGARD G.A., Kieswetter's fractal has Hausdorff dimension 3/2, Real Anal. Exchange, 14,1(**1988/89**)215-223.
MR 90j:28003
El gráfico de la curva de Kieswetter es un ejemplo de un conjunto K satisfaciendo $K=\cup f_i(K)$ para ciertas contracciones $f_1,\ldots, f_m$. El problema de calcular la dimensión de Hausdorff de K fue planteado por el revisor. La aplicación usual del lema de Frostman falla porque las f_j no transforman cuadrados en cuadrados. En el caso de la curva de Kieswetter las transformaciones son afines cuya parte lineal es de alguna de las formas

$$x\to x/4\ ,\ y\to y/2 \quad \text{o bien} \quad x\to x/4,\ y\to -y/2.$$

En este trabajo se prueba que dim K = 3/2 analizando las intersecciones de K con rectas paralelas al eje x. Otra demostración fue dada por T.J. Bedford en su tesis "Crinkly

curves, Markov partitions and dimension", Warwick Univ. (1984); para trabajos relacionados ver N. Kono [Japan J. Applied Math., (3)2(1986)256-269; MR 88i:26013 and Bedford [Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 106,2(1989)325-342.
F.M. Dekking

FALCONER K.J., Dimensions and measures of quasi-self-similar sets, Proc. Amer. Math. Soc. 106,2(1989)543-554.
MR 90c:58013
La noción de *casi autosemejanza* fue introducida por J. McLaughlin [ver misma revista 100,1(1987)183-186; MR 88d:54054]. Asegura que se pueden sacar conclusiones sobre dimensiones que no están calculadas explícitamente. Se prueba que las dimensiones de Hausdorff y de entropía coinciden para espacios métricos compactos casi autosemejantes. Esto se aplica a repelentes dinámicos, conjuntos autosemejantes clásicos y construcciones de conjuntos autosemejantes grafodirigidos. Debe observarse que resuelve la pregunta de P. Diaconis y M. Shahshahani [Random matrices and their applications (Brunswick, ME, 1984)173-182, Contemp. Mathem. 50, AMS; MR 88d:60153]. El resultado fue obtenido independientemente por T. Bedford [Proc. of the Conference on Topology and Measure , V(Binz,1987) 17-26, Ernst-Moritz-Arndt-Univ. Greisfswald, 1988,; MR 91a: 58139] para la construcción por grafos dirigidos y por S.P. Lalley [Indiana Univ. Math.J. , 37,3(18988)699-710; MR89: h:28013] quien asumía la condición del conjunto fuertemente abierto, que es superflua.
H. Haase

GRAF S., The equidistribution on self-similar fractals. Preprint. Passau.

HAASE H., Measures on self-similar sets, 17th Winter School on Abstract Analysis, Acta Univ. Carolin.-Math. Phys.30,2 (1989)57-60.
MR 91c: 28016
Un conjunto $K \subset R^n$ se dice autosemejante si $K = \cup f_i(K)$ donde las f_i

son semejanzas. El autor considera la *medida s-dimensional de empaque* p^s sobre un conjunto autosemejante K siendo s un número que satisface $\Sigma r_i^s=1$ donde las r_i son las razones de semejanza de las f_i, y también una medida μ construída sobre K como producto de cierto proceso aleatorio que asigna una probabilidad p_i a toda f_i, $(\Sigma p_i=1)$. Se prueba en el trabajo que con cierta condición adicional natural la medida μ tiene una representación integral con respecto a p^s si y sólo si $p_i=r_i^2$ para todo i.
Esto abriría la posibilidad de relacionar la medida invariante μ con la medida de referencia p^s.
M.A. Martín

ITO Shunji, On the fractal curves induced from the complex radix expansion, Tokyo J. Math., 12,2,(**1989**)299-320.
MR 91d:11096
Sea α un entero cuadrático en $F=Z(\sqrt{-m})$ con norma $N=N(\alpha)$. W. Gilbert [MR 83m:12005] ha caracterizado los α en F tal que todos los enteros en F pueden escribirse unívocamente como $\sum_0^q a_k\alpha^k$, $a_k\epsilon\{0,1,...,N-1\}$. Este trabajo estudia el subconjunto

$$X_\alpha=\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k\alpha^{-k}:a_k\epsilon\ \{0,1,...,N-1\}$$

del plano complejo donde α satisface la única propiedad de representación mencionada. El conjunto X_α es compacto con una frontera complicada K_α. Se describe el conjunto K_α por medio de una sustitución (endomorfismo) sobre un grupo libre con dos generadores donde pueden ocurrir cancelaciones. El autor encuentra una sustitución sobre un grupo libre con tres generadores sin cancelación que aún describe K_α. Esto permite la determinación de la dimensión de Hausdorff de K_α.
F.M. Dekking

KAMEYAMA A., On the self-similar sets with frames, World Sci. Adv. Ser. Dyn. Syst. 7(**1989**)1-9.
MR 92g: 58030

KOVÁCS B., Integral domains with canonical number systems, Publ. Math. Debrecen 36,1-4(**1989**)153-156.

MR 91d:11137
Sea R un dominio integral, $\alpha\epsilon R$, $N_0=\{0,1,...,m\}$ para algún entero positivo m. $\{\alpha,N_0\}$ se denomina *sistema numérico canónico* si todo $r\epsilon R$ puede representarse unívocamente en la siguiente forma: $r=a_0+a_1\alpha+ \ldots +a_k\alpha^k$, $a_i\epsilon N_0$ para $i=0,1,...,k$, $a_k\neq 0$.
Teorema 1. Sea R de característica 0. En R existe un SNC si y sólo si R es isomorfo a $Z[\alpha]$ para algón elemento α que es algebraico sobre Q. *Teorema 2.* Sea R de característica p>0. Existe en R un SNC si y sólo si R es isomorfo a (Z/pZ)[x].
Y. Miyata

MASSOPUST P. R., Fractal Peano curves, J. Geom. 34,1-2 (**1989**)127-138.
MR 90f: 26004
Un número finito $f_1,...,f_m$ de contracciones de un espacio métrico completo X da origen a una función de conjunto F por $F(A)=\cup\{f_i(A):i=1,...,m\}$. La función F tiene un único punto fijo, a veces denominado atractor del IFS $\{f_1,...,f_m\}$. Aquí se prueba que ciertas curvas de Peano clásicas pueden obtenerse como atractores de IFS's.
F.M. Dekking

MILNOR J., Self-similarity and hairiness in the Mandelbrot set, Lecture Notes in Pure and App. Math. 114, Dekker(**1989**)211-257.
MR 90c: 58086
El autor discute en profundidad las propiedades de autosemejanza del conjunto M de Mandelbrot. Trata en detalle el producto de Douady-Hubbard asociado con inmersiones topológicas de M en sí mismo y describe una cota superior computable de la distancia de un punto al borde de M, útil para dibujar M. La *pelambrera* del título se refiere a la conjetura que sucesivas ampliaciones de M alrededor de un "punto generalizado de Feigenbaum" converge en medida a un conjunto denso en el plano pero con baja densidad en muchas (hairy) regiones. En tres apéndices discute puntos de Misiurewicz y árboles de Douady-Hubbard y da puntos super-estables.
W. Douglas

REYES M., An analytic study on the self-similar fractals: Differentiation of integrals, Collec. Math. 40,2,(**1989**)159-167.
MR 92a: 28007

STEIDL G., On symmetric radix representation of Gaussian integers, BIT 29,3(**1989**)563-571.
MR 90i:11015

STELLA S., On topology and dimensions of recurrent uniform Cantor sets, Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste, 21,2,232-247.
MR 93b: 28021 Zbl. Math. 758-28012

TRICOT C., Local convex hulls of a curve and the value of its fractal dimension, Real Anal. Exchange 15,2(**1989/90**)675-695.
MR 91c:28008
El autor da los fundamentos teóricos de un algoritmo para evaluar la dimensión de Bouligand-Minkowski de una gran familia de curvas planas. Se lo denomina el *método de la cápsula convexa local* y converge más rápido que, por ejemplo, el método para el cálculo de la dimensión de entropía (box-counting dimension).
Miguel Angel Martín

TRICOT C., Porous surfaces. Fractal approximation, Constr. Approx. 5,1(**1989**)117-136.
MR 90a:28012
El autor considera subconjuntos E del plano formados por "punching holes": $E=\bar{U}\setminus\cup C_n$ donde U y $C_n \subset U$ son homeomorfos al disco abierto y C_n tiene frontera suave. Un ejemplo típico de un conjunto de esta naturaleza es la carpeta de Apolonio. Se considera la *dimensión de Bouligand* $\Delta(E)$ de E:

$$\Delta(E) = \inf\{\alpha:\ 0 = \lim_{r\to 0} r^{\alpha-2}.\mathrm{area}\{x:\mathrm{dist}(x,E)<r\}\}$$

y el exponente de convergencia e para $\{\sqrt{\mathrm{area}(C_n)}\}$:

$$e = \limsup 2\log n \,/\, -\log \mathrm{area}(C_n).$$

Bajo varias hipótesis adicionales se prueba que $e\leq\Delta(E)$, $\Delta(E)\leq\max(e,1)$ o $\Delta(E)\leq e$. Se dan varios ejemplos y se discuten hipótesis suficientes más débiles así como extensiones de estos resultados a R^n, $n>2$.
W.D. Withers

VOSS R.F., Random fractals : self-affinity in noise, music, mountains and clouds, Fractals in Physics, Phys D 38,1-3 (**1989**)362-371.
MR 91c:00021

1988

BANDT C., Self-similar sets 4. Topology and measures. Wissenschaftliche Beitrage der Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Greiswald, (**1988**)8-16.
MR 91m: 58051 Zbl Math 779-54022

BARNSLEY M.F., Fractals Everywhere, Academic Press (**1988**).
MR 90c:58080

BERTOIN J., Sur la mesure d'occupation d'une classe de fonctions self-affines Japan J. Appl. Math., 5,3(**1988**)431-439.
MR 90c:26023
Este trabajo examina la *medida de ocupación* de una clase de funciones continuas autoafines en el sentido de T. Kamae [misma revista 3,2(1986)271-280; MR 88i:26014]. En particular se prueba que una tal medida debe ser o absolutamente continua o singular con respecto a la medida de Lebesgue. Se da una condición necesaria y suficiente para la absoluta continuidad. Con esta caracterización y la observación que estas funciones son funciones de Jarnik, el autor produce ejemplos de funciones de Jarnik cuyas medidas de ocupación son singulares con respecto a la medida de Lebesgue y por tanto responde por la negativa una cuestión propuesta por D.Geman y J. Horowitz [Ann. Prob. 8,1 (1980)1-67; MR 81b:60076]. Este interesante trabajo aparece simultáneamente con el trabajo estrechamente vinculado de N. Kôno [Japan J. App. Math. 5,3(1989)441-454].
Michael Evans

BOREL J.P., Suites et measures auto-similaires, Séminaire de Théorie des Nombres, (**1987-1988**), Talence, exp. #2, 16 pgs., Univ. Bordeaux I, Talence.
MR 90j:11074

El autor define una noción de autosemejanza para sucesiones con valores en [0,1] que está estrechamente conectada con la definición de conjuntos autosemejantes dada por Hutchinson.

DHAR D., Spectral dimension of Sierpinski gasket type fractals, J. Phys. A21,9(**1988**)2261-2263.
MR 89f: 28016
Sumario: "Se obtiene una fórmula explícita para la dimensión espectral de una familia fractal del tipo Sierpinski, estudiada por Borjan et al., usando el método de imágenes. Para grandes valores de su parámetro b la dimensión espectral es

$$\hat{d}(b) = 2 - (\log\log b)/\log b + \text{términos de orden } 1/\log b \text{ "}.$$

ELLIS D.B., **BRANTON** M.G., Non self-similar attractors of hyperbolic iterated function systems, Dynamical systems, Lecture Notes 1342(**1988**).
MR 90c: 58094

FALCONER K.J.,The Hausdorff dimension of self-affine fractals,I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,103(**1988**)339-350.
MR 89h:28010
Sumario : Si T es una transformación lineal sobre R^n con valores singulares $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$, la función a valores singulares ϕ^s está defnida por

$$\phi^s(T) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m^{\,s-m+1}$$

donde m es el menor entero mayor o igual que s. Sean $T_1,\ldots,T_k$ transformaciones lineales contractantes sobre R^n. Sea

$$d=\inf\{s;\Sigma\phi^s(T_{i_1}\ldots T_{i_r})<\infty\}$$

donde la suma es sobre todas las sucesiones finitas $(i_1,\ldots,i_r)$ con $1\leq i_j\leq k$. Entonces, para casi todo $(a_1,\ldots,a_k)\epsilon R^{nk}$, el único conjunto compacto no vacío F satisfaciendo

$$F=\bigcup_1^k(T_i(F)+a_i)$$

tiene dimensión de Hausdorff min{d,n}. Además la dimensión de entropía de F es casi seguramente igual a éste número.

FALCONER K.J., **MARSH** D.T., The dimension of affine-invariant

fractals, J. Phys. A 21,3(**1988**)121-125.
MR 89h:28009
Sumario: Se presenta una fórmula genérica para la dimensión de Hausdorff y la dimensión de entropía (box superior) de fractales autoafines. Se discuten extensiones a la situación no lineal y a repulsores en sistemas dinámicos discretos.

GRAF S., **MAULDIN** R.D., **WILLIAMS** S.C., The exact Hausdorff dimension in random recursive constructions, Memoires American Math. Soc. 381(**1988**).
MR 88k: 28010

KONO N., On self-affine functions II, Japan J. Appl. Math. 5,3 (**1988**)441-454.
MR 90c:26024
El autor considera funciones autoafines continuas parametrizadas como las definidas en la parte I [el autor, misma revista, 3,2 (1986)259-269; MR 88i:26013] y obtiene para ellas una representación como sumas infinitas. Prueba luego que la distribución de tales funciones es o absolutamente continua o singular con respecto a la medida de Lebesgue y obtiene condiciones necesarias y suficientes para la absoluta continuidad en cuyo caso identifica las funciones de densidad continuas. Este resultado interesante aparece simultáneamente con la caracterización dada por J. Bertoin [ibid. 5,3(1988) 431-439; MR 90c:26023]. Además el autor considera funciones continuas que llenan la superficie cuyas componentes consisten en dos funciones autoafines, como la curva de Peano [Math.Ann. 36(1890)157-160; Jbuch 22,405]. Luego ésta es comparada con la construcción dada por Hilbert [Natur. Ges. Bremen (1890), 11-12; Jbuch 22,406] la cual es obtenida por medio de una función autoafín en el sentido de T. Kamae [Japan J. Appl. Math. 3,2(1986)271-280; MR 88i:26014].
M. Evans

LAKHTAKIA A., **MESSIER** R., **VARADAN** V.K., **VARADAN** V.V., Fractal sequences derived from the self-similar extensions of the Sierpinski gasket, J. Phys. A 21,8(**1988**)1925-1928.

MR 89e: 11005

LALLEY S., The packing and covering functions of some self-similar fractals, Indiana Univ. Math. J., 39(**1988**)699-709.
MR 89h:28013
Se obtiene un número de resultados concernientes a la dimensión de Hausdorff, la dimensión box y la entropía métrica de tales conjuntos. En particular esas dimensiones son iguales si K satisface la condición del conjunto abierto fuerte. Además, bajo esa condición, la medida de Hausdorff sobre K puede obtenerse como límite débil de medidas obtenidas como medidas puntuales sobre conjuntos ϵ-separados maximales.
K. J. Falconer

MAULDIN R.D., **WILLIAMS** S.C., Hausdorff dimension in graph directed constructions, TAMS, 309,2(**1988**)811-829.
MR 89i:28003
Son bien conocidos métodos para calcular la dimensión de Hausdorff de fractales autosemejantes [ver J.E. Hutchinson, MR 82h:49026]. Esta teoría se extiende a una clase más general de fractales donde las semejanzas están gobernadas por un digraph con aristas rotuladas con las razones de semejanza. Se encuentra la dimensión de Hausdorff α de tales conjuntos y se prueba que su medida de Hausdorff α-dimensional es siempre positiva y σ-finita. La finitud de la medida depende de la estructura de orden de las componentes fuertemente conexas del digraph. Se dan ejemplos interesantes.
K.J. Falconer

MICHELACCI G., On a partial extension of a theorem of Falconer, Richerche Mat. 37,2(**1988**)213-220.
MR 91f:52002
En el plano euclídeo sea K un conjunto convexo, P un punto y $f(\Phi)$ la longitud de la cuerda de K a través de P que forma un ángulo Φ con algún eje fijo (*función cordal de K en P*). Un problema general consiste en determinar K por medio de las funciones cordales $f_i(\Phi)$ de algún número fijo de puntos P_i.

Para una clase bastante específica de conjuntos convexos planos K_o con relación a dos puntos dados P_1 y P_2, el autor prueba que si $K\epsilon K_o$ y $H\epsilon K_o$ tienen las mismas funciones cordales en P_1 y P_2 entonces K=H. Este resultado es una extensión de algunos casos considerados por K.J. Falconer [Proc. London Math. Soc. (3),46,2(1993)241-262; MR 85g:52001a]. Varios problemas permanecen sin solución en este cuerpo de ideas iniciado por Hammer y continuado por Velcic y Gardner entre otros. (Ver referencias en este trabajo y en el de Falconer).
L.A. Santaló

1987

ANNALS des SCIENCES MATHÉMATIQUES du QUÉBEC, vol. 11, #1(**1987**)
Dedicado al grupo de geometría fractal; contiene 11 trabajos revisados individualmente.

BEDFORD T., Hausdorff dimension and box dimension in self-similar sets, Proc. Topology and Measure V, Binz, G.D.R. (**1987**)17-26; Wissenschaftliche Beiträge der Ernst-Moritz-Arndt Universität, Greifswald, (**1988**).
MR 91a:58139
Conjuntos autosemejantes en R^n con varias componentes $E_1, ..., E_n$ se definen por ecuaciones $E_i = \cup\{\Theta_{ij}(E_i): a_{ij}=1\}$ donde (a_{ij}) es una matriz mxn irreducible de ceros y unos y cada Θ_{ij} es una *contracción conforme* (un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ cuya derivada es una semejanza con factor <1 en cada punto). Se supone que existen conjuntos abiertos $U_1, ..., U_m$, con $U_i \supseteq \cup\Theta_{ij}(U_j)$ y $\Theta_{ij}(U) \cap \Theta_{ik}(U) = \phi$ para j distinto de k. Para semejanzas Θ_{ij} tales conjuntos fueron considerados por Mauldin y Williams, el reviewer, el autor y otros [cf. the reviewer, Monatsh. Math. 108(1989)89-102; MR 84f:58095]. El autor generaliza estos resultados probando la fórmula de Bowen-Ruelle [cf. Ruelle, Ergodic Theory Dynamical systems 2,1(1982)99-107; MR 84f:58095] para la dimensión de Hausdorff en términos de la presión topológica. La medida de Hausdorff correspondiente es positiva y finita y la dimensión de entropía coincide con la dimensión de

Hausdorff. Para probar esta última, el autor utiliza técnicas del "espectro multifractal".
C. Bandt

BELAIR J., Sur le calcul de la dimension fractale, Ann. Sci. Math. Québec 11,2(1987)7-23.
MR 89a:26006
Se considera la construcción de curvas autoafines en el plano a partir de lo conocido del caso de la curva de Koch. (Para un contexto más general, cf. J.E. Hunchinson, Indiana Univ. Math. J. 30,5(1981)713,747).La parte principal trata el caso de funciones reales sobre [0,1]. Sea $a_i>0$, $a_1+...+a_d=1$, $|b_i|<1$, $b_1+...+b_d=1$, y $x_j:=\Sigma a_i$, $y_j:=\Sigma b_i$, $j=0,...,d$.
Así, $(x_0,y_0)=(0,0)$, $(x_d,y_d)=(1,1)$. Indiquemos con f_1 la función lineal a trozos a través de los vértices (x_0,y_0), ..., (x_d,y_d) y definamos inductivamente
$f_{n+1}(x_j+a_{j+1}t) = y_j+b_{j+1}f_n(t)$, $0\le t\le 1$, $j=1,...,d-1$.
Las funciones convergen a una función continua f.
Teorema 1. Si $a_i=1/d$, $b_i=\emptyset$, entonces f no es diferenciable.
La solución q de $\Sigma|b_i|^q=1$ se denomina el *parámetro de irregularidad* de f.
Teorema 2. Si $a_i=1/d$, $|b_i|=\beta$ entonces el gráfico de f tiene dimensión (Minkowski-Bouligand) $2-1/q=2-(\ln 1/\beta)/\ln d$.
Observación del revisor: desgraciadamente el trabajo contiene errores y misprints ... .
U. Zähle

FALCONER K. J., The Hausdorff dimension of some fractals and attractors of overlapping construction, J. Statist. Phys. 47(1987)123-182.
MR 88m: 58098
Sumario: Se introduce un método para probar que la dimensión de Hausdorff de construcción yuxtapuesta es "casi siempre" como la que se observa si no ocurre la yuxtaposición. El método también se usa para examinar la dimensión de atractores en algunas transformaciones no injectivas, lineales a trozos, del tipo

"baker".
S. Dubuc

GILBERT W.J., Complex bases and fractal similarity, Ann. sc. math. Québec 1,1(**1987**)65-77.
MR 89a:11017

Se dice que un complejo z está representado en base $b \in C$ usando dígitos $a \in D$ si $z = \sum_{-\infty}^{N} a_r b^r$, $a_r \in D$. D se dice *factible* si todos los números complejos tienen representación y si además todo entero gausiano tiene representación única con $r \geq 0$. Las únicas bases para las cuales existen conjuntos de dígitos factibles de números naturales son las de la forma $-n+i$, $-n-i$, para n entero positivo. Sea (b,D) una base junto a un conjunto factible. Consideremos el conjunto $S \subset C$ de números complejos cuya parte entera es 0 ($r<0$). Las trasladadas de S por enteros gausianos cuadriculan el plano complejo. S es un conjunto bastante complicado, es autosemejante. ∂S tiene aún una estructura más complicada ya que es "parcialmente" autosemejante. Un conjunto $K \subset R^n$ se dice *parcialmente autosemejante* si existen conjuntos K_1, $K_2, \ldots, K_t$, tales que $K = \bigcup_1^t K_i$ y $K_i = \bigcup_{\substack{i \leq j \leq t \\ 1 \leq k \leq w(i,j)}} \Theta_{ijk}(K_j)$, $i=,\ldots, t$, donde las Θ son contracciones. El autor discute varios ejemplos de conjuntos parcialmente autosemejantes y computa su dimensión.
M. Méndes France.

GRAF S., Statistically self-similar fractals, Prob. Theory Related Fields, 74,3(**1987**)357-392.
MR 88c:60038

LAKHTAKIA A., **VARADAN** V.K., **MESSIER** R. **VARADAN** V.V., Generalization and randomization of the plane Koch curve, J. Phys. A 20,11(**1987**)3537-3541.
MR 89b: 51028

MARION J., Mesures de Hausdorff d'ensembles fractals, Ann. sc. math. Québec, 11,1,(**1987**),111-132.
MR 88k:28011

Sea $\{\phi_{i1},\ldots,\phi_{i\mu(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de familias, $2<\mu(i)<\infty$, de semejanzas sobre R^n con razones $0<\rho_{ij}<1$. Supongamos que exista un conjunto abierto Θ tal que $\phi_{ij}(\Theta)\subset\Theta$ y $\phi_{ij}(\Theta)\cap\phi_{ij}(\Theta)$ es vacío.

Definamos: $E_n=\cup\phi_{1j_1}\cdots\phi_{nj_n}(\bar{\Theta})$ y llamemos $E=\cap E_n$ al conjunto de semejanza (perfecto) asociado al sistema (la unión es sobre todas las n-uplas $j_1,\ldots,j_n$). Observemos que si

$$\mu_i=\mu \ , \ \phi_{ij}=\phi_j \quad \text{para } j=1,\ldots,\mu,$$

se obtiene la clase principal, denominados conjuntos *isotópicos* por el autor, de los conjuntos de Hutchinson autosemejantes.

Sea $\qquad \pi(n,\beta)=\prod(\rho_{i1}^{\beta}+\ldots+\rho_{i\mu(i)}^{\beta}),\ \beta>0,\ n=1,\ldots,\infty.$

Sea α_n la solución de $\Pi(n,\alpha_n)=1$.

Teorema 1. $\dim_H E\leq\liminf \alpha_n$. Si $\inf_{ij} \rho_{ij}>0$ entonces $\dim_H E= \liminf \alpha_n>0$.

Para conjuntos isotópicos es posible obtener expresiones simples para $H^{\dim E}(E)$, cf. Ts. 3 a 5 y Hutchinson. En la situación general se tiene el Corolario 1 del Teorema 2:

Supongamos $\inf \rho_{ij}>0$, $\dim_H E=\alpha$. Entonces $H^{\alpha}(E)=0$ si y sólo si $\inf \Pi(n,\alpha_n)=0$. Si $\Pi(\infty,\alpha)=\infty$ e $\inf_{n<m} \prod_1^m \min\{1,\rho_{i1}^{\alpha}+\ldots+\rho_{i\mu(i)}^{\alpha}\}>0$ entonces $H^{\alpha}(E)=\infty$. Si $0<\liminf \Pi(n,\alpha)<\infty$ entonces $0<H^{\alpha}(E)<\infty$.

Ulrich Zähle

MAULDIN R. D., **GRAF** S., **WILLIAMS**. S. C., Exact Hausdorff dimension in random recursive constructions, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 84,12,(1987)3959-3961.

MR 88k: 28012

MCLAUGHLIN J., A note on Hausdorff measures of quasi- self-similar sets, Proc. Amer. Math. Soc. 100,1(1987)183-186.

MR 88d:54054

Un subconjunto no vacío S de un espacion métrico se dice *cuasi-autosemejante* si existe un $r_0>0$ tal que para cualquier esfera B de radio $r<r_0$ existe una función $\Phi:B\cap S\to S$ tal que

$$c_1 d(x,y) \leq rd(\Phi(x),\Phi(y)) \geq c_2 d(x,y)$$

para todo $x,y \in B \cap S$ donde c_1 y c_2 son constantes. El trabajo trae un demostración simple pero muy elegante que un conjunto casi-autosemejante de dimensión de Hausdorff d tiene medida de Hausdorff d-dimensional no nula. Se da un ejemplo para probar que un tal conjunto puede tener medida d-dimensional infinita.
K.J. Falconer

MIZUTANI M., **ITO** S., Dynamical systems on dragon domains, Japan J. Appl. Math., 4,1(**1987**)23-46.
MR 89c:58070
Este trabajo es una versión ampliada de un trabajo anterior sobre systemas dinámicos a tiempo discreto canónicamente asociados a desarrollos complejos en base i-1 y a las "revolving sequences" of David and Knuth's "paperfolding" algoritmo [ver Dynamical systems and nonlinear oscillations, Kyoto, 1985, 106-127, World Scientifiv Publication Singapore, 1986, MR 88a:58114]. Los autores hacen un análisis cuidadoso de los contornos fractales de los dominios de los sistemas dinámicos probando que los sistemas son isomorfos a los desplazamientos (de Markov o de Bernoulli) y dan un ejemplo de la construcción del dual (time reversal) de un tal sistema.
F.M. Dekking

TRICOT C., Dimensions aux bords d'un ouvert, Ann. sc. math. Québec, 11,1(**1987**)205-235.
MR 88j:28008
Sea $V \subset R^d$ un abierto acotado, $\partial V(\epsilon)=\{x:\mathrm{dist}(x,\partial V)\leq\epsilon\}$ y sea m(.) la medida d-dimensional de Lebesgue. Entonces
$\Delta_{int}(\partial V) = \inf\{\alpha:\ \epsilon^{\alpha-d}.m(\partial V(\epsilon)\cap V) \to 0,\ \epsilon \downarrow 0\}$
se denomina la *dimensión interior* de ∂V relativa a V. Obsérvese que la *dimensión superior de Minkowski* de un conjunto acotado E está definida por

$$\Delta(E) = \inf\{\alpha:\ \epsilon^{\alpha-d}.m(E(\epsilon) \to 0,\ \epsilon \downarrow 0\}.$$

a) Sea w_n el número de cubos de un reticulado diádico de lado 2^{-n} que están contenidos completamente en V pero que tienen por lo menos un vértice común con un cubo que toca a ∂V. Entonces,

$\Delta_{int}(\partial V) = \limsup_n \log w_n / \log 2^n$.

b) Sea m_ϵ el máximo número de esferas abiertas disjuntas de radio ϵ completamente contenidas en V pero con distancia cero a ∂V. Entonces

$\Delta_{int}(\partial V)=\limsup_n \log m_\epsilon / \log (1/\epsilon)$.

Luego, la sucesión $\{C_n\}$ de conjuntos abiertos disjuntos con $\cup C_n \subset V$, cl $\cup C_n$ = cl V, se dice un *empaque* de V. Indiquemos con c_n el diámetro de C_n. La *constante de empaque* se define por

$\rho(c_n) = \limsup_n \log n / \log (1/c_n)$.

Proposición 1. Si $c_n^d = O(|C_n|)$ y dist $(C_n, \partial V) = O(c_n)$ entonces $\rho(C_n) \le \Delta_{int}(\partial V)$.

Indiquemos el "área" (d-1)-dimensional de ∂C_n por a_n.

Proposición 2. Si $a_n=O(c_n^{d-1})$ entonces

$\Delta_{int}(\partial V) \le \max\{d-1, \rho(c_n)\}$.

Proposición 3. Sea $d = 2$, $E = \partial V \setminus \partial(\text{cl } V)$, $m(E) = 0$, $c_{n+1} \le c_n$, $\rho(c_n) < 1$.

Si las hipótesis de las proposiciones 1 y 2 se cumplen y si el número de componentes conexas de

$$\text{cl } V \setminus \text{cl } \bigcup_1^n C_i$$

es $O(n)$ entonces $\Delta(E) = \rho(c_n)$. El autor discute 10 ejemplos.

Ulrich Zähle

1986

BARNSLEY M.E., **DEMKO** S.G., Eds., Chaotic dynamics and fractals, Notes and Reports in Mathematics, Science and Engineering, Academic Press N.Y., vol.2 (**1986**).

MR

BEDFORD T., Dimension and dynamics for fractal recurrent sets, J. London Math. Soc. 33(**1986**)89-100.

MR 87g: 28004

Este trabajo está relacionado con uno de F.M. Dekking: "Recurrent sets: a fractal formalism" Report S82-32, Tech. Hogeschool Delf, Delft, (1982). Las definiciones básicas y la

terminología son tomadas de Dekking, entre otras, las nociones de *dimensión estimada (*), conjunto resoluble y endomorfismo esencialmente mezclante (mixing).* Usando la noción de *"well-matched recurrent set"* el autor prueba en su Teorema 3 que las siguientes condiciones son equivalentes:
1) K_Θ es resoluble; 2) $K_\Theta$es well-matched; 3) existe N>0 tal que card $\Pi^{-1}(x)\leq N$ para todo x donde Π es una transformación continua definida en el teorema 1. El teorema 5 describe el comportamiento de conjuntos que no son well-matched. El trabajo finaliza con el Corolario 8 que establece que

$$\dim K_\Theta(s) = \log \lambda_\epsilon/\log \lambda = \text{estimación } (*)$$

que da una respuesta completa a una conjetura de Dekking.
E. Wagner

DEVANEY R., Exploding Julia sets, Chaotic dynamics and Fractals, Academic Press (Eds. Barnsley and Demko)(**1986**)141-154.

FALCONER K.J., Random fractals, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 100,3(**1986**)559-582.
MR 88e:28005

GILBERT W.J., The fractal dimension of sets derived from complex bases, Can. Math. Bull., 29,4,(**1986**)495-500.
MR 88b:28014

Dado un entero positivo n, todo número complejo z se puede representar con respecto a la base -n+i en la siguiente forma

$$z = \sum_{-\infty}^{q} r_j(-n+i)^j$$

donde $q\epsilon Z$ depende de z y $r_j\epsilon\{0,1,...,n^2\}$. Esta representación no es única; puede haber dos o tres representaciones para un nómero z dado. Sea

$$[z] = \sum_{0}^{q} r_j(-n+i)^j$$

la parte entera de z. Para un entero gausiano dado, v, consideramos el conjunto $T(v)=\{z\epsilon C:[z]=v\}$. Para n=1 es el famoso dragón gemelo. La familia T(v), $v\epsilon Z[i]$, es un embaldosado del plano. Cada baldosa tieme área uno. El autor está interesado en la geometría de la frontera de los embaldosados. Su teorema principal extiende un resultado previo de B.B. Mandelbrot (n=1) (The Fractal Geometry of Nature, 1982, MR 84h:00021) que la dimensión de Hausdorff de la frontera es

$$2\log k_n/\log (n^2+1)$$

donde k_n es la raíz positiva de la ecuación de tercer grado

$$k^3-(2n-1)k^2-(n-1)^2k-(n^2+1)=0.$$

M. Mendès-France

GRÜNBAUM B., **SHEPARD** G.C., Tilings and patterns, Freeman, N.Y. (1986)
MR

KAMAE T., A characterization of self-affine functions, Japan J. Appl. Math., 3(1986)271-280.
MR 88i:26014
Sumario : Se da una caracterización de las funciones autoafines como funciones generadas por un autómata finito. También se prueba una clase de unicidad para representar una función autoafín. Se sigue que existe exactamente un número infinito numerable de funciones autoafines módulo multiplicaciones constantes.

KONO N., Hausdorff dimension of sample paths for self-similar processes, Progress in Prob. and Stat., Birkhäuser, 11 (1986)109-117.
MR 88k: 60079

KONO N., On self-affine functions,I. Japan J. Appl. Math. 3,2, (1986)252-269.
MR 88i:26013
Sumario : Definimos *funciones autoafines* cuyo ejemplo típico es la función componente de la famosa curva de Peano $(P_1(t), P_2(t))$ $0\le t\le 1$. Se obtiene la dimensión de Hausdorff y la dimensión de empaque del gráfico de una función autoafín bajo ciertas condiciones. Se prueba también que la función $P_1(t)-P_2(t)$ tiene *densidad de ocupación continua* con respecto al tiempo y al espacio que es el primer ejemplo de una función continua determinista cuya densidad ocupacional es continua con respecto

al tiempo y al espacio.

MANDELBROT B.B., Self-affine fractal sets.I. The basic fractal dimensions. Fractals in Physics (Trieste 1985), North-Holland, Amsterdam-New York, (1986)3-15.
MR 88e:51037a

MANDELBROT B.B., Self-affine fractal sets.II. Length and surface dimensions. Fractals in Physics (Trieste 1985), North-Holland, Amsterdam-New York, (1986)17-20.
MR 88e:51037b

MANDELBROT B.B., Self-affine fractal sets.III. Hausdorff dimension anomalies and their implications. Fractals in Physics (Trieste 1985), North-Holland, Amsterdam-New York, (1986)21-28.
MR 88e:51037c
En el primer trabajo de esta serie se explora la noción de dimensión fractal para varias curvas fractales o polvos que no son autosemejantes pero que son *diagonalmente autoafines*.
Una autoafinidad diagonal contrae las coordenadas en diferentes razones. Se prueba que, en contraste con la dimensión fractal única de los conjuntos estrictamente autosemejantes, son necesarias, en general, varias nociones distintas. Más importantes son los conceptos de dimensión obtenidos via la masa en la esfera y via cubrimientos por (boxes) rectángulos uniformes. Se encuentra que no importa que definición se toma pero sí importa cuando se interpola o extrapola. Aquí se obtienen dos dimensiones distintas. Una local, válida en escalas bien abajo, y una global, válida en escalas bien arriba de una cierta escala intermedia (*crossover scale*).
En el segundo trabajo se generaliza una estimación estándar de la dimensión fractal para curvas autosemejantes a curvas autoafines. Se prueba que para curvas autoafines este procedimiente conduce a un valor local y a un valor global, ambos doblemente anómalos.
En el tercer trabajo se puntualiza que para ciertos fractales autoafines construídos recursivamente la *dimensión de*

Hausdorff-Besicovitch, D_{HB}, toma un valor doblemente anómalo; es una fracción y es menor que D_{BL}= *dimensión box local*. Este fenómeno se discute en relación al concepto de fractal.
La definición de D_{HB} puede encontrarse en el libro de
B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature; MR 84h:00021.
La definición de D_{BL} aparece en la parte I de esta serie.
L. H. Kauffman

MARION J., Measure de Hausdorff d'un fractal á similitude interne, Ann. sc. math. Québec, 10,1,(**1986**)51-84.
MR 87h:28009
Un subconjunto compacto de un espacio euclídeo se dice compacto con *similitud interna* si admite una descomposición $E=\bigcup_{1}^{N}\Psi_i(E)$ donde Ψ_i es una semejanza o una antisemejanza. Un fractal con similitud interna es un compacto cuya dimensión de Hausdorff difiere de su dimensión topológica. El trabajo dá una condición necesaria y suficiente para que la medida de Hausdorff de ciertos fractales, denominados *isotópicos perfectos*, sea igual a su diámetro elevado a la potencia de su dimensión de Hausdorff.
B. Rodríguez-Salinas

MATTILA, P., Lecture Notes on geometric measure theory, Universidad de Extremadura, Badajoz, (**1986**).
MR 89e:49037

MAULDIN R.D., **WILLIAMS** S.C., On the Hausdorff dimension of some graphs, TAMS, 298(2)(**1986**)793-803.
MR 88c:28006
Del sumario : Definimos la función real
$$W_b(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}b^{-\alpha n}[\phi(b^n x+\Theta_n)-\phi(\Theta_n)]$$
donde $b>1$, $0<\alpha<1$, los Θ_n arbitrarios y ϕ tiene período uno. Se prueba que existe una constante $C>0$ tal que para b suficientemente grande la dimensión de Hausdorff de la gráfica de W_b está acotada por abajo por $2^{-\alpha-(C/\ln b)}$. Además, si una función f es Lipschitz convexa de orden α, esto es, si
$$f(x+\delta y)-(\delta f(x+y)+(1-\delta)f(x))\leq My^{\alpha} \text{ para } 0\leq\delta\leq 1,$$

entonces la gráfica de f tiene medida de Hausdorff $(2-\alpha)$-dimensional σ-finita. Estos resultados son aplicables a una gran variedad de funciones incluyendo la función no diferenciable de van der Waerden-Takagi y la clase de Zygmund Λ_α.
K.J. Falconer

MAULDIN R.D., **WILLIAMS** S.C., Random recursive constructions: asymptotic geometric and topological properties, TAMS 295,1, (**1986**)325-346.
MR 87j:60027

MIZUTANI M, **ITO**. S., A new characterization of dragon and dynamical systems, Tokyo J. Math. 9,2(**1986**)487-504.
MR 88d:11071
El artículo ilustra la conexión entre systemas dinámicos, teoría de números y geometría fractal. Los autores proponen nuevas construcciones de curvas tipo dragón basadas en endomorfismos y sus duales.
M. Mendès-France

TAYLOR S.J., **TRICOT** C., The packing measure of rectifiable subsets of the plane, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 99,2(**1986**)285-296.
MR 87b: 28008

TRICOT C., Dimensions de graphes, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 303,13(**1986**)603-612.
MR 88c: 28007

1985

BARNSLEY M., **DEMKO** S., Iterated function system and the global construction of fractals, Proc. of the Royal Society A 399 (**1985**)243-275.
MR 87c: 58051
Sean K un espacio métrico compacto y $w_1,\ldots,w_k$ una colección de transformaciones medibles de K. El caso en que las w_i son transformaciones continuas contractivas fue considerado por J. Hutchinson [82h: 49026]. Aquí hay un conjunto único

autosemejante compacto E tal que $\cup w_i(E)=E$. Dado un vector de probabilidad $p=(p_1,\ldots,p_n)$, $\Sigma p_i=1$, la transformación de $M(K)$, el espacio de probabilidades de Borel sobre K, dada por $v \to \Sigma p_i w_i{*}v$ tiene un único punto fijo μ que es atractivo para toda $v\in M(K)$ y cuyo soporte topológico es E. Los autores denominan a μ la (única) medida balanceada sobre E. Si no se requiere que las w_i sean continuas puede existir un vector de probabilidad p tal que si $f:K\to R$ es continua entonces también lo es $\Sigma p_i f\circ w_i$ y se puede entonces iterar medidas como más arriba. A un sistema de esta naturaleza se lo denomina IFS, *sistema iterado de funciones*. Un ejemplo importante es cuando $R(w,z)$ es un polinomio en w y z y las w_i son las soluciones para w en la ecuación $R(w,z)=0$. La construcción del IFS se generaliza a lo que se denomina un IFS con *condensación.* Tenemos ahora transformaciones $w_i:K\to K$ para $i=1,\ldots,n$ y también un subconjunto L de K que denominamos *conjunto de condensación.* El conjunto fractal E generado es el IFS generado por $w_1,\ldots,w_n$ junto con la clausura de $L\cup_n \bigcup_{i_1\ldots i_n} w_{i_1}\ldots w_{i_n}(L)$.

Asociado con el IFS hay un vector de probabilidad $p=(p_1,\ldots,p_n)$. Si se pone una medida de probabilidad σ sobre L entonces bajo la aplicación $v \to \Sigma p_i w_i{*}v + p_o\sigma$ cualquier medida de probabilidad converge a una medida p-balanceada única con soporte sobre E. En el caso en que las w_i son contracciones lineales o en el caso de un IFS con condensación se prueba que los momentos de una medida p-balanceada son calculables directamente a partir de las w_i. Finalmente se utiliza un ejemplo para mostrar como el conocimiento de los momentos de una medida particular puede dar una reconstrucción aproximada del conjunto que soporta la medida.

T. Bedford

BUMBY R.T., Hausdorff dimension of sets arising in number theory, Number Theory, (NY 1983/84), Lecture Notes in Mathematics 1135(1985)1-8, Springer.
MR 87a: 11074

CARLESON L., On the support of harmonic measure for sets of Cantor type, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.10(1985)113-123.
MR 87b: 31002

FALCONER K.J., The Geometry of Fractal Sets, Cambridge Univ. Press (1985).
MR 88d:28001

GROSSMAN E.H., Number bases in quadratic fields, Studia Sci. Math. Hungar., 20,1-4(1985)55-88.
MR 88m:11086

HATA M., On the structure of self-similar sets, Japan J. Appl. Math. 2,2(1985)381-414.
MR 87g: 58080

Un conjunto K se dice autosemejante si $K=\cup\Sigma\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ donde cada f_λ es una contracción debil de un espacio métrico completo y $\Lambda=\{1,2,\ldots,m\}$ o $\Lambda=N$. El autor investiga varias estructuras topológicas de conjuntos autosemejantes y analiza varios conjuntos y curvas patológicas clásicas usando la noción de autosemejanza.
T.Y. Li

HAYASHI S., Self-similar sets as Tarski's fixed points, Pub. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 21(1985)1059-1066.
MR 87f: 54065

El punto de partida de este trabajo es la publicación de J.E. Hutchinson [82h:49026] y M. Hata [86m:54056] sobre la existencia de conjuntos fractales autosemejantes. El autor reemplaza la aproximación anterior usando contracciones por una aplicación de punto fijo de Tarski para probar el siguiente teorema:
Sean $F_1,\ldots,F_n$ *endomorfismos continuos* de un espacio de Hausdorff conmpacto S. Existe entonces un conjunto X que satisface $X=F_1(X)\cup\ldots\cup F_n(X)$ y este X es no vacio y compacto. Más generalmente, si $\{A_1,\ldots,A_n\}$ es un cubrimiento compacto no vacio de S y $F_i:A_i\to S$ es continua entonces

$$X=F_1(X\cap A_1)\cup\ldots\cup F_n(X\cap A_n)$$

tiene una solución compacta no vacia máxima. Otras condiciones

son necesarias para la unicidad de X.
I.N. Baker

MANDELBROT B.B., Self-affine fractals and fractal dimension. Phys. Scripta 32,4(1985)257-260.
MR 87g: 58081

MANDELBROT B.B., On the dynamics of iterated maps.V. Conjecture that the boundary of the M-set has a fractal dimension equal to 2. Chaos, fractals and dynamics, (Guelph, Ont.). Lecture Notes in Pure and Applied Math. 98, M.Dekker, 98(1985)235-238.
MR 87e:58111

MANDELBROT B.B., On the dynamics of iterated maps.VI. Conjecture that certain Julia sets include smmoth components. Chaos, fractals and dynamics, Lecture Notes in Pure and Applied Math.,M. Dekker, 98(1985)239-242.
MR 87e:58112

MANDELBROT B.B., On the dynamics of iterated maps.VII. Domain-filling ("Peano*) sequences of fractal Fulia sets and an intuitive rationale for the Siegel discs. Chaos, fractals and dynamics, Lecture Notes in Pure and Applied Math.,M. Dekker, 98(1985)293-253.
MR 87e:58113

MARION J., Mesures de Hausdorff et théorie de Perron-Frobenius des matrices non-negatives, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35,4(1985)99-125.
MR 87c:28018
De la introducción: El principal objetivo de este trabajo es computar las medidas de Hausdorff de ciertos conjuntos perfectos de R^n los cuales extienden la noción de subconjunto perfecto homogéneo de R^n [cf. J.P. Kahane and P. Salem, Perfect sets and trigonometric series, Paris, (1963), MR 28:3279]. La estructura de un conjunto perfecto de este tipo especial depende de una matriz cuadrada con elementos enteros no negativos. Utilizamos la teoría de Perron-Frobenius de matrices no negativas para el cálculo.

1984

GILBERT W.J., Arithmetic in complex bases, Math. Mag., 57,2(**1984**)77-81.

MARION J., Dimension de Haudorff d'une courbe circulaire simple de von Koch, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 6,1(**1984**)21-24.
MR 85h:28009
B. B. Mandelbrot definió las curvas generalizadas de von Koch con un número n de razones desiguales r_m, $m=1,\dots,n$, [84h:00021]. La dimensión de semejanza se introduce como solución de la ecuación $\Sigma r_m^s=1$. El comentarista [84a:58060] conjeturó que cuando la curva es simple, la dimensión de semejanza coincide con la dimensión de Hausdorff-Besicovitch. El autor prueba que tal afirmación es cierta. Sus cálculos utilizan cómputos previos [80g:28009] de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch de algunos conjuntos perfectos del plano.
S. Dubuc

McMULLEN C., The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets, Nagoya Math. J., 96(**1984**)1-9.
MR 86h:11061
Dado $n \geq m$ y un conjunto R formado por pares de enteros (i,j) con $0 \leq i < n$ y $0 \leq j < m$ definimos

$$\bar{R} = \{(\Sigma x_k n^{-k}, \Sigma y_k m^{-k}) : (x_k, y_k) \in R \text{ para todo } k\}.$$

El autor calcula las dimensiones métrica y de Hausdorff de $\bar{R}$ obteniendo

$$\dim \bar{R} = \log_m(\Sigma t_j^{(\log_n m)}) \ , \quad t_j = \#\{i : (i,j) \in R\}.$$

Si $s=\#\{j:(i,j)\in R$ para algún $i\}$ y $r=|R|$ entonces

$$\text{m.dim } \bar{R} = \log_m s + \log_n(r/s).$$

El cálculo de la dimensión de Hausdorff de $\bar{R}$ responde a la pregunta de Hironaka respecto a la dimensión de una curva plana continua con ciertas autosemejanzas. El autor también estudia el caso en que las dos nociones de dimensión coinciden.
A.D. Pollington.

TRICOT C., A new proof for the residual set dimension of the Apollonian packing, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 96,3(1984)413-423.
MR 85j: 52022

1983

DEKKING F.M., On the distribution of digits in arithmetic sequences, Seminar on Number Theory (1982-83) Exp. 32, 12 p., Univ. Bordeaux I, Talence (1983).
MR 86h: 11009

Sea $n=\sum_{0}^{\infty} d_i p^i$ la representación de un número natural n en base p. Se investiga la suma de dígitos $s(p,n)=\sum_{0}^{\infty} d_i$ módulo p. Con $N(j,n;p,q)$ indicamos el número k<n tal que $s(p,qk)=j \bmod p$. Se sabe entonces que

$$N(j,n;p,q)=n/p + O(n^{\alpha}).$$

El autor considera los valores posibles mejores de α y la fluctuación de

$$N(0,n;2,q)-N(1,n;2,q).$$

Las curvas plotted por las sucesiones

$$Z(n;2,q)= \sum_{0}^{n-1} \exp(2\pi ik/q)(-1)^{s(k)}$$

son del tipo Koch.
F. Schweiger

DUBUC S., Courbes de von Koch et courbes d'Osgood, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 5,4(1983)173-178.
MR 85a:51016

GARDNER R.J., **MAULDIN** R.D., On the Hausdorff dimension of a set of complex continuous functions, Illinois J. Math., 27,2 (1983)334-345.
MR 84f: 30008

Sea B el conjunto de los nómeros complejos de la forma m+in donde $m,n\in Z$ y $m\geq n$. Los autores prueban que si $(b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots)$ es una sucesión de elementos de B, el desarrollo análogo al desarrollo clásico en una fracción continua, $1/b_1+1/b_2+\ldots$, converge en C y el conjunto imagen de B por la función así

definida tiene diemnsión de Hausdorff estrictamente entre 1 y 2. Esto contrasta con el resultado clásico de la equivalencia de las medidas de Gauss y Lebesgue.
G. Rauzy

MANDELBROT B.B., On the quadratic mapping $z \to z^2 - \mu$ of C to C for complex μ and z : the fractal structure of its $\mathcal{M}$-set and scaling, Order in chaos, (Los Alamos, NM, 1982). Phys.D7, 1-3(**1983**)224-239.
MR 85d:58065
Este trabajo es el mencionado en el siguiente como su parte II. La parte I está en (New York, 1979) Non Linear Dynamics, NY Acad. of Sci.,(1980)249-259.

MANDELBROT B.B., On the dynamics of iterated maps.III. The individual molecules of the $\mathcal{M}$-set, self-similarity properties, the empirical n^2 rule and the n^2 conjecture, Chaos, fractals and dynamics, Lecture Notes in Pure and Applied Math., M. Dekker, 98(**1981/83**)213-224.
MR 87e:58109

MANDELBROT B.B., On the dynamics of iterated maps.IV. The notion of normalized radical R of the $\mathcal{M}$-set and the fractal dimension of the boundary of R. Lecture Notes in Pure and Applied Math., M. Dekker, 98(**1981/83**)225-234.
MR 87e:58110

RUELLE D., Bowen's formula for the dimension of self-similar sets, Progress in Physics,7. Birkhäuser (**1983**)351-357.
MR 85d: 58051

1982

BUMBY R.T., Hausdorff dimensions of Cantor sets, J. Reine Angew. Math., 331(**1982**)192-206.
MR 83g: 10038
El trabajo describe un método muy interesante de calcular dimensiones y medidas de Hausdorff de conjuntos E de tipo Cantor definidos por las propiedades de fracciones continuas o

desarrollos en base g de elementos de E. Así, si E consiste de aquellos números cuyo desarrollo en base 4 no contiene el dígito 1, se prueba que la dimensión de Hausdorff de E es log 3/log 4. El método consiste en construir una matriz T, llamada *matriz de subdivisión,* la cual en esencia describe la construcción iterativa de E. La información relevante sobre la dimensión y la medida de E puede obtenerse estudiando los autovalores y autovectores de T. Esto se hace usando la teoría de Perron-Frobenius de matrices positivas.
V. Drobot

DEKKING F,M., Replicating superfigures and endomorphisms of free groups, J. of Combinatorial Th., Series A, 32(**1982**)315-320.
MR 84i:51019
Una *superfigura replicante* S es un conjunto del plano que puede ser dividido en k>1 réplicas todas mutuamente congruentes y similares a S. Un procedimiento general para construir tales conjuntos es decripto en L. Giles Jr., la misma revista, Ser. A, 26(1979)328-377; MR 80g:51013bc; S.W. Golomb, Math. Gazette 48(1964)403-412, para bibliografía.
E. Jucovic Zbl 492:05019.

DEKKING F.M., Recurrent sets, Advances in Math., 44(**1982**)78-104.
MR 84l:52023
El autor introduce un método poderoso para describir y generar curvas que llenan el espacio, gráficas de funciones nunca diferenciables continuas, conjuntos de Cantor y estructuras relacionadas. A menudo tales conjuntos pueden ser definidos como límites en la métrica de Hausdorff, A=lim $L^{-n}A_n$, donde L es una transformación lineal (comúnmente una transformación de escala), los A_n son conjuntos compactos unión finita de trasladados de un número finito de conjuntos básicos (en general segmentos de recta). Con estos conjuntos básicos se puede asociar un alfabeto S y a los conjuntos A_n palabras sobre S, es decir elementos del semigrupo S* generado por S. Típicamente, la palabra asociada con A_n puede escribirse como $\Theta^n(W)$ donde Θ es un endomorfismo de S*, Θ^n es la n-ésima iteración de Θ y W es una palabra. En este

trabajo el autor revierte el problema. Dado un endomorfismo Θ de un semigrupo libre y una palabra, él asocia con las palabras $\Theta^n(W)$ conjuntos compactos K_n de R^d para algún $d\geq 1$ de forma tal los conjuntos K_n convergen en la métrica de Hausdorff a algún $K_\Theta(W)$. Los conjuntos $K_\Theta(W)$ se denominan *conjuntos recurrentes*. Las dimensiones topológicas de los conjuntos K_n y $K_\Theta(W)$ son diferentes. Ejemplos clásicos son la curva de Peano y el conjunto de Cantor. Un argumento de cubrimientos muestra que los conjuntos recurrentesw $K_\Theta(W)$ tienen determinadas dimensiones topológicas y de Hausdorff intrínsecas. 18 ejemplos de la literatura sobre curvas que llenan el espacio y estructuras relacionadas son clasificadas por medio de varios conjuntos recurrentes. La bibliografía al final del trabajo es bastante extensa. Sin embargo debe ser agregado el trabajo de E.H. Moore, TAMS, 1(1900)72-90, Jbuch 31,564.
S. Milne

GILBERT W.J., Fractal geometry derived from complex bases, Math. Intelligencer 4,2(1982)78-86.
MR 83m:10092
Es un trabajo elemental, introductorio, expositorio, sobre la representación geométrica y algebraica de números complejos en enteros gausianos. La geometría de estas representaciones involucra a la dimensión de Hausdorff. El trabajo está acompañado con gráficos. La figura 1 tiene una columna extra de cuadrados sobre la derecha que oscurece un poco la simetría de la figura. Propiedades ergódicas de tales representaciones han sido discutidas previamente por R. Fisher [MR 50#9826].
W.A. Beyer

GILBERT W.J., Complex numbers with three radix expansions, Can. J. Math., vol. XXXIV, 6(1982)1335-1348.
MR 85c:11013
I. Kátai y J. Szabó [MR 52:10590] probaron que todo número complejo tiene una representación en base -n+i usando los enteros $0,1,...,n^2$ como dígitos. Existen en general una cantidad

no numerable de números con dos o más de tales representaciones. En este trabajo el autor caracteriza comnpletamente todos los números con tres representaciones para una base dada y describe cuando tres representaciones diferentes definen el mismo número. Geométricamenmte, los puntos en el plano complejo con dos o más desarrollos con diferente parte entera están en la frontera de una región copo de nieve alrededor de cada entero gausiano. Una tal frontera es una curva fractal, Estas curvas fractales han sido discutidas por el autor [Math. Intelligencer 4(1982)2,78-86; MR 83m:10092].
L.C. Eggan

MATTILA P., On the structure of self-similar fractals, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, Math., 7,2(**1982**)189-195.
MR 84j:28011
Una función $S: R^n \to R^n$ se denomina similitud si para algún r con $0<r<1$, $|Sx-Sy|=r|x-y|$ para todo $x,y \in R^n$. J. E. Hutchinson probó que a cualquier familia finita $\sigma=\{S_1,\ldots,S_n\}$ de similitudes de R^n le corresponde un único conjunto compacto $K \subset R^n$ tal que $K=\cup S_i(K)$. Si m es un entero positivo $0<m<n$ y σ satisface ciertas condiciones de separación entonces la intersección de K con cualquier subvariedad C^1 m-dimensional tiene medida m-dimensional cero. En este trabajo se prueba que bajo una condición de separación ligeramente más fuerte la dimensión de Hausdorff de tal intersección es siempre a lo sumo $m-\epsilon$ donde ϵ depende solamente de σ.
V.P. Soltan

1981

DEKKING F.M., On the structure of self-generating sequences, Seminar on Number Theory (1980-81), Exp.31, Univ. Bordeaux, Talence (**1981**).
MR 83e: 10075

DEKKING F.M., **MENDÈS FRANCE**, M, Uniform distribution modulo one: a geometrical viewpoint, J. Reine Angew. Math., 329(**1981**) 143-153.

MR 83b: 10062

GILBERT W.J., Geometry of radix representations. The geometric vein, edit. by Ch. Davies, B. Grümbaum and F.A. Sherk. Springer, 598pgs.(**1981**)129-139.
MR 83j: 12001
El propósito de este trabajo es mostrar las relaciones entre la geometría y la aritmética de las *representaciones radicales* (*radix representations*) de cuerpos numéricos algebraicos. Se prueba que estas representaciones conducen a una variedad de curvas y superficies fractales de dimensiones superiores.
H. London

GILBERT W.J., Radix representations of quadratic fields, J. of Math. Analysis and App., 83,(**1981**)264-274.
MR 83m:12005
El autor determina el conjunto completo de enteros algebraicos ρ en cuerpos cuadráticos para los cuales todos los elementos del anillo $Z[\rho]$ tienen desarrollos (radix expansions) $\sum_0^M a_i\rho^i$ finitos donde los dígitos a_i son extraídos del conjunto $\{0,1,...,N-1\}$ y N es la norma de ρ. Si ρ tiene polinomio minimal $x^2+p_1x+p_0$ ellos son exactamente aquellos ρ con $p_0 \geq p_1 \geq -1$. El autor da un algoritmo para encontrar el desarrollo de un $\alpha \epsilon Z[\rho]$ que generaliza un algoritmo "clearing" descripto por F. Faltim et al. [Adv. in Math. 16(1975)278-304, MR 52 #362]. Estos resultados generalizan aquellos de I. Kátai y J. Szabó para el anillo Z[i] de los enteros gausianos. Establece conjeturas para otros cuerpos de números y para números ρ algebraicos no enteros. Un problema relacionado es el de representar enteros usando conjuntos de dígitos no estándars en lugar de los estándars $\{0,1,...,n-1\}$. Esto fue hecho para los enteros por A.M. Odlyzko [MR 80m:10004]. Otras referencias pueden encontrarse en el trabajo de D.W. Matula [Applied Computation Theory: analysis, design, modeling, pp. 374-448, Prentice Hall, N.J.(1976), MR 58 #14024].
J.C. Lagarias

HUTCHINSON J.E., Fractals and self-similarity, Indiana U. Math.

J., 30(1981)713-747.
MR 82h:49026.

El término fractal introducido por B. Mandelbrot refiere a clases de conjuntos con autosemejanza estricta o estadística. El conjunto usual de Cantor es un ejemplo de estricta. Tales conjuntos frecuentemente son de tipo Cantor con dimensión de Hausdorff no entera. Mandelbrot y otros han utilizado estos conjuntos extensivamente para modelar varios fenómenos de física y biología. Mandelbrot, típicamente, ha obtenido sus ejemplos de fractales estrictamente autosemejantes por construcciones ad hoc basadas en polígonos y procedimientos iterativos apropiados. Es la tesis presentada aquí por el autor (con éxito en la opinión del comentarista) que la mejor forma de considerar un fractal es como una colección finita $S=\{S_1,\ldots,S_N\}$ de aplicaciones contractivas. El fractal $|S|$ es determinado por el requerimiento que $|S|=\cup S_i(S)$ ($|S|$ no necesariamente determina S unívocamente). En los ejemplos publidados por Mandelbrot cada S consiste en una semejanza de R^n (la composición de una isometría con una homotecia). Uno puede así clasificar todos los posibles fractales estrictamente autosemejantes y quizá pensar en construir un atlas (P.E. Oppenheimer en su senior tesis Princeton, 1979, obtuvo una generación por computadora de un atlas de parte de una componente del espacio de parámetros y con dramáticos resultados). Para el conjunto de Cantor habitual uno puede tomar $n=1$, $N=2$ y S_1,S_2 semejanzas que preservan la orientación con 0 y 1 como puntos fijos respectivamente y razones de contracción 1/3. Entre los resultados básicos del trabajo están los siguientes:

1) Sea X un espacio métrico completo y $S=\{S_1,\ldots,S_N\}$ un conjunto finito de contracciones sobre X. Existe entonces un único conjunto cerrado y acotado $|S|$ tal que $|S|=\cup S_i(S)$. Además $|S|$ es compacto y la clausura del conjunto de puntos fijos de composiciones finitas $S_{i(1)}\cdot\ldots\cdot S_{i(p)}$ de miembros de S. Además, para un conjunto arbitrario no vacío, cerrado y acotado $A\subset X$, $S^p(A)$ tiende a $|S|$ en la métrica de Hausdorff. Aquí

$S(A) = \cup S_i(A)$, $S^p(A)=S(S^{p-1}(A))$.
2) Supongamos adicionalmente que $r_1,\ldots,r_n \in (0,1)$ con $\Sigma r_i=1$. Existe una única medida regular de Borel $\|S,r\|$ de masa total 1 tal que $\|S,r\|=\Sigma r_i (S_i)_* \|S,r\|$. Además, spt $\|S,r\| =|S|$. Resultados adicionales del trabajo muestran en algunos casos como asociar una cadena (flat) plana m-dimensional a S (m es un entero) aun cuando $|S|$ no tenga dimensión entera. El autor también examina relaciones entre dimensión de semajanza y dimensión de Hausdorff y entre $\|S,r\|$ y la medida de Hausdorff. Finalmente da condiciones que garantizan que $|S|$ es puramente no rectificable.
F.J. Almgren

MENDES FRANCE M., **TENENBAUM** G., Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, Bull. Soc. Math. France, 109(**1981**)207-215.

MR 82k: 10073
Los autores introducen una noción de dimensión para una curva plana, no acotada localmente, rectificable. Esta noción mide de alguna manera la forma en que una curva llena, más o menos, el plano. A título de ejemplo, la dimensión de la espiral de ecuación polar $\rho=\Theta^\alpha$, $\alpha>0$, es igual a min $(2,1+1/\alpha)$. Demuestran enseguida que la dimensión de ciertas lineas poligonales planas asociadas a las sucesiones infinitas de $\{-,+\}^N$, lineas obtenidas plegando el papel, es igual a 2 (valor máximo posible de la dimensión) pese a que en virtud de un resultado de C. Davis y D. Knuth (J. Recreat. Math. 3,2 (1970)66-81, ibid. 3,3(1970)133-149) estas lineas son simples.
G. Rauzy

1980

COLLET P., **ECKMANN** J.P., Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Birkhäuser, Boston,(**1980**).

TRICOT C.Jr., Rarefaction indices, Matematika 27,1(**1980**)46-57.
MR 81j: 28005

1979

GILES Jack Jr., Infinite-level replicating dissections of plane figures, J. Comb. Theory, Ser.A, 26(**1979**),3,319-327.
MR 80g:51013 a

GILES Jack Jr., Construction of replicating superfigures, J. Comb. Theory, Ser.A, 26(**1979**),3,328-334.
MR 80g:51013 b

GILES Jack Jr., Superfigures replicating with polar symmetry. J. Comb. Theory, Ser.A, 26(**1979**),3,335-337.
MR 80g:51013 c

Comentario conjunto de a,b y c. Una figura que está formada por k figuras similares a ella, llamadas *réplicas*, se dice que es *replicante de orden k*. En este trabajo (a) el autor da muchos ejemplos donde las réplicas son figuras congruentes. No hay teoremas sobre resultados generales y conceptos tales como "niveles de disección" necesarios para la comprensión del trabajo. En b se demuestra que superfiguras conexas acotadas por supercurvas son posiblemente replicantes de orden k donde k es cualquier entero real mayor que cero. La definición de Martin Gardner de supercurva como una curva que es nunca diferenciable es usada pero no está definida una superfigura. c contiene una demostración de un procedimiento del que resultan "superfiguras con doble simetría polar y replicantes de cualquier orden k", k>1.

Cyril W.L. Garner

1978

ODLYZKO A.M., Non negative digital sets in positional number systems, Proc. London Math. Soc. (3)37(**1978**)213-229.
MR 80m:10004

Sea b>1 entero. Un conjunto finito D se dice *posible* si para todo número real r existe un entero N y números $a_i \epsilon D$ tales que $r = \pm \sum_{-N}^{\infty} a_i b^{-i}$ (no se requiere unicidad). El autor determina los posibles D bajo la restriccion que los elementos de D sean reales no negativos. Se obtienen todos mediante la siguiente construcción: se toma cualquier entero positivo k y subconjuntos $E_0,\ldots,E_k$ de $\{0,1,\ldots,b-1\}$ con la propiedad que

$$E_0+\ldots+E_k=\{0,1,\ldots,b-1\},\quad |E_0|.|E_1|.\ \ldots\ .|E_k|=b,\quad 1\epsilon E_0.$$

Se toma cualquier real positivo α y se define

$$D=\alpha E_0+\alpha bE_1+\ldots+\alpha b^k E_k$$

Si D es un conjunto con menos enteros positivos que b entonces el conjunto de los representables tiene medida cero. Si D es un conjunto de exactamente b enteros positivos y si D no es posible, el conjunto de los r representables no tiene necesariamente medida cero.

N.G. de Brujin

1977

MANDELBROT, B.B., Fractals: Form, chance and dimension, Freeman R. Co., (1977), San Francisco.
MR 57: 11224

1975

KÁTAI I., **SZABÓ** J., Canonical number systems for complex integers, Acta Sci. Math.(Szeged)37(1975)255-260.
MR 52 #10590

Los autores plantean la cuestión de si dado un entero gausiano Θ, es posible representar todo entero gausiano α en la forma :

(*) $$\alpha = r_0 + r_1\Theta +\ldots+ r_k\Theta^k$$

Aquí $r_j\epsilon U$, donde U es un sistema completo de residuos módulo Θ. Si la respuesta es afirmativa, diremos que (Θ,U) es un *sistema numérico*. Los autores estudian únicamente el caso $U=U_0$, donde $U_0=\{0,1,\ldots,N(\Theta)-1\}$ y $N(\Theta)=\Theta.\bar{\Theta}$. Se sabe, D.E. Knuth [44#3531], que si $\Theta=-1+i$, (Θ,U) es un sistema numérico. Los autores prueban los siguientes resultados:

(Θ,U) es un sistema numérico si y sólo si *Re* $\Theta<0$, *Im* $\Theta=\pm 1$; para $\Theta=-A\pm i$, la representación de α de la forma (*) es única. Sea $\Theta=-A+i$, z arbitrario, entonces

(**) $$z = a_1\Theta^1+\ \ldots\ +a_0+a_{-1}/\Theta+a_{-2}/\Theta^2+\ \ldots\ ,\quad a_j\epsilon U_0.$$

La unicidad de la representación de z en la forma (**) no está asegurada.
J.M. Gandhi

1970

DAVIS C., **KNUTH** D.E., Number representations and dragon curves, J. of Recreational Mathematics, 3,66-81(**1970**)133-149.
MR

1904

Von **KOCH** H., Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction geométrique élémentaire, Ark. Mat. Astr. Fys. 1 (**1904**)681-704.