INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 60

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1997 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 60

MANUAL PARA USUARIOS DE LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Edgardo L. Fernández Stacco

Mónica I. García Zatti

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1997

MANUAL PARA USUARIOS DE LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Compilado por:
Edgardo L. Fernández Stacco
Mónica I. García Zatti

Bahía Blanca, Diciembre 1997

CONTENIDO

INTRODUCCION

La afición por los libros y las bibliotecas nació con mis primeros pasos en un pequeño pueblo de la provincia de Buenos Aires, Nicolás Levalle, del cual sólo queda la estación de trenes. Tan abandonado está que aún no la han saqueado, como en otros lugares.

Mi madre, doña Carmen, era a la sazón directora y única maestra para los seis grados de ese entonces. Viviendo dentro de la escuela, el aula era el lugar obligado de los juegos, después de las horas de clase. Así comencé tempranamente a leer cuanto libro estuviera en las dos bibliotecas de madera y posteriormente a forrarlos -con papel araña-, colocarle el número y atender su préstamo a los compañeros. Como toda escuela rural tenía un sólo salón que, a la llegada de una nueva maestra, fue separado por un tabique. Ya en Bahía Blanca comencé a frecuentar la Biblioteca Rivadavia, pero únicamente como lector.

Con la creación de la Universidad y la llegada de Antonio Monteiro, fundador de la Biblioteca del Instituto de Matemática, varios alumnos comenzamos a interesarnos por las tareas de ayudar al desarrollo del Instituto y del Departamento. La preocupación de Monteiro por la formación de una biblioteca era inmediata a la preocupación por la gente y su desarrollo, a la que daba primera prioridad.

Fue así que aprendimos a manejar el Mathematical Reviews, haciendo fichas de los temas de nuestro interés, leyendo los comentarios y calificándolos A, B ó C, de acuerdo con la opinión de los comentaristas. La organización de la sección canje de publicaciones sumó también muchos esfuerzos, y hoy es uno de los orgullos de nuestra biblioteca.

Siempre tuvimos el presentimiento de que la biblioteca no era usada cabalmente. No todos los alumnos y muchos profesores se acercan hasta ella y, a veces, ante la mucha información que contiene, optan por solicitar los libros más conocidos.

Es por ello que siguiendo la organización de un libro excelente: *Use of Mathematical Literature*, editado por A. R. Dorling y publicado por Butterworths, hemos acometido la tarea de compilar distintas facetas que hacen a la mejor utilización de la información que puede obtenerse, y que creemos serán de utilidad para estudiantes, aquellos que comienzan sus estudios de posgrado, profesores (excluidos lógicamente aquellos que buscan algo muy especial en su tema de investigación), a aquellos que atiendan la ventanilla de préstamos que pueden sugerir su consulta ante las innumerables preguntas que deben responder a diario y a todos aquellos que tienen que manejar la literatura matemática o están interesados en la estructura de la matemática.

Este compendio consta de la traducción de los 14 capítulos del libro, al que se le han agregado algunas actualizaciones.
Los autores de los capítulos traducidos son:

J. Frank Adams, M. A., Ph.D., F.R.S., Lowndean Professor of Astronomy and Geometry, Trinity College, Cambridge.

Norman L. Biggs, B.A., Royal Holloway College, University of London.

Susan Brookes, B.Sc., Diploma of the New Zealand Library School, formerly British Library, Science Library, London.

James M. Brown, M.A., M.Sc., The University of Manchester Institute of Science and Technology.

Paul M. Cohn, M.A., Ph.D., Professor of Mathematics, Bedford College, University of London.

Alison R. Dorling, B.A., A.L.A., formerly British Library, Science Reference Library, London.

Ivor Grattan-Guiness, M.A., M. Sc., Ph. D., Middlesex Polytechnic, Enfield.

Wilfrid, A. Hodges, M.A., D. Phil., Belford College, University of London.

A. Geoffrey Howson, M.Sc., Ph.D., F.I.M.A., University of Southampton.

Rhys Price Jones, M.A., M.Sc., Royal Holloway College, University of London.

Geoffrey T. Kneebone, M.Sc., Ph.D., Reader in the Foundations of Mathematics, Beldford College, University of London.

Peter McMullen, M.A., Ph.D., University College London, University of London.

Peter M. Neumann, M.A., D.Phil., The Queen's College, Oxford.

Alan R. Pears, M.A., Ph.D., Queen Elizabeth College, University of London.

Ian N. Sneddon, O.B.E., M.A., D.Sc., Simson Professor of Mathematics, University of Glasgow.

S. James Taylor, B.Sc., Ph.D., Professor of Pure Mathematics, University of Liverpool.

Se han agregado los puntos:

Capítulo 2: puntos 2.6 y 2.7.
Capítulo 3: Zentralblatt für Mathematik. Indices.
Capítulo 4: punto 4.17 y apéndices 1, 2 y 3.
Capítulo 7: Handbook of Combinatorics y Puestas al día.
Al final: apéndices 4 y 5.

Al final de cada capítulo se ha agregado el material que contiene la Biblioteca del Instituto de Matemática y que a nuestro juicio debe incorporarse al listado original. Para facilitar su ubicación todo libro aparece con su número de registro.

El libro será útil también para aquellos que -pienso en estudiantes avanzados, o en graduados con desviaciones muy pronunciadas- quieren en una primera lectura saber, por ejemplo, que es la teoría de grupos. Todos los capítulos han sido escritos por especialistas y realmente recomiendo su lectura.

Hay algunas omisiones. El libro debería incluir, por lo menos, capítulos de Análisis General, Geometría Diferencial, Análisis Armónico, Análisis Numérico y Estadística, y referencias a cuestiones más actuales como Conjuntos Borrosos (Fuzzy Sets) y Fractales. Esperamos poder incorporarlos más adelante, con la colaboración de colegas del Departamento de Matemática. También en algunos casos la actualización puede ser insuficiente, pero hemos preferido dar por terminada aquí la primera parte. Es una deuda pendiente.

Quiero agradecer especialmente el trabajo ordenado y paciente de la profesora Mónica García Zatti, quien realizó innumerables citas bibliográficas, volcó a la computadora toda la información y realizó innumerables correcciones. Sin su colaboración, este trabajo nunca se hubiera realizado.

No puede faltar el agradecimiento al "alma mater" de nuestra biblioteca Leticia Giretti, quien es capaz de encontrar el dato más difícil y lo hace con alegría, y al apoyo logístico de Silvia Arroyo quien, pese a sus innumerables ocupaciones, siempre se hace un momentito para estar cuando la precisamos.

Nuestro reconocimiento a la profesora Aurora Germani, vicedirectora del Instituto de Matemática, quien nos facilitó el trabajo y los medios para realizarlo.

Las sugerencias serán bienvenidas y la observación de los muchos errores que seguramente se han deslizado, y de los que soy único responsable, ayudarán a mejorar la próxima edición.

Edgardo L. Fernádez Stacco
Bahía Blanca, Diciembre 1.997

CAPITULO 1: EL PAPEL DE LA LITERATURA EN MATEMATICAS (A. R. DORLING)

1.1. INTRODUCCION:

En Oxford era conocida la siguiente historia: había que diseñar un nuevo edificio en el cual el director del Departamento de Matemática debía tener una oficina importante. Cuando le preguntaron que deseaba contestó que sólo un recuadro con arena. La sorpresa fue general, pero él explicó que era la mejor forma que tenía para trabajar, ya que las cosas pueden alterarse fácilmente. Mucho más fácil que en el pizarrón, una idea puede ser sugerida, manipulada y que concuerde con otras. La historia bien puede ser apócrifa, pero aclara por contraste la naturaleza estática de la palabra escrita, y sugiere una de sus funciones: el guardar una idea ya trabajada en su forma definitiva. Pero ninguna pieza escrita queda archivada en esencia. El trabajo (paper) que establece la prioridad en alcanzar un nuevo resultado, hace que éste sea conocido por otros y que lo incorporaren a futuros desarrollos. En comparación con el recuadro de arena (arenario), que puede no ser la mejor manera de comunicar un resultado, el hecho de que esté impreso es un paso importante y potencialmente puede alcanzar una audiencia más importante a aquella que la que se puede llegar a través de gestos o tradición oral.

Hay relativamente poco trabajo escrito que examine la efectividad de la literatura matemática como medio de comunicación. La Unión Internacional de Matemática (cf. sección 2.2) trató el problema y aconsejó el intercambio de comentarios entre revistas de comentarios de trabajos de forma tal de ampliar el marco de lo que está ocurriendo a partir de una única fuente. La Sociedad para la Matemática Industrial y Aplicada (SIAM) organizó un simposio, editado por I. E. Block y R. F. Drenick: "A symposium on the publication of the mathematical literature" (*SIAM Review*, 6, 431-454, 1.964). Desde entonces el patrón de la literatura obtenible ha sido alterado substancialmente, por ejemplo, por la provisión por parte de la American Mathematical Society de una publicación de conocimiento general y del notable incremento de los títulos de acceso al *Mathematical Reviews* (cf. sección 3.3). El incremento de la literatura matemática ha sido discutido por A. J. Lohwater en "Mathematical Literature" (*Library Trends*, 15, 852-867, 1.967).

Han sido desarrolladas técnicas para investigar aspectos de las prácticas de publicación, y para abarcarlas se acuñó la palabra "bibliometría". En el contexto de nuestro trabajo, la técnica más interesante es la asociada con la distribución de Bradford-Zipf. Esta proviene de la observación de la dispersión entre las revistas consideradas de los trabajos citados en las bibliografías. El estudio estadístico de las distribuciones citadas hace posible predecir el tamaño de una bibliografía si se completa, y lo que es más útil, nos permite decir que proporción de los trabajos está cubierta por las n-revistas más productivas. Es el efecto de concentración descripto por la distribución de Bradford-Zipf, lo que la hace razonable para el servicio de Reproducción Matemática (cf. sección 2.3), que cubre solamente 60 revistas, y para el Science Citation Index (cf. sección 3.3), aunque este concierne con la totalidad de las ciencias y varias áreas y llega a cubrir un poco menos de 300 revistas, una pequeña proporción del total publicado. El mismo efecto se opera en relación con las revistas de matemática rusas que son traducidas lo que es cómodo para la mayoría de los matemáticos que no conocen el idioma ruso. Un rápido examen de las bibliografías en los capítulos de este libro sugiere que una relación similar existe entre libros y editores que entre trabajos y revistas, y que si uno quiere registrar los detalles del editor de libros nuevos a partir de un pequeño número de editores, uno puede estar informado de la mayoría del material nuevo que sea relevante. Un comentario y bibliografía está dada por R. A. Fairthorne, "Empirical hyperbolic distributions (Bradford-Zipf-Mandelbrot) para descripción y predicción bibliométrica" (*Journal of Documentation*, 25, 319-343,1.969). Una explicación posible del mecanismo detrás de la distribución (en un contexto mucho más amplio que el de la bibliometría) fue sugerido por G. Scarrott, "Will Zipf join Gauss?" (*New Scientist*, 16 may, 402-404, 1.974).

Debemos agregar que el capítulo 2 no trata de identificar un grupo principal de las revistas matemáticas más famosas. Junto con el crecimiento de la publicación de revistas especializadas (cf. sección 2.7), este grupo depende del área temática en la cual uno está trabajando. Y esto es también algo que cambia con el tiempo.

1.2. LA APROXIMACION DEL AUTOR A LA LITERATURA:

La inclusión relativamente reciente de nuevos temas de acceso mencionados en la introducción (en términos de la vida del *Mathematical Reviews*) pudo haber ocurrido debido a que la provisión del índice de temas no era adaptable a la computarización (cf. sección 2.3); pero sugiere que no existía una necesidad suficientemente fuerte para tal herramienta. Para encontrar cuales son los resultados últimos en un campo particular, se trata de seguir las huellas de los trabajos de un pequeño grupo de personas que trabajan en ese tema. Nuevamente la razonabilidad de tal aproximación puede estar relacionada con el efecto Bradford-Zipf: uno no trata de identificar o seguir las huellas de todo lo que se publica en ese tema, solamente las cosas "importantes". La publicación del *Science Citation Index* (cf. sección 3.3) ha facilitado la identificación de quienes trabajan en problemas particulares identificando aquellos autores cuyas bibliografías incluyen un trabajo conocido y relevante. Haciendo una búsqueda rápida y encontrando que autores han citado a estos autores, se puede trazar un cuadro del trabajo realizado: la posibilidad de clausurar el conjunto de los autores es de interés teórico más que práctico.

La aproximación del *Science Citation Index* es interesante, pero puede ser tediosa, y requiere de un punto de partida. Bibliografías que cubren un área temática limitada están mencionadas en la sección 3.4, y por supuesto los volúmenes de colecciones de comentarios del *Mathematical Reviews* en áreas temáticas particulares (cf. sección 2.3; referencias 12, 77, capítulo 9; sección 3.1) son ejemplos valiosos. Sin embargo, a menos que una bibliografía tenga un tiempo muy restringido de desarrollo, no es la forma más útil para identificar a la gente que trabaja en ese tema. Es más útil, si uno puede encontrar, una conferencia reciente en el tema, esto está discutido en la sección 1.3. Alternativamente, si uno conoce a partir de una bibliografía que un matemático particular ha contribuido sustancialmente en ese campo, aumenta la posibilidad de un homenaje con trabajos de investigación de gente activa en las áreas en las cuales él ha contribuido (cf. referencia 106, capítulo 12).

Mientras que el conocimiento de los autores apropiados puede permitirnos reemplazar la búsqueda de un tema por la búsqueda de un autor, los resultados de ambos no son los mismos. La aparición de un trabajo del mismo autor sobre diferentes temas (por lo menos en la confección del catálogo, revista de comentarios o bibliografía que uno consulta) sugiere relaciones entre aquellos temas que no aparecen como inmediatamente relacionados, a menos que uno esté familiarizado con el tema. La sección de autores del índice de este libro puede utilizarse en esta forma para ampliar el cuadro dado en un capítulo particular.

El *Referativnyi Zhurnal Mathematika* (cf. sección 3.3) aconseja la aproximación al autor de un tema buscado siguiendo el nombre en el índice de autores por un número líder en la sección apropiada del índice temático. Como la sección 3.3 clarifica, el *Referativnyi Zhurnal* es una herramienta manejable para uso de los que no hablan ruso. Es comparado con el *Mathematical Reviews* en el trabajo de A. J. Lohwater mencionado antes.

1.3. CONFERENCIAS:

Una conferencia (congreso, simposio, etc.) vista desde el punto de vista de un delegado es una cosa muy diferente a la misma conferencia vista por el lector de un trabajo publicado en el mismo, un punto de vista que es enfatizado por el extracto siguiente de una introducción al *Intuitionism and proof theory* (editado por A. Kino, J. Myhill y R. E. Vesley), North-Holland, Amsterdam (1.970) (cf. referencia 29, capítulo 6), el cual incluye los "trabajos" de la conferencia que tuvo lugar en Buffalo, New York, en 1.968:

> "Hay algunas discrepancias entre la lista de trabajos que contiene este libro y aquellos actualmente leídos en la conferencia. En particular, Takeuti dio un curso de teoría de la demostración, y Troelsta diez sobre intucionismo; las clases de Takeuti serán publicadas en forma más ampliada por North-Holland y las de Troelsta se han publicado recientemente como volumen 95 en la serie Lecture Notes de Springer ("Principies of Intuitionism"). El trabajo de Gilmore ... fue retirado porque el sistema presentado era inconsistente y uno de Sabbagh ... porque sus resultados fueron encontrados en el último minuto incluidos propiamente en McKay; *J. Symb. Logic* 33 (1.968), 258-264. Los trabajos de Krasner ...y De Jongh ... no fueron recibidos en tiempo para su inclusión en este volumen. Un trabajo de Hull ... fue aceptado para su publicación en el *Zeitschrift für Mathematische Logik* antes de que la conferencia tuviera lugar (Zeitschrift für Mathematische Logik 15, 1.969, 241-246). El trabajo de Kleene ... no fue aceptado por su longitud; apareció como el número 89 de *Memoirs of the American Mathematical Society* (1.969). El trabajo XX de Feferman contiene solo una parte del material presentado en la conferencia. El resto está contenido en un manuscrito que circula privadamente...".

Ambos, el delegado y el lector, se benefician identificando quienes contribuyeron en un campo particular, y para el delegado la parte informal de la conferencia, fuera de las sesiones formales de clase, pueden ser de mucho valor, más que las clases mismas, al menos en una proporción que a lo mejor no comprende en un principio. La cita confirma que la fuente escrita es el lugar donde consultar sobre los resultados establecidos. También sugiere los problemas que acarrea la publicación de las Actas de una conferencia y hace que el material de la conferencia sea más difícil como información que como artículos de revistas. Las Actas deben publicarse como una unidad en un tiempo dado, mientras que la combinación de artículos en un número de una revista es fortuito. El resultado de esto es que las Actas son menos útiles que el mismo material producido en artículos separados.

Por otra parte, no hay seguridad de que las Actas en forma de libro sean comentadas como el material de las revistas, algo que fue puntualizado por el informe del sub-comité ad-hoc de la UNESCO ("The flow of information from international scientific meetings", *UNESCO Bulletin for Libraries*, 24, 88-97, 1.970), que recomienda la producción de Actas como números especiales de revistas. Una solución a medio camino entre esto y la publicación de un volumen aislado es la aparición de las Actas en una serie de monografías bien establecida. "Lecture Notes in Mathematics" (cf. sección 2.9) ha probado ser un lugar para las Actas de muchas conferencias, las cuales probablemente no hubieran visto la luz del día, y los editores de la serie mantienen una política editorial que asegura la completitud del material.

El sub-comité ad-hoc de la UNESCO plantea otros puntos de interés. Uno es la necesidad de que los trabajos sean sometidos a referato antes de ser publicados, no simplemente incluidos porque hayan sido presentados en la conferencia. Cuando los trabajos son por invitación estos deben ser incluidos (en particular si hay preprints de la conferencia, material producido por delegados, etc.; cf. sección 1.4); el problema se plantea con los trabajos presentados por los participantes. Por ejemplo, las "Lectures Notes" no aceptan para su publicación los resúmenes de comunicaciones. Esto está bien, ya que en general no han sido sometidos a referato previo.

Otra recomendación del sub-comité de la UNESCO es que las conferencias internacionales pueden hacer un servicio incalculable encargando comentarios críticos sobre algún tema. La función educativa que esto sugiere es a menudo acometida en forma diferente pero agregando un seminario o clases a un congreso (como ocurrió con la conferencia sobre intucionismo y teoría de la demostración). Esta es la ventaja desde el punto de vista de los organizadores de la conferencia que hace más fácil el obtener financiamiento para realizarla.

En el caso de la conferencia de intucionismo y teoría de la demostración, la introducción dice donde podemos encontrar el material no incluido en las Actas, pero la publicación de los trabajos presentados en la conferencia en más de un lugar complica las cosas y sugiere la necesidad de dar la mayor información posible para encontrar todo lo relativo a esa conferencia en particular. Un ejemplo para las referencias en este libro está dada por la conferencia sobre combinatoria editada M. Hall Jr. y J. H. van Lint (cf. referencia 29, 38, 94 y 101, capítulo 7; referencia 37, capítulo 9). *Mathematical Centre Tracts*, 55-57 (1.974) contiene trabajos dados en las tres primeras de las seis secciones de la conferencia y no mencionan la aparición de las Actas en forma de libro.

1.4. MATERIAL NO PUBLICADO:

Los materiales de las conferencias son útiles como una compacta fuente para obtener un cuadro de situación de como va un campo particular y quienes están trabajando en él, pero al publicarse ya pueden estar obsoletos. Cuando la actualización es importante, el material no publicado es muy valioso. Este es de dos tipos, aunque la frontera entre ambos es a veces muy estrecha. El primero es material de investigación. Esto incluye borradores para comentarios, los que son accesibles lógicamente a un grupo muy reducido y preprints de conferencias que se entregan a delegados. En este último caso, el material con el tiempo llega a ser obtenible a través de su publicación en revistas o en Actas. Sin embargo, si uno sabe donde tiene lugar la conferencia y no puede asistir, se puede solicitar copia a los organizadores o información de donde será publicado. Material de investigación no publicado puede resultar de seminarios dados en universidades o institutos de investigación.

Es este último tipo de material el que se adapta a la segunda categoría: lectures notes de carácter expositor producido por departamentos de matemática o institutos para llenar las necesidades de sus estudiantes. Estos están a medio camino entre monografías y artículos de revistas, y caen en áreas en los que no hay bibliografía conseguible. Como regla, este material se consigue por pedido. La dificultad es conocer su existencia. Hasta el volumen 6 (5) del *Contents of Contemporary Mathematical Journals* (cf. sección 3.3), la American Mathematical Society publica listas de nuevo material de este tipo, conseguible a través de un número de universidades canadienses y americanas- por ejemplo, Carleton Lecture Notes y Carleton Mathematical Series (cf. referencias 9 y 64, capítulo 8). En la clasificación que reemplaza a la lista de revistas por revistas de contenidos y que continua en el *Current Mathematical Publications*, no se puede buscar específicamente por este tipo de material. El mismo tipo de material no es publicado generalmente en las Actas de las conferencias, aunque uno puede esperar que los editores sigan el ejemplo de aquellos de *Intuitionism and proof theory* (cf. sección 1.3) e indicar donde se puede encontrar.

Es fácil establecer la existencia de material no publicado de seminarios avanzados o lectures notes, del conocimiento de un matemático particular que visite la universidad, o de reuniones que se realicen para seminarios y otras reuniones similares. Hay en Francia un número importante de tales seminarios: el seminario Bourbaki aparece ahora en Lectures Notes in Mathematics (cf. sección 2.9). Otros, como el seminario del Instituto de Matemática de la Universidad de Estrasburgo (referido al final del capítulo 10 y en la referencia 84, capítulo 11), el seminario Dubreil del Instituto Henri Poincaré (referencias 126 y 143, capítulo 8) y el seminario Cartan de la Escuela Normal Superior (referencias 75, 80 y 81, capítulo 11), pueden obtenerse a partir de las organizaciones que los publican.

Prefiero excluir las tesis de la categoría de material no publicado, ya que son publicadas en algunos países y en otros en una u otra forma encuentran un final en la imprenta. Cuando se requiere una búsqueda completa, por ejemplo, para evitar duplicación en la búsqueda de algún tema, puede ser utilizado material como el *Dissertation Abstracts* (University Microfilms, Ann Arbor) y el *Indice de Tesis aceptado para grados superiores en las universidades de Gran Bretaña e Irlanda* (Aslib, London).

1.5. LIBROS:

El énfasis en este capítulo ha sido puesto en como conseguir o enterarse de resultados de investigación recientes. Pero por supuesto, este no es el único uso que puede darse a la literatura matemática. Recién hemos mencionado la importancia del material de carácter expositorio que se puede encontrar entre las notas no publicadas de las universidades. Sin embargo, en general, si uno está buscando material de ese carácter, puede esperar encontrarlo en forma de libro. Ya hemos sugerido en la introducción de este capítulo que una forma de estar al día en lo que se está publicando es buscar los detalles de los editores a partir de un pequeño grupo de ellos. En la mayoría de los casos estos detalles están dados en el resumen de contenidos de cada libro, de forma tal que el nivel del libro pueda determinarse razonablemente bien. Ahora, el *Current Mathematical Publications* tiene un clasificador (cf. sección 1.4), y no es posible aplicarlo para libros como *Contents of Contemporary Mathematical Journals* y *New Publications*, que lo precede. Una vista sipnótica de publicaciones de libros se obtiene mejor a partir del *Internationale Matematische Nachrichten* (cf. sección 2.2) que tiene una sección listando los nuevos libros país por país, seguido de una sección de comentarios (los comentarios están en alemán).

Una categoría particular de libros que ameritan alguna mención son las colecciones de trabajos de matemáticos. Así como los trabajos en las conferencias que aparecen en más de un forma (cf. sección 1.3), estos pueden dar lugar a referencias que son difíciles de seguir; las bibliotecas son a veces reluctantes a tener el mismo material más de una vez. Cuando una biblioteca no tiene revistas publicadas antes de un determinado año, una referencia a un trabajo puede conseguirse viendo cuando fueron publicados los trabajos completos del autor. La situación opuesta, cuando la referencia es a los trabajos completos y no indica la fuente original del trabajo, puede ser un caso difícil de resolver. Fuentes alternativas para bibliografías de los trabajos de un matemático en particular son los homenajes, jubileos y obituarios, tales como los que se publican en la *London Mathematical Society. Bulletin* o, para matemáticos rusos, *Russian Mathematical Surveys* (cf. sección 2.4). En último término, una biografía (cf. sección 3.5) puede proveer también una bibliografía.

1.6. TENDENCIAS FUTURAS:

La literatura particular que usamos es a menudo el resultado de la suerte: un colega nos da la noticia de un artículo en una revista que no tenemos el hábito de revisar, y encontramos allí otras cosas que nos interesan; o un editor viajero que nos llama la atención sobre un libro nuevo e importante, y pedimos comprarlo (a la bibliotecaria o lo adquirimos nosotros mismos) sin tener que esperar a que aparezca la propaganda, o el comentario en alguna revista especializada, o recibir el catálogo que todavía periódicamente envían las principales editoriales (aunque esta fuente no es del todo confiable, ya que según los editores, sus libros son lo mejor y lo más actualizado). Cuando la suerte no ayuda, el uso de las bibliotecas y los servicios de informaciones es el mejor de los hábitos que se pueden tener, pero la conformación de la literatura es cambiante, y para hacer uso efectivo del material es esencial estar alerta a los cambios. Dos ejemplos mencionados en el capítulo siguiente son los cambios del sistema de referees hacia la comunicación vía editores y el desarrollo de revistas especializadas en áreas restringidas (cf. sección 2.7). Una carta de J. B. Conway en el *Notices* de la American Mathematical Society, 23 (1) (enero 1.976) puntualiza que, como referee él no estaba generalmente informado de si seguían sus recomendaciones, y simplemente a veces se le enviaba una separata del trabajo.

Ha habido cambios en el campo de la publicación de revistas que son de importancia. Si el número de suscripciones debe restringirse debido a dificultades financieras por la que pasan la mayoría de las bibliotecas, las revistas cuya cobertura es más limitada son las candidatas a ser más afectadas que aquellas de una cobertura más amplia, simplemente porque la audiencia potencial es menor. El suscriptor personal debe sopesar el valor que tiene para él una revista especializada, contra el valor de pertenecer a una sociedad. Como miembro de una sociedad, puede recibir una o más publicaciones de la misma como parte de su suscripción a un precio considerablemente más barato que las revistas producidas comercialmente. Factores como estos deben tenerse en cuenta cuando uno elige la revista para enviar un trabajo. Aunque no hay dudas que es cierto que existe un grupo sustancial de revistas que cubren la mayoría del trabajo en un tema en particular, la membrecía de este núcleo puede cambiar.

CAPITULO 2: PRINCIPALES ORGANIZACIONES Y REVISTAS (A. R. DORLING)

2.1 INTRODUCCION:

Como la fuente primaria de información para el matemático debe ser el artículo de una revista, es el propósito de este capítulo considerar un número importante de organizaciones matemáticas y sus roles como productores de literatura y comentar algunos hechos generales de las publicaciones periódicas de matemática.

Ante ello, es necesario considerar las herramientas que puedan usarse para trazar la existencia de revistas periódicas (formas de localizar artículos son descriptas en secciones 3.3 y 3.4). Las referencias a los artículos de revistas frecuentemente dan el título de las revistas en forma abreviada (los títulos completos se dan aquí en las referencias), y están en uso un número de sistemas diferentes de abreviación. En el futuro, las observaciones estarán regidas por dos estándares, aconsejados por la International Standards Organization:

ISO 4; *Documentación-Código Internacional para la abreviación de títulos de revistas periódicas (1.972).*

ISO 833; *Documentación-Lista internacional de títulos de revistas, abreviaciones (1.974).*

La lista es actualizada cada seis meses, mediante suplementos publicados por la International Serials Data System (ISDS) de París.

La única fuente útil para encontrar una abreviación no familiar es el índice del *Mathematical Reviews*, que cada año da una lista de las revistas cuyos artículos fueron comentados ese año. La lista está en orden alfabético de abreviaciones, dando el título completo y lugar de publicación (esto último es importante para evitar las confusiones entre revistas de títulos similares). Las Actas, revistas periódicas, etc., de sociedades, institutos y otras instituciones similares no están listadas según la institución: los proceedings de la *London Mathematical Society* aparecen como *Proc. London Math.*. Mientras que las diferencias en la abreviación no ocasionan en general una enorme diferencia en orden de los títulos, pueden ocurrir problemas cuando se consideran distintos tipos de transliteración de títulos no romanos. Aquí el *Mathematical Reviews* ayuda poniendo a continuación de la lista de revistas periódicas, la tabla comparativa de las transliteraciones del Cirilico usadas por ellos mismos (ellos adoptaron el sistema utilizado por el *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete), Bulletin Signalétique, Applied Mechanics Reviews, Science Abstracts, The Library of Congress and the Journal of Symbolic Logic.*

Cuando más información es necesaria sobre una revista, la fuente que da la más completa es el *Ulrich International Periodicals Directory*, Browker, New York. Esta es una clasificación bajo entradas principales, con un título índice alfabético. La sección matemática no es muy grande, pero se incluye referencias a otras revistas importantes en otras secciones. La información cubierta incluyen el número de serie Standard International (un único número de ocho cifras identificando números asignados por el centro ISDS), traducción del título para títulos extranjeros, idioma(s) del texto, año de la primera publicación, asociación patrocinante, nombre del impresor, dirección, editor y las revistas de comentarios que cita.

2.2. UNION MATEMATICA INTERNACIONAL. IMU:

Fue un sentimiento creciente durante la última década del siglo 19 que era necesaria alguna forma de agrupar internacionalmente a los matemáticos. En 1.896 los matemáticos de el Eidgenössische Technische Hochschule de Zürich formaron un comité para organizar un congreso y enviaron invitaciones en enero para una reunión en agosto en Zürich. En la reunión se adoptó el nombre de "Congreso Internacional de Matemáticos" y la Sociedad Matemática de Francia aceptó organizar el congreso siguiente. Este tuvo lugar en 1.900, y de allí en más el congreso se realizó cada cuatro años, con un paréntesis desde 1.912 hasta 1.920 (cuando comenzó una nueva serie de congresos), y otra interrupción desde 1.936 a 1.950 por motivo de la segunda guerra.

Antes del congreso de 1.950, 22 llegados de otros tantos países se encontraron y redactaron un borrador de la constitución para una "Unión Matemática Internacional", que fue presentado en el congreso y se aprobó formalmente. La intención de la UMI fue promover la cooperación internacional auspiciando el Congreso Internacional de Matemáticos y otras actividades internacionales, como la ayuda al desarrollo de la matemática pura y aplicada o promover la educación matemática. Oficialmente su existencia data de septiembre de 1.951, tiempo en que diez países adhirieron (Gran Bretaña a través de la Royal Society). La primera asamblea general tuvo lugar en 1.952 con ayuda financiera de la UNESCO y en el mismo año la UMI se afilió al Consejo Internacional de Uniones Científicas (ICSU), una asociación que recibía financiamiento de la UNESCO y tenía status consultivo vis-a-vis varias organizaciones de las Naciones Unidas tales como la Agencia Internacional de Energía Atómica y la Organización Mundial de la Salud.

Una de las preocupaciones de la asamblea general de 1.952 de la UMI fue la de publicar un boletín internacional de noticias matemáticas. Los medios que posibilitaron este propósito fueron provistos por la Unión Matemática de Austria. El *Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft* de Viena, fundado en 1.947 y retitulado *Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* en 1.949, no solamente contenía las noticias de las reuniones de la sociedad, comentarios de libros y artículos de miembros, etc., que uno puede esperar en una publicación de novedades de una sociedad nacional de matemática, si no que también contenía noticias sobre congresos, sociedades y matemáticos universitarios de todo el mundo. A partir de 1.951, esta sección se llamó *Internationale Mathematische Nachrichten: International Mathematical News: Nouvelles Mathématiques Internationales*. La asamblea coincidió en 1.952 en negociar un contrato con la Sociedad Matemática Austríaca para continuar su publicación en forma más conveniente a las necesidades de la UMI. El título en tres idiomas fue el título principal a partir de 1.962, y de allí en adelante las noticias de la UMI fueron publicadas en inglés o en francés, los idiomas oficiales de la UMI, con un apartado de noticias internacionales de la Sociedad Austríaca en alemán.

En el caso del Congreso Internacional de Matemáticos (CIM), tampoco la UMI tiene los recursos para actuar como su propio editor, pero tiene la responsabilidad de conseguirlo. En consecuencia, los proceedings de los congresos sucesivos tuvieron diferentes editores y aparecieron en diferentes intervalos después de los congresos que tuvieron lugar. El resultado es que algunas bibliotecas trataron al *International Congress of Mathematicians. Proceedings* como una revista (y referencias a los proceedings en este libro se hace pensando en esta revista), tanto bajo su título en inglés, o en su forma francesa: *Congrés International des Mathématiciens. Actes*; otros publicaron un libro único. Para ayudar a seguir la huella de los *Proceedings* en esta forma, los congresos posguerra fueron:

1950 Harvard, 2 vols, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1.952).
1.954 Amsterdam, 3 vols., Noordhoff, Groningen; North-Holland, Amsterdam, (1.954-1.957).
1.958 Edinburgh, Cambridge University Press, Cambridge, (1.960).
1.962 Stockholm, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, (1.963)
1.966 Moscow, Mir, Moscow, (1.968)
1.970 Nice, 4 vols, Gauthier-Villars, París, (1.971)
1.974 Vancouver, 2 vols, Canadian Mathematical Congress, Montreal, (1.975)

Aunque la existencia de la UMI tropezaría con la mayoría de los objetivos de los matemáticos a través del ICM, la consideración de algunas otras actividades muestra en que cuestiones ellos indirectamente fueron ayudados por ella. La UMI creó varias comisiones y comités. La Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI) y la Comisión Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática, creada en el Congreso de 1.908, y mencionadas en las secciones 4.3 y 4.4. El ICMI tiene status semi-independiente con su secretariado propio y su propia revista, *L'Enseignement Mathématique*. Otro comité tiene la responsabilidad del *Directorio Mundial de Matemáticos* (cf. sección 3.5). La publicación del Directorio fue posible con la cooperación del Tata Institute de Investigación Fundamental en Bombay, siendo la primera edición en 1.958 y la segunda en 1.961. La tercera edición apareció para el momento del CIM de Moscú en 1.966, y el proyecto continuó con una cuarta edición en 1.970, producida en Suecia.

Una comisión para compilar un directorio de símbolos matemáticos se disolvió en 1.954, y subsecuentemente el asunto fue tomado por la Comisión de Publicaciones Científicas como así también el trabajo de la Comisión sobre los resúmenes y comentarios, que fue la responsable en 1.953 de arreglar el intercambio de comentarios entre el *Mathematical Reviews* y el *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*. La realización de servicios de resúmenes en temas particulares es la ocupación de la Comisión de Resúmenes ICSU, establecida en 1.953, y aunque el trabajo anterior de la UMI en este campo fue hecho independientemente del ICSU-AB, ha mantenido sus lazos con el ICSU (ICSU-AB=ICSU-Abstract Board).

Aparte de la cuestión de los símbolos matemáticos, que ahora es la preocupación de la International Standards Organization (ISO/TC46/SC4/WG1) que está preparando una prelista standard teniendo en mente las necesidades del manejo computarizado de la información, la Comisión de Publicaciones científicas consideró la posibilidad de un volumen anual de artículos expositores, y encontró, con sus contactos con editores comerciales, que la Academic Press estaba interesada en hacerlo independientemente del apoyo económico de la UMI. *Advances in Mathematics* apareció en 1.961.

2.3. AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. AMS:

La AMS es una de las más importantes, sin no es la más importante, de las editoras de literatura matemática. Su ya anciano periódico, el *Bulletin,* fue fundado en 1.894 y combina la función de órgano oficial de la sociedad, dando noticias de reuniones, obituarios, etc., con la publicación de artículos de investigación. Un lugar para artículos más largo apareció en 1.900 con la publicación de los *Transactions* de la sociedad. *Mathematical Reviews* (cf. sección 3.3) fue fundada en 1.940, y como se vió en la última sección, llegó a ser mucho más internacional en su cobertura en los años 50. En 1.950 se fundaron otras dos revistas: los *Proceedings* retomaron los artículos de investigación más cortos que habían sido previamente publicados en los números pares del *Bulletin*; las *Memoirs* contienen trabajos de mucha más longitud, algunos como para considerarlos monografías de investigación. Otra revista apareció luego de que las oficinas de la AMS fueran de New York a Providence, R.I., en 1.951: la *Notices* en 1.953. Tomó para sí la mayoría de las noticias sobre encuentros, congresos, anuncios en general, que tenía antes el *Bulletin,* llegando a ser la revista de noticias de la sociedad y dejando al *Bulletin* como el lugar para la publicación rápida de resultados de investigación. La *Notices* tiene una sección de resúmenes que tiene la misma función. Algo del *Notices* de interés para cualquiera que envíe artículos para su publicación es que en la sección de los números de febrero y agosto contiene información sobre un grupo de revistas de investigación matemática para el envío y el tiempo estimado entre la aceptación del trabajo y su publicación.

En 1.960 la AMS decidió computarizar la producción del *Mathematical Reviews.* Mientras que una consideración mayor había sobre la computarización de, por ejemplo, *Chemical Abstracts* y el *Index Medicus*, fue necesario superar la situación en la cual la producción de índices era impedida por los crecientes recursos que había que destinar a otros servicios que crecían, y la situación realmente no fue operativa para la AMS: el *Mathematical Reviews* en esos tiempos tenía un solo índice por autor. La computarización permitió a la AMS producir un número de otros servicios que no hubieran sido posibles por medios manuales. El servicio más ambicioso que fue planificado con un apoyo de la National Science Fundation fue el MOS (Servicio de Reproducción Matemática) que debía ser operativo hacía 1.968. El listado de entradas principales en uso en el *Mathematical Reviews* fue utilizado para proveer la clasificación detallada, primero publicada como un apéndice al *Mathematical Reviews*, 39, (1.970). Usando términos de la clasificación de la AMS (MOS) relacionaba los nombres de los autores para formar una ecuación booleana, con la posibilidad de excluir idiomas no deseados, el suscriptor del servicio del MOS tenía posibilidades de elegir entre los artículos publicados en las 60 revistas más importantes. Entonces recibía fotocopias de los artículos de acuerdo con su elección preferida y títulos de artículos de interés secundario. Ya en 1.968 M. Cooper criticó a la AMS en su artículo "Current information dissemination: ideas and practices" (*Journal of Chemical Documentation*, 8, 209, 1.968), tanto por intentar avanzar en la operación sin un esquema piloto previo, y por terminar comentando aquellos cuyo mercado potencial necesitaba el servicio. Este servicio no continuó, pero la mayor razón fueron los problemas de derechos de autor que acarreaban la provisión de las fotocopias de artículos. Por el lado positivo, sin embargo, puede colocarse el *Current mathematical publications* y el *Index of mathematical papers* (cf. sección 3.3). La conversión a formas manejables ha hecho posible la publicación de colecciones de comentarios del *Mathematical Reviews* en áreas particulares.

Uno de los más recientes es el W. J. LeVeque (ed.), *Reviews in Number Theory as Printed in Mathematical Reviews, 1.940-1.972*, 6 vols. (1.974).

En cuanto a las conferencias, la AMS publica dos series importantes: *Proceedings in Symposia in Applied Mathematics* (1.950-1.967), y que continuó como el *SIAM-AMS Proceedings,*, producido en conjunto con la Sociedad para la Matemática Industrial y Aplicada (cf. sección 14.4 para otras revistas de la misma fuente); y *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (1.959-). Estas son las actas de los institutos de investigación de verano de la AMS, con unos pocos volúmenes dedicados a simposios realizados en conjunto con las reuniones seccionales de las AMS. La AMS también publica el *Conference Board of the Mathematical Sciences. Regional Conference Series in Mathematics* (1.970-), cada número de los cuales da las lecturas expositoras de la conferencia patrocinada por la CBMS (ver, por ejemplo, referencia 93, capítulo 9).

Falta considerar la tarea de la AMS en otras dos áreas importantes de la literatura matemática: producción de libros y traducciones. La serie de "Colloquium Publications" comenzó en 1.905 y mantiene el título. Aunque volúmenes anteriores como los de Osgood *Topics in the theory of functions of several complex variables* (cf. referencia 69, capítulo 11) pueden basarse en una serie de conferencias, es difícil de creer que esto es cierto para todos los volúmenes de la serie. A lo sumo se le puede atribuir a ellos una intención didáctica de la que carecen las series de monografías. La serie "Mathematical Surveys" comenzó en 1.943, con *The problem of moments* de J.A. Shohat y J. D. Tamarkin, y fue obviamente pensada como para proveer un acercamiento entre el material de un libro y trabajos de investigación en áreas que no cubren las monografías. Los volúmenes en esta serie no aparecieron en gran cantidad: el J. R. Isbell *Espacios Uniformes*, Mathematical Surveys 12 (1.964) fue seguido por C. Pearcy con *Topics in operator theory*, Mathematical Surveys 13, (1.974). Esto es presumiblemente una razón de la perenne dificultad de persuadir a los matemáticos creativos que "pierdan" tiempo en escribir volúmenes de surveys.

La necesidad de tener acceso a material de idiomas no familiares condujo a la AMS a publicar diccionarios de matemática de ruso y chino (cf. sección 3.6). También publica las *Translations* a partir de 1.949 que contiene importante material extraído de una gran variedad de fuentes, simposios, jubileos, etc.. En esto difiere de la mayoría de otras revistas traducidas, que son las traducciones trabajo por trabajo o selecciones de revistas particulares. La AMS también publica el último tipo de esta serie. *Chinese Mathematics* es la traducción del *Acta Mathematica Sinica* (1.951-) a partir de 1.962. Las monografías de la AMS "Translations of Mathematical Monographs" contiene un número de traducciones de trabajos rusos importantes, por ejemplo, el libro de Fuks *Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables* (cf. referencia 85, capítulo 11). También ha sido incluido algún material chino, por ejemplo, *Additive theory of prime numbers* de L. K. Hua, Translations of Mathematical Monographs 13, (1.965) y la serie en 1.976 tenía 46 volúmenes. (N.T.: Hasta la fecha, 1.997, hay publicados 179 volúmenes)

2.4. SOCIEDAD MATEMATICA DE LONDRES. LMS:

La Sociedad Matemática de Londres no publica en la escala de la AMS, pero sus actividades como productor de literatura pueden compararse.

Fue fundada en 1.865 (una historia de la sociedad puede encontrarse en : "A century of the London Mathematical Society", de E. F. Collingwood, publicado en el *London Mathematical Society. Journal*, 41, 577-594, 1.966) y comenzó a publicar los *Proceedings* en el mismo año. Una reseña útil de las principales publicaciones aparecidas en los *Proceedings* hasta 1.920 está dada en H. Davenport, "Looking back" (*London Mathematical Society. Journal*, 41, 1-10, 1.966). El *Journal* comenzó en 1.926 para publicar trabajos cortos y otras cuestiones como obituarios. El *Bulletin* (1.969-) actúa ahora como el lugar para publicación rápida de resultados de investigación, y también contiene artículos tipo survey en áreas particulares. Originariamente se trató de publicar uno de estos trabajos en cada número, pero no fue posible encontrar suficientes contribuyentes para ello. El *Bulletin* también actúa como la revista de noticias de la Sociedad.

En el campo de las series monográficas, la LMS ha combinado con editores comerciales para producir dos series. La primera es "London Mathematical Society Lecture Note Series", publicada por Cambridge University Press, contiene material a nivel de posgrado(N.T.: Actualmente, 1.997, hay publicados 236 volúmenes). La segunda es "London Mathematical Society Monographs" publicada por Academic Press, que comenzó en 1.970 con el trabajo de Wall *Surgery on compact manifolds* (cf. sección 13.3).

La LMS también trata con editores comerciales para las conferencias que patrocina (ver, por ejemplo, referencia 30, capítulo 9) y no tiene una publicación para las conferencias periódicas.

En el campo de las traducciones, la LMS publicó *Russian Mathematical Surveys* (15, 1.960-), que cubre artículos tipo survey y material biográfico del *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. Actualmente esta traducción está patrocinada conjuntamente con la British Library Lending Division.

2.5. OTRAS SOCIEDADES NACIONALES:

Las actividades de publicación de la LMS son más típicas de lo que uno puede esperar de una sociedad matemática nacional que aquellas de la AMS: una o más revistas proveen noticias; el lugar para los artículos de investigación original y otros comentando el estado actual de un cierto tema o la reseña histórica del trabajo de un individuo o escuela; y posiblemente el lugar de un anuncio rápido de resultados de investigación que luego pueden ser publicados en otra parte redactados con más detalle. El modelo de cada país depende de la relación entre las sociedades puramente matemáticas y las sociedades nacionales. Por ejemplo, Moscú tiene una de las sociedades matemáticas más antiguas, la Moskovskoe Matematicheskoe Obschchestvo, fundada en 1.864, un año antes de la LMS, y publica su *Trudy* (1.952-) y *Matematicheskii Sbornik* (Novaya seriya, 1.936-). Pero es el *Doklady* (cf. sección 2.8) de la Akademiya Nauk SSSR el que tiene una sección para los resultados con resúmenes de demostraciones comparable con la sección de resúmenes de la *American Mathematical Society. Notices* (cf. sección 2.3). Análogamente, en Francia no es el *Bulletin* de la Société Mathématique de France a lo que los matemáticos envían primero la publicación de sus resultados, sino a la *Académie des Sciences. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances. Série A. Science Mathématiques.* Esta situación puede ser fluida. En el pasado la *National Academy of Sciences, Proceedings* en los Estados Unidos y la *Royal Society, Proceedings* en Gran Bretaña han tenido un rol más importante para la comunidad matemática que la que tienen ahora.

La función de dar noticias probablemente va más allá de la sociedad que otras actividades (por ejemplo, conferencias) en el país. En el caso de la Österreichische Mathematische Gesellschaft, hemos visto en la sección 2.2 como logran alcanzar una difusión internacional de noticias. Las revistas de sociedades en general están restringidas a publicar artículos de los miembros de la sociedad o aún nacionales. El *Commentarii Mathematici Helvetici* (1.929-   ), publicado por Birkhäuser para la Schweizerische Mathematische Gesellschaft, tiene un largo status internacional, y acepta artículos en inglés, francés y alemán. Las Actas de las conferencias patrocinadas por la sociedad, si se publican, se lo hace a través de un editor comercial.

2.6. UNION MATEMATICA DE LATINOAMERICA Y EL CARIBE. UMALCA:

La Unión Matemática de América Latina y el Caribe fue creada el 26 de julio de 1.995, en el IMPA, Río de Janeiro, Brasil. Participaron en la misma los presidentes de las Sociedades Nacionales de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Cuba, México, Uruguay y Venezuela, y un representante de la de Perú.

Tiene como objetivos mejorar la relación entre los equipos científicos de estos países, estimular el intercambio de investigadores y de estudiantes del doctorado y post doctorados y los programas de fomento de la matemática en los países de menor desarrollo relativo.

Dirección electrónica: umalea@fing.edu.uy
Dirección Postal: Area Matemática del PEDECIBA
Eduardo Acevedo 1.139, Montevideo 11.200,
Uruguay
Presidente: Mario Wschebor
wscheb@fien.edu.uy
Secretario: Roberto Maikarián
roma@fing.edu.uy

2.7. UNION MATEMATICA ARGENTINA. UMA:

La primera agrupación de matemáticos argentinos fue la Sociedad Matemática Argentina, fundada en 1.924. La primera Asamblea General en la que se aprobaron los estatutos y se designó la primera Comisión Directiva se realizó en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires el 23 de abril de 1.923 y su primer presidente fue Don Florencio Jaime.

La Sociedad fundó la "Revista Matemática" que se publicó entre 1.924 y 1.927.

Hubo un interreguo hasta la fundación definitiva de la Unión Matemática Argentina (UMA), el 28 de septiembre de 1.936 en aulas de la misma Facultad. Esta creación de la UMA fué una iniciativa de Julio Rey Pastor, gran creador y entusiasta propulsor.

El volumen 1, número 1, 1.936-1.937 de la Revista de la UMA se publicó en 1.936, en la Imprenta y Casa Editora "CONI".

Entre los principales miembros que contó la UMA merecen destacarse en estos 60 años, los nombres de Julio Rey Pastor, el iniciador, José Babini, el realizador y Alberto Gonzalez Domínguez, el continuador.

Actualmente el presidente de la UMA es el Dr. Felipe Zó (Universidad de San Luis) y la Revista de la UMA ha alcanzado el volumen 40, siendo 3 y 4 los últimos números publicados. Hay que destacar que desde 1.968 se publica en Bahía Blanca, habiendo sido sus directores Rafael Panzone (1.968-1.970), Darío Picco (1.970-1.988), Luiz Monteiro (1.988-1.995) y Agnes Benedek (1.995-1.997). Sus artículos son criticados por la revista Mathematical Rewievs (USA) y Zentralblatt für Mathematik (Alemania).

La UMA realiza anualmente una reunión que congrega a casi toda la actividad matemática del país. La XLVII reunión anual se efectuó en Córdoba, junto con la XX Reunión de Educación Matemática (REM) y el IV Encuentro de Estudiantes de Matemática.

Los estadísticos tienen también, desde hace algunos años, una reunión anual de la Sociedad Argentina de Estadística.

(Extractado de: "Historia de la Unión Matemática Argentina" 1.936-1.996, cuyo autor es el Dr. Luis Santaló).

2.8. PUBLICACIONES UNIVERSITARIAS:

No me ocuparé en esta sección de revistas publicadas por imprentas universitarias como la de Princeton University Press o Cambridge University Press. Aunque se originan en universidades y están dispuestas a publicar material de un cierto nivel académico, su rol es estrictamente comparable al de otras revistas comerciales. Quiero pensar y restringirme a revistas que tienen sus origenes a partir de un departamento de matemática o instituto que alcanza relieve internacional. En Estados Unidos uno de ellos es el *Duke Mathematical Journal* (1.935-). En Gran Bretaña, *Mathematika* (1.954-), publicado por el Departamento de Matemática del University College, London. Son revistas excelentes de artículos de investigación diferentes en carácter de aquellas publicaciones periódicas de seminarios o notas de conferencias, consideradas en sección 1.4.

2.9. REVISTAS DE EDITORES COMERCIALES:

Hay dos hechos que son más característicos de las revistas producidas comercialmente que de las revistas de universidades o sociedades científicas. El primero es la tendencia a reemplazar el sistema de referato que precede a la aceptación de un trabajo por un sistema en el cual el trabajo puede ser aceptado por uno del grupo de editores. Este último sistema puede hacer que el trabajo sea examinado tan o más rigurosamente que por el sistema de referato; pero obviamente depende en mucho de la conciencia del editor y la amplitud de su competencia en el estrecho campo de un trabajo. Esto conduce a una mayor fluidez en la publicación, ya que se evita la búsqueda de un referee competente. Un ejemplo de este tipo de revista es *Inventiones Matehmaticae* (1.966-) publicada por Springer. Es la intención declarada de la revista, publicar artículos dentro de los cuatro meses de su aceptación, aunque el análisis de las demoras de publicación en la *American Mathematical*

Society, Notices, 23(5) (agosto de 1.976) muestra que está más atrasada que aquella. No es el sistema de referees, por supuesto, la única causa de la demora en la publicación. Otra es la cantidad de material esperando para la publicación para una revista buena que publica regularmente. *Inventiones Mathematicae* evita este último problema publicando irregularmente cuando tiene la cantidad de material aprobado.

Las demoras de publicación pueden reducirse reproduciendo el trabajo ya "tipeado" por el autor en lugar de procesarlo nuevamente. Un ejemplo de este tipo de revista es *Manuscripta Mathematica* (1.969-), también de Springer.

Se puede suponer que el reemplazo del sistema de referato puede conducir a una disminución del nivel de los artículos publicados. Sin embargo, las reflexiones hechas en un simposio sobre la publicación de literatura matemática referida en la sección 1.1, dice que no hay diferencias significativas en cuanto a la calidad de las revistas con referees y aquellas cuyos artículos son comunicados vía editores.

El segundo hecho es el crecimiento del número de las publicaciones comerciales dedicadas a un área en particular. Una de las primeras fue *Topology* (Pergamon, 1.962-). Por supuesto, no todas las revistas de este tipo son producciones comerciales: uno piensa que el *Notre Dame Journal of Formal Logic* (University of Notre Dame Press, Indiana, 1.960-) y el Applied Probability Trut's *Journal of Applied Probability* (1.964-), publican en asociación con la LMS. Sin embargo, sigue siendo cierto que el crecimiento de revistas especializadas de esta clase en los 60 y los 70 es un fenómeno que fue posible en principio debido a los editores comerciales. Por ejemplo, *Journal of Differential Equations,* (Academic Press, 1.965-) reemplaza a *Contributions to Differential Equations* (1.963-1.964) publicada por Interscience bajo los auspicios del Research Institute of Advanced Studies, Baltimore, y la Universidad de Maryland.

La aparición de nuevos títulos continuó luego de los 70, por ejemplo: *Journal of Number Theory* (Academic Press, 1.969-); *Geometriae Dedicata* (Reidel, 1.972-) y *Linear and Multilinear Algebra* (Gordon and Breach, 1.973-). Esto sugiere que las dudas expresadas sobre tales revistas en el simposio sobre la publicación de la literatura matemática (cf. sección 1.1) no se justifican. Fue posible para estas revistas acotar su tarea en áreas bien definidas y atraer artículos de calidad comparable con aquellos que van a publicaciones de sociedades.

Este énfasis sobre el rol de las publicaciones comerciales en dos desarrollos relativamente recientes de publicaciones periódicas no debe pasar por alto el hecho de que las revistas de matemática establecidas desde hace mucho tiempo preceden la publicación de sociedades de matemática por un margen considerable. El *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* fue fundado en 1.826 y aún es publicado por Gruyter, que lo tomó de los editores originales en Berlin. *Annals of Mathematics* (Princeton University Press, 1.884-) y *Mathematische Annalen* (Springer, 1.868-) tienen historias distinguidas.

2.10. TRADUCCIONES:

Los matemáticos cuya lengua materna es el inglés o americano, tienen una ventaja considerable cuando consulta revistas de matemática. Las revistas que publican en inglés casi todas restringen la publicación de trabajos al inglés, y aún aquellos como el *Journal of Symbolic Logic* (cf. sección 6.1) que explícitamente acepta artículos en francés o alemán, contiene una proporción muy pequeña de material en lengua extranjera y no hace concesiones a los extranjeros en la forma del contenido en idioma extranjero de listas o sumarios. Ciertamente, la práctica de dar el resumen en otros idiomas en lugar del oficial de publicación parece que es desconocido en el campo matemático.

En Europa Occidental las revistas de más interés que el meramente local, usualmente publican en una mezcla de inglés, francés y alemán. El *Commentarii Mathematici Helvetici* hace esto (cf. sección 2.5). El *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* (cf. sección 2.7) ha aplaudido contribuciones extranjeras desde el comienzo (en los primeros tiempos fue en francés o alemán); permanece preponderantemente en alemán. En el Scandinavian *Acta Mathematica* (Almqvist och Wiksell del Institut Mittag-Leffler, 1.882-) predomina el inglés. Italia es una excepción a la regla, publicando la mayoría del material en italiano.

Muchas revistas de Europa Oriental, hacen uso del francés o el inglés para buena parte de sus publicaciones; por ejemplo, *Fundamenta Mathematicae* (cf. sección 6.1). No hay que creer que esto significa que la mayoría de estos trabajos de esos países son conocidos en Occidente. Uno sospecha que hay mucho material de valor en lógica matemática en polaco. El bloque Oriental de Rusia es una excepción; a parte de un pequeño número de artículos en las lenguas de las repúblicas constituyentes, el ruso es universal. Muchas revistas rusas tienen su traducción número a número; pero aún así, una pequeña proporción del material que aparece en ruso se publica en inglés.

Muchos países fuera de Europa y Norte América han adoptado el inglés para sus publicaciones principales. Ejemplos son el *Israel Journal of Mathematics* (Weizmann Science Press, 1.963-), el *Japanese Journal of Mathematics* (National Research Council of Japan, 1.924-) y el *Journal* (1.949-) de la Mathematical Society of Japan. En Sudamérica es usado el español y el portugués, dependiendo del país. La situación puede cambiar ya que países como Brasil, tratan de incorporar matemáticos extranjeros (principalmente americanos).

Lo siguiente es un resumen de traducciones diferentes a las de la AMS y LMS mencionadas en secciones 2.3 y 2.4:

Akademiya Nauk SSSR. Doklady. La sección matemática pura es traducida como *Soviet Mathematics-Doklady* (AMS, 1.960-).

Akademiya Nauk SSSR. Izvestiya-Seriya Matematicheskaya. A partir del volumen 31 traducida como *Mathematics of the USSR-Izvestiya* (AMS, 1.967-).

Akademiya Nauk SSSR: Matematicheskii Institut imeni V.A. Steklova. Trudy. A partir del número 74, traducido como *Steklov Institute of Mathematics. Proceedings* (AMS, 1.966-).

Algebra i Logika, Seminar. Sbornik Trudov. Del volumen 7, traducido como *Algebra and Logic* (Consultants Bureau, New York, 1.968-).

Differentsial'nye Uravneniya (Minsk). Traducido como *Differential Equations* (Faraday Press, New York, 1.965-).

Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheinya. Traducido como *Functional Analysis and its Applications* (Consultants Bureau, New York, 1.967-).

Itogi Nauki-Seriya Matematika. A partir de 1.966 traducida como *Progress in Mathematics* (Plenum Press, New York, 1.968-1.972).

Matematicheskie Zametki. Traducido como *Mathematical Notes* (Consultants Bureau, New York, 1.968-).

Matematischeskii Sbornik. Desde el volumen 72 traducido como *Mathematics of the USSR-Sbornik* (American Mathematical Society, 1.967-).

Moscow, Universitet. Vestnik. Seriya 1. Matematika, Mekhanika. La sección de matemática se traduce, desde el volumen 24 como *Moscow University Mathematics Bulletin* (Faraday Press, New York, 1.971-).

Moskovskoe Matematicheskoe Obschchestvo. Trudy. Desde el volumen 12, traducida como *Moscow Mathematical Society. Transactions* (AMS, 1.965-).

Sibirskii Matematicheskii Zhurnal. Desde el volumen 7, traducido como *Siberian Mathematical Journal* (Consultants Bureau, New York, 1.967-).

Ukrainskii Mathematicheskii Zhurnal. Desde el volumen 19, traducido como *Ukrainian Mathematical Journal* (Consultants Bureau, New York, 1.968-).

2.11. SERIE DE MONOGRAFIAS:

Para los propósitos de la International Serials Data System, una serie es una publicación, en forma impresa o no, editada en partes sucesivas, usualmente numeradas o con designación cronológica y que se intenta publicar indefinidamente. Las series incluyen revistas, diarios, anales de revistas (informes, libros anuales, directorios, etc.), memorias, proceedings, transactions, etc., de sociedades y series monográficas. La definición excluye trabajos producidos en partes para un período determinado como finito tal como un tratado de varios volúmenes. La inclusión de series de monografías sirve para enfatizar que ellas pueden ser más que la suma de monografías que forman: el conocimiento que un libro pertenece a una serie particular nos puede decir algo sobre su nivel; recíprocamente, el conocimiento de una serie mayor puede dirigir a uno al catálogo de la biblioteca para acercarse a través de las entradas de esa serie a trabajos en un área particular.

Las series de monografías de la AMS y LMS ya han sido mencionadas (secciones 2.3 y 2.4). Dos monografías bien establecidas son: "Annals of Mathematics Studies" de Princeton y "Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" de Springer. De lejos la mas grande de estas series es la de Springer "Lecture Notes in Mathematics". Fue fundada en 1.964 como resultado de discusiones entre un grupo de matemáticos y Springer para lograr un lugar y dar una circulación mayor a la categoría de material, que incluye notas de curso y material de seminarios de Departamentos de Matemática. Como *Manuscripta Mathematica* (cf. sección 2.7), el material se reproduce por medios fotomecánicos desde el manuscrito, a bajo costo cada número, y tratan de preservar algo de la naturaleza informal acorde con el tipo de material incluido. Una de las publicaciones más útiles de 1.975 fue el índice de los primeros 500 volúmenes, que es obtenible sin cargo por Springer. Contiene una lista numérica con autor e índices de temas, los editores son A. Dold y B. Eckman y se incluyen notas sobre como preparar el material para su publicación.

El suceso de las "Lecture Notes in Mathematics" de Springer llevó a la editorial a intentar la publicación de Lecture Notes series en otras áreas como Física, Ciencias de la Computación, Biomatemáticas y Economía y Sistemas Matemáticos, lo que causa, cuando uno se refiere a las Lectures Notes de Springer, cierta confusión. (N.T.: En la actualidad, 1.997, el número de Lectures Notes alcanzó el N° 1.645)

2.12. BOURBAKI:

Los *Éléments de mathématique* producido por un grupo francés de matemáticos bajo el seudónimo de Nicólas Bourbaki es un proyecto completamente *sui generis*. El propósito es cubrir una gran parte de la matemática pura desde un punto de vista completamente axiomático, requiere de sus lectores madurez matemática. La publicación histórica de los *Éléments de mathématique* es bastante compleja y puede ayudar al lector tener el siguiente sumario de lo que ha sido publicado: el material en la tercera edición, publicada en fascículos de uno o más capítulos de un área particular o "Livre". Los capítulos de cualquier "Livre" no están necesariamente publicados en orden, como muestra la referencia 117, capítulo 9. Análogamente, el libro "Algébre Commutative" se constituye así:

Capítulos I y II	Fascículo XXVII	(1.961)
Capítulos III y IV	Fascículo XXVIII	(1.961)
Capítulos V y VI	Fascículo XXX	(1.964)
Capítulo VII	Fascículo XXXI	(1.965)

Los 36 fascículos de esta edición, publicada por Hermann durante el período 1.952-1.971, cubre las áreas:

Libro I	Teoría de conjuntos.
Libro II	Algebra.
Libro III	Topología general.
Libro IV	Funciones de una variable real.
Libro V	Espacios vectoriales topológicos.
Libro VI	Integración.
	Grupos y álgebras de Lie.
	Algebra conmutativa.

Traducciones de tres de los libros han aparecido editadas por Addison-Wesley: *Teoría de conjuntos* (1.968); *Topología general* (1.966) y *Algebra conmutativa* (1.972).

En la nueva edición que comenzó a aparecer en 1.970 ha sido abandonada la publicación de fascículos separados con tapa rústica y el material aparece en volúmenes mejor encuadernados. Las siguientes secciones fueron publicadas o están en procreso:

E	Teoría de conjuntos (1.970).
A	Algebra (vol. 1, 1.970).
TG	Topología general (2 vols., 1.971, 1.974).
FVR	Funciones de una variable real.
EVT	Espacios vectoriales topológicos.
INT	Integración.
AC	Algebra Conmutativa.
VAR	Variedades diferenciales y analíticas.
LIE	Grupos y álgebras de Lie.
TS	Teorías espectrales.

El prefacio de los volúmenes publicados dice que los primeros seis son auto-contenidos o se basan únicamente en resultados de volúmenes anteriores. Luego de esto una referencia cruzada entre volúmenes es necesaria.

CAPITULO 3: MATERIAL DE REFERENCIA (S. BROOKES)

3.1. ENCICLOPEDIAS:

Las enciclopedias, ya sean generales o especializadas, tratan de presentar la información en forma concisa y fácilmente accesible. Una buena enciclopedia tiene que poder utilizarse como diccionario para definiciones de términos, como un libro para datos básicos y como fuente bibliográfica para trabajos importantes en el tema. Debe proveer información inteligible a aquellos que no están familiarizados con el campo, aunque una enciclopedia especializada puede requerir un conocimiento del sujeto temático del área, y por lo tanto muy técnica para el principiante.

Una enciclopedia nunca está al día como la literatura corriente; esto no es necesariamente un problema con la matemática, ya que una demostración o una teoría no queda invalidada porque es vieja en algunos meses o quizás años. La mayoría de las enciclopedias tratan de combatir esto actualizándose a si mismas por libros del año, revisión continua, nuevas ediciones o combinaciones de ellas.

La enciclopedia general mejor conocida es la *Encyclopaedia Britannica* [1] . La edición número 15, publicada en 1.974, es de nuevo formato en tres partes. La política de actualización de la edición 14 es la de libros anuales y revisión continua con reimpresiones dentro de la edición.

Las tres partes son:

(1) Propaedia: Esta da un vistazo rápido de áreas temáticas amplias, y contiene un "bosquejo de conocimientos", una clasificación de los contenidos de la enciclopedia. Con cada entrada en esta clasificación hay una lista de referencias a los artículos en la *Macropaedia*, o referidos al tema. La clasificación de la matemática, en la sección 10, puede usarse como un índice de la enciclopedia, o para dar relaciones entre los temas dentro de la matemática.

(2) Micropaedia: Esta está dispuesta en orden alfabético y da información más completa sobre temas específicos.Además, sirve como un índice de la Macropaedia vía sistema de referencias cruzadas.

(3) Macropaedia: Esta está dispuesta en orden alfabético y da información más completa sobre temas más amplios. Un tema que aparece en la *Micropaedia* puede aparecer solamente en la *Macropaedia* como un párrafo en un artículo bajo una entrada más general. Por ejemplo, los grupos de Lie figuran en los Fundamentos de la Topología Algebraica en la *Macropaedia*. Los artículos en la *Macropaedia* están formados y tienen bibliografía.

Tanto la *Micropaedia* como la *Macropaedia* contienen bibliografías de famosos matemáticos e historias suscintas de las disciplinas matemáticas. El nivel, y la terminología, en algunas áreas está por sobre la de los principiantes, pero aquel, que tenga algunos conocimientos de matemática, puede entender algo con lo que no estaba familiarizado.

Una enciclopedia general más útil para un principiante es la *Enciclopedia Chamber* [2], cuya matemática está a nivel secundario. Está en orden alfabético con artículos firmados, y se actualiza todos los años con números especiales (estos tienen una sección dedicada a la "ciencia", pero no contiene matemática). Hay referencias cruzadas en el texto, pero para cubrir todos los aspectos de un área debe usarse también el índice.

La *McGraw-Hill Encyclopaedia of Science and Technology* [3] y la *Van Nostrand's Scientific Encyclopaedia* [4] (en 15 volúmenes y 1 volumen respectivamente) son dos enciclopedias científicas bien conocidas. Sin embargo, ninguna de estas iguala a la *Enciclopedia Británica* en amplitud de cobertura y profundidad.

La *McGraw-Hill Encyclopaedia* está ordenada alfabéticamente, por áreas temáticas amplias. Por ejemplo, los grupos de Lie están en Teoría de Grupos. Dentro de cada tema amplio se da orientación, siguiendo este ordenamiento, pero no hay forma de distinguir las palabras claves y la información específica es difícil de encontrar. También, aunque el sistema de referencias cruzadas es bastante adecuado más que generoso, no estan dadas todas las relaciones entre los temas.

Hay tres índices. El primero es el de los contribuyentes, el segundo el de temas y el tercero una lista de títulos de artículos bajo divisiones temáticas principales (toda la matemática y la estadística están bajo el título de Matemática). Los artículos son generalmente de la forma de una definición seguida de una explicación. Hay bibliografías cortas, pero la historia y bibliografía se dan sólo incidentalmente. Un principiante debe ser capaz de tratar tanto con la terminología y el nivel de tratamiento. Se mantiene actualizada con libros anuales.

La cuarta edición de la *Van Nostrand*, publicada en 1.968, no fue actualizada hasta la quinta edición. Es una serie de artículos ordenados alfabéticamente, sin firma, que a menudo son definiciones aumentadas. Las palabras en un artículo que son líderes de artículos que están en otras partes en el texto se las nota con negrita. Sin embargo, si una palabra no está en caracteres gruesos, no significa que no sea líder (por ejemplo, transformación en el artículo de grupos de Lie). No hay índice general. Historia y bibliografía se los trata incidentalmente y consiste en poco más que fechas, nombres y lugares.

Hay enciclopedias que tratan solamente con matemática. La más antigua de estas es la *Encyklopädie der Matematischen Wisssenschaften* [5] (1.898-1.935 y 1.939-1.959). Esta es una serie de artículos de alto nivel sobre temas particulares. La segunda edición parece haber terminado, pero algunas secciones, particularmente aquellas que tratan con las aplicaciones de la matemática, están desactualizadas, las áreas "académicas" aún son útiles. La última enciclopedia publicada sobre matemática es *The Universal Encyclopaedia of Mathematics* [6], en un volumen, publicada en 1.964. Es una adaptación y traducción de *Meyers Rechenduden*, que fue publicado por la Bibliographisches Institut de Mannheim en 1.960. La *Universal Encyclopaedia* es más un libro que una enciclopedia en la que hay una lista alfabética de definiciones, a veces con ejemplos trabajados, de temas matemáticos precisos (e. g. media geométrica está incluida pero no en geometría). No contiene historia, tampoco biografía su bibliografía, pero contiene tablas útiles y una lista de temas dividida de fórmulas. Su uso está limitado ya que no contiene referencias cruzadas.

El *Mémorial des Sciences Mathématiques* [7], que aparece desde 1.925, no es quizá una enciclopedia, en la comprensión general del término. Es una serie de monografías de muy alto nivel, en temas diferentes, por autores diferentes. Hasta el momento de la última publicación cada tema estaba actualizado. La *Encyclopaedia of Mathematics and its Applications* recientemente planificada, editada por G. C. Rota y publicada por Addison-Wesley, es nuevamente una serie abierta con cada volumen cubriendo un campo en particular (Vol. 1, *Integral geometry and geometric probability*, por L. A. Santaló, y Vol. 2, *The theory of partitions,* por G. E. Andrews, fueron los dos que primero aparecieron). (N.T.: Hasta 1.992 se publicaron 47 volúmenes)

El *Mathematisches Wörterbuch* [8] es también un trabajo útil que es difícil de clasificar; es más que un diccionario y no tanto una enciclopedia. Tiene entradas ordenadas alfabéticamente las que varían desde las simples definiciones a explicaciones buenas. No contiene índice, pero tiene un sistema extensivo de referencias cruzadas. Contiene una lista de símbolos ordenada por temas, breves bibliografías con biografías de conocidos matemáticos y algo de historia de la matemática.

3.2. MANUALES:

Si uno necesita información concisa sobre aspectos prácticos de la matemática, un manual puede llenar sus necesidades. Un manual suele incluir hechos, datos, técnicas, principios y definiciones. Los manuales comenzaron como libros (como pueden ser considerados) de información esencial, pero se han extendido y ahora algunos son varios volúmenes. Los cuatro que describiremos más abajo son de un volumen, aunque Merritt tiene 378 páginas y Korn y Korn 1.130. Ellos están estructurados en capítulos de temas amplios y luego subdivididos dentro de ellos, y todos tienen índices temáticos. Esta disposición temática elimina bastante la necesidad de establecer relaciones entre áreas temáticas.

Korn y Korn [9] es un buen ejemplo de un manual de matemática. El desarrollo para cada capítulo está listado en el principio de cada uno de ellos y al final hay una bibliografía y una lista de temas relacionados con otros capítulos. El tratamiento es de alto nivel, en los principales términos y definiciones, y las informaciones más avanzadas, se la indica con diferentes tipo de letra. Hay, además de índice temático, referencias cruzadas dentro del texto. También contiene lista de fórmulas y símbolos, y tablas.

Merritt [10] es un manual simple; sus propósitos son dar el método, definición, etc. sin la teoría involucrada. Así, para cada tema, hay una definición, una ilustración donde puede aplicarse y a veces un ejemplo trabajado. Si un método es utilizado en más de un área, entonces es decripto en cada área. El índice de temas está aumentado por referencias cruzadas en el texto y cada capítulo tiene al final una breve bibliografía.

Meyler y Sutton [11] tiene los mismos propósitos y similar longitud y da información desde GCE (ver) hasta nivel Honours degree (ver las equivalencias). Está dividido en Matemática Pura y Física, y el índice temático también está dividido de esta forma. Es más útil como fuente de detalles precisos de un tema específico y no tiene referencias cruzadas ni bibliografías. Utiliza diferentes tipos de letras para el rápido reconocimiento de leyes y definiciones. Contiene listas útiles de integrales, sumas de series, etc..

Kuipers y Timman [12] es ligeramente diferente, siendo una colección de capítulos escritos por distintos autores sobre temas específicos, comenzando con un pequeño capítulo histórico. Este, también, se propone proveer un "conocimiento matemático fundamental" para aquellos que usan la matemática y con alguna familiaridad con la matemática. Es un poco más que definiciones mechadas con prosa. No contiene referencias cruzadas, y aunque en la introducción dice que incluye una lista de libros de texto, la edición estudiada no la contiene.

3.3. REVISTA DE COMENTARIOS:

En un mundo ideal un comentario debe aparecer rápidamente luego de la publicación que comenta. En el mundo práctico no ocurre así, y debido a las restricciones de dinero y tiempo, puede ser imposible.

Mathematical Reviews se está publicando desde 1.940 por la AMS, con otros apoyos (por ejemplo, La National Science Foundation, London Mathematical Society). Está colocado en orden según la clasificación. Esta clasificación está dada en el último número de cada año, y es capaz de subdivisiones finas, pero el *Mathematical Reviews* utiliza únicamente divisiones principales. Esto significa que, si usted está buscando material muy especial, debe buscar todo el material que está listado bajo el tema más amplio. Tiene índice por autor en cada número y en cada dos volúmenes por año y ahora hay índices acumulativos para los volúmenes 1-20 (1.940-1.972), volúmenes 21-28 (1.961-1.964) y volúmenes 29-44 (1.965-1.972). Cada volumen tiene también un índice "clave", que es un índice por título de aquellos trabajos sin autores o editores. A partir del volumen 45 (1.973), cada volumen tiene un índice temático: una lista de marcas que dan el autor y el número de comentario de los trabajos allí clasificados.

El cubre, tanto revistas (aquellos listados en el índice), libros, conferencias, etc., y no hay política que indique como y de donde proviene el material comentado.

Los detalles bibliográficos de cada entrada están en el lenguaje original, con cirilico, etc., romanizado y a veces traducido. La mayoría de los comentarios están en inglés, francés o alemán, y un artículo en inglés puede tener el comentario en alemán, de modo que son necesarios los tres idiomas para poder utilizar a pleno el *Mathematical Reviews*. Los comentarios están firmados y, si fueron tomados de otras fuentes (por ejemplo, *Computing Reviews*), la fuente es mencionada. En promedio son críticas y a veces citan el prefacio a la lista de contenido.

Su mayor inconveniente es la demora de aproximadamente un año entre la publicación y que aparezca el comentario. Para solucionar esto, la AMS publica también el *Current Mathematical Publications* [14], previamente conocido con el nombre de *Contents of Contemporany Mathematical Journals*. Esta es una lista de trabajos que la *Mathematical Reviews* ha recibido, usualmente es dos semanas que serán enviadas para el comentario. Está ordenada como el *Mathematical Reviews*, con índices de autores, referencias cruzadas en el texto para autores comunes, índices claves, listas de revistas cubiertas y lista de revistas nuevas. El de febrero de 1.975 contiene principalmente el último material de 1.974, por lo que es bastante satisfactorio en sus propósitos.(N.T.: Se mantiene en sus propósitos)

Otra publicación de este tipo de la AMS es el *Index of Mathematical Papers* [15]. Este trata de abarcar "artículos procesados durante los seis meses anteriores". A finales del 73, la política del *Index* cambió, y abandonó no solamente las revistas sino también los libros, etc. que son comentados. Como da la ubicación de los comentarios, puede ser utilizado como un índice para el *Mathematical Reviews*. Tiene dos partes: (1) Da el índice de autores, alfabéticamente, y los detalles bibliográficos completos del trabajo; (2) Da los índices temáticos, en orden clasificatorio, los autores y títulos de los trabajos. Hay una P o una S para indicar si la clasificación es primaria o secundaria para el trabajo. Es publicada cada año en un volumen en dos partes, cada parte cubre seis meses. Esta nueva cobertura probablemente demore un poco la publicación y lo haga menos útil pero las tres publicaciones, *Mathematical Reviews, Index and Current Mathematical Publications*, tomados en conjunto dan un cubrimiento actualizado de la literatura matemática.

El *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* (ZM) [16] está también retrasado aproximadamente un año. Está ordenado por clasificación temática, indexada por autor, claves y temas. Cada 10 volúmenes tiene un índice de autor acumulativo de los nueve previos. Aparece con cobertura internacional en revistas, libros, conferencias, etc. y los comentarios pueden estar en inglés, francés o alemán. Los comentarios vienen firmados y se indica la procedencia; *Zentralblatt* trae algunos del *Mathematical Reviews*, etc., y también a veces de los trabajos mismos.

El *Bulletin Signalétique* [17]; publicado por el Centro Nacional de la Investigación Científica francés desde 1.956, está formada por varias series separadas, la primera de las cuales, número 110, cubre la matemática. Hasta 1.971 se llamaba "Mathématiques Appliquées, Informatique, Automatique"; ahora se llama "Infomatique, Automatique, Recherche Opérationelle, Gestion". Aunque la matemática ha sido sacada del título, las entradas principales temáticas no han sido cambiadas; en efecto, fue agregada en la entrada de 1.973 "Théses et Ouvrages Fondamentals aux Mathématiques". Hay un volumen por año de doce números, el último trae el índice. Cada número comentado tiene un índice de autor. Hay un índice anual temático, en dos secciones, que relacionan palabras claves con números abstractos, y un índice anual de autores, los que infortunadamente no traen títulos como el índice de autor del *Mathematical Reviews*. Hay también un índice anual de "clasificación" que da la página en la cual cada sección de la clasificación incluida comienza en cada número.

Los comentarios son en francés, y son indicativos, pero los detalles bibliográficos están en el idioma original. Cuando el idioma original no es romano, los detalles se traducen y, por ejemplo, coloca "en ruso". Abarca revistas, algunas conferencias, tesis, reports, como los del Centre National de la Recherche Scientifique. Está como las otras revistas de comentarios, aproximadamente un año retrasada.

Referativnyi Zhurnal. Matematika (R. Z.) [18] es más que la principal revista de comentarios del bloque soviético, y sus principales propósitos son la cobertura comprensiva de las revistas de matemática. Un lector ruso puede seguirla fácilmente, probablemente más fácilmente que un lector inglés puede hacerlo con el *Mathematical Reviews*, ya que se publica el título en ruso a pesar del idioma en el cual el trabajo está publicado, y todos los comentarios están en ruso. Sin embargo, para aquellos que no conocen ruso parece prohibido, pero con un poco de paciencia, o el uso del Copley [19], puede hacer del R. Z. una herramienta útil.

Las citas bibliográficas están en el idioma original, excepto idiomas orientales, que están en cirilico. Para las letras romanas hay un índice de autores en este abecedario (además del índice de autores en cirilico), con listas conjuntas de autores, dando un número de la comunicación y el tema de la clasificación. Esto está acumulado anualmente. Hay un índice temático clasificatorio, con las principales entradas en ruso, el que también es acumulado anualmente.

Un lector no ruso puede usar el R. Z. como una fuente de detalles bibliográficos de trabajos de un autor particular vía el índice de autores en latino; alternativamente se puede utilizar un diccionario inglés-ruso para encontrar el equivalente ruso del tema, y entonces utilizar el índice temático.

La *Bibliografia Matematica Italiana* [20] comenzó en 1.951, y no es estrictamente una revista de comentarios. Publica listas anuales de aquellos trabajos publicados en matemática en Italia en ese año. El volumen de 1.970 fue publicado en 1.972; por lo tanto tiene una demora mayor. Da los detalles bibliográficos, ordenados por autor, y se puede acceder a través de un índice temático, y por una lista amplia de entradas temáticas (por ejemplo: geometría, matemática aplicada) con los autores listados debajo. Tiene un índice acumulativo de diez años.

Una herramienta bibliográfica útil, aunque no estrictamente matemática, es el *Science Citation Index* [21]. Está compilado por computadora de citas de aproximadamente 2.300 revistas; no abarca revistas de idiomas difíciles. Puede usarse para buscar artículos citados por autor particular, para seguir artículos publicados por una organización utilizando un índice de corporaciones y por búsqueda temática utilizando el índice Permuterm. Las tres secciones son:

(1) El índice mismo, ordenado alfabéticamente por nombres de autores con, para cada publicación, abreviaturas de la revista, volumen, año y páginas, seguido por los nombres de los autores citados en ellos.

(2) El índice de fuentes, que contiene alfabéticamente los nombres de los "citados" y títulos breves y bibliografías de sus artículos.

(3) El índice Permuterm, que es una lista alfabética de palabras claves tomadas de los títulos de los artículos citados. Cada término está apareado con otras palabras claves, y se puede encontrar fácilmente que títulos contienen ambos, y entonces, vía los nombres de los autores y del índice de las fuentes, el título completo y los detalles bibliográficos.

<u>ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK. INDICES:</u>

<u>INDICE ANUAL</u>: El volumen 25 es el índice acumulado de los 24 volúmenes anteriores e incluye :

- Indice de autores (con títulos y fuentes).
- Indice de temas (de acuerdo con la clasificación del Mathematical Reviews, año 1991, publicado al final del volumen 750/VI).
- Indice clave (incluyendo anónima, actas de conferencias y colecciones de artículos, de acuerdo con algunas claves principales, por ejemplo el tema y lugar de las conferencias).
- Referencias bibliográficas (las notas bibliográficas están por orden según el nombre a quien se refieren).
- Indice de series (incluyendo todos los índices y series cubiertos por Zentralblatt).

El primer índice anual es a partir del volumen 775 de 1993.

<u>INDICE POR VOLUMENES:</u> Todo volumen del Zentralblatt für Mathematik / Mathematics Abstracts incluye, además de los comentarios, breves noticias del autor, tema e índice bibliográfico.

<u>SISTEMA DE INDICES PARA LOS VOLUMENES 101-750:</u>

- <u>Indice por 50 volúmenes:</u> Cada 50 volúmenes hay un índice acumulativo de los comentarios del período precedente. Incluye los índices por autor con títulos y fuentes, el índice clave, referencias bibliográficas y la Clasificación Matemática Temática (CMT) válida para ese período. El primer índice por 50 volúmenes es el volumen 300. Por razones técnicas el volumen 250 incluye únicamente información de los volúmenes 221 al 249. El último índice por 50 volúmenes es el 750.

- Indice por 10 volúmenes: Cada 10 volúmenes hay un pequeño índice acumulativo de los 9 volúmenes precedentes a partir del volumen 110. A partir de 1973 han sido reemplazados por el índice por 50 volúmenes. Cada índice por 10 volúmenes contiene una lista de revistas cubiertas hasta ese momento por Zentralblatt für Mathematik. El primer índice por 10 volúmenes es el 110.
- Indice temático: Los índices temáticos son acumulativos únicamente de 9 volúmenes e incluidos en el índice por 10 volúmenes (resp 50) correspondiente. El primer índice temático de acuerdo con el CMT es el volumen 250.

SISTEMA DE INDICES PARA LOS VOLUMENES 1-100: Con el objeto de hacer las publicaciones anteriores accesibles a los lectores del Zentralblatt für Mathematik han sido publicados índices acumulativos.

- 1931-1950: Las publicaciones de esos años están compiladas en los volúmenes 1-41 así como en los 60-61. El índice acumulativo de autores para ese período es el volumen 62 I / II (vol. y-25) y volumen 63 I / II (vol. 26-41, 60-61). El último volumen también incluye referencias a trabajos adicionales del período 1942-1946 que no están incluidos en el Zentralblatt für Mathematik.
- 1951-1956: Los índices anuales para esos años fueron publicados en los volúmenes: 54 (para 1951), 69 (para 1952 / 53), 59 (para 1954) y 76 (para 1955 / 56).

Desde 1957: Los índices acumulativos para los volúmenes 77-100 fueron publicados en el volumen 63 III / IV. Después de ello, el Zentralblatt für Mathematik comenzó con los índices cada 10 volúmenes.

3.4. BIBLIOGRAFIAS:

La matemática es tan amplia y un tema tan grande que bibliografías, en el significado usual de la palabra simple, como abarcativa de la mayor parte de la literatura del tema, no existe. Las hay, sin embargo, bibliografías restringidas en el tiempo, por ejemplo, Dick [22], o un idioma, por ejemplo: La Salle y Lefschetz [23], o a un aspecto particular de la matemática, por ejemplo Gould [24]. Uno puede, con alguna licencia, considerar catálogos y revistas de comentarios que han cesado en su aparición como bibliografías, ya que cubre toda la matemática y todos los tipos de literatura, aunque sean limitados en el tiempo.

Los catálogos más famosos son aquellos de la Royal Society of London. El *Catalogue* [25] y el *International Catalogue* [26] cubren el período entre 1.800-1.919. El *Catalogue* está ordenado alfabéticamente por autor y es el índice estándar para trabajos científicos de los transactions y los proceedings de las distintas sociedades científicas, y revistas científicas entre 1.800 y 1.900. Para ello se planificó una obra en 17 volúmenes ordenado por la clasificación temática usada en el *International Catalogue*. Aunque solamente los tres primeros fueron finalizados, Matemática, Mecánica y Física, se puede intentar una búsqueda matemática para 1.800-1.900. El *International Catalogue*, aunque cubre el mismo tipo de material, fue publicado anualmente en 17 "volúmenes" temáticos.

Cada uno de estos consiste en una edición de una clasificación, una lista de clasificación ordenada de las palabras abarcadas y una lista alfabéticamente similar por autor de un índice temático en inglés, francés, alemán e italiano.

El *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* [27] también provee acceso a la matemática del siglo 19. Fue publicado entre 1.868 y 1.946 como revista de comentarios. Sus comentarios son largos, firmados y en alemán. No hay índices, pero la disposición es por clasificación temática, y algún acceso es posible. No es muy útil para usar ya que hay un volumen por año y no hay acumulaciones.

Las series iii A/1, Mathematik, mechanik, astronomie, del *Inhaltsverzeichnisse Sowjetischer Fachzeitschriften* [28], publicado a partir de 1.951 hasta 1.965, comenta matemática soviética, así como mecánica y astronomía. Está ordenado en un orden no discernible, no hay índices. Los comentarios, en alemán, están firmados datados, y donde eran necesarios detalles bibliográficos han sido ambos latinizados y traducidos al alemán.

3.5. BIOGRAFIAS:

Si es necesario la información sobre un matemático, la aproximación dependerá de la información requerida. Para matemáticos vivos, si se quiere hacer contacto con una persona particular o se necesita una lista de la ubicación de algún profesor o investigador, la mejor fuente es el *World Directory* [29]. Se publica no muy regularmente, en orden alfabético, por apellido, dando del nombre las iniciales de los nombres cristianizados, títulos y funciones (e.g. Dr o Lecturer), y una dirección (usualmente una dirección de trabajo). Tiene un índice geográfico alfabético por países, y coloca los nombres de los matemáticos en es país.

Uno desearía que fuera práctico para el *World Directory* contener la cantidad de información que suple el *Directorio Latinoamericano de Matemáticas* [30]. Incluye una lista por orden alfabético de matemáticos, dando nombres, a veces datos, títulos, funciones presentes, direcciones y temas especiales de interés. También tiene una lista geográfica de instituciones con direcciones y títulos que otorgan; y listas alfabéticas de publicaciones matemáticas, dando detalles y personal principal; lista de publicaciones matemáticas detallando frecuencia, como conseguirlas, etc.; y un índice geográfico de personas, instituciones y publicaciones.

Si se necesita más información sobre un matemático en particular entre 1.858 y 1.953, entonces Poggendorff [31] es una buena fuente. Está ordenado alfabéticamente por matemáticos y contiene notas biográficas breves seguida de una lista de sus publicaciones. Poggendorff no solamente incluye matemáticos; trata de incluir también nombres importantes de las ciencias físicas.

Si se necesita una información biográfica y el matemático es suficientemente famoso, entonces una biografía o autobiografía y en algunos casos una biografía de una enciclopedia es la mejor fuente.

3.6. DICCIONARIOS:

Hay dos tipos de diccionarios de quienes trabajan en matemática: los monoideomáticos, que pueden usarse para elucidar un término, y los multiideomáticos utilizables para un idioma extranjero. Entre los primeros, podemos afirmar que los de tipo general (por ejemplo: Oxford, Webster) son útiles en este área. Pueden dar información diferente al de un diccionario especializado (por ejemplo: los orígenes y usos anteriores de las palabras) pero esto no los hace menos útiles. Es probable que un matemático profesional no utilice estos diccionarios, aún para ayudarlo en campos no familiares, ya que el nivel de los diccionarios que siguen no superan el de estudiante no graduado.

James y James [32] está bastante actualizado, considerando que la fecha de publicación es 1.968, y el nivel también es para avanzados no graduados. Esta ordenado alfabéticamente y las definiciones bastante más completas que lo estrictamente necesario. Hay referencias cruzadas con definiciones relacionadas. Se dan nombres y fechas sobre algunos matemáticos famosos, pero únicamente cuando su nombre ocurre como un término matemático. Tiene un índice en francés, alemán, ruso y español que da el término inglés definido. Contiene una lista de términos ordenados por temas, y algunas tablas comúnmente usadas.

El propósito de Karush [33] es alcanzar a los estudiantes de secundaria y principio de universidades, pero también contiene definiciones de términos de matemática mas avanzados. También está ordenado alfabéticamente, pero tiene definiciones aumentadas con términos importantes en un tipo de letra diferente. Da historias breves de las ramas principales de la matemática (por ejemplo, álgebra, geometría). Hay un apéndice con los nombres, fechas, nacionalidades y breves descripciones de "matemáticos famosos". Aunque es el diccionario más útil, es brevemente de nivel inferior a James y James.

Otro diccionario, de menor nivel es Baker [34]. Contiene definiciones cortas, aunque ocasionalmente son un poco más largas (por ejemplo: círculo, diferenciación), es útil como fuente rápida de información.

De mejor nivel que Baker es Freiberger [35], pero mas restrictivo en su cobertura. Tiene también índices en francés, alemán, ruso y español, aunque no contiene tablas.

El diccionario con mejor reputación por exactitud, nivel y cobertura es *Iwanami* [36]. Para los no japoneses es prohibitivamente dificultoso de usar, dado que está en su mayoría escrito en japonés. Otro diccionario aceptable es Walford [37], que, según dice, incluye definiciones de términos, biografías de matemáticos, fórmulas, tablas, etc..

Habiendo muchos diccionarios para traducir un término de un idioma a otro, la siguiente es una lista de diccionarios que puede ayudar en el tema:

3.6.1. <u>Alemán-Inglés:</u>

Mac Intyre y Witte [39]
Klaften [40] (tiene inglés-alemán y alemán-inglés)
Hyman [41]
Herland [42]
Meschkowski [43]

3.6.2. <u>Ruso-Inglés:</u>

Milne-Thomson [44]
Lohwater y Gould [45]

Alexandrov [46]
Kramer [47]
Burlak y Brooke [48]
Recnik Matematickih Termina [49] (contiene los equivalentes al ruso en serbo-croata, francés, inglés y alemán)

3.6.3. Francés-Inglés:

Lyle [50]
Otros extraños son De Frances [51] da el equivalente con el chino.
Wiskundewoordeboek [32] tiene dos listas, una inglés-afrikoan y de afrikoan-inglés.

REFERENCIAS:

[1] *The new encyclopaedia britannica*, 30 vols, 15th edn, William Benton for Encyclopaedia Britannica Ltd., Chicago, 1.974.(En Biblioteca Central se encuentra como Co 32, En 19-1; Libro del año desde 1.972 a 1.993).

[2] C*hamber's encyclopaedia*, 15 vols, new rev. edn, Pergamon, Oxford, 1.973.

[3] *McGraw-Hill encyclopaedia of science and technology*, 15 vols, McGraw-Hill, New York, 1.966.

[4] *Van Nostrand's scientific encyclopaedia*, 4th edn, Van Nostrand, Princeton, 1.968. (En Biblioteca Central se encuentra: 2 edn., Van Nostrand, New York, 1.947).

[5] *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen*, 1st edn (1.898-1.935), 2nd edn (1.939-1.959), Teubner, Leipzig.

[6] *The universal encyclopaedia of mathematics*, Allen and Unwin, London, 1.964.

[7] *Mémorial des sciences mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1.925- .

[8] NAAS, J. y SCHMID, H. eds., *Mathematisches Wörterbuch; mit Einbeziehung der theoretischen Physik*, 2 vols, 3rd edn, Akademie Verlag, Berlin.

[9] KORN, G. y KORN, T., *Mathematical handbook for scientists and engineers*, 2nd edn, McGraw-Hill, New York, 1.968.

[10] MERRITT, F., *Mathematics manual; methods and principles of the various branches of mathematics for reference, problem solving, and review,* McGraw-Hill, New York, 1.962.

[11] MEYLER, D., y SUTTON,O., *A compendium of mathematics and physics*, English Univesities Press, London, 1.958.

[12] KUIPERS, L. y TIMMAN, R. eds., *Handbook of mathematics*, Pergamon, Oxford, 1.969; traducción inglesa editada por I. Sneddon.

[13] *Mathematical Reviews*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.940- .

[14] *Current Mathematical Publications*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 7- , 1.975- ; continuación de *Contents of Contemporary Mathematical Journals*, 1-6, 1.969-1.974.

[15] *Index of Mathematical Papers*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.970- .

[16] *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, Springer, Berlin, 1.931- .

[17] *Bulletin Signalétique*, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1.956- .
[18] *Referativnyi Zhurnal. Matematika*, Viniti, Moscow, 1.953- .
[19] COPLEY, E., *A guide to Referativnyi Zhurnal*, 3rd edn, Science Reference Library, London, 1.975.
[20] *Bibliografia Matematica Italiana*, Edizioni Cremonese, Rome, 1.951- .
[21] *Science Citation Index*, Institute for Scientific Information, Philadelphia, 1.961- .
[22] DICK, E., *Current information sources in mathematics; an annotated guide to books and periodicals 1.960-1.972*, Libraries Unlimited, Littleton, Colo, 1.973.
[23] LA SALLE, J. y LEFSCHETZ, S. eds., *Recent Soviet contributions to mathematics*, Macmillan, New York, 1.962.
[24] GOULD, H., 'Research bibliography of two special number sequences', *Mathematica Monongaliae*, 12, 1.971.
[25] Royal Society of London, *Catalogue of scientific papers*, 1st series, 6 vols, 1.800-1.863, HMSO, London (1.867-1.872); 2nd series, 2 vols, 1.864-1.873; 3rd series, 3 vols (1.874-1.883) y suplemento (1.800-1.883), Clay, London (1.877-1.902); 4th series, 7 vols (1.884-1.900), Cambridge University Press, Cambridge (1.914-1.925).
[26] Royal Society of London, *International catalogue of scientific literature*, Harrison, London, 1.902-1.921.
[27] *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, de Gruyter, Berlin, 1.868-1.942.
[28] *Inhaltsverzeichnisse Sowjetischer Fachzeitschriften. Serie iii A/1. Mathematik, Mechanik, Astronomie*, Institut für Dokumentation, Deutsche Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1.951-1.965.
[29] *World directory of mathematicians*, 4th edn, Almqvist och Wiksell for the International Mathematical Union, Stockholm, 1.970.
[30] *Directorio latinoamericano de matemáticas*, UNESCO, Montevideo, 1.967.
[31] POGGENDORFF, J., *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, J. Barth (varios), Leipzig, 1.858- .
[32] JAMES, G. y JAMES, R., *Mathematics dictionary*, 3rd edn, Van Nostrand, Princeton, 1.968.
[33] KARUSH, W., *The crescent dictionary of mathematics*, Macmillan, New York, 1.962.
[34] BAKER, C., *Dictionary of mathematics*, Newnes, London, 1.961.
[35] FREIBERGER, W. ed., *The international dictionary of applied mathematics*, Van Nostrand, Princeton, 1.960.
[36] *Iwanami sugaku-jiten*, 2nd edn, Iwanami Shoten Publishers, Tokyo, 1.968.
[37] WALFORD, A. ed., *Guide to reference material. Vol. 1, Science and technology*, 3rd edn, Library Association, London, 1.973.
[38] *Harrap's new standard French and English dictionary. Part 1: French-English*, 2 vols, rev edn, Harrap, London, 1.972.
[39] MaCINTYRE, S. y WITTE, E., *German-English mathematical vocabulary*, 2nd edn, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1.966.
[40] KLAFTEN, E., *Mathematical vocabulary*, Wila Verlag für Wirtschaftswerbung Wilhelm Lampl, Munich, 1.961.
[41] HYMAN, C. ed., *German-English mathematics dictionary*, Interlanguage Dictionaries, New York, 1.960.

[42] HERLAND, L., *Dictionary of mathematical sciences*, 2 vols, 2nd edn, Harrap, London.

[43] MESCHKOWSKI, H., *Mehrsprachenwörterbuch mathematischer Begriffe*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1.972.

[44] MILNE-THOMSON, L., *Russian-English mathematical dictionary*, University of Wisconsin Press, Madison, 1.962.

[45] LOHWATER, A. y GOULD, S., *Russian-English dictionary of the mathematical sciences*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.961.

[46] ALEXANDROV, P. *et al*, *Anglo-Russki slovar' mathematicheskikh terminov'*, Izdatel'stvo Inostrannoi Literatury, Moscow, 1.962.

[47] KRAMER, A., *Russian-English mathematical dictionary*, el autor, Trenton, N.J., 1.961.

[48] BURLAK, J. y BROOKE, K., *Russian-English mathematical vocabulary*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1.963.

[49] Matematicki Institut, Beogard, *Recnik matematickih termina*, Zavod za Izdavanje Udzbenika, 1.966.

[50] LYLE, W., *French and English dictionary of mathematical vocabulary*, Didier, Ottawa, 1.970.

[51] DE FRANCES, J., *Chinese-English glossary of the mathematical sciences*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.964.

[52] Suid Afrikaanse Akademie vir Wetenskap en Kuns, *Wiskundewoordeboek. Mathematical dictionary*, Tafelberg, Johannesburg, 1.971.

[53] GOULD, S. y OBREANU, P., *Romanian-English dictionary and grammar for the mathematical science*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.967.

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

ENCICLOPEDIAS:

Encyclopaedia of Mathematical Sciences- Springer:

VOL	AUTOR	TITULO	AÑO	
1	Anosov, D. y Arnold, V. (eds.)	Dynamical Systems I	1.988	A-6.751
2	Sinai, Ya. (ed.)	Dynamical Systems II	1.989	A-6.752
3	Arnold, V.	Dynamical Systems III	1.988	A-6.753
4	Arnold, V. y Novikov, S. (eds.)	Dynamical Systems IV	1.985	A-6.477
8	Khenkin, G. y Vitushkin, A. (eds.)	Several Complex Variables II	1.994	A-7.030
11	Kostrikin, A. y Shafarevich, I. (eds.)	Algebra I	1.990	A-6.312
18	Kostrikin, A. y Shafarevich, I. (eds.)	Algebra II	1.991	A-6.561
26	Nikol'skii, S. (ed.)	Analysis III	1.991	A-6.509
37	Kostrikin, A. y Shafarevich, I. (eds.)	Algebra IV	1.993	A-6.755
54	Khenkin, G. (ed.)	Several Complex Variables V	1.993	A-7.031
55	Parshin, A. y Shafarevich, I. (eds.)	Algebraic Geometry IV	1.994	A-7.153
69	Barth, W. y Narasimhan, R. (eds.)	Several Complex Variables VI	1.990	A-6.560
73	Kostrikin, A. y Shafarevich, I.	Algebra VIII	1.992	A-6.562 A-6.875

Encyclopedia of Mathematics and its Applications- Addison-Wesley:

VOL	AUTOR	TITULO	AÑO	
1	Santaló, L.	Integral Geometry and Geometric Probability.	1.976	A-4.674
2	Andrews, G.	The theory of partitions.	1.976	A-4.675
3	McEliece, R.	The theory of information and coding.	1.977	A-5.381 A-7.013
4	Miller, W.	Symmetry and separation of variables.	1.977	A-5.382
5	Ruelle, D.	Thermodynamic formalism.	1.978	A-5.383
6	Minc, H.	Permanents.	1.978	A-5.384

7	Roberts, F.	Measurement theory (with applications to decisionmaking, utility and the social sciences).	1.979	A-5.385
8	Biedenharn, L. y Louck, J.	Angular momentum in Quantum Physics.	1.981	A-5.386
9	Biedenharn, L. y Louck, J.	The Racah-Wigner Algebra in Quantum theory.	1.981	A-5.387
10	Dollard, J. y Friedman, Ch.	Product Integration with applications to Differential Equations.	1.979	A-5.388
11	Jones, W. y Thron, W.	Continued fractions. Analytic theory and applications.	1.980	A-5.389
12	Martin, N. y England, J.	Mathematical theory of Entropy.	1.981	A-5.390
13	Baker, G. y Graves-Morris, P.	Padé Approximants. Part I: Basic theory.	1.981	A-5.391
14	Baker, G. y Graves-Morris, P.	Padé Approximants. Part II: Extensions and applications.	1.981	A-5.392
15	Beltrametti, E. y Cassinelli, G.	The logic of Quantum Mechanics.	1.981	A-5.393
16	James, G. y Kerber, A.	The representation theory of the Symmetric Group.	1.981	A-5.394
18	Fattorini, H.	The Cauchy Problem.	1.983	A-6.082
20	Lidl, R. y Niederreiter, H.	Finite fields.	1.987	A-5.907
21	Tutte, W.	Graph theory.	1.984	A-6.154

Encipclopedia delle Matematiche Elementari- Hoepli:

AUTORES	AÑO	VOL.	PARTE	
Berzolari, L., Vivanti, G. y Gigli, D.	1.930	I	I	A-2.078
Berzolari, L., Vivanti, G. y Gigli, D.	1.932	I	II	A-2.079
Berzolari, L., Vivanti, G. y Gigli, D.	1.937	II	I	A-2.080
Berzolari, L., Vivanti, G. y Gigli, D.	1.938	II	II	A-2.081
Berzolari, L.	1.947	III	I	A-2.082

International Encyclopedia of Unified Science- The University of Chicago Press:

AUTORES	AÑO	VOL.	N°	
Neurath, O., Carnap, R. y Morris, Ch.	1.938	I	1-5	A-445
Carnap, R. *et al* (ed.)	1.938	I	6-10	A-192

Enzyklopädie der Elementarmathematik- Deustcher Verlag:

VOL	AUTOR	TEMA	AÑO	
I	Alexandroff, P., Markuschewitsch, A. y Chintschin, A.	Arithmetik	1.954	A-5.337
II	Alexandroff, P., Markuschewitsch, A. y Chintschin, A.	Algebra	1.956	A-5.338
III	Alexandroff, P., Markuschewitsch, A. y Chintschin, A.	Analysis	1.958	A-5.339

Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften- Teubner:

VOL	AUTOR	TITULO	AÑO	
I	Deuring, M., Hasse, H. y Sperner, E.	Algebra und Zahlentheorie.	1.959	A-2.907

BIOGRAFIAS:

1. ARCHIBALD, R., *Mathematical table makers,* Portraits, Paintings, Busts, Monuments, Bio-bibliographical notes, Scripta Mathematica, 1.948. (A-440)
2. GARDING, L., *Encounter with mathematics,* Springer, 1.977. (A-4.494)

DICCIONARIOS:

1. *Diccionario monográfico de matemáticas*, Bibliograp S.A., 1.981. (A-5.359)
2. FEYS. R. y FITCHE, F., *Dictionary of symbols of mathematical logic*, North-Holland, 1.989. (A-3.030)
3. THEWLIS, J., *A Concise Dictionary of Physics and related subjects*, Pergamon Press, 1.979. (A-5.224).

CAPITULO 4: EDUCACION MATEMATICA (A. G. HOWSON)

4.1. INTRODUCCION:

Para los propósitos de este capítulo, la educación matemática puede definirse como abarcativa de los siguientes puntos:
(1) Comprender como se crea la matemática, y como se la estudia;
(2) El diseño de programas de matemática que reconozcan los condicionamientos inducidos por los estudiantes, su sociedad y su sistema educativo;
(3) Para efectuar cambios en los programas (que incluyan contenidos, métodos y procedimientos para evaluación) y
(4) Para fomentar dentro de la población en general un crecimiento de la actividad matemática y una apreciación del rol de la matemática y de su naturaleza.

Como consecuencia de esta definición, de la gran importancia que se le asigna a la educación matemática a través del mundo de hoy y de la consecuente actividad dentro de este campo, es que un artículo de esta naturaleza debe, necesariamente, dejar muchos claros. En particular, para mantener la bibliografía dentro de ciertos límites, los trabajos específicos son citados únicamente si son tipo survey o contienen una lista extensiva o particularmente útil de referencias y sugerencias para lecturas posteriores. Tampoco han sido incluídas obras completas de ciertos matemáticos principales así como de proyectos, asociaciones, etc.. En tales casos se ha tratado nuevamente de llamar la atención del lector sobre la existencia de un cuerpo de material importante.

4.2. REVISTAS PERIODICAS O INDICES:

Es erróneo pensar que la educación matemática es una actividad nueva o un tema de hoy en día. Hay una larga historia que ha tratado de colocar a la matemática como una parte constituyente de cualquier educación general y de convencer a la sociedad en su conjunto de la parte que juega la matemática en sus vidas y la que puede llegar a jugar. Desde hace más de un siglo en Inglaterra hay revistas que incluyen artículos sobre educación matemática y la *Mathematical Gazette*, una revista dedicada al mejoramiento de la enseñanza de la matemática, tiene más de cien años (1.894). Es a través de las revistas que uno puede aprender más rápidamente los diferentes desarrollos y actividades de investigación que tienen lugar dentro de la educación matemática. El número de revistas creadas en los últimos años (20), varias con cooperación internacional y nacional, da una idea del interés creciente en esta actividad.

De las distintas revistas que publican trabajos sobre educación matemática algunas se dedican integramente a la matemática y sus problemas educacionales asociados, otras tienen objetivos más amplios y contienen ocasionalmente (aunque no por ello menos valiosos) artículos sobre educación matemática.

De las primeras, se llama la atención del lector en las siguientes (entre paréntesis, el año de fundación):

1. *Educational Studies in Mathematics* (Reidel, Netherlands; 1.968).

2. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (John Wiley, UK/USA; 1.970).
3. *The Mathematical Gazette* (Bell, para Mathematical Association (MA); 1.894).
4. *Mathematics in School* (Longman, para Mathematical Association; 1.971).
5. *Mathematics Teaching* (Association of Teachers of Mathematics (ATM); 1.955).
6. *The Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications* (IMA; 1.965).
7. *The American Mathematical Monthly* (Mathematical Association of America (MAA); 1.894).
8. *The Mathematics Teacher* (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM); 1.908).
9. *The Arithmetic Teacher* (NCTM: 1.954).
10. *Journal for Research in Mathematics Education* (NCTM; 1.970).

Típicas de las muchas revistas publicadas en otros idiomas diferentes del inglés son:

11. *Didaktik der Mathematik* (Alemania Federal).
12. *Bulletin de l'APM* (Francia).
13. *Periodico de Mathematiche* (Italia).
14. *NICO* (Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique).

(Estas revistas no tratan de cubrir todos los sectores de la educación matemática. Así por ejemplo, las referencias 2,3,5,6 y 7 están más interesadas en problemas relacionados con la educación matemática desde los 16 años en adelante).

Otras revistas en las que se puede encontrar valioso material sobre educación matemática incluyen:

15. *Review of Educational Research* (American Education Research Association; 1.931).
16. *British Journal of Educational Psychology* (Scottish Academic Press; 1.931).
17. *Journal of Curriculum Studies* (Collins; 1.968).
18. *Child Development* (University of Chicago Press; 1.930),

y, por supuesto, otras (una lista de revistas dedicada a la educación matemática puede enontrarse en:

19. *Ulrich's International Periodicals Directory*; cf. sección 2.1).

Además de estas revistas, la prensa educacional entrega actualizaciones del trabajo realizado. Por ejemplo, cada año el *Times Educational Supplement* produce dos suplementos especiales dedicados a la educación matemática.

Como una ayuda para el investigador, que no puede esperar lecturas demasiado sólidas a través de los contenidos de tales periódicos, hay revistas con información.

Por ejemplo, los títulos y detalles de publicación impresos en una gran variedad de revistas británicas se pueden encontrar en:

20. *The British Education Index* (British National Bibliography, London).
21. *SATIS* (Science and Technology Information Sources, National Centre for School Technology, Trent Polytechnic, Notts.).

Una lista de referencias específicamente relacionadas con la educación matemática tomada de 12 revistas británicas y abarcativas del período 1.961-1.974 ha sido publicada por el Centre for Studies in Science Education, Leeds University (22. D. C. Carter y G. T. Wain, *References of use to teachers of mathematics*). Un índice acumulativo del *The Arithmetic Teacher*, cubriendo los años 1.954-1.973, fue publicado por el NCTM.

Una lista de revistas fuera de Inglaterra incluyen:

23. *Zentralblatt für Didaktik der Matematik* (Klett, GFR).
24. *Current Index to Journals in Education* (Macmillan, N.Y.) (ver también 105).

Otras fuentes de valor son aquellas que publican índices de tesis para grados superiores, por ejemplo:

25. 'Doctoral Dissertation Research in Science and Mathematics', *School Science and Maths* (comentarios anuales).
26. *Index to Theses for Higher Degrees* (Gran Bretaña e Irlanda); Aslib.
27. *Research in Science and Mathematics Education* (Tesis para grados superiores en universidades inglesas, 1.968-1.971 y 1.971-1.973; Centre for Studies in Science Education, Leeds University).

27a. *Register of Education Research in the UK* 1.973-1.976 (National Foundation for Education Research, 1.976-).

4.3. ASOCIACIONES Y ORGANIZACIONES INTERNACIONALES:

Además de sus revistas, varias asociaciones matemáticas también producen una amplia variedad de informes, libros anuales, etc..

De particular interés son los libros anuales del National Council of Teachers of Mathematics. Títulos recientes incluyen:

28. *Historical topics for the mathematics classroom* (31st Yearbook; 1.969).
29. *Instructional aids in mathematics* (34th Yearbook; 1.973).
30. *The slow learner in mathematics* (35th Yearbook; 1.972).
31. *Geometry in the mathematics curriculum* (36th Yearbook; 1.973).
32. *Mathematics learning in early childhood* (37th Yearbook; 1.975).

Un anuario de otro grupo norteamericano- la National Society for Study of Education -de particular interés es:

33. *Mathematics education* (69th Yearbook; University of Chicago Press, 1.970).

En Inglaterra, la MA y la ATM publican una serie de libros, informes y papeles de trabajo, cuyos detalles pueden ser obtenidos solicitándolos a las asociaciones respectivas.

De interés especial por su extensa bibliografía es la publicación de la ATM:

34. T. J. Fletcher (ed.), *Some lessons in mathematics* (Cambridge University Press, 1.964).

Desde 1.960 se publicaron importantes informes encargados por organizaciones internacionales: OEEC (después OECD) y la UNESCO. De estos,

35. *New thinking in school mathematics* (OEEC, 1.961).
36. *Synopses for modern secondary school mathematics* (OEEC, 1.961),

merecen atención especial por la parte seminal que ellos jugaron en los cambios que siguieron.

Las distintas formas en las cuales estas reformas fueron realizadas en diferentes países están en:

37. *New trends in mathematics teaching* (UNESCO, Vol. 1,1.966; Vol. 2, 1.968).

El volumen 3 de *New Trends* (1.972) difiere de los anteriores en que no hay reprints de trabajos individuales pero presenta un informe de los desarrollos en educación matemática basado en el trabajo de un grupo de educadores de distintos países. El trabajo contiene una bibliografía muy útil en "Geometría", "Lógica", "Aplicaciones de la Matemática" e "Investigación en Educación Matemática".

Las deliberaciones de una gran parte de la reunión de educadores están resumidas en

38. *Developments in mathematical education* (Proceedings of the 2nd ICME; Cambridge University Press, 1.973).

Este informe da indicaciones de las actividades de los distintos grupos que trabajaron para el Congreso de Exeter y también contiene ciertos trabajos (notables de Freudenthal, Hawkins, Leach, Philp, Thom y Fischbein) los que muestran la gran variedad de formas en las cuales pueden tener lugar el estudio, la investigación y el desarrollo de la actividad dentro de la educación matemática. (Los trabajos de uno de los grupos de trabajo del Congreso fueron publicados separadamente:

39. E. Choat (ed.), *Preschool and primary mathematics*, Ward Lock Educational, 1.973).

Los trabajos de los conferencistas invitados al ICME (Lyons, 1.969) se encuentran en *Educational Studies in Mathematics*, 2 (1.969).

Desde ese momento se planificó realizar el Congreso Internacional de Educación Matemática cada cuatro años (el último fue en Sevilla en 1.996) y en los años impares el International Congress of Mathematicians hará reuniones en las cuáles desarrollará una sección dedicada a la educación matemática. ICMI (International Commission on

Mathematical Instruction) ha ayudado también a promover reuniones internacionales sobre una variedad de temas tales como "Applicable mathematics in secondary schools" y "Mathematics and language in emergent countries". Los resultados de estas dos reuniones están publicados en:

40. *New aspects of mathematical applications at school level* (L'Institut Grand Ducal, Luxembourg, 1.975).
41. *Interactions between linguistics and mathematical education* (UNESCO, 1.975).

4.4. <u>EL DESARROLLO DE LA EDUCACION MATEMATICA:</u>

El estudio de como se ha desarrollado la educación matemática y aquellos aspectos que la han afectado en el pasado ha recibido bastante atención. Esto ha resultado en la publicación de los siguientes trabajos:

42. *A history of mathematical education in the USA and Canada* (NCTM, 1.970).
43. *The Mathematical Association of America: its first fifty years* (MAA, 1.972).
44. E.G.R. Taylor, (a) *The mathematical practitioners of Tudor and Stuart England* (Cambridge University Press, 1.954), (b) *The mathematical practitioners of Hanoverian England* (Cambridge University Press, 1.966).

El que trabaja en estas áreas tiene, pos supuesto, una amplia gama de fuentes informativas. Una bibliografía de libros de matemática publicados en Inglaterra antes de 1.850 está en preparación por P. J. Wallis de la Universidad de Newcastle-upon-Tyne (quien, mientras tanto, puede proveer varias listas de publicaciones, por ejemplo: British 'Euclids'). Fuentes típicas de información secundaria pero particularmente valiosas por su bibliografía incluye:

45. F. Watson, *The beginnings of the teaching of modern subjects in England* (1.909; reimpreso en 1.971 por S.R. Publishers).
46. A. de Morgan, *Arithmetical books* (1.847; reimpreso como un apéndice de D. E. Smith *Rara arithmetica*, Chelsea, 1.970).
47. R. C. Archibald, 'Notes on some minor English mathematical serials' (*Mathematical Gazette*, xiv, 379-400, 1.929).

Aquellos interesados en el desarrollo de la filosofía de la educación matemática y de los métodos de enseñanza pueden encontrar puntos de partida en los libros siguientes:

48. A. de Morgan, Various essays extracted from the *Quarterly Journal of Education, The Schoolmaster* (1.836).
49. B. Branford, *A study of mathematical education* (Oxford University Press, 1.908).
50. C. Godfrey y A. W. Siddons, *The teaching of elementary mathematics* (Cambridge University Press, 1.931).
51. G. St. L. Carson, *Essays on mathematical education* (Ginn, 1.913).

Fuentes primarias de valor particular son:

52. *Minutes of the Committee of Council in Education* (trabajos anuales parlamentarios que describen escuelas y colegios de entrenamiento en los primeros años del reino de Victoria).
53. *Special reports on the teaching of mathematics in the United Kingdom* (2 vols; HMSO, 1.912),

y el primer intento en inglés de persuadir a los lectores de la potencia y utilidad de la matemática:

54. J. Dee, *The mathematicall praeface* 1.570; reimpreso en 1.975 por Science History Publications, New York.

La referencia 53 contiene trabajos preparados por el ICM de 1.912 realizado en Cambridge. La Comisión Internacional de Educación Matemática que fue creada en 1.908, reunió para el encuentro de 1.912 una cantidad enorme de informes de todo el mundo. El resultado es un informe sin paralelo de la educación matemática a través del mundo en un momento particular. Los informes reunidos pueden encontrarse, por ejemplo, en la Mathematical Association en la Universidad de Leicester.

Un relato más compacto sobre este período y que contiene una bibliografía muy útil es

55. J.W.A. Young, *The teaching of mathematics* (Longman, 1.907; edición revisada 1.914).

4.5. SURVEYS:

En los años recientes hubo varios intentos de estudiar todo el campo de la educación matemática, a veces utilizando reuniones.

Se llama la atención del lector sobre la siguiente bibliografía:

56. L.R. Chapman (ed.), *The process of learning mathematics* (Pergamon, 1.972).
57. H.B.Griffiths y A.G. Howson, *Mathematics: society and curricula* (Cambridge University Press, 1.974).
58. G. Wain (ed.), *Mathematical education* (Van Nostrand Reinhold).
59. H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task* (Reidel, 1.973).
60. W. Servais y T. Varga (eds.), *Teaching school mathematics* (Penguin, 1.971).

(Referencias 57, 58 y 60 contienen buena bibliografía; referencia 56 es parcial pero fuerte en psicología; referencia 59 es más un testamento personal que un estudio- carece de un índice y bibliografía adecuada, pero aún así es un libro estimulante que contiene muchas sugerencias ímplicitas para temas de investigación).

4.6. LA PSICOLOGIA DEL APRENDIZAJE MATEMATICO:

Los lectores de los libros mencionados en la sección 4.4 notarán un crecimiento y un maduro interés en la forma en que los niños aprenden matemática. En los primeros años del reinado de la reina Victoria, Thomas Tate defendía el caso de la "facultad psicológica", una buena teoría que en los tiempos de Eduardo (ver Godfrey en referencia 50) fue abandonada en el favor popular, por el punto de vista del aprendizaje de Herbart. (Para un estudio de trabajos anteriores en psicología educacional ver también los artículos de Burt y Hamley en: 61. *Secondary Education* (Spens Report); HMSO, 1.938).

Por los años 30 emergieron otras teorías del aprendizaje, incluyendo la "Gestalt". En las décadas recientes hubo muchas investigaciones realizadas dentro de la educación matemática en el campo de la psicología educacional. Es imposible aquí no hacer una lista de nombres claves: Ausubel, Bruner, Dienes, Gagné, Gattegno, Piaget, Skemp y Skinner; cualquier biblioteca universitaria o equivalente debe contener una selección de trabajos de estos autores.

Estudios en psicología con orientación hacia la educación matemática están dados en Peel, referencia 60, y por Shulman en referencia 33. Las referencias 56 y 58 contienen algunos artículos y bibliografías útiles.

Se pueden conseguir muchos estudios y críticas sobre el trabajo de Piaget; debemos mencionar:

62. E.V. Sullivan, *Piaget and the school curriculum: a critical appraisal*, OISE, 1.967,

ya que éste llama la atención del Ontario Institute for Studies in Education, un grupo que de tanto en tanto publica folletos de gran interés para los educadores matemáticos. Fueron publicados trabajos de psicología (conteniendo buenas bibliografías), a partir del Psychology of Mathematical Education Workshop, por el Centre for Science Education, Chelsea College. Traducciones de trabajos rusos sobre psicología fueron publicados por SMSG/A.C. Vroman bajo el título de *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics* (7 volúmenes).

Los problemas atenientes a como los niños aprenden matemática y de como los matemáticos pueden resolver los problemas están relacionados y, por lo tanto, es importante llamar la atención de lo que a veces se denomina es estudio de la heurística- es el arte de resolución de problemas. El libro clave es

63. G. Polya, *Mathematics and plausible reasoning* (2 vols; Oxford, 1.954) (A-1.924 y A-1.925).
64. g. Polya, *How to solve it*, Doubleday Anchor Books, 1.957. (aunque un libor más modesto, da una buena introducción a los argumentos del autor) (A-1.927).

Una bibliografía que describe la investigación en este campo está contenida en

65. M. Jerman, *Instruction in problem solving and an analysis of structural variables that contribute to problem solving difficulty* (Technical Report N° 180, 1.971, Psychology and Education Series, Stanford University).

4.7. DISEÑO DE CURRICULUM:

La teoría de diseño curricular es comparativamente nueva en la escena educativa, aunque hay lógicamente líneas trazadas por muchos educadores desde los primeros tiempos.

Un estudio útil del diseño curricular en el marco de la educación general (incluyendo buenas bibliografías) es:

66. R. Hooper (ed.), *The curriculum* (Open University Press, 1.971).

En el área de la educación matemática debemos llamar la atención de las referencias 56, 57 y 60, a las publicaciones de varias asociaciones matemáticas (sección 4.3) y más especialmente al trabajo de varios proyectos que han sido conducidos durante las últimas décadas.

Detalles breves de proyectos de varios países pueden encontrarse en las series de informes editados por la Universidad de Maryland. Una descripción de los proyectos en Europa está contenida en:

67. W. Servais, 'Continental traditions and reforms' (*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 6(1), 37-58, 1.975).

La Mathematical Association ha publicado informes descriptivos de proyectos en Inglaterra. Una lista de los principales puede encontrarse en la referencia 57, junto al nombre de los editores.

El trabajo en el desarrollo del curriculum continúa en todas las áreas de la educación matemática. Así, en Inglaterra, por ejemplo, el School Mathematics Project trabaja concientemente en el Proyecto 7-13, mientras que en los extremos de la escala educativa el Schools Council financia un proyecto sobre experiencias matemáticas de preescolar (Centre for Science Education, Chelsea College) y la London Mathematical Society ha creado un servicio de noticias para mantener a sus miembros informados de iniciativas a nivel universitario.

Las diversas investigaciones promovidas por el Schools Council- el grupo público responsable por el curriculum y exámenes en Inglaterra y Gales, son descriptas en

68. *Schools Council Project Profiles and Index*, que es revisada a intervalos frecuentes.

Un ejercicio de diseño de curriculum- enteramente teórico- merece especial atención:

69. CCSM, *Goals for school mathematics* (Houghton Mifflin, 1.963).

Diseñar un curriculum es una cosa, otra es ser aceptado en la clase y enseñarlo en forma razonable y desgranada a lo largo del curso.

Dos historias de los principales proyectos son conseguibles:

70. B. Thwaites, *SMP: the first ten years* (Cambridge University Press, 1.972).
71. *SMSG: the making of a curriculum* (SMSG, 1.965),

pero estos son un poco fríos, afirmaciones formales. Más relatos de trabajos sobre el curriculum (aunque en escala limitada) pueden encontrarse en:

72. *The Fife mathematics project* (Oxford University Press, 1.975).

Hay una bibliografía extensiva sobre la diseminación de ideas en referencia 58.

El problema de evaluar el trabajo de proyectos es bastante dificultoso. Libros útiles y trabajos sobre el tema incluyen:

73. American Educational Research Association (AERA), *Monograph series on curriculum evaluation* (Varios títulos; Rand McNally, 1.967-).
74. M. Parlett y D. Hamilton, *Evaluation as illumination* (Occasional Paper 9, Centre for Educational Sciences, University of Edinburgh, 1.973).

(ver también referencias 33, 72 y 81).

Informes sobre la evaluación del trabajo realizado por proyectos de la Schools Council están contenidos en:

75. *Evaluation in curriculum development* (Schools Council Research Studies, Macmillan, 1.973).

Los problemas de evaluación y diseminación están, sin embargo,estrechamente conectados con temas mencionados en las dos secciones siguientes.

4.8. EVALUACIONES Y EXAMENES:

Un libro clave en evaluación es:

76. B.S. Bloom *et al, Handbook on formative and summative evaluation of student learning* (McGraw-Hill, 1.971),

que contiene una larga sección sobre la evaluación del aprendizaje en matemática de secundaria escrita por J.W. Wilson, miembro del equipo SMSG que tiene a su cargo el National Longitudinal Study in Mathematical Ability- un ejercicio evaluativo enorme realizado en Estados Unidos (ver también referencia 33).

El artículo de Wilson contiene muchas referencias al trabajo en Estados Unidos y Canadá. Otras referencias pueden encontrarse en el capítulo de evaluación en la referencia 37, vol. 3.

Ejemplos prácticos de intentos de examinar la matemática de nuevas formas pueden encontrarse en los boletines de exámenes publicados de tanto en tanto por la Schools Council. The National Foundation for Educational Research (U.K.) ha mostrado particular interés en los problemas de evaluación y publica frecuentemente monografías de interés para investigadores.

Aunque en el pasado se ha puesto el esfuerzo en medir los logros cognitivos en matemática, hay ahora un interés creciente en el problema de investigar las *actitudes* de los estudiantes hacia la matemática- factores en el dominio afectivo. Como muestra un estudio realizado por Wilson, las medidas empleadas dejaban mucho que desear. Sin embargo, esta es una parte importante de la educación matemática: el estudio de esto ha dado lugar a un incremento de la investigación y es en si mismo tema de muchas más investigaciones.

4.9. ENTRENAMIENTO DE PROFESORES:

La implementación de los cambios dependen de la flexibilidad y competencia del maestro de clase. Producir maestros que puedan captar con éxito los cambios es el objeto primario de todos los cursos de perfeccionamiento que se dictan tanto en los períodos de vacaciones como los que se realizan durante los períodos lectivos. En los Estados Unidos la MAA ha preparado varios informes sobre el entrenamiento de maestros; en Inglaterra, la Association of Teachers in College and Departaments of Education (ATCDE) ha producido boletines resaltando la construcción de programas para futuros maestros y sugiriendo soluciones posibles; la OECD y la UNESCO, en conjunto con otros grupos muy numerosos para detallarlos, también producen informes.

Los proyectos sobre el desarrollo del curriculum en los 60, dieron lugar a varios métodos alternativos de tratar con los entrenamientos durante los períodos lectivos: cursos breves, centros de maestros, etc.. Hay nueva literatura en este tema. La mayoría de esto puede encontrarse en revistas, en trabajos de investigación e informes y tesis, pero para los estudios mencionados en la sección 4.5 hay listas de libros relevantes. La posición de la preparación de maestros y de las instituciones que están involucradas, sin embargo, no es muy estable; ni que decir de que no hay obvias fuentes de financiamiento para continuar en un futuro cercano. Es claro, la improvisación está al orden del día y aquellos con interés en la investigación en este campo particular son dependientes de los informes y estudios actualizados. Una afirmación sobre "que es y que debería ser", al menos en la escena inglesa se puede encontrar en:

77. *Teacher education and training* (James Report; HMSO, 1.972).

Informes y artículos concernientes a la preparación de maestros en Inglaterra pueden encontrarse en la revista, fundada en 1.974:

78. *Mathematical Education for Teachers* (Homerton College, Cambridge).

4.10. METODOS DE EDUCACION INDEPENDIENTES Y TECNOLOGIA EDUCATIVA:

La creciente posibilidad de conseguir aparatos electromecánicos (máquinas de aprender programadas, cintas, proyecciones, películas y, sobre todo, la computadora y la televisión) y el punto de vista de ciertos psicólogos educacionales en teoría del aprendizaje, tratando de traer la "aproximación de los sistemas" de la ingeniería al aula, se han combinado en varias formas para hacer de la "tecnología educativa" un punto central en la educación matemática del día de hoy.

El aprendizaje programado tiene comparativamente una corta estadía entre los "diez mejores" de las modas educacionales. Su crecimiento y (parcialmente) su caída está descripta en:

79. G.D.M. Leith, *Second thoughts on programmed learning* (NCET; Councils and Education, 1.969).

Este folleto es uno de los de la serie publicada por el Council for Educational Technology, CET (y su antecedente NCET). Otros folletos en esta serie de interés- y que poseen una útil bibliografía -son sobre la computación en educación, sobre propuestas para un proyecto matemático que hacen uso de varias técnicas dentro de la tecnología educacional (Howson y Eraut, 1.969, que dió lugar al Continuing Mathematics Project at Sussex University) y en "In-service Education for Innovation" (Eraut, 1.972). El Council es también responsable por la administración de varios proyectos con respecto a la utilización de la computadora como ayuda educativa. Esto es, por supuesto, un desarrollo del trabajo pionero que se llevó a cabo en Estados Unidos en los 60. Descripciones de proyectos típicos en este área son

80 (a). P. Suppes, 'The uses of computers in education' (*Scientific American*, 206-220, Septiembre, 1.966),
(b). P. Suppes *et al.*, *Stanford's 1965-6 arithmetic program* (Academic Press, 1.968).

Sin embargo, el gran triunfo de la tecnología educativa en Inglaterra, debe encontrarse en el trabajo de la Open University. Aquí varios medios han sido utilizados en el diseño de lo que básicamente es un "super curso por correspondencia" . Se han preparado una enorme cantidad de materiales. Investigaciones sobre la efectividad de los métodos empleados y el éxito del departamento de matemática en lograr sus objetivos y, ciertamente, una crítica a la profundidad de estos objetivos, será de gran interés y valor.

En las escuelas, la tecnología educativa ha sido pensada primariamente para tratar con problemas de enseñanza. El proyecto clásico en este área es el montado por los suecos-IMU (este fue también tema de un ejercicio particularmente interesante en evaluación: 81. I. Larsson, *Individualised mathematics teaching,* CWK Gleerup/Lund, 1.973). Esta serie sueca se puede obtener en una adaptación al inglés (Caffrey Smith). Otros cursos basados en el aprendizaje individualizado que hace uso de fichas de trabajo y materiales alternativos ha sido producida por diversos editores.

Una bibliografía útil sobre tecnología educativa cubriendo todos los aspectos de la educación es:

82. S. Stagg y M. Eraut, *A select bibliography of educational technology* (2nd edn, Council for Educational Technology, 1.975).

La revista

83. *Programmed Learning and Educational Technology* (Sweet and Maxwell),

contiene artículos relacionados con la enseñanza de la matemática y prepara los anuarios producidos por la Association for Programmed Learning and Educational Technology (APLET) y publicado por Kogan Page.

4.11. APARATOS Y PELICULAS:

La posición con respecto a la posibilidad de obtener aparatología, películas, etc., está en cambio permanente. Listas de películas han sido publicadas por la ATM de tanto en tanto, y una publicación antigüa pero aún útil es la

84. P. R. Burgraeve, *Report on films for the teaching of mathematics in Europe* (Strasbourg Council of Europe, Council for Cultural Co-operation, 1.970).

Nuevas películas y aparatos son comentados en varias revistas y catálogos (en las revistas inglesas, las referencias 4 y 5 son las mejores para este propósito) y una lista de varias fuentes de películas matemáticas pueden encontrarse en la referencia 38. Algunos de los problemas a los que se enfrenta el diseñador de películas matemáticas son discutidos en

85. *Films and film making in mathematics* (ATM, 1.967).

Un tipo nuevo e importante de forma de producir películas es a través del computador. Varios equipos- por ejemplo, en la Open University y en la Unidad de computación de la Universidad de Londres -está tratando de explotar esta nueva posibilidad.

Es destacable el desarrollo de las calculadoras electrónicas pequeñas. Como resultado, cualquier descripción de los modelos que están en el mercado rápidamente queda desactualizado. Sin embargo, varias de las revistas mencionadas en la sección 4.2 dan frecuentemente información de novedades. Estas calculadoras tendrán ciertamente un efecto profundo en la enseñanza de la matemática en todos los sectores de la educación y su uso en gran escala necesariamente inició una cantidad considerable de trabajo en investigación y docencia.

La cuestión de como puede utilizarse la aparatología más efectivamente en las aulas pertenece al dominio de la psicología educacional. El problema ha sido investigado por, entre otros, varios de los autores mencionados en la sección 4.6.

4.12. COMPETENCIAS MATEMATICAS Y OTRAS ACTIVIDADES CURRICULARES:

Por muchos años, los niños húngaros han tenido la oportunidad de exponer sus habilidades matemáticas en olimpíadas anuales. Gradualmente, la idea de las competencias de resolución de problemas se ha diseminado y hoy en día la Olimpíada Internacional de Matemática se realiza regularmente (N.T.: del 18 al 31 de julio de 1.997 se realizó en Mar del Plata). El número de países que se han ido sumando son numerosos y actualmente son más de cincuenta. La historia del crecimiento de estas competencias junto con una bibliografía extensa puede encontrarse en

86. 'ICMI report on mathematical contests in secondary education' (*Educational Studies in Mathematics*, 2, 80-114, 1.969).

Alguna investigación se ha realizado para estimar el éxito de estas competencias para ubicar a futuros matemáticos y en crear el interés en la matemática. No mucho se ha hecho sobre el particular en Inglaterra, o, ciertamente, en investigar cuando se logran los objetivos similares de los exámenes extraescolares.

En Rusia se ha realizado un gran esfuerzo para detectar talentos matemáticos a través de las Olimpíadas. Ver por ejemplo:

87. S. L. Sobolev, 'Mathematical Olympiads in the Soviet Union' (*Proceedings of the Japan/ICMI Seminar*, 16-23; JSME, Tokyo, 1.975).

Los rusos están también involucrados en relación con otras dos iniciativas en educación matemática. Una es la escuela especial para los matemáticamente dotados; ver, por ejemplo,

88. A. Owen y F.R. Watson, 'The mathematical boarding schools of the USSR' (*Mathematical Gazette*, lviii, 188-195, 1.974).

El otro es la creación de clubs matemáticos para estudiantes. Una importante lista de trabajos sobre clubes matemáticos de todo tipo puede encontrarse en:

89. W.L. Schaaf, *A bibliography of recreational mathematics* (3 vols, NCTM, 1.970-1.973).

La producción de material extracurricular y recreacional para estudiantes (de todas las edades) enfrenta a los educadores matemáticos con un serio problema. Es un viejo problema (como muestra la referencia 47), que se lo enfrenta hoy en día en una variedad de formas, siendo uno de los más notables el Martin Gardner en *Scientific American*. Esta última es una de las formas en que se puede tratar de fomentar las actividades matemáticas entre los no-matemáticos. El problema general de decirle al gran público sobre lo que hacen los matemáticos y por qué lo hacen es aún más difícil. (Ver el trabajo sobre *La Popularización de la matemática*, pág.259)

4.13. LAS NECESIDADES DE LA SOCIEDAD Y, EN PARTICULAR, DE OTROS TEMAS:

El diseñador de curricula, en cualquier nivel debe estar atento a la forma en que los estudiantes son conducidos a utilizar la matemática tanto en sus estudios como en su trabajo futuro.

Recientemente se han realizado investigaciones en algunos de estos problemas de 'interface' y debemos mencionar el siguiente, como punto de partida de futuras investigaciones:

90. R.E. Gaskell y M.S. Klamkin, 'The industrial mathematician views his profession' (*American Mathematical Monthly*, 81, 699-716, 1.974) (contiene una buena bibliografía).
91. *Mathematical needs of school leavers entering employment* (IMA, `1.975).
92. 'The mathematical needs of "A-level" physics students' (Royal Society/Institute of Physics; *Physics Education*, junio 1.973).
93. 'Report of the working party on mathematics for biologists' (Royal Society/Institute of Biology; *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 6, 123-135, 1.975).
94. 'Mathematics and school chemistry' (Royal Society/Institute of Chemistry; *Education and Science*, Enero 1.974).

La producción de ejemplos que pueden emplearse en la enseñanza diaria en el aula y que muestran como la matemática es utilizada, es una contribución valiosa a la educación matemática. The Mathematical Association ha producido informes que dan aplicaciones escolares de matemática. A más alto nivel, la MAA financió la producción de:

95. B. Noble, *Applications of undergraduate mathematics in engineering* (Macmillan, New York, 1.967).

El IMA ha dedicado varios números de su Boletín (referencia 6) a descripciones de como la matemática puede aplicarse al comercio, industria y a las ciencias; por ejemplo

'Mathematics in clinical medicine' (10, 1/2, Ene./Feb., 1.974).
'Medical and biological applications of statistics'(11, 3/4, Marzo/Abril, 1.975).
'The mathematics of telecommunications traffic' (11, 5, Mayo 1.975).

Dos bibliografías que ilustran como puede utilizarse la matemática fuera de las ciencias físicas e ingeniería son:

96. D. Thompson, 'A selective bibliography of quantitative methods in geography' (*Geography*, 54 (1), 74-83, Enero 1.969).
97. G.L. Baldwin *et al.*, 'A program in mathematical analysis for the life and management sciences' (*American Mathematical Monthly*, 825, 514-520, Mayo 1.975).

4.14. COMPUTADORAS:

El uso de la computadora como ayuda educativa ya ha sido mencionada en la sección 4.10. La computadora, sin embargo, tiene un rol crucial que jugar en la educación matemática, porque sus posibilidades son tales que pueden influenciar en el pensamiento matemático y la naturaleza de la actividad matemática. Nuevamente sólo podemos informar que la rapidez de los cambios hacen que cualquier lista de referencias no tenga valor por mucho tiempo.

Sin embargo, como alguna indicación de las varias formas en que se superponen los problemas de educación matemática y de educación con la computadora, debemos mencionar el trabajo de Iveson para diseñar una nueva notación matemática mejor adaptada a los tiempos de la computación que el de Papert (ver referencia 38, para referencias), quien utiliza la computadora para "enseñar a los niños a ser matemáticos antes de enseñarles a ellos matemática", y el trabajo del grupo de la SMP sobre computación, el que ha sugerido posibilidades de usar la computadora para reforzar el aprendizaje de la matemática (manuales publicados por el Cambridge University Press).

Varios informes sobre educación con la computadora han sido publicados de tanto en tanto. Ejemplos típicos son:

98. *Computer science in secondary education* (OECD, 1.971).
99. *World conference on computer education, Amsterdam, 1.970* (IFIP Amsterdam, 1.970),

y el número 5 doble (3/4) (1.974) de referencia 2, dedicado a trabajos dados en una conferencia sobre "Computadoras de alta educación".

IFIP- la Federación Internacional para el Proceso de la Información - realizó la segunda conferencia mundial en Marsella en 1.975 en la que se intercambió información sobre el trabajo realizado en el tema. Se produjeron algunos informes de grupos de trabajo y un conjunto de pautas para maestros. El informe de 1.975 fue publicado como:

99a. *Computers in education* (North-Holland, 1.975).

En Inglaterra, la British Computer Society ha publicado una serie de trabajos sobre educación con la computadora. También apareció una película con una lista y un libro, éste último es regularmente actualizado. The Computer Education Group publica una revista, *Computer Education*, y el National Computing Centre ha preparado un servicio consultivo para escuelas. En Escocia el Scottish Education Department ha apoyado dos informes sobre computadoras en escuelas.

4.15. INVESTIGACION EN EDUCACION MATEMATICA:

A través de este capítulo ha habido sugerencias concernientes a temas y áreas para la investigación en educación matemática. El lector puede, sin embargo, encontrar otras posibilidades valiosas referidas en libros de la sección 4 en la referencia 37, 3, y en

100. R.S. Long *et al.*, 'Research in mathematical education' (*Educational Studies in Mathematics*, 2, 446-468, 1.970).
101. *Report of a conference on responsabilities for school mathematics in the 70s* (SMSG, 1.971).

Reseñas de investigación, en proceso y completadas, pueden encontrarse en muchas revistas educativas, algunas de las cuales (por ejemplo, referencia 5) contienen, de vez en cuando, artículos de investigación. Un informe extenso sobre la investigación en Estados Unidos aparece cada año en el número de septiembre de la referencia 10. Una lista valiosa de trabajos de investigación en educación matemática se puede encontrar en

102. *Final report of the SMSG panel on research* (SMSG Newsletter No. 39, 1.972).

Hay también dos informes exhaustivos de la investigación en Estados Unidos:

103. M.N. Suydam, *Annotated compilation of research on secondary school mathematics 1.930-1.970* (2 vols, US Office of Education, 1.972).
104. M.N. Suydam y C.A. Riedesel, *Interpretative study of research and development in elementary school mathematics* (3 vols, US Office of Education, 1.969).

La US Educational Resources Information Center (ERIC) publica una revista de comentarios, 105. *Research in Education*, que incluye temas de educación matemática.

Un libro general de información sobre investigación en educación es:

106. R.M.W. Travers (ed.), *Second handbook of research in teaching* (Rand McNally, 1.973).

4.16. DIRECCIONES DE ORGANIZACIONES:

APLET (Association for Programmed Learning and Educational Technology), 33 Queen Anne St., London W1.
ATCDE (Association of Teachers in Colleges and Departaments of Education), 1 Crawford Place, London W1; ahora unida a ATTI formando NATFHE (National Association of Teachers in Further and Higher Education), Hamilton House, Mabledon Place, London WC1H9BH.
ATM (Association of Teachers of Mathematics), Market St. Chambers, Nelson, Lancashire, BB9 7LN.
BCS (British Computer Society), 29 Portland Place, London W1N 4HU.
Centre for Science Education, Chelsea College, Bridges Place, London SW6.
CEG (Computer Education Group), North Staffordshire Polytechnic, Blackheath Lane, Stafford.
CET (Council for Educational Technology), 3 Devonshire St., London, W1N 2BA.
Educational Testing Service, Princeton NS 08540, USA.
ERIC (Educational Resources Information Center), Ohio State University, 400 Lincoln Tower, Columbus, Ohio 43210.

IFIP (International Federation for Information Processing), POB 6400, Amsterdam.

IMA (Institute of Mathematics and its Applications), Maitland House, Warrior Square, Southend-on-Sea, SS1 2JY.

MA (Mathematical Association), 259 London Rd, Leicester, LE2 3BE.

MAA (Mathematical Association of America), 1225 Connecticut Ave., N.W., Washington, DC 20036.

NCC (National Computing Centre), Oxford Rd, Manchester M1 7ED.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), 1.906 Association Drive, Reston, Va 22091.

NFER (National Foundation for Educational Research), The Mere, Upton Park, Slough, Bucks.

OISE (Ontario Institute for Studies in Education), 102 Bloor St. West, Toronto 5, Ontario.

OECD (Organisation for Economic Cooperation and Development), 2 rue André-Pascal, 75 Paris 16^{e}.

The Schools Council, 160 Gt Portland St., London, W1N 6LL.

SMP (School Mathematics Project), Westfield College, Kidderpore Ave., London NW3.

UNESCO (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organisation), Place de Fontenoy, 75700 Paris.

4.17. REVISTAS ARGENTINAS DE EDUCACION MATEMATICA:

NOMBRE: Revista de Educación Matemática.
EDITOR: Unión Matemática Argentina. (J. Vargas, Director)
DIRECCION: Universidad Nacional de Córdoba. FAMAF.

NOMBRE: Elementos de Matemática.
EDITOR: Universidad CAECE. (R. P. J. Hernández, Director)
DIRECCION: Universidad CAECE.
Avda. de Mayo 1400- 5to. Piso
Buenos Aires

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

1. ATKISNON, R. y WILSON, H. (eds.), *Computer-assisted instruction. A book of readings*, Academic Press, 1.969. (A-3.321)
2. Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique UNESCO, *Enseignement des Mathématiques daus les Universités*, UNESCO, 1.966. (A-1.853)
3. FINERMAN, A. (ed.), *University Education in Computing Science*, ACM Monographs Series, Academic Press, 1.968. (A-3.229)
4. GLAESER, G., *Mathématiques pour l'éléve professeur*, Hermann, 1.973. (A-5.297)
5. KARIAN, Z. (ed.), *Symbolic computation in undergraduate Mathematics Education*, The Mathematical Association of America, 1.992. (A-6.831)
6. KENSCHAFT, P. (ed.), *Winning Women into Mathematics*, The Mathematical Association of America, 1.991. (A-6.608)
7. Mathematical Association (London), *Transfer from primary to secondary schools*, G. Bell & Sons, 1.964. (A-1.450)
8. Mathematical Association (London), *A second report on the teaching of arithmetic in schools*, G. Bell & sons, 1.964. (A-1.452)
9. Mathematical Association (London), *The teaching of mechanics in schools*, G. Bell & Sons, 1.965. (A-1.451)
10. Mathematical Association (London), *Experiments in the Teaching of sixth form mathematics to non-specialists*, G. Bell & Sons, 1.965. (A-1.488)
11. Mathematical Association (London), *The teaching of sets in schools*, G. Bell & Sons, 1.965. (A-1.791)
12. Mathematical Association (London), *Mathematical in Education and Industry,* The Mathematical Association, 1.966. (A-1.882)
13. Mathematical Association (London), *Suggestions for sixth form work in Pure Mathematics*, G. Bell & Sons, 1.967. (A-1.883)
14. Mathematical Association (London), *Experiments in the teaching of sixth form mathematics to non-specialists*, G. Bell & sons, 1.967. (A-1.884)
15. Mathematical Association (London), *Applications of sixth form mathematics*, G. Bell & Sons, 1.967. (A-2.436)
16. Mathematical Association (London), *Mathematics projets in British Secondary Schools*, G. Bell & sons, 1.968. (A-2.437)
17. Mathematical Association (London), *Mathematics Laboratories in schools*, G. Bell & Sons, 1.968. (A-2.438)
18. ORIOL, R., *Mathématiques de l'apprentissage. Tome 1: Arithmétique,* Dunod, 1.966. (A-2.721)
19. POLYA, G., *Les Mathématiques et le Raisonnement "Plausible"*, Gauthier-Villars, 1.958. (A-1.926)
20. POLYA, G., *La decouverte des mathématiques. Tome I: Les Modeles*, Dunod, 1.967. (A-5.312)
21. POLYA, G., *La decouverte des mathématiques. Tome II: Une méthode générale*, Dunod, 1.967. (A-5.313)

22.POLYA, G., *Mathematical Discovery. Vol. I, On Understanding, learning and teaching problem solving*, John Wiley, 1.962. (A-1.062)

23.POLYA, G., *Mathematical Methods in Science*, NML vol. 26, The Mathematical Association of America, 1.977. (A-5.449)

24.STEEN,L. (ed.), *Mathematics today. Tuelve Informal Essays*, Springer, 1.978. (A-5.073)

25.*A modular curriculum in computer science*, UNESCO, 1.984, (A-5.503)

26.DUNCAN, R. *et al* (ed.), *Handbook of mathematical psychology,* vol. 1, cap. 1-8, John Wiley, 1.963. (A-4.119)

APENDICE I:
FEDERACION ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMATICA:

Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo.
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez.
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido.

SOCIEDADES FEDERADAS:

Federació d'Entitas per l'Ensenyament de les Matemátiques a Catalunya, Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona).

Organización Española para la Coeducación Matemática "Ada Byron", Apartado de Correos 4051. 28080-MADRID.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", Apartado 1160. 41080-SEVILLA.

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas "Pedro Sánchez Ciruelo", ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA.

Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes", Apartado de Correos 830. 33400-AVILES (Asturias).

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton", Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife).

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas, IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS.

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA), Facultad de Económicas. Universidad de La Coruña.

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper", Apartado 536. 06080-MERIDA (Badajoz).

Sociedad Navarra de Profeosres de Matemáticas "Tornamira", Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública Navarra. 31006-PAMPLONA.

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo", Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID.

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID.

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi", Departament de Didáctica de la Matemática. Apartado 22045. 46071-VALENCIA.

REVISTAS ESPAÑOLAS DE EDUCACION MATEMATICA:

NOMBRE: SUMA.
EDITOR: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática.
DIRECCION: ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009. Zaragoza. España.

APENDICE II:
ALGUNAS REVISTAS SOBRE EDUCACION Y DIDACTICA DE LA MATEMATICA
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK. UNIVERSITÄT BIELEFELD (Alemania). 1.980

NOMBRE: Abacus. The Journal of the Mathematical Association of Nigeria.
EDITOR: Mathematical Association of Nigeria.
PAIS: Nigeria.

NOMBRE: The Amatyc Review.
EDITOR: American Mathematical Association of Two-Year-Colleges.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: American Mathematical Monthly.
EDITOR: Mathematical Association of America.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Archimedes. Blaetter fuer Mathematische Bildung.
EDITOR: Verlag Joseph Habbel.
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: Archimede. Revista per gli insegnanti ed i cultori di Matematiche pure e applicate.
EDITOR: Casa editrice Felice le Monnier.
PAIS: Italia.

NOMBRE: The Arithmetic Teacher.
EDITOR: National Council of Teachers of Mathematics.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: The Australian Mathematics Teacher.
EDITOR: Australian Mathematics Teacher.
PAIS: Australia.

NOMBRE: Boletín de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas.
EDITOR: Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas.
PAIS: España.

NOMBRE: Bulletin AMQ.
EDITOR: Association Mathematique du Quebec.
PAIS: Canadá.

NOMBRE: Bulletin A.P.M.E.P..
EDITOR: Association des Professeur de Mathematiques de l'Enseignement Public.

PAIS: Francia.

NOMBRE: Bulletin de Liason des Professeurs de Mathematiques.
EDITOR: Association Universitaire pour le Developpement de l'Enseignement et la Culture en Afrique et a Madagaskar. (AUDECAM).
PAIS: Francia.

NOMBRE: Bulletin Inter Irem.
EDITOR: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques de Lyon.
PAIS: Francia.

NOMBRE: Bulletin of the Mathematical Association of India.
EDITOR: Department of Mathematics. Indian Institute of Technology.
PAIS: India.

NOMBRE: California Mathematics. A Journal of the California Mathematics Council.
EDITOR: California Mathematics Council.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Computer Education.
EDITOR: Computer Education Group.
PAIS: Gran Bretaña.

NOMBRE: Conceptos de Matemática. Revista para el maestro, el profesor y el estudiante.
EDITOR: José Banfi.
PAIS: Argentina.

NOMBRE: Didaktik der Mathematik.
EDITOR: Bayerischer Schulbuchverlag.
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: L'Education Mathematique.
EDITOR: Librairie Vuibert.
PAIS: Francia.

NOMBRE: Educational Studies in Mathematics.
EDITOR: D. Reidel Publishing Company.
PAIS: Holanda.

NOMBRE: Elementa. Tidskrift for matematik, fysik och kemi.
EDITOR: A. Dunkels.
PAIS: Suecia.

NOMBRE: Elemente der Mathematik. Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur

Foerderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts.
EDITOR: Birkhaeuser Verlag.
PAIS: Suiza.

NOMBRE: L'Enseignement Mathematique. Revue Internationale.
EDITOR: Commission Internationale de L'Enseignement Mathematique.
PAIS: Suiza/Internacional.

NOMBRE: L'Escaire. Revista de didactica de les matematiques.
EDITOR: Departament de Matematiques i Estadistica de l'Escola Tecnica Superior d'Arquitectura Universitat Politecnica de Barcelona.
PAIS: España.

NOMBRE: Euclides. Maanblad voor de didactiek van de wiskunde.
EDITOR: Nederlandse Vereniging van Wiskunde leraren.
PAIS: Holanda.

NOMBRE: Focus on Learning Problems in Mathematics.
EDITOR: Center of Teaching/Learning Mathematics.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education.
EDITOR: D. Wheeler.
PAIS: Canadá/Internacional.

NOMBRE: Gaceta Matemática. Revista Publicada por el Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española.
EDITOR: Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas/Real Sociedad Matemática Española.
PAIS: España.

NOMBRE: Gazeta Matematica. Publicatie Lunara Pentru Tineret.
EDITOR: Societatea de Stiinte Matematice din Republica Socialista Romania.
PAIS: Rumania.

NOMBRE: GEP Math.
EDITOR: Groupe d'Etudes et de Pedagogie en Mathematiques.
PAIS: Francia.

NOMBRE: Grand N. Bulletin de Mathematiques pour les Maitres de l'Enseignement Elementaires.
EDITOR: I.R.E.M. de Grenoble; equipe pedagogique C.R.D.P..
PAIS: Francia.

NOMBRE: ICMI-Bulletin.
EDITOR: International Commission on Mathematical Instruction.
PAIS: Japón/Internacional.

NOMBRE: The Illinois Mathematics Teacher.
EDITOR: Illinois Council of Teachers of Mathematics. (ICTM)
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: L'Insegnamento della Matematica.
EDITOR: Centro Ricerche Didattiche U. Morin.
PAIS: Italia.

NOMBRE: L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate.
EDITOR: Centro Ricerche Didattiche U. Morin.
PAIS: Italia.

NOMBRE: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.
EDITOR: Taylor and Francis Ltd..
PAIS: Gran Bretaña/Internacional.

NOMBRE: Investigations in Mathematics Education. Expanded Abstracts and Critical Analysis of Recent Research.
EDITOR: Center for Science and Mathematics Education and ERIC.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Journal de Mathemtiques Elementaires.
EDITOR: Librairie Vuibert.
PAIS: Francia.

NOMBRE: Journal for Research in Mathematics Education.
EDITOR: The National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM).
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Journal fuer Mathematik Didaktik. Zeitschrift der Gesellschaft fuer Didaktik der Mathematik.
EDITOR: Gesellschaft fuer Didaktik der Mathematik. (GDM).
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: The Journal of Childrens Mathematical Behavior.
EDITOR: Study Group for Mathematical Behavior.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Journal of Mathematical Modelling for teachers.
EDITOR: D. Burghes y G. Read.

PAIS: Gran Bretaña.

NOMBRE: Journal of Recreational Mathematics.
EDITOR: Baywood Publishing Company, Inc..
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Journal of Structural Learning.
EDITOR: International Study Group for Mathematics Learning and Structural Learning Society.
PAIS: Gran Bretaña/Internacional.

NOMBRE: Koezepiskolai Matematikai Lapok. Fizika Rovattal Boevitue.
EDITOR: B. Janos, Matematikai Tarsulat.
E. Lorand, Fizikai Tarsulat.
PAIS: Hungría.

NOMBRE: Kvant. Nachno Popularnij fiziko/matematicheskii jurnal.
EDITOR: Akademii Nauk SSSR I.
Akademii Pedagogijecheski Nauk SSSR.
PAIS: Rusia.

NOMBRE: Magyar Pedagogica.
EDITOR: Magyar Tudomanyos Akademia.
PAIS: Hungría.

NOMBRE: The Manitoba Mathematics Teacher.
EDITOR: Manitoba Association of Mathematics Teachers.
PAIS: Canadá.

NOMBRE: Matemática, Enseñanza Universitaria.
EDITOR: Q. de Takahashi y Y. Takenchi.
PAIS: Colombia.

NOMBRE: Matematika a Fysika ve Skole. Casopis pro teorii a praxi vycovani matematice a fysice.
EDITOR: Ministervo skolstvi CSR.
PAIS: Checoeslovaquia.

NOMBRE: A Matematika Tanitasa.
EDITOR: B. Janos, Matematikai Tarsulat.
PAIS: Hungría.

NOMBRE: Matematika ve Skole
EDITOR: Ministervo skolstvi CSR.
PAIS: Checoeslovaquia.

<u>NOMBRE:</u> Matematika V Shkole.
<u>EDITOR:</u> Ministerstva Prosvesheniya SSSR.
<u>PAIS:</u> Rusia.

<u>NOMBRE:</u> Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli matematyki.
<u>EDITOR:</u> Ministerstvo Oswiaty i Wychowania.
<u>PAIS:</u> Polonia.

<u>NOMBRE:</u> Math-Ecole.
<u>EDITOR:</u> R. Hutin.
<u>PAIS:</u> Suiza.

<u>NOMBRE:</u> Mathematica et Pedagogica, Revue de la societe Belge des Professeurs de Mathematiques.
<u>EDITOR:</u> Societe Belge des Professeurs de Mathematiques.
<u>PAIS:</u> Bélgica.

<u>NOMBRE:</u> Mathematica Didactica. Zeitschrift fuer Didaktik und Methodik der Mathematik.
<u>EDITOR:</u> W. Ast, M. Klika y H. Wolpers.
<u>PAIS:</u> República Federal de Alemania.

<u>NOMBRE:</u> Mathematical Education for Teaching.
<u>EDITOR:</u> Mathematical Education Society of the National Association of Teachers in Further and Higher Education.
<u>PAIS:</u> Gran Bretaña.

<u>NOMBRE:</u> Mathematical Gazette.
<u>EDITOR:</u> Mathematical Association.
<u>PAIS:</u> Gran Bretaña.

<u>NOMBRE:</u> Mathematical Log.
<u>EDITOR:</u> Mu Alpha Teta.
<u>PAIS:</u> U.S.A..

<u>NOMBRE:</u> Mathematical Spectrum.
<u>EDITOR:</u> Applied Probability Trust.
<u>PAIS:</u> Gran Bretaña.

<u>NOMBRE:</u> Mathematics in school.
<u>EDITOR:</u> The Mathematical Association.
<u>PAIS:</u> Gran Bretaña.

<u>NOMBRE:</u> Mathematics Magazine.

EDITOR: Mathematical Association of America.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: The Mathematics Student.
EDITOR: Indian Mathematical Society.
PAIS: India.

NOMBRE: The Mathematics Student.
EDITOR: National Council of Teachers of Matematics. (NCTM)
PAIS: U.S.A. y Canadá.

NOMBRE: The Mathematics Teacher.
EDITOR: National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM)
PAIS: U.S.A. y Canadá.

NOMBRE: Mathematics Teachers Forum.
(Antes: The Nuffield Mathematics Project Bulletin)
EDITOR: Fanfare Publishing House.
PAIS: Gran Bretaña.

NOMBRE: Mathematics Teaching.
EDITOR: The Association of Teachers of Mathematics.
PAIS: Gran Bretaña.

NOMBRE: Mathematik in der Schule.
EDITOR: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin.
PAIS: República Democrática de Alemania.

NOMBRE: Mathematik, Physik und Chemie in der Schule.
EDITOR: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin.
PAIS: República Democrática de Alemania.

NOMBRE: Mathematik und Physik in der Schule.
EDITOR: Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin.
PAIS: República Democrática de Alemania.

NOMBRE: Mathematique et Pedagogie.
EDITOR: Societe Belge des Professeurs de Mathematiques d'Expression Francaise.
PAIS: Bélgica.

NOMBRE: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte. Zur Pflege des Zusammenhanges von Schule und Universitaet.
EDITOR: Verlag Vandenhoeck und Rupprecht.
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht. Organ des deutschen Vereins zur Foerderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.
EDITOR: Deutscher Verein zur Foerderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: Mathesis. Recueil Mathematique.
EDITOR: Gauthier-Villars.
PAIS: Francia.

NOMBRE: Network.
EDITOR: Mathematics Education Staff/Secondary Division/Christchurch Teachers College.
PAIS: Nueva Zelandia.

NOMBRE: New Zealand Mathematics Magazine.
EDITOR: Auckland Mathematical Association.
PAIS: Nueva Zelandia.

NOMBRE: NICO. Revue Periodique du Centre Belge de Pedagogie de la Mathematique.
EDITOR: Centre Belge de Pedagogie de la Mathematique.
PAIS: Bélgica.

NOMBRE: Nowa Szkola.
EDITOR: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.
PAIS: Polonia.

NOMBRE: Ontario Mathematics Gazette.
EDITOR: Ontario Association for Mathematics Education.
PAIS: Canadá.

NOMBRE: Ontario Secondary School Mathematics Bulletin.
EDITOR: The Ontario Secondary School Mathematics Bulletin.
PAIS: Canadá.

NOMBRE: Paedagogische Welt. Zeitschrift fuer Unterricht und Erziehung.
EDITOR: H. Beilner.
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: The Pentagon. A Mathematics Magazine for Students.
EDITOR: Kappa Mu Epsilon.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Periodico di Matematiche.
EDITOR: "Mathesis". Societa italiana di scienze matematiche e fisiche.
PAIS: Italia.

NOMBRE: Pi Mu Epsilon Journal.
EDITOR: The Honorary Mathematical Fraternity.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Pose. Newsletter from the Schools Council Project on Statistical Education.
EDITOR: Schools Council Project on Statistical Education.
PAIS: Gran Bretaña.

NOMBRE: Praxis der Mathematik. Zeitschrift fuer die Unterrichtspraxis der Sekundarstufen I und II.
EDITOR: Pohlmann.
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: Primary Mathematics.
EDITOR: Pergamon Press.
PAIS: Gran Bretaña.

NOMBRE: Quaderni Didattici. Supplemento della Rivista l'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate.
EDITOR: Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin".
PAIS: Italia.

NOMBRE: Recherches en Didactique de Mathematiques.
EDITOR: La Pensee Sauvage, Editions.
PAIS: Francia.

NOMBRE: Revista Informativa del Profesor de Matemáticas.
EDITOR: Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, Comité Ejecutivo Nacional.
PAIS: Méjico.

NOMBRE: Revue de Mathematiques Speciales.
EDITOR: Librairie Vuibert.
PAIS: Francia.

NOMBRE: Ricerche Didattiche.
EDITOR: Movimento Circoli della Didattica.
PAIS: Italia.

NOMBRE: Riforma della Scuola.

EDITOR: Editori Riuniti.
PAIS: Italia.

NOMBRE: School Science and Mathematics.
EDITOR: School Science and Mathematics Association.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Schriftenreihe des IDM.
EDITOR: Institut fuer Didaktik der Mathematik.
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: Science Education Newsletter.
EDITOR: Schools and Further Education Department.
PAIS: Gran Bretaña.

NOMBRE: Set Two.
EDITOR: Mathematical Association of Victoria.
PAIS: Australia.

NOMBRE: Studies in Mathematics Education.
EDITOR: UNESCO.
PAIS: Francia/Internacional.

NOMBRE: Szkola Zawodowa.
EDITOR: Instytut Wydawniczy "Nasza Ksiegarnia".
PAIS: Polonia.

NOMBRE: Teaching Arithmetics. The British Elementary Mathematics Journal.
EDITOR: Pergamon Press Ltd..
PAIS: Gran Bretaña.

NOMBRE: Teaching Statistics. An International Journal for Teachers of Pupils Aged 9 to 19.
EDITOR: P. Holmes.
PAIS: Gran Bretaña.

NOMBRE: The Two-Year-College Mathematics Journal.
EDITOR: Mathematical Association of America.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: The UMAP Journal. The Journal of Undergraduate Mathematics and its Applications.
EDITOR: R. Finney.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: UMAP-Projections. Newsletter of the Modules and Monographs in Undergraduate Mathematics and its Applications Project.
EDITOR: Education Development Center and Undergraduate Mathematics and its Applications Project.
PAIS: U.S.A..

NOMBRE: Unterricht Heute. Zeitschrift fuer die Grund- und Hauptschule.
EDITOR: Ernst Klett Verlag.
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: Vector. Newsletter/Journal.
EDITOR: British Columbia Association of Mathematics Teachers.
PAIS: Canadá.

NOMBRE: Westermanns Paedagogische Beitraege.
EDITOR: H. Gugjons.
PAIS: República Federal de Alemania.

NOMBRE: Wiadomosci Matematyczne.
EDITOR: Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
PAIS: Polonia.

NOMBRE: Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik. (ZDM). International Reviews on Mathematical Education.
EDITOR: G. Koenig.
PAIS: República Federal de Alemania/Internacional.

NOMBRE: Zycie Szkoly.
EDITOR: Ministerstvo Oswiaty i Wychowania.
PAIS: Polonia.

APENDICE III: REVISTAS DE EDUCACION MATEMATICA EXISTENTES EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

Mathematical Intelligencer.
The Mathematical Gazette.
Mathematics Magazine.
Mathematics Teaching.
The Mathematics Education.
The Mathematics Student.
The Mathematics Student Journal.
The American Mathematical Monthly. (Completa).
Apuntes Matemáticos.
Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica.
Ciencia Hoy.
Archimedes.
Revista Colombiana de Matemáticas.
Conceptos de Matemática.
Matemática Universitaria.
Matemática, Enseñanza Universitaria.
Notices.
Science Education Newsletter.
Teorema.
Ciencia Interamericana.
Filosofiska Studier.
L'Ennseignement Mathématique.
Elementos de Matemática.
Educational Studies in Mathematics.
History of Science.
Lecturas Matemáticas.
Mathematical Chronicle.
New Zealand Journal of Mathematics.
The New Zealand Mathematics Magazine.
Philosophia Mathematica.
OEA-Monografías Matemáticas.
OEA-Monografías de Física.
Revista de Educación Matemática UMA.
Revista de la Universidad Blas Pascal.
La Recherche.
Publicaciones Didácticas.

CAPITULO 5: HISTORIA DE LA MATEMATICA (I. GRATTAN-GUINNESS)

5.1. INTRODUCCION:

La historia de la matemática involucra numerosos problemas en investigación y lecturas que no son normalmente prominentes en el trabajo matemático. Para resumir, en orden, son:

(1) Es necesario utilizar bibliografías de todas las clases para descubrir que literatura (ya sea matemática o histórica) es necesario leer;
(2) Puede haber dificultades en encontrar copias de la literatura requerida;
(3) Muchas veces es necesario utilizar material no publicado;
(4) Hay importantes problemas de interpretación histórica involucrados en el uso de toda esta literatura y en la escritura de la historia.

El espacio prohibe aquí cualquier clase de tratamiento exhaustivo de estos problemas. En las secciones que siguen considero los problemas en este orden, e indico las principales fuentes de información disponibles o ejemplifico la clase de investigación realizada o en progreso. He tratado de concentrarme en detalle sobre la matemática de los últimos 200 años (lo que debe ser de interés principal de los lectores), y también en el trabajo histórico actual, el que por definición no puede ser descripto en cualquier parte. Con respecto a las publicaciones, solamente doy listas de libros y revistas en el tema o muy relacionados; no hago intentos de cubrir artículos publicados en revistas. Finalmente, para afinar la intención de este capítulo con el resto del libro, me limitaré a tener en cuenta a aquellos lectores que tienen un razonable y serio interés en el trabajo histórico y no a aquellos que llegan a él como pasatiempo. La información está actualizada a la primavera de 1.976.

5.2. BIBLIOGRAFIAS Y CATALOGOS:

Comenzaré en las fuentes principales de bibliografía para la historia de la matemática.

K.O. May, *Bibliography and research manual of the history of mathematics* (University of Toronto Press, Toronto/Buffalo, 1.973). De más de 800 páginas, este libro es el más detallado disponible. Sus cinco secciones principales son “Biografías”, “Temas matemáticos”, “Temas epimatemáticos”, “Clasificaciones históricas” y “Recuperación de la información”. Hay también sugerencias útiles sobre métodos para almacenar la información seleccionada. La utilidad del libro está bastante reducida por la omisión de alguna clase de información y por muchos errores de detalle.

G. Loria, *Guida allo studia della storia delle matematiche...* (Hoepli, Milan, 1.946, A-387). Este libro cubre bien problemas e información, y contiene bibliografía muy útil.

G. Sarton, *The study of the history of mathematics,* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1.936: reimpreso en 1.957, Dover, New York). Este pequeño volumen es particularmente útil por su bibliografía, especialmente por detalles (omitidos en la de May) de las obras completas de matemáticos. La reimpresión contiene otro libro de Sarton: *The study of the history of science.*

G. Sarton, *Horus: a guide to the history of science* (Chronica Botanica, Waltham, Mass., 1.952). Una versión aumentada del volumen de Sarton: *Science*, contiene varios puntos de guía en la historia de todas las ciencias.

F. Russo, *Eléments de bibliographie de l'histoire des sciences et des techniques* (Hermann, Paris, 1.969). Un compacto y útil volumen, similar en alguna forma al *Horus* de Sarton, aunque no cubre tanto material.

C.C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography* (Scribners, New York, 1.970-). Es un proyecto ambicioso que contiene artículos biográficos sobre científicos, sufre de los achaques comunes a las enciclopedias en crecimiento; la "Z" no se ve en el horizonte. Los artículos sobre matemáticos pueden usualmente ser competentes, y los mejores son excelentes.

Isis critical bibliography. Publicada anualmente como un suplemento al anuario de *Isis*, la revista de la History of Science Society (of America), contiene un comentario excelente de la literatura corriente en la historia de todas las ciencias.

M. Whitrow (ed.), *Isis cumulative bibliography* (Mansell, London, 1.971-). Sarton comenzó *Isis* y su bibliografía crítica en 1.913. El monumental proyecto de la Sra. Whitrow acumula las bibliografías hasta 1.965 según entradas principales (como "personalidades", "instituciones", etc.)

Royal Society of London; Catalogue of Scientific papers (19 volúmenes y 4 volúmenes de índices, 1.867-1.925, Cambridge and London; Cambridge University Press (y otros); reimpreso en 1.965, Johnson y Kraus, New York). Un relato comprensible de la literatura científica del siglo diecinueve, el volumen índice para matemática está afortunadamente completo (otros no).

International catalogue of scientific literature, section A, Mathematics (14 vols, Royal Society, London, 1.902-1.917: reimpreso en 1 volumen, 1.968, Johnson, New York). El sucesor del *Catalogue* de la sociedad, de estilo comparable y estándar para la primera parte de este siglo.

(Ver sección 3.4 para mayores detalles de los dos últimos títulos).

Además de estas fuentes, las citadas en el capítulo 3 también pueden usarse, y algún comentario puede ser conveniente aquí sobre su utilidad para el trabajo histórico. De las revistas de comentarios, el *Zentralblatt für Mathematik* es el más completo, aunque el uso de auto-comentarios reduce la medida de la crítica escrita. El *Mathematical Reviews* es escaso, mientras que *Poggendorff*, dependiente de la fuerza e inclinación de sus contribuyentes a la autobiografía, es flojo. El *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* es excelente para los años que cubre (1.868-1.942).

5.3. REVISTAS PARA LA HISTORIA DE LA MATEMATICA:

Muchos de los artículos sobre historia de la matemática aparecen en unas pocas revistas, en varias revistas de historia de la ciencia, algunos obituarios asociados con instituciones científicas y en algunas revistas de educación matemática. Pero hay y hubo revistas en historia de matemática, las principales las enumeramos:

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche (Ed. y publicado por B. Boncompagni, 20 vols, Roma, 1.868-1.887: reimpreso por Johnson, New York). El editor tiene el hábito de cambiar el texto después de las correcciones, por lo que las copias no son idénticas. Hay mucha información bibliográfica útil en estos volúmenes así como algunos artículos importantes.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik... (ed. M. Cantor, 9 + 21 volúmenes, Teubner, Leipzig, 1.877-1.913). La primera serie fue publicada como un suplemento al *Zeitschrift für Mathematik und Physik.*

Bibliotheca Mathematica (ed. G. Eneström, 3 + 13 + 14 volúmenes, Teubner, Stockholm y (después) Leipzig, 1.884-1.915). La primera serie fue publicada como un suplemento de *Acta Mathematica.* Con el paso de los años, la revista llego a ser como una anti-biblia al *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik* de M. Cantor corrigiendo errores y relocalizando las correcciones previas. Muchos artículos son excelentes.

Bollettino di Bibliografía e Storia delle Matematiche (ed. G. Loria, 6 + 21 volúmenes, Turín, 1.898-1.919). Las primeras series fueron publicadas como apéndice al *Giornale di Matematiche,* con quien está ligada. Después de la desaparición de esta última, continuó como un apéndice del *Bullettino di Matemática,* pero no debe confundirse con el *Bulletino* de Boncompagni.

Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik (ed. O. Neugebauer y otros, 4 (*Quellen*) + 4 (*Studien*) volúmenes, Berlín, 1.929-1.938). Algunos artículos importantes aparecieron en esta revista.

Scripta Mathematica (varios editores, Yeshiva University, New York, 1.932-). Debido al entusiasmo de R. C. Archibald, los primeros volúmenes contienen material muy útil. Algunos libros fueron publicados en la serie amiga *Scripta mathematica library.*

Bulletin Signalétique, numéro 522. Histiore des Sciences et des Techniques (Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1.941-) Esta serie es comparable en estilo con la serie *Mathématiques* mencionada en la sección 3.3.

Istoriko-matematicheskogo Issledovaniya (Nauk, Moscow, 1.948-). Contiene únicamente artículos en ruso, y es la principal (aunque no la única) fuente de artículos en ruso en historia de la matemática.

Archive for History of Exact Sciences (de. C.A. Truesdell III, Springer, Berlín, 1.960-) Algunos artículos son de carácter monográfico.

Philosophia Mathematica (ed. J. Fang, Paideia, (ahora) Memphis, Tenn., 1.964-). Muchos artículos tienen aspecto histórico.

Historia Mathematica (ed. K.O. May, University of Toronto Press, Toronto, 1.974-). Pensado como una revista internacional en la historia de la matemática, contiene una extensa sección de comentarios.

5.4. LIBROS Y EDICIONES:

El número de libros editados en este campo, aunque no enorme, es demasiado variado o extenso como para recibir aquí un examen detallado. Las bibliografías citadas en la sección 5.2. dan por lo menos un panorama. En esta sección daré un resumen de los principales libros y ediciones, concentrándome en los trabajos más recientes. Los editores más importantes de libros en historia de la matemática son varias universidades americanas e inglesas, y Springer, Olms, Dover, Chelsea y Blanchard, tienen las mejores reediciones aunque la información bibliográfica es a veces inadecuada.

5.4.1. Historias generales:

La confianza en tales volúmenes para información y esclarecimiento es limitada. Aunque hay autores eminentes de volúmenes sustanciales, las omisiones son significativas y los errores quizá fundamentales (como Eneström nota de Cantor, cf. sección 5.3). Varios son malos. El más impresivo en este género es el de M. Kline: *Mathematical thought from ancient to modern times* (Oxford University Press, New York, 1.972), pero a pesar de sus 1.250 páginas nada nos dice sobre muchas cosas. Entre los volúmenes compactos, el libro de J. D. Struik: *The concise history of mathematics* (A-144) es de lejos el mejor; pero "conciso" es solamente una palabra, porque aún en su última edición (la quinta en alemán: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1.972) tiene solamente un capítulo por cada siglo, a partir del 17. N. Bourbaki, *Éléments d'Historie des Mathématiques* (3rd edición, Hermann, Paris, 1.974; A-953 y A-6.122) es útil para algunos desarrollos en este siglo.

La fuente de información más grande continúa siendo la famosa *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften...* (6 partes, cada una en varios volúmenes: Teubner, Leipzig, 1.898-1.935). La enciclopedia fue escrita en los tiempos en que se escribió lo mejor de la historia de la matemática. La cantidad de literatura matemática está cubierta en forma escalonada y aún en los primeros años aparecieron artículos sustanciales como *Berichte* del *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Pero el estándar de interpretación histórica es usualmente ligero; también la cuestión de relevancia raramente es discutida. Los franceses comenzaron con su propia versión aumentada con la *Encyclopédie des sciences mathématiques...* bajo la dirección editorial de J. Molk, pero desde su muerte en 1.914 el proyecto terminó con ninguna parte completa y algunos artículos por la mitad. La versión inglesa fue planificada pero hubo poco interés en su publicación. Sin embargo los alemanes comenzaron la segunda edición en los finales de 1.930 (Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig). Hay aquí quizá una lección sobre el carácter nacional.

Otras fuentes generales útiles de información son las enciclopedias nacionales e internacionales de envergadura, que contienen no solamente artículos biográficos sino también técnicos. A menudo son livianos, pero a veces hay algunos sustanciales. Además, pueden utilizarse como primera literatura para descubrir los hechos más importantes de una disciplina matemática en un tiempo dado y como las distintas disciplinas estaban colocadas en importancia. La famosa *Encyclopédie on dictionnaire raisonné des sciences...*(28 volúmenes, editado por J. le R. D'Alembert y D. Diderot, París y otros lugares, 1.751-1.765) es muy útil en este aspecto, aunque su importancia como fuente de ideas para los científicos contemporáneos probablemente sea exagerada. La igualmente famosa *Encyclopaedia Britannica* (29 vols, ed. H. Chisholm, Cambridge University Press 1.910-1.911) es particularmente solvente en este tratamiento.

5.4.2. Libros principales:

La idea de estos libros es dar al lector acceso a textos clásicos en su propia lengua. La idea es buena, pero los resultados han sido más bien pobres; uno solo de mi conocimiento (cf. subsección 5.4.9) parece exitoso. Usualmente el problema es que tratan de cubrir mucho material y por lo tanto no se gana en comprensión. D. E. Smith, *Source book in mathematics* (McGraw-Hill, New York, 1.929; reimpreso en 2 volúmenes, Dover, New York, 1.959; v1: A-423 y v2: A-424) es una conocida ejemplificación de esta tendencia. Entre los trabajos más recientes, aún el de D.J. Struik, *A source book in mathematics 1.200-1.800* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1.969), se exhiben dificultades.

5.4.3. Ediciones seleccionadas y colecciones:

Hay muchas de estas, aún de algunos oscuros matemáticos. Varios, especialmente los franceses, ven reducidos sus méritos por una selección excesiva y cuestionable, modernización anacrónica de notaciones e información bibliográfica insuficiente. La mayoría de los principales están citados en *Guide*, de Sarton, aunque no en la *Bibliography* de May (cf. sección 5.2). Algunos han sido reimpresos con posterioridad, especialmente por Chelsea, Olms y Springer. Recientemente, algunos nuevos incluyen los de Borel, Brouwer, Cauchy, Hadamard, Lebesgue, Schur y Weyl. Entre aquellos que se están preparando mencionaremos en orden alfabético:

Bernoullis *Gesamtausgabe* (ed. Schweizer, Naturforschenden Gesellschaft, sobre 20 vols, Birkhaüser, Basel, 1.955-). Todos los manuscritos y publicaciones de los Bernoulli están incluidos (y también J. Hermann). Hasta ahora han aparecido 3 volúmenes.

Bernard Bolzano Gesamtausgabe (ed. E. Winter y otros, sobre 50 volúmenes, Frommann, Stuttgart, 1.969-). Esta colección contendrá todos los trabajos publicados por Bolzano y manuscritos existentes, y varios volúmenes cubrirán su trabajo en matemática y lógica.

Leonhardi Euler opera omnia series quarta. Las primeras tres series, conteniendo todos los trabajos escritos publicados de Euler, están casi completos por Orell Füssli en Zurich. La cuarta serie será la de más valor, ya que contendrá toda la correspondencia de Euler y muchos manuscritos, la mayoría no publicados (aunque hay ediciones rusas de algunos de los manuscritos). Entendiendo que el proyecto es un conjunto Suizo-Ruso. El editor occidental es Birkhaüser en Basilea. Un volumen introductorio ya publicado es *Descriptio commercii epistolici* (ed. A.P. Yushkevich y otros, 1.975)

Los *Collected works* de Kummer están en curso de aparecer en dos volúmenes en Springer-Verlag, editado por A. Weil.(v1: A-4.967 y v2: A-4.968)

Mientras se espera el *Sämtliche Briefe und Schriften* de Leibniz, varios estudios individuales han sido publicados. Ver especialmente H.J. Zacher, *Die Hauptschriften zur Dyadik von G.W. Leibniz* (Klostermann, Frankfurt am Main, 1.973); E. Knobloch, *Die mathematischen Studien von G.W. Leibniz zur Kombinatorik* (Steiner, Wiesbaden, 1.973) y *Ein Dialog zur Einfuhrung in die Arithmetik und Algebra* (Frommann, Stuttgart, 1.976); P. Costabel, *Leibniz and dynamics...* (Methuen, London, 1.973); E.A. Fellmann (ed.), *Marginalia in Newtoni Principia Mathematica (1.687)* (Vrin, Paris, 1.973), donde se presentan las anotaciones de Leibniz al libro; y J.E. Hofmann, *Leibniz in Paris...* (trans. A. Prag, Cambridge University Press, 1.974).

E.G. Forbes, *The unpublished writings of Tobias Mayer* (3 vols, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1.972-1.973), junto con su edición de *The Euler-Mayer correspondence* (Macmillan, London, 1.971), da nueva luz en la matemática y astronomía del siglo dieciocho.

The mathematical papers of Isaac Newton (ed. D.T. Whiteside, 8 vols, Cambridge University Press, 1.967-). Esta es una edición completa de los manuscritos matemáticos de Newton, con comentarios interpretativos sobre temas relacionados. Además, en 1.973 la imprenta de la Universidad de Harvard publicó en dos volúmenes una edición anotada por varios críticos de los *Principia* de Newton, editada por A. Koyré e I.B. Cohen, junto con un acompañante: *Introduction* de Cohen.

Selected writings of Giuseppe Peano (trans. y ed. H.C. Kennedy, University of Toronto Press, Toronto, 1.973). Da una selección útil de traducciones de los escritos de Peano, junto con una bibliografía completa.

The new elements of mathematics of Charles S. Peirce (ed. C. Eisele, 5 vols; v1: A-5.208, v2: A-5.209, v3 (parte I): A-5.210, v3 (parte II): A-5.211 y v4: A-5.212). Publicado por Mouton en La Haya, la edición contiene todos los manuscritos matemáticos de Peirce (pero no sus numerosos manuscritos de lógica).

W. Sierpinski, *Oeuvres choisies* (ed. S. Hartman y otros, 3 vols, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1.974). "Choisies" es la palabra para este trabajo, ya que Sierpinski publicó alrededor de 800 trabajos. No están incluidos ninguno de sus 50 libros.

N. Wiener, *Collected works* (ed. P. Masani). Esta edición fue anunciada por M.I.T. Press de Cambridge, que publicó *Selecta* en 1.964.

5.4.4. <u>Historias nacionales:</u>

Hasta la Edad Media la matemática estaba dominada por los egipcios, los babilonios, los griegos y los árabes. Entonces, Inglaterra, Francia, Suiza y Alemania fueron tomando posiciones. Este hecho puede haber motivado subconscientemente la redacción de historias nacionales, comenzando con la de G. Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (4 vols, Renouard, Paris, 1.838-1.841). Una edición notable es la de A.P. Yushkevich, *Istoriya matematiki v Rossii* (Nauk, Moscow, 1.968).

5.4.5. <u>Historia educacional e institucional:</u>

Estos volúmenes están lejos de ser infrecuentes y a menudo frustrantes, con una magnífica excepción: K.R. Biermann, *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1.810-1.920...* (Akademie-Verlag, Berlín, 1.973).

5.4.6. <u>Correspondencia:</u>

Nuevamente, hay pocas ediciones. Bastante frustrante es H. Minkowskii, *Briefe y David Hilbert* (ed. L. Rüdenberg y H. Zassenhaus, Springer, Berlín, 1.973) ya que solamente está disponible la correspondencia en una dirección y editada sin cuidar principios elementales. Es mejor *Pic'ma Karla Weierstrassa k Sofe Kovalevsky* (ed. P. Ya. Polubarinova-Kochina, Nauk, Moscow, 1.973), conteniendo una edición en ruso y alemán de los intercambios que se han encontrado. La famosa correspondencia entre Ferrari y Tartaglia sobre la solución de ecuaciones cúbicas está ahora disponible fácilmente en A. Masotti (ed.), *Cartelli di sfida matematica* (Ateneo di Brescia, Brescia, 1.974).

5.4.7. Estudios y biografías:

Trabajos recientes son los de C.C. Gillispie, *Lazare Carnot savant* (Princeton University Press, Princeton, N.J., 1.971); C. Reid, *Hilbert* (Springer, Berlín, 1.970), mejor de lo que implica su americano periodístico; M.S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat 1.601-1.665* (Princeton University Press, Princeton, N.J., 1.973); I. Grattan-Guinness y J.R. Ravets'z *Joshep Fourier 1.768-1.830* (M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1.972); H. Wussing, *C.F. Gauss* (Teubner, Leipzig, 1.974), es el mejor volumen introductorio sobre Gauss; J. Shirley (ed.), *Thomas Harriot, Renaissance scientist* (Clarendon Press, Oxford, 1.974), un relato de muchos de los logros de Harriot como preludio a una proyectada edición de sus manuscritos; y P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (Vrin, Paris, 1.976). En este párrafo podemos agregar P.L. Rose, *The Italian Renaissance of mathematics. Studies on humanists and mathematicians from Petrarch to Galileo* (Droz, Geneva, 1.975).

5.4.8. Matemática antigua:

Mencionaré sólo tres trabajos recientes en esta área que siempre es la más popular de la investigación histórica. A. Szabo, *Anfänge der griechischen Mathematik* (Oldenburg, Munich, 1.969) es un volumen de significación; y R.J. Gillings, *Mathematics in the time of the Pharaohs* (M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1.972) y W.R. Knorr, *The evolution of the Euclidean elements* (Reidel, Dordrecht, 1.975) también ha despertado interés.

5.4.9. Lógica y teoría de conjuntos:

Los desarrollos en los últimos 100 años son de considerable interés por sus implicaciones filosóficas permanentes. J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel...* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1.967) es un modelo para esta serie y contiene traducciones y ediciones de muchos trabajos claves. N.I. Styazhkin, *History of mathematical logic from Leibniz to Peano* (M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1.970) es una traducción del ruso de una cantidad moderada del tema. I. Grattan-Guinness, *Dear Russell-dear Jourdian* (en preparación) contiene mucha información nueva sobre la redacción de *Principia Mathematica*. La lógica medieval ha sido bien estudiada, por ejemplo en W. Risse, *Die Logik der Neuzeit*, (2 vols, Frommann, Stuttgart, 1.964-1.970); entre los estudios posteriores están los de E.J. Ashworth, *Language and logic in the post medieval period* (Reidel, Dordrecht, 1.974) y J. Pinborg, *Logik und Semantik im Mittelalter. Ein Überblick* (Frommann, Stuttgart, 1.974). La filosofía, en un sentido interesante y no usual está tratada en G. Canguilhem (ed.), *La mathématisation des doctrines informes* (Hermann, Paris, 1.972), una colección de artículos, varios históricos, sobre como la matemática fue incluida y puede incluirse en nuevas áreas.

5.4.10. Números y teoría de números:

La mejor fuente de información es L.E. Dickson, *History of the theory of numbers* (3 vols, Carnegie Institution, Washington D.C., 1.919-1.923, reimpreso en 1.952, Chelsea, New York). O. Ore, *Number theory and its history* (McGraw-Hill, New York, 1.948; A-2.146) es una versión más compacta del tema. Hay varios libros sobre el concepto de número: K. Menninger, *Number words and number symbols* (M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1.970), y dos del Bibliographisches Institut in Mannheim: C.J. Scriba, *The concept of number* (1.968) y H. Gericke, *Geschichte des Zahlbegriffs* (1.970). Ver también G. Guitel, *Histoire comparée des numérations écrites* (Flammarion, Paris, 1.975).

5.4.11. Algebra:

El álgebra lineal está aún inexplorada, pero el álgebra abstracta ha recibido cierta atención en H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes* (Akadamie-Verlag, Berlín, 1.969) y L. Novy, *Origins of modern algebra* (Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1.973).

5.4.12. Cálculo y análisis matemático:

Además de los trabajos de Whiteside y Mahoney citados en subsecciones 5.4.3 y 5.4.7, otros libros incluyen los de T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration...* (University of Wisconsin Press, Madison, Wisc., 1.970); I.N. Pesin, *Classical and modern integration theories* (Academic Press, N.Y., 1.970), originariamente en ruso, similar pero inferior al de Hawkins; I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann* (M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1.970); D. van Dalen y A.F. Monna, *Sets and integration...* (Wolters Noordhoff, Gorningen, 1.972); G.D. Birkhoff (ed.), *A source book in classical analysis* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1.973; A-5.691), contiene traducciones (cuando es necesario) de trozos de trabajos clásicos; y F.A. Medvedev, *Razvitie ponyatiya integral* (Nauk, Moscow, 1.974). Todos estos trabajos se centran en aspectos fundamentales; las aplicaciones no tienen ganado un lugar de interés, pero ver A.F. Monna, *Functional analysis in historical perspective* (1.973) y *Dirichlet's principle...* (1.975), ambos de Oosthoek, Scheltema y Holkema at Utrecht.

5.4.13. Geometría:

La geometría se ha transformado completamente desde 1.800, y aún la historia correspondiente es tan ignorante que textos viejos tales como el de R. Bonola, *Non-Euclidean geometry* (especialmente con las adiciones de la reimpresión de 1.955, Dover, N.Y; A-2.007 (en castellano)) y D. M. Sommerville, *Bibliography of non-Euclidean* *geometry...* (Harrison, London, 1.911), son todavía básicos. El volumen de Kline citado en subsección 5.4.1 es fuerte en este área, pero aún estamos esperando especialmente la historia que reduzca la geometría no euclidiana a su propio lugar en la matemática del siglo diecinueve.

5.4.14. Física matemática (incluyendo la mecánica):

Como la geometría, este área de gran importancia ha sido olvidada. Aquí, la fuente no superada es H. Burkhardt, 'Entwicklung nach oscillierenden Funktionen...', un suplemento de 1.800 páginas (1.900-1.908) al volumen 10 del *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Otros son, C.A. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1.638-1.788* (Orell Füssli, Zurich, 1.960), un volumen en Euler *Opera omnia* (cf. subsección 5.4.3), y su *Essays in the history of mechanics* (Springer, Berlín, 1.968) son esenciales.

5.4.15. Astronomía y cosmología:

Esta es un área viviente en la historia de la ciencia, aunque por supuesto que solo una parte del trabajo es de contenido matemático. La referencia más comprensible para dar es el *Journal for the History of Astronomy* (ed.) M.A. Hoskin, (Science History Publications, (ahora) Cambridge, 1.970-). En libros más recientes, Kepler fue bastante estudiado en *Internationales Kepler-Symposium, Weil der Stadt 1.971* (Gerstenberg, Hildesheim, 1.973). Una gran masa de publicaciones aparecieron con motivo de los 500 años de Copernico en 1.973; entre los fragmentos más valiosos hay una oferta increíble a $1 del volumen 117 (1.973), no. 6 de los *Proceedings of the American Philosophical Society*. Entre los volúmenes conmemorativos, E.J. Aiton, *The vortex theory of planetary motions* (Mcdonald, London, 1.972), ha sido aclamado. Springer publicó una obra de tres volúmenes de O. Neugebauer, *A history of mathematical astronomy* (v1: A-4.635/I, v2: A-4.636/II y v3: A-4.637/III) para inaugurar sus *Studies* y *Sources* series en la historia de la matemática y ciencias físicas.

5.4.16 Probabilidad y Estadística:

Algunos sentimientos sobre los logros desde 1.800 pueden encontrarse en E.S. Pearson y M.G. Kendall (eds.), *Studies in the history of probability and statistics* (Griffin, London, 1.971), un volumen de artículos de la revista *Biometrika*. Sobre aspectos anteriores, N.L. Rabinovich, *Probability and statistical inference in ancient and medieval Jewish literature* (University of Toronto Press, Toronto, 1.973); o R. Rashed (ed.), *Condorcet. Mathématiques et société* (Hermann, Paris, 1.974), una selección de textos con comentarios. De otra forma, el territorio nuevamente es bastante virgen.

5.4.17 Computación:

Sorprendentemente se ha hecho bastante en esta nueva área. Ver C. y R. Eames, *A computer perspective* (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1.973); H.H.

Goldstine, *The computer from Pascal to von Neumann* (Princeton University Press, Princeton, N.J., 1.973); y B. Randell (ed.), *The origins of digital computers: selected papers* (Springer, New York, 1.973; A-4.115). Pero el análisis numérico, ahora estrechamente relacionado con la computación, tiene un lugar mucho más antiguo en la historia casi ignorada.

5.5. BIBLIOTECAS Y CATALOGOS:

Hasta ahora nos hemos concentrado en el primer problema de la sección 5.1, en particular, la búsqueda por referencias y bibliografía. En esta sección, tocaremos el segundo problema, el de obtener la literatura. A veces el método usual de catálogos de bibliotecas y aún de préstamos interbibliotecas falla por razones de la rareza del material. Es de importancia conocer colecciones especiales de libros y revistas, y ahora haremos la descripción de algunas típicas. Otras son mencionadas de tanto en tanto en "Fuentes", departamento que comenzó a publicar I. Grattan-Guinness en *Historia Mathematica* (cf. sección 5.3).

Institut Mittag-Leffler, S 182-62 Djursholm, Auravägen 17, Sweden. El viejo hogar de Mittag-Leffler, la biblioteca está basada en su propia colección y contiene una magnífica variedad de volúmenes, especialmente ricos en la matemática del siglo diecinueve.

La biblioteca Graves, University College, London WC1, Inglaterra, J.H. Graves fue allí profesor de jurisprudencia desde 1.838 a 1.843, y un matemático amateur. Su biblioteca particular es rica en volúmenes del siglo diecinueve y contiene algunas cosas muy raras.

La biblioteca de de Morgan, Senate House, University of London, London WC1, Inglaterra. La rica colección de libros y separatas de A. de Morgan tiene varias e interesantes anotaciones de los autores. En relación con esto, consultar sus *Arithmetical books* ... (London, 1.847; reimpreso con D.E. Smith, *Rara arithmetica*, Chelsea, New York, 1.970).

La biblioteca de David Eugene Smith, Columbia University, New York, N.Y. 10027, USA. Esta enorme colección de volúmenes fue donada a la universidad por el eminente historiador de la matemática.

Brown University, Providence, Rhode Island 02912, USA. Esta universidad tiene una de las mejores bibliotecas de matemática, y también un departamento para la historia de la matemática con especialistas en matemática antigua.

Además de estas y otras colecciones especiales, muchas bibliotecas nacionales e institucionales son extremadamente extensivas. Sin embargo, sus catálogos no son siempre fáciles de usar (lo mismo puede ser cierto de las colecciones mencionadas antes!). Por ejemplo, es importante saber que, *pace* es la consigna en el *Catalogue* del British Museum para buscar el nombre de una revista por el título y entonces continuar la referencia cruzada, muchas de las revistas no están así listadas. Deben encontrarse bajo alguna subentrada para el país apropiado, ciudad o institución.

5.6 MANUSCRITOS Y ARCHIVOS:

Esta sección tiene que ver con el tercer problema de la sección 5.1, es decir, el uso de materiales no publicados. Hay un número de proyectos en gran escala en la historia de la ciencia, algunos de los cuales tienen en cuenta a la matemática. Además, hay varios archivos nacionales (por ejemplo la British Library Reference Division), que tienen colecciones sustanciales de material. Asumiendo que esto último es bien conocido (o por lo menos fácilmente buscable) para requerir más elaboración aquí, repetiré el esquema de las dos últimas secciones y describiré una muestra de proyectos específicos e instituciones de particular importancia. Una vez más, el departamento "Fuentes" de *Historia Mathematica* (cf sección 5.3) será útil para el lector interesado y también para "Proyectos en avance", otro departamento que fue lanzado también por I. Grattan-Guinness.

R.M. MacLeod y J.R. Friday, *Archives of British men of science* (Mansell, London, 1.972). Publicado en microfichas con un catálogo que lo acompaña, describe los trabajos de una selección de científicos británicos prominentes. La cantidad de detalles es despareja y los matemáticos no tienen mucho que hacer con este material, pero aparentemente futuras ediciones los tendrían en cuenta.

Center for History and Philosophy of Physics, 335, E 45 St, New York, N.Y. 10017, USA. Este centro fue instituido por el American Institute of Physics en 1.965 tanto para almacenar y catalogar los trabajos de físicos eminentes, como para compilar todos los manuscritos de todas las clases que hay en otras instituciones americanas. Como el centro incluye físicos matemáticos y astrónomos dentro de su ámbito, tiene información sobre un número grande de matemáticos. Tendría que haber una institución comparable para la matemática, pero imagino que las chances de que ello ocurra son mínimas.

El profesor M. Gowing ha creado recientemente (1.977) el Contemporary Scientific Archives Centre en la Universidad de Oxford con la cooperación de la Historical Manuscripts Commission. El centro cataloga los trabajos de científicos recientes de todas clases (incluyendo matemáticos) y entonces los deposita en una institución conveniente.

Deutsches Zentralarchiv, Historische Abteilung II, 48, Weisse Mauer, Merseberg, East Germany. Esta es una magnífica colección de archivos prusianos, especializados en papeles estatales de todas las universidades prusianas en el siglo diecinueve. Es indispensable para cualquier historia biográfica o institucional de la matemática alemana del siglo diecinueve.

École Nationale des Ponts et Chaussées, 28, rue des Saints-Péres, Paris 7, France. La biblioteca es un excelente ejemplo de materiales manuscritos de las "escuelas" francesas. Ver *Catalogue des manuscrits de la bibliothéque de l'École Nationale des Ponts et Chaussées* (Paris, 1.886).

Institut Mittag-Leffler (cf sección 5.5). Así como es una biblioteca exquisita, el Instituto contiene muchos manuscritos de gran importancia.

The National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C. 20546, U.S.A., instaló una Oficina Histórica en 1.962 para coordinar los manuscritos de todas clases en conexión con sus actividades. Ha producido un buen número de publicaciones y organiza un seminario todos los veranos.

Niedersächsische Staats-und Universitäts-bibliothek, Handschriftenabteilung, 34 Göttingen, Prinzenstr. 1, West Germany. Un buen ejemplo de los materiales que contiene la universidad alemana, basta decir que tiene los trabajos de Gauss, Dedekind, Hilbert, Hurwitz (solamente correspondencia) y Klein, así como otras pequeñas colecciones de importancia para la historia de la matemática.

Un sistema coordinado facilita la ubicación de materiales en los archivos alemanes. Investigadores que necesitan información pueden dirigirse a Verzeichnis der Nachlässe in deutschen Archiven, 3500 Kassel, Brüder-Grimm-Paltz 4A, West Germany. Alguna información puede ser recobrada de volúmenes en la serie *Verzeichnis der schriftlichen Nachlässe in deutschen Archiven und Bibliotheken*, publicado por Boldt at Boppar am Rhein.

5.7. SOCIEDADES:

Hay numerosas sociedades científicas de historia de las ciencias y de sociedades de matemática, aunque en general no tienen mucho que ver con la historia de la matemática. Pero hay dos sociedades específicas:

British Society for the History of Mathematics. Secretary: Mr J.J. Gray, The Open University, Milton Keynes, Bucks., Inglaterra.

Canadian Society for the History and Philosophy of Mathematics. Secretary: Dr. J.L. Berggren, Departament of Mathematics, Simon Fraser University, Burnaby, B.C., Canadá.

Además de sociedades formales, hay un racimo informal mundial, que usualmente funcionan bien en el tema. La mejor forma de descubrir historiadores de la matemática y sus intereses es consultar el K.O. May (ed.) *World directory of historians of mathematics*, (Historia Mathematica, Toronto, 1.972), cuya segunda edición se está preparando.

5.8. LA UNIVERSIDAD ABIERTA:

En Gran Bretaña, la Open University introdujo una unidad de historia de la matemática. Es un curso general que utiliza once programas de televisión y no presupone conocimientos anteriores por parte de los estudiantes, y dos cursos especiales basados en programas de radio y también sobre apuntes escritos especialmente. Un curso trata sobre el desarrollo del cálculo hasta los principios del siglo diecinueve y el otro el concepto de número.

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

1. ALEXANDROV, A. y KOLMOGOROV, A. *et al, La matemática: su contenido, métodos y significado,* vol. 1, Alianza Universidad, 1.973. (A-4.418)
2. ALEXANDROV, A. y KOLMOGOROV, A. *et al, La matemática: su contenido, métodos y significado,* vol. 2, Alianza Universidad, 1.974. (A-4.419)
3. ALEXANDROV, A. y KOLMOGOROV, A. *et al, La matemática: su contenido, métodos y significado,* vol. 3, Alianza Universidad, 1.974. (A-4.420)
4. ARNOLD, V., *Huggens & Barrow, Newton & Hooke*, Birkhäuser, 1.990. (A-6.706)
5. BAYER, R. (ed.), *Congrés International de Philosophie des Sciences. VIII-Histoire des Sciences,* Hermann, 1.949. (A-220)
6. BELL, E., *The development of mathematics*, McGraw-Hill, 1.945. (A-2.194)
7. BERKELEY, E., *Griant Brains or Machines that think*, John Wiley, 1.949. (A-14)
8. BOCHENSKI, I., *Ancient formal logic*, North-Holland, 1.951. (A-15)
9. BOEHNER, P., *Medieval Logic. An outline of its development from 1.250 to 1.400*, The University of Chicago Press, 1.952. (A-209)
10. BOLD, B., *Famous problems of mathematics*, Van Nostrand, 1.969. (A-3.601)
11. BOOLE, G., *An investigation of the laws of thought*, Dover, 1.854. (A-201)
12. BOOLE, G., *Análisis Matemático de la lógica. Ensayo de un Cálculo del Razonamiento Deductivo,* Universidad de La Plata, 1.960. (A-714)
13. BOREL, R., *L'imaginaire et le réel en mathématiques et en physique*, Albin Michel, 1.952. (A-2.005)
14. BOYER, C., *A history of mathematics*, Wiley, 1.968. (A-5.688)
15. BÜHLER, W., *Gauss. A Bibliographical study*, Springer, 1.981. (A-6.096)
16. DEL BUSTO, E., *Vicisitudes de la palabra álgebra,* UNS, Dpto. de Matemática, 1.959. (A-533)
17. DEL BUSTO, E., *Matemática y Poesía*, UNS, Dpto. de Matemática, 1.959. (A-534)
18. DEL BUSTO, E., *Temas de Historia de la Matemática,* UNS, Dpto. de Matemática, 1.961. (A-6.547)
19. CAJORI, F., *A history of elementary mathematics (with hints on methods of teaching)*, MacMillan, 1.924. (A-599)
20. CAMPBELL, N., *Foundations of science*, Dover, 1.919. (A-23)
21. COOLIDGE, J., *A history of the conic sections and cuadratic surfaces*, Clarendon Press, 1.945. (A-578)
22. COURANT, R. y ROBBINS, H., *What is Mathematics?. An elementary approach to ideas and methods*, Oxford University Press, 1.941. (A-3.944)
23. COURANT, R. y ROBINS, H., *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*, Aguilar, 1.941. (A-2.002)
24. CROWE, M., *A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system*, Dover, 1.967. (A-5.807)
25. CHWISTEK, L., *The limits of science. Outline of Logic and the Methodology of the Exact Sciences*, Routledge & Kegan, 1.935. (A-33)
26. DIEUDONNE, J., *L'ouvre mathématique de C. F. Gauss*, Université de Paris, 1.961. (A-1.531)

27.DIEUDONNE, J., *History of Functional Analysis*, North-Holland, 1.981. (A-5.815)
28.D'OCAGNE, M., *Histoire abrégée des sciences mathématiques*, Libraire Vuibert, 1.952. (A-1.943)
29.EDWARDS, C. Jr, *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, 1.979. (A-6.097)
30.EUCLIDES, *La perspectiva y especolaria de Euclides. Traducidas en vulgar castellano 1.585*, IPN, Departamento de Matemática, 1.986. (A-6.085)
31.FRIEDRICHS, K., *From Pythagoras to Einstein*, NML vol. 16, The Mathematical Association of America, 1.965. (A-5.446)
32.GIGGENHEIMER, H., *History of mathematics*, Brooklin, 1.972. (A-5.695)
33.HEATH, L., *Diophantus de Alexandria. A study in the History of Greek Algebra*, Dover, 1.964. (A-2.636)
34.GARDNER, M., *L'étonnante histoire des machines logiques*, Dunod, 1.964. (A-2.839)
35.HOFMANN, J., *Veber Jakob Bernoullis Beiträgle sur Infinitesimalmathematik*, Monographies de l'Enseignement Mathematique N° 3, 1.956. (A-847)
36.KEYSER, C., *Mathematics as a Culture Clue*, Scripta Mathematica, 1.947. (A-444)
37.KOYRÉ, A., *Études Galiléennes. Histoire de la pensée XV*, Hermann, 1.966. (A-2.474)
38.LEBESGUE, H., *Notices d'Histoire des Mathématiques*, Monographies de l'Enseignement Mathematique N°4, 1.958. (A-848 y A-2.171)
39.LELIONNAIS, F. (ed.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, EUDEBA, 1.962. (A-6.230)
40.MUGLER, C., *Dictionnaire Historique de la Terminologie géométrique des grees*, Librairie C. Klincksieck, 1.959. (A-2.669)
41.MUSGRAVE, A., *Los segundos pensamientos de Kuhn*, Cuadernos "Teorema", 1.978. (A-4.775)
42.NAGEL, E., *The structure of science. Problems in the logic of scientific explanation*, Harcourt, Brace, World, 1.961. (A-1.699)
43.NEUGEBAUER, O. y SACHS, A., *Mathematical Cuneiform Texts,* American Oriental Society, 1.945. (A-431)
44.PROCLUS DE LYCIE, *Les Commentaires sur le Premier Livre des Éléments de Euclide,* A. Blanchard, 1.948. (A-390)
45.RAMANUJAN, S., *Notebooks of S. Ramanujan*, Tata Institute, 1.957. (A-525, A-526)
46.SANCHEZ PÉREZ, J., *La aritmética en Roma, en India y en Arabia*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1.949. (A-2.208)
47.SCHIFFER, M. y BOWDEN, L., *The role of mathematics in science*, NML vol. 30, The Mathematical Association of America, 1.984. (A-5.758)
48.STANLEY JEVONS, W., *Elementary lessons in logic. Deductive and inductive and a vocabulary of logical temmes*, Macmillan & Co., 1.957. (A-75)
49.STILLWELL, *Mathematics and its history*, Springer, 1.989. (A-6.691)
50.TITCHMARSH, E., *Esquema de la Matemática Actual*, Breviarios, Fondo de Cultura Económica, 1.948. (A-4.025)
51.TURNBULL, H., *The great mathematicians*, Methuen, 1.929. (A-2.678)
52.VERA, F., *Puntos críticos de la matemática contemporánea*, Editorial Losada, 1.944. (A-6.551)
53.VAN DER WAERDEN, B., *A History of Algebra*, Springer, 1.985. (A-6.476)

54.VAN DER WAERDEN, B., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, 1.983. (A-5.682)

55.WATTS, D. (ed.), *The future of statistics,* Academic Press, 1.968. (A-4.180)

56.YOUNG, L., *Mathematicians and their times*, North-Holland, 1.981. (A-5.378)

CAPITULO 6: LOGICA Y FUNDAMENTOS (W. A. HODGES y G. T. KNEEBONE)

6.1 INTRODUCCION:

La lógica matemática es el estudio matemático de las principales actividades de los matemáticos: constructividad, definición, demostración y computación. Hay dos aproximaciones radicalmente diferentes a este tema. De acuerdo con el primero de ellos, la lógica matemática tiene el trabajo de *justificar* las actividades de los matemáticos (sin lógica, los matemáticos pueden caer en confusiones conceptuales o contradicciones absolutas). Esta aproximación se la denomina a veces "fundacional" y estuvo de moda hasta los años treinta. En 1.930 fueron introducidas un buen número de técnicas lógicas poderosas, y devino popular otro punto de vista. De acuerdo con esta segunda forma de pensamiento, la que se denomina a veces la aproximación "técnica", la lógica es simplemente una rama de la matemática a la par de cualquier otra y su único hecho distintivo es que la lógica nos habla sobre definiciones, significados, etc.. La parte fundacional ha avanzado poco en la investigación en los últimos 60 años excepto entre aquellos matemáticos que rechazan parte de las matemáticas clásicas. (cf. sección 6.4).

Un libro recomendable y moderno, y que cubre la totalidad de los temas pero sin bibliografía es Shoenfield [1]. Enderton [2] y Mendelson [3] son libros introductorios excelentes, mientras que Crossley [4] da una introducción corta y accesible. Barwise [5] es un resumen de los principales resultados, incluyendo la investigación más reciente.

Hay varias revistas dedicadas especialmente a la lógica matemática y temas relacionados, en particular:

Annals of Mathematical Logic (North-Holland, Amsterdam, 1.970-)
Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung (Kohlhammer, Stuttgart, 1.950-)
Fundamenta Mathematicae (Polska Akademia Nauk, Warsaw, 1.920-)
The Journal of Symbolic Logic (Association for Symbolic Logic, Princeton and Los Angeles, 1.936-)
Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1.955-)

The Journal of Symbolic Logic, la revista de la Asociación de Lógica Simbólica, ha sido en el pasado particularmente útil al incluir comentarios de todos los libros y trabajos de Lógica Matemática, pero su sección de revisión ahora ha sido abreviada. *Fundamenta Mathematicae* publica principalmente trabajos de lógica y topología.

Todos los años se realizan varias conferencias en lógica; usualmente los resultados son publicados por North-Holland en su *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,* o en la serie de Springer-Verlag, *Lectures Notes in Mathematics.*

6.2. JUSTIFICACION DE LA MATEMATICA:

Para comenzar con la cuestión fundacional principal, que conlleva todas las otras en su principio: ¿Cómo puede ser justificada la matemática?. Desde que esta cuestión fue planteada han sido propuestas varias respuestas, tanto por parte de filósofos interesados en la matemática como por parte de matemáticos con inclinaciones filosóficas. Hay tres excelentes colecciones de lecturas en este tema: Benacerraf y Putnam [6] es principalmente filosófica; van Heijenoort [7] contiene contribuciones clásicas del lado matemático; y Hintikka [8] es una juiciosa colección de los trabajos matemáticos más recientes con implicaciones filosóficas. Un survey histórico que se centra en el período 1.899-1.931 se encuentra en Kneebone [9]; Mostowski [10] es más avanzado, y cubre 1.930-1.964.

Desde el punto de vista filosófico, encontramos los principales frentes de batalla entre aquellos lógicos que toman las afirmaciones matemáticas como literalmente ciertas y aquellos que no lo hacen. Los que toman el asunto como literalmente cierto, son llamados *Platonistas.* Un Platonista cree, por ejemplo, que la colección de todos los números reales está simplemente allí, y simplemente tiene la cardinalidad que debe tener. Desde este punto de vista, un matemático nunca produce nada que no exista previamente; él nuevamente hace explícita una demostración o una estructura que existía previamente al momento en que él la haya definido. Para un Platonista, el principal trabajo fundacional es establecer principios que nos digan que estructuras matemáticas existen. Es usualmente sostenido que los axiomas de la teoría de conjuntos cumplen su función bien para los propósitos prácticos, aunque existe siempre la posibilidad de encontrar nuevos axiomas útiles (cf. sección 6.7). Ver los trabajos de Gödel y Bernays en la referencia 6.

Opuestos a los Platonistas, están los *formalistas*. Ellos sostienen que las afirmaciones matemáticas no nos dicen literalmente nada, que son simples ligazones de símbolos derivables en ciertos sistemas formales (cf. sección 6.3). Desde este punto de vista los matemáticos realmente nunca construyen los objetos abstractos sobre los que ellos hablan, desde que estos objetos no son más que alucinaciones gramaticales. Muchos de los lógicos contemporáneos adscriben al formalismo, porque no quieren complicarse con cuestiones filosóficas; y esta es quizá la razón de por qué los formalistas han mostrado tan poco interés en explicar o justificar el razonamiento matemático informal, aunque lo usan libremente. Para una defensa del formalismo, ver la contribución de Cohen en Scott [11]. Para una mirada diferente, ver Kreisel en referencias 11 y 8.

Entre las posiciones extremas del platonismo y el formalismo se ubica una tercera, el *constructivismo*, que afirma que los objetos matemáticos deben construirse para que existan. Esta posición conduce a una matemática poco ortodoxa que la aislamos en la sección 6.4.

6.3. TEORIAS FORMALES Y METAMATEMATICAS:

El estudio de los fundamentos de la matemática, originariamente una reserva de los filósofos, tiene bastante tiempo, hasta que fuera tomado por los matemáticos. La transición comienza con el libro de Frege *Grundgesetze der Arithmetik* en 1.893, y llegó a la cumbre con el trabajo de Hilbert y sus muchos colaboradores, que perfeccionaron la matemática clásica (proof theory), es decir, el estudio por medios matemáticos de la totalidad de las teorías matemáticas. Para que las teorías sean apropiadas para tal estudio, deben estar bien definidas, y la técnica desarrollada para asegurar esto es la *formalización.* Desde la primera edición del libro de Hilbert y Ackermann [12] en 1.928, ha sido una práctica común la de señalar dos de los tipos básicos del cálculo formal, el *cálculo de* *predicados de primer orden con identidad* y *cálculo de predicados de orden superior*. La teoría de primer orden es la más comúnmente utilizada. Tiene varias formas, todas esencialmente equivalentes: estilo axiomático de Hilbert (ver Shoenfield [1] o Enderton [2]), deducción natural (Kalish y Montague [13] presentan una versión práctica), cálculo secuencial (Lyndon [14]), y tablas semánticas (Beth [15]). Beth describe algunas demostraciones de equivalencias entre diferentes cálculos. Para los cálculos de orden superior, Hilbert y Ackermann [12] es aún una buena referencia, aunque la de Church [16] es más completa.

Para formalizar una teoría dentro del cálculo de predicados de primer orden, se agregan símbolos y axiomas adicionales; ver Kalish y Montague [13] para ejemplos claros y detallados. De las incontables teorías formales obtenidas de esta forma, se han estudiado intensivamente dos en particular: aritmética formal de Peano y teoría formal de conjuntos. Ya que la mayor parte de la matemática contemporánea puede desarrollarse dentro de estas dos teorías (de formas bien conocidas), cualquier justificación de estas teorías sería un paso importante hacia la justificación de la matemática. El "programa de Hilbert" estaba animado del propósito de justificar la matemática encontrando una demostración finita de la consistencia de la aritmética. Este programa perdió toda su plausibilidad cuando Gödel [17] reveló las limitaciones inherentes en la formalización y la matemática finita. Pero esta fase de la investigación matemática que terminó con el trabajo de Gödel en 1.931 produjo una riqueza de técnicas y resultados, y estos están discutidos en forma completa en los invalorables volúmenes de Hilbert y Bernays [18].

Luego del trabajo de Gödel, los matemáticos concentraron sus energías en encontrar formas normales para las demostraciones y métodos para convertir demostraciones en forma normal. Incuestionablemente las formas normales más útiles han sido las demostraciones secuenciales libres de corte (curt-free sequent proofs) de Gerhardt Gentzen; ver al erudito libro de Kleene [19] para un buen relato. Estas demostraciones son formalmente idénticas con las tablas semánticas de Beth. Smullyan [20] presenta elegantemente una forma de tablas semánticas, y prueba como pueden usarse para demostrar varios resultados metamatemáticos. Ver Prawitz [21] para normalización en el cálculo deductivo natural.

El programa de Hilbert en sí mismo sobrevivió, pero en forma revisada; en lugar de buscar demostraciones finitas de la consistencia de la aritmética, se trata de medir exactamente cuanto se necesita del equipamiento no-finito para una demostración. El capítulo 8 de Shoenfield [1] es una buena introducción en este área; Schütte [22] es más detallado. Para direcciones más recientes, ver Kreisel, parte I [23] y II [24].

Mientras tanto, nuevos vientos comenzaron a soplar desde el este. Los polacos, notablemente Tarski y Lindenbaum, encontraron que el cálculo de primer orden podía ser estudiado *semánticamente* con provecho, es decir, a través de sus interpretaciones. Esta aproximación condujo rápidamente a muy elegantes métodos booleanos altamente no-finitos, como esta explicado en Rasiowa y Sikorski [25]. Estas ideas rápidamente florecieron en la teoría de modelos (Sección 6.9). Lyndon [14] hace una combinación de métodos semánticos y teórico-demostrativos.

Una herramienta lógica formal que atrajo la atención en años recientes es el símbolo ϵ, u operador selección, que fue utilizado primero en los años 1.920 por Hilbert. Para un relato sistemático de esto, ver Asser [26].

6.4. INTUICIONISMO Y CONSTRUCTIVISMO:

El intuicionismo, como propuso Brouwer a partir de 1.920 en adelante, empujó a sus últimas conclusiones la actitud antimetafísica hacia la matemática que fue alabada por matemáticos como Kronecker, Poincaré y Weyl. Brouwer sostenía que la matemática es una creación libre, independiente de la experiencia, la cual se desarrolla a partir de una única intuición primordial que arriba a la conciencia del matemático individual y anterior al lenguaje y la lógica. Partiendo desde esta posición, Brouwer produjo un cuerpo de la matemática intuicionista, radicalmente diferente de la matemática "clásica" y no gobernada por la lógica "clásica". La estructura lógica implícita en el intuicionismo de Brouwer fue luego codificada por Heyting, quien también contribuyó al desarrollo de la matemática intuicionista en sí misma. La noción clave en tal matemática es la de *sucesión electiva* (choice sequence), es decir, una sucesión de procedimientos infinitos de números, donde las sucesivas elecciones pueden ser totalmente libres o pueden estar sujetas a restricciones de varias clases. La investigación en sucesiones electivas, ha sido proseguida por Myhill, Kreisel y Troelstra.

Para un relato simple de la filosofía del intuicionismo y de los primeros desarrollos de la matemática intuicionista, ver Heyting [27] y para trabajos más recientes ver sección 2 Rootselaar y Staal [28] y secciones A-D de Kino, Myhill y Vesley [29].

Menos radicales que el intuicionismo, pero más o menos relacionadas con él, están las distintas ramas del *constructivismo*, de la cual uno de los presupuestos comunes es que los objetos matemáticos son construídos para que existan. El constructivismo difiere de acuerdo a los tipos de construcción que ellos permiten. También hay lógicos que, aunque no son en si mismos constructivistas, están interesados en ver lo que es posible hacer en métodos limitados. Así los métodos *predicativos* utilizan solamente estructuras que pueden ser definidas "desde abajo". Ver, por ejemplo, Feferman en referencia 8, que permite inducción hasta los ordinales previamente definidos.

Muchos intentos se han hecho para reescribir la matemática ordinaria en forma constructivista, notablemente por Bishop en referencia 30 y por Lorenzen en referencia 31. El constructivismo está estrechamente ligado con la teoría de la recursión, la cual trataremos ahora.

6.5. TEORIA DE LA RECURSION:

La teoría de la recursión trata con la caracterización formal la noción intuitiva de *efectividad* de un operación o un proceso, es decir, esta es tal que, al menos en principio, se puede llevar a cabo mecánicamente de forma tal que conduzca a un resultado definido (es claro el porque los constructivistas están interesados en la teoría de la recursión). Esta teoría ha evolucionado, desde sus concretos y simples comienzos, en una teoría altamente abstracta de remarcable generalidad. La efectividad fue estudiada en el contexto de la aritmética (computabilidad efectiva de un número, definibilidad de una función y así siguiendo), pero fue rápidamente universalizada con la ayuda de las funciones características, numeración de Gödel, etc..

La historia comienza con la concepción de Dedekind-Peano de la aritmética de los números naturales, basados en inducción numérica y recursión primitiva. Funciones recursivas primitivas son efectivamente computables, por supuesto, pero uno puede en forma fácil definir efectivamente funciones computables que no son recursivas primitivas. En 1.936 Alonzo Church propuso que las *funciones recursivas generales* introducidas por Kleene fueran adoptadas como la idealización matemática apropiada de las funciones efectivamente computables de números naturales. Esta propuesta, que se conoce como la *tesis de Church*, ha sido casi universalmente aceptada.(Ver Davis [32], pp. 10 ff, para una breve discusión). Cuando la computabilidad se precisa en esta forma, se sigue enseguida la existencia de funciones que están bien definidas pero no son efectivamente computables.

Una verdadera enciclopedia de todo el tema de la teoría recursiva, con una bibliografía extensiva, es Rogers [33]. Péter [34] es un texto general, bueno en recursión primaria, y Goodstein [35] ofrece un tratamiento más formal. Smullyan [36] merece una mención ya que es una introducción hermosamente escrita.

Dentro de la teoría recursiva reciente se pueden distinguir las siguientes áreas especializadas: (a) Teoría de la computabilidad, (b) Grados de no resolubilidad, (c) Teoría de recursión generalizada y jerarquías, (d) Análogos recursivos de matemática clásica, (e) Problemas de decisión. Para (a)-(d), ver abajo; para (e), ver sección 6.6.

6.5.1. Teoría de la computabilidad:

Han sido propuestas varias definiciones matemáticas de "computación". Ver Davis [32] o Hermes [37] para buenos relatos de las máquinas de Turing, funciones recursivas generales de Kleene y sistemas de producción de Post; Mendelson [3] para algoritmos de Markov y Shepherdson y Sturgis [38] para máquinas registradoras. Las mismas funciones son computables en todas estas definiciones; las pruebas están dadas en las referencias anteriores, referencia 32 en particular. La colección editada por Davis [39] es una fuente a mano para el trabajo previo de Gödel, Church, Kleene, Post y Turing en este campo.

Es natural también preguntarse que puede ser computado por los distintos tipos de máquinas. En autómatas finitos, autómatas pushdown, autómatas estocásticos y autómatas auto-replicantes, Arbib [40] es completo y claro. Algunas de estas máquinas tienen estrecha relación con la teoría matemática del lenguaje, tales como lenguajes libres de contexto (Ginsburg [41]) o lenguajes regulares (Conway [42]); ver Gross y Lentin [43].

La teoría de *esquemas de programación* aplica la teoría de la recursión al estudio de programas de computación; ver Manna [44]. Un esfuerzo anterior para formalizar esquemas de computación fue el *λ-cálculo* de Church; ver, por ejemplo, Hindley, Lercher y Seldin [45] y referencias dadas allí.

La revista *Information and Control* (Academic Press, New York, 1.958-) publica trabajos en teoría de computabilidad.

6.5.2. Grados de no resolubilidad (conocida también con el nombre de *Grados de Turing*):

Uno se puede preguntar que funciones pueden ser computadas por medio de una máquina de Turing provista con un "oráculo" que le diga los valores de alguna función no efectiva. La teoría resultante es extremadamente abstracta y no combinatoria, pero en los últimos 25 años ha inquietado a algunas de las mejores mentes en lógica y estimulado el trabajo en otras áreas. Los denominados métodos *prioritarios* pertenecen a esta área. Ver Shoenfield [46] o Yates [47].

6.5.3. Teoría de la recursión generalizada y jerarquías:

Varias aproximaciones a la teoría de la recursión- en particular definibilidad aritmética y esquemas ecuacionales- sugieren generalizaciones naturales. Podemos, por ejemplo, considerar conjuntos de números definidos por definiciones inductivas o podemos reemplazar el conjunto de los números naturales por algún otro ordinal, o ciertamente por una estructura arbitraria. Aunque varias generalizaciones bastante diferentes conducen al mismo lugar al final del camino. Teoría de recursión de tipo alto, conjuntos hiperaritméticos y la teoría de ordinales admisibles (Barwise [48]) pertenecen a esta clase. Las definiciones inductivas han probado ser un principio unificador muy potente; ver Moschovakis [49] y las referencias que él da. La colección de Fenstad y Hinman [50] presenta una variedad de aproximaciones, junto a una bibliografía sustancial.

La teoría descriptiva de conjuntos (cf. sección 6.8) puede verse también como una forma de teoría de la recursión generalizada.

6.5.4 Análogos recursivos:

Hay un número de estudios referidos a los análogos de las estructuras matemáticas clásicas dentro de la teoría recursiva; cf. sección constructivismo (sección 6.4). Para ejemplo, ver Mazur [51] en análisis, y Crossley y Nerode [52] en homomorfismos recursivos entre estructuras.

6.6. PROBLEMAS DE DECISION:

Un *problema de decisión* consiste en tratar de encontrar un procedimiento efectivo por el cual poder decidir cuales objetos tienen alguna característica metamatemática especial.

En la metateoría del cálculo lógico puro, tenemos un problema de decisión de varias formas obvias: encontrar, para un cálculo dado y una clase de fórmulas dadas, un procedimiento que determine en un número finito de pasos cuando cualquier fórmula particular de la clase es o no formalmente derivable. En algunas instancias el problema ha sido resuelto positivamente, por medio de un procedimiento conveniente; en otros ha sido resuelto negativamente, mediante una demostración de que no puede existir tal procedimiento. Soluciones negativas de problemas de decisión, particularmente para teorías matemáticas, deben basarse fuertemente en la teoría de recursión (cf. sección 6.5).

Una instancia anterior del problema de la decisión matemática fue el problema 10 de Hilbert (1.900): encontrar un método para determinar cuando una ecuación diofántica dada tiene solución. Este problema famoso, no resuelto por mucho tiempo, fue resuelto negativamente en 1.970 por Matijasevic; ver Davis [53] o Matijasevic mismo en Suppes *et al* [54].

Otro problema de decisión difícil fue el de las palabras para grupos (Dehn, 1.911): dada cualquier presentación finita para un grupo, encontrar un método para determinar cuando cualquier palabra particular representa la identidad del grupo. Este problema fue resuelto, también negativamente, en 1.954 por P. Novikov. Para un relato excelente de este resultado ver Rotman [55]. Boone, Cannonito y Lyndon [56] y Miller [57] discutieron problemas relacionados, tales como problemas de conjugación e isomorfismos para grupos.

Cuando las teorías de primer orden (cf. sección 6.3) llegaron a ser objeto de un estudio general, fue natural preguntarse: dada una teoría de primer orden T, hay un método efectivo para determinar cuales sentencias son consecuencia de T. La respuesta es conocida para muchas teorías importantes T; ver Ershov *et al* [58] para una lista junto con referencias. El teorema de Gödel es la base de la mayoría de las respuestas negativas; ver Tarski, Mostowski y Robinson [59] y el último y muy poderoso método de Rabin (en referencia 60). Ackermann [61] reseña los resultados positivos para lógica pura de primer orden (donde T se lo considera vacío). Hay dos soluciones positivas interesantes y recientes para la teoría de cuerpos finitos (Ax [62]) y para la teoría de cuerpos p-ádicos (Cohen [63]).

La mayoría de los problemas no triviales de decisión en lógica tienen soluciones negativas; por lo que fue sorpresivo que Rabin [64] probara que la teoría monádica de segundo orden de dos functores sucesores era efectivamente decidible. La demostración de Rabin es difícil; Siefkes [65] es de alguna ayuda.

6.7. TEORIA AXIOMATICA DE CONJUNTOS:

La teoría axiomática de conjuntos tuvo sus inicios en 1.908, cuando Zermelo propuso un sistema de axiomas como respuesta al desafío de algunas paradojas que atacaban la estabilidad de la teoría "ingenua" de Cantor para el tratamiento de conjuntos. Subsecuentes incorporaciones, adiciones y modificaciones produjeron el sistema ZF de Zermelo-Fraenkel. Una aproximación axiomática un poco diferente fue propuesta en 1.925 por von Neumann; y esta es el antecedente original del sistema NBG de Neumann-Bernays-Gödel. Otro sistema considerado por muchos matemáticos es el MK de Morse y Kelley. Además, se tiene un sistema propuesto por Ackermann (ver Reinhardt [66]) que es esencialmente equivalente al ZF pero basado en diferentes puntos de vista. También está el sistema personal de Quine, presentado en referencia 67 con mordaces observaciones filosóficas sobre el tema.

Para un estudio agradable y comparativamente informal de los axiomas ZF, su relación con el resto de la matemática, y como ellos evitan las paradojas, ver Fraenkel, Bar-Hillel y Levy [68]; y para un relato sucinto de la historia de los axiomas de la teoría de conjuntos, ver la sección introductoria de Fraenkel en Bernays y Fraenkel [69]. Un tratamiento fácil de la teoría ZF de conjuntos hasta alcanzar los números ordinales y cardinales, se puede encontrar en Suppes [70]; y una presentación mas densa de la teoría, basada esta vez sobre MK, en el admirable libro de Monk [71]. Takeuti y Zaring [72] es muy formal en el estilo y particularmente útil como un rico repositorio de resultados elementales.

Mientras que ZF es una teoría de conjuntos únicamente, NBG y MK hacen provisión también para clases, e.d. totalidades que no necesariamente cuentan como objetos matemáticos existentes. Un formalismo-clasista esta dado también por Bernays en referencia 69. El texto de Bernays [69] ofrece lo que es en principio una teoría axiomática formal de conjuntos y de clases (en el sentido de la sección 6.3), aunque el libro está escrito en una forma semi-formal preferida para matemáticos prácticos.

La teoría de ordinales y cardinales tiene un núcleo, el cual puede ser desarrollado igualmente bien en ZF, NBG o MK. Sierpinski [73] es rico en resultados clásicos, aunque es difícil encontrar las cosas. Bachmann [74] está más actualizado y es bueno como referencia.

La mayor parte de la investigación en teoría de conjuntos axiomática está centrada, directa o indirectamente, con cuestiones de *consistencia relativa e independencia*, es decir, cuando ciertas afirmaciones pueden ser agregadas a los axiomas básicos sin crear una inconsistencia. Por el lado fundacional, uno quiere saber cuán lejos es ZF coherente internamente, y que axiomas nuevos pueden ser adoptados razonablemente (el trabajo de Gödel "What's Cantor's continuum problem?" en Benacerraf y Putnam [6] discute como se puede justificar agregar nuevos axiomas a ZF). Por el lado técnico, el propósito es probar que conjeturas no pueden ser resueltas en distintas ramas de la matemática sobre la base de algún conjunto de axiomas particular (ver sección 6.8 para un ejemplo).

Los métodos utilizados para demostraciones de consistencia relativa están casi enteramente basados en la teoría de modelos (cf. sección 6.9). Un método es construir un *modelo interior* (por ejemplo, el de los conjuntos constructibles) dentro de un universo de conjuntos dado. Gödel utilizó este método para probar que el Axioma de Elección y la Hipótesis del Continuo pueden ser agregados a los otros axiomas de NBG (o ZF) sin producir una contradicción; ver Krivine [75]. Una técnica poderosa en teoría de modelos es el *"forcing"*, utilizada por Paul J. Cohen para probar que la negación del Axioma de Elección puede igualmente agregarse al resto de ZF sin producir una contradicción. Para los primeros trabajos en forcing, Felgner [76] es claro y provee buenas referencias sobre revistas; Jech [77] hace un buen relato de la conexión entre forcing y modelos a valores booleanos y da demostraciones conceptuales claras de muchos de los resultados profundos y difíciles que pueden probarse mediante el forcing. En el Axioma de Elección el más especializado es Jech [78].

Un axioma que puede ser agregado consistentemente a ZF es el *axioma de constructividad* de Gödel (V=L, todos los conjuntos son constructibles). Además vinculando la hipótesis del continuo, este tiene varias consecuencias combinatorias útiles (cf. sección 6.12). Ver Mostowski [79] para los resultados viejos y Devlin [80] para los más recientes. Alternativamente, uno puede agregar consistentemente a ZF una familia cualquiera de afirmaciones combinatorias conocida como el *axioma de Martin.* Estos axiomas plantean varias cuestiones matemáticas; la mayoría de los cuales son inconsistentes con V=L. Ver Martin y Solovay [81].

Los *axiomas de grandes cardinales* tienen también consecuencias útiles, pero no hay esperanzas de probar que ellos son consistentes con ZF. Ver un relato completo en Drake [82].

6.8. TEORIA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS:

La teoría descriptiva de conjuntos es el estudio de conjuntos definibles de números reales. Los fundadores del tema en los primeros años de este siglo (Borel, Lebesgue, Souslin, Lusin), la consideraron investigando la estructura de la recta real- debemos a ellos , entre otras, las nociones de conjunto de Borel (o borelianos), medida de Lebesgue, categoría de Baire (cf. sección 14.2). Pero estos hombres también tenían su lado constructivista: ellos eran proclives a creer que un conjunto de números reales debe ser definible para poder existir. Como resultado su trabajo consiste, en su mayor parte, en una teoría de definiciones, y definiciones inductivas en particular. Todo este trabajo temprano está compendiado en el trabajo enciclopédico de Kuratowski [83].

Para una vista moderna de las definiciones inductivas, la cual absorbe simultáneamente una gran parte de la teoría descriptiva de conjuntos y generaliza la teoría de la recursión (cf. sección 6.5), ver Moschovakis [49] y Barwise [48].

Métodos nuevos han conducido a nuevos resultados en algunos de los viejos problemas. Un ejemplo particularmente influyente fue el *problema de Souslin.* Souslin se preguntaba cuando existe un conjunto ordenado densamente completo tal que todo conjunto de intervalos abiertos disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable, pero ningún subconjunto numerable es denso. Ahora sabemos que existe un tal conjunto si V=L pero no si vale el Axioma de Martin para ω_1: ver Devlin y Johnsbräten [84] para un relato pormenorizado. Para nuevos hechos sobre viejas cuestiones, ver Martin en referencia 5.

6.9. TEORIA DE MODELOS:

La teoría de modelos es la teoría de las estructuras matemáticas y sus propiedades. La teoría de modelos de primer orden trata con propiedades *elementales*, es decir, aquellas que pueden ser expresadas por medio de conjuntos de afirmaciones de primer orden (cf. sección 6.3). Por ejemplo, la propiedad de ser un grupo es elemental, puesto que los axiomas de grupos son afirmaciones de primer orden. Un conjunto de afirmaciones se denomina *teoría*; una estructura se dice *modelo* de una teoría si toda afirmación en la teoría es cierta en el modelo. La teoría de modelos ha desarrollado una batería de técnicas para construir modelos de teorías, y para asegurar que los modelos construidos son grandes o pequeños, gordos o delgados, rígidos u homogéneos, como la ocasión lo demande.

Hay un libro excelente de la teoría de modelos de primer orden, el de Chang y Keisler [85]. La primera mitad del de Bell y Slomson [86] es una introducción leíble sobre el tema. Ambos libros consideran *ultraproductos*, los cuales son uno de los métodos más útiles de construcción de modelos (usados, por ejemplo, por Ax y Kochen en su demostración parcial de la conjetura de Artin sobre cuerpos p-ádicos, como se describe en el capítulo 5 de la referencia 86). El otro método más útil es el de los *indiscernibles* o modelos de *Ehrenfeucht-Mostowski*; esto está en la referencia 86 pero no en la 87. El pequeño survey de teoría de modelos editado por Morley [87] es bueno para orientación, y da nuevas referencias.

Desde que se escribió la referencia 86, hubo dos desarrollos principales en teoría de modelos de primer-orden. El primero es la *teoría de estabilidad*, principalmente por Shelah [88], [89]. Esta teoría trata de clasificar teorías en términos de la complejidad de sus modelos; esto conduce a algunos resultados sorprendentes (ambos positivos o negativos) sobre un número de modelos no isomórficos de un tamaño dado que puede tener la teoría.

El segundo desarrollo es *model-theoretic forcing* (en dos formas, finita e infinita) el cual proviene de determinados esfuerzos del fallecido Abraham Robinson para capturar dentro de la teoría de modelos la noción de clausura algebraica. La aparición de los *modelos genéricos* de Robinson coincidieron providencialmente con desarrollos en teorías de grupos y teoría de cuerpos inclinados (skew); ver el trabajo de Keisler en referencia 88 para un resumen rápido de la aplicación a teoría de grupos y Hirschfeld y Wheeler [90] para un relato más completo del forcing junto con el trabajo en cuerpos inclinados.

Otra contribución de Robinson es el *análisis no-estandard*, el cual utiliza métodos de la teoría de modelos para simplificar argumentos analíticos y topológicos. Quizá el ejemplo más simple del método de Robinson es el de sumar infinitesimales a la recta real de tal forma que la noción de "muy pequeño" puede utilizarse como un concepto matemático preciso. Ver la introducción al tema de Machover y Hirschfeld [91], o el survey de Bernstein en referencia 88, o la colección de ensayos editados por Luxemburg y Robinson [92]. El trabajo de Robinson [93] es básico pero difícil de leer.

6.10. GENERALIZACIONES DE LA TEORIA DE MODELOS:

En los últimos 40 años se pudo ver claramente que muchos de los teoremas clásicos de la teoría de modelos de primer-orden permanecían válidos cuando se permitía que las afirmaciones consideradas sean infinitamente largas, siempre que fueran impuestas otras restricciones. Esto dio origen a la teoría de modelos de *lenguajes infinitos*. Dickmann [94] es una buena referencia general y Keisler [95] es un relato detallado de un lenguaje infinito particular. En los primeros tiempos, el interés se centró en las conecciones con grandes cardinales (cf. sección 6.7) y combinatoria infinita (cf. sección 6.12). Más recientemente, los lenguajes infinitos han sido una herramienta útil para comprender algunos conceptos del álgebra; ver Barwise en referencia 88.

Pocos de los teoremas más útiles de la teoría de modelos de primer-orden (como el teorema de compacidad y el teorema de definibilidad de Beth) han resistido la generalización a lenguajes infinitos. Los lógicos se desquitaron aislando axiomáticamente aquellos lenguajes que permiten buenas generalizaciones de esos teoremas; el resultado es la *teoría abstracta de modelos*; ver Barwise [96] y Makowsky, Shelah y Stavi [96a].

En otra dirección, el éxito de Lawvere en llevar el álgebra universal (cf. sección 6.11) a la teoría de categorías ha motivado a muchas personas a tratar de hacer lo mismo con teoría de modelos. El marco usual es un *topo elemental*. Topos elementales son una generalización de la categoría de prehaces de los geómetras algebraicos de la escuela de Grothendieck. Para topos Grothendieck ver Artin, y Grothendieck Verdier [97]; para topos elementales y sus relaciones con la teoría de conjuntos, ver Johnstone [98]; para teoría de modelos con teoría de categorías, ver Lawvere, Mauser y Wraith [98a]. Daigneault [99] contiene otros puntos de vista "algebraicos" de la lógica.

6.11. ALGEBRA UNIVERSAL:

El álgebra universal estudia aquellos hechos que son comunes a todas o a la mayoría de las clases de estructuras que se estudian en álgebra. Por ejemplo, muchas clases familiares de estructuras están definidas por ecuaciones; los grupos son un ejemplo, los anillos otro. Un teorema de Birkhoff caracteriza aquellas clases como las que son cerradas bajo isomorfismo, subestructura, producto e imagen homomórfica. Esto es un teorema típico de álgebra universal. Cohn [100] es una buena referencia, y Grätzer [101] es también buena con una bibliografía comprensible. Jónsson [102] introduce algún trabajo reciente. Ver también Taylor [102a].

En lo que hace a tratamiento de clases definibles de estructuras, el álgebra universal muestra una tendencia a ser absorbida en la teoría de modelos; ver, por ejemplo, Mal'cev [103]. En lo que hace al tratamiento de clases definidas por ecuaciones, el álgebra universal ha sido ocultada en gran medida por la teoría de categorías; ver, por ejemplo, MacLane [104] *passim*, o capítulos 11 y 18 de Schubert [105]. Pero hay también partes del tema que tienen vida por derecho propio. Uno es la teoría de reticulados; ver Grätzer [106]. Aún dentro de la teoría de reticulados, las álgebras Booleanas son un tema auto-contenido; ver Sikorski [107] y Comfort y Negrepontis [108].

La revista *Algebra Universalis* (Birkhäuser, Basel, 1.971-   ) está dedicada al álgebra universal.

6.12. COMBINATORIA NO FINITA:

El campo de la combinatoria no finita, tiene que ver con el estudio de familias infinitas de conjuntos, es solamente una rama marginal de lógica, aunque métodos de la teoría de modelos (cf. sección 6.9) han probado ser útiles en años recientes. Los trabajos de Kunen y Devlin en Barwise [5] proveen un rápido sumario.

Mucho trabajo se ha hecho alrededor del *cálculo de particiones*, el cual parece generalizar el teorema de Ramsey sobre grafos. La mayoría de los hechos conocidos están en una u otra forma en Ërdos y Rado [109] y Ërdos y Hajnal en referencia 11 y 110. Las últimas dos referencias también cubren otras cuestiones combinatorias. Algunos cardinales grandes (cf. sección 6.7) están definidos por sus propiedades particionísticas (de partición); estas incluyen la *compacidad débil* y los *cardinales de Ramsey*, que tienen implicaciones en lógica infinitaria.

Arboles, es decir, ordenes parciales donde los predecesores de cualquier elemento están bien ordenados, han provisto tanto problemas como métodos en combinatoria; Jech [111] es un survey preciso desde el ángulo de la teoría de conjuntos. Los árboles se conectan con *ultrafiltros*, ver Comfort y Negrepontis [108].

Jensen probó que estos principios combinatorios útiles valen en el universo constructible; ver Devlin [80] para los principios $\diamond$ y $\square$. Aunque estos principios pueden no ser ciertos en sentido absoluto, pueden ser usados para probar que algunas conjeturas viejas en topología y álgebra no son refutables sobre la base de las teorías de conjuntos aceptadas.

REFERENCIAS:

[1] SHOENFIELD, J., *Mathematical logic,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.967. (A-3.628).

[2] ENDERTON, H., *A mathematical introduction to logic,* Academic Press, New York, 1.972.

[3] MENDELSON, E., *Introduction to mathematical logic,* Van Nostrand, Princeton, 1.964. (A-6.732, A-1.581 y A-6.612).

[4] CROSSLEY, J. *et al, What is mathematical logic?,* Oxford University Press, Oxford, 1.972.

[5] BARWISE, K. (ed.), *Handbook of mathematical logic,* North-Holland, Amsterdam, 1.977. (A-4.929)

[6] BENACERRAF, P. y PUTNAM, H., *Philosophy of mathematics,* Blackwell, Oxford, 1.964.

[7] van HEIJENOORT, J., *From Frege to Gödel,* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1.967.

[8] HINTIKKA, J. (ed.), *The philosophy of mathematics,* Oxford University Press, Oxford, 1.969.

[9] KNEEBONE, G., *Mathematical logic and the foundations of mathematics,* Van Nostrand, London, 1.963. (A-3.997)

[10] MOSTOWSKI, A., *Thirty years of foundational studies,* Blackwell, Oxford, 1.966.

[11] SCOTT, D. (ed.), *Axiomatic set theory I,* American Mathematical Society, Providence, R. I., 1.971.

[12] HILBERT, D. y ACKERMANN, W., *Principles of mathematical logic,* 2nd edn, Chelsea, New York, 1.950.(A-66)

[13] KALISH, D. y MONTAGUE, R., *Logic: techniques of formal reasoning,* Harcourt Brace and World, New York, 1.964.(A-2.494)

[14] LYNDON, R., *Notes on logic,* Van Nostrand, Princeton, 1.966. (A-2.347)

[15] BETH, E., *Formal methods,* Reidel, Dordrecht, 1.962. (A-2.691)

[16] CHURCH, A., *Introduction to mathematical logic I,* Princeton University Press, Princeton, 1.956. (A-361 y A-6.611)

[17] GÖDEL, K., 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia und verwandter Systeme I'.{traducido en Davis [39] y van Heijenoort [7]} (A-5.537)

[18] HILBERT, D. y BERNAYS, P., *Grundlagen der Mathematik,* 2 vols, 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 1.968, 1.970.

[19] KLEENE, S., *Introduction to metamathematics*, Van Nostrand, London, 1.963. (A-199; en castellano: A-4028)

[20] SMULLYAN, R., *First-order logic*, Springer-Verlag, Berlin, 1.968. (A-3.278)

[21] PRAWITZ, D., *Natural deduction, a proof-theoretic study,* Almqvist and Wiskell, Stockholm, 1.965. (A-3.168)

[22] SCHÜTTE, K., *Beweistheorie*, Srpinger-Verlag, Berlin, 1.960. (A-2.029)

[23] KREISEL, G., 'A survey of proof theory', *Journal of Symbolic Logic*, 33, 321-388, 1.968.

[24] FENSTAD, J. (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium,*North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-3.879)

[25] RASIOWA, H. y SIKORSKI, R., *The mathematics of metamathematics*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1.963. (A-1.486)

[26] ASSER, G., 'Theorie der logischen Auswahlfunktionen', *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik,* 3, 30-68, 1.959.

[27] HEYTING, A., *Intuitionism*, 2nd edn, North-Holland, Amsterdam, 1.966. (A-65)

[28] VAN ROOTSELAAR, B. y STAAL, J. (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science III*, North-Holland, Amsterdam, 1.968.

[29] KINO, A., MYHILL, J. y VESLEY, R. (eds.), *Intuitionism and proof theory*, North-Holland, Amsterdam, 1.970.

[30] BISHOP, E., *Foundations of constructive analysis,* McGraw-Hill, New York, 1.967.

[31] LORENZEN, P., *Differential and integral*, University of Texas Press, Austin, 1.971.

[32] DAVIS, M., *Computability and unsolvability*, McGraw-Hill, New Yrok, 1.958.

[33] ROGERS, H. Jr., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill, New York, 1.967. (A-2.617).

[34] PÉTER, R., *Recursive functions*, 3rd edn, Academic Press, New York, 1.967. (A-2.502).

[35] GOODSTEIN, R., *Recursive number theory,* North-Holland, Amsterdam, 1.957. (A-59)

[36] SMULLYAN, R., *Theory of formal systems*, Annals of Mathematics Studies 47, rev. edn, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1.961. (A-1.052)

[37] HERMES, H., *Enumerability, decidability, compatibility*, Springer-Verlag, Berlin, 1.965. (A-2.247).

[38] SHEPHERDSON, J. y STURGIS, H., 'Computability of recursive functions', *Association for Computing Machinery. Journal,* 10, 217-255, 1.963.

[39] DAVIS, M. (ed.), *The undecidable*, Raven Press, Hewlett, N.Y., 1.965. (A-2.306)

[40] ARBIB, M., *Theories of abstract automata*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1.969. (A-3.377)

[41] GINSBURG, S., *The mathematical theory of context-free languages*, McGraw-Hill, New York, 1.966. (A-3.286)

[42] CONWAY, J., *Regular algebra and finite machines*, Chapman and Hall, London, 1.971.

[43] GROSS, M. y LENTIN, A., *Introduction to formal grammars*, Springer-Verlag, Berlin, 1.970.

[44] MANNA, Z., *Mathematical theory of computation*, McGraw-Hill, New York, 1.974.

[45] HINDLEY, J., LERCHER, B. y SELDIN, J., *Introduction to combinatory logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1.972.

[46] SHOENFIELD, J., *Degrees of unsolvability*, North-Holland, Amsterdam, 1.971.

[47] YATES, C., *A new approach to degree theory*

[48] BARWISE, K., *Admissible sets,* Springer-Verlag, Berlin, 1.975. (A-5.102)

[49] MOSCHOVAKIS, Y., *Elementary induction on abstract structures,* North-Holland, Amsterdam, 1.974. (A-4.103)

[50] FENSTAD, J. y HINMANN, P. (eds.), *Generalized recursion theory,* North-Holland, Amsterdam, 1.973.

[51] MAZUR, S., 'Computable analysis', *Rozprawy Matematyczne,* 33, 1-111, 1.963.

[52] CROSSLEY, J. y NERODE, A., *Combinatorial functors,* Springer-Verlag, Berlin, 1.974.

[53] DAVIS, M., 'Hilbert's tenth problem is unsolvable', *American Mathematical Monthly,* 80, 233-269, 1.973.

[54] SUPPES, P. *et al.* (eds), *Logic, methodology and philosophy of science IV,* North-Holland, Amsterdam, 1.973.

[55] ROTMAN, J., *The theory of groups,* 2nd edn, Allyn and Bacon, Boston, 1.973. (A-2.675)

[56] BOONE, W., CANNONITO, F. y LYNDON, R. (eds.), *Word problems*, North-Holland, Amsterdam,1.973. (A-4.091)
[57] MILLER, C., III, *On group-theoretic decision problems and their classification*, Annals of Mathematics Studies 68, Princeton University Press, Princeton, 1.971. (A-5.493)
[58] ERSHOV, Y. *et al*, 'Elementary theories', *Russian Mathematical Surveys*, 20(4), 35-106, 1.965.
[59] TARSKI, A., MOSTOWSKI, A. y ROBINSON, R., *Undecidable theories*, North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-149)
[60] BAR-HILLEL, Y. (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1.964 International Congress*, North-Holland, Amsterdam, 1.965.
[61] ACKERMANN, W., *Solvable cases of the decision problem,* North-Holland, Amsterdam, 1.954. (A-1.024 y A-1.599)
[62] AX, J., 'The elementary theory of finite fields', *Annals of Mathematics,* 88, 239-271, 1.968.
[63] COHEN, P., 'Decision procedures for real and *p*-adic fields', *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22, 131-151, 1.969.
[64] RABIN, M., 'Decidability of second-order theories and automata on infinite trees', *American Mathematical Society. Transactions,* 141, 1-35, 1.969.
[65] SIEFKES, D., *Büchi's monadic second order successor arithmetic*, Lecture Notes in Mathematics 120, Springer-Verlag, Berlin, 1.970. (B-574)
[66] REINHARDT, W., 'Ackermann's set theory equals ZF', *Annals of Mathematical Logic*, 2, 189-249, 1.970.
[67] QUINE, W., *Set theory and its logic*, 2nd edn, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1.972. (A-1.798)
[68] FRAENKEL, A., BAR-HILLEL, Y. y LEVY, A., *Foundations of set theory*, 2nd edn, North-Holland, Amsterdam, 1.973. (A-494)
[69] BERNAYS, P. y FRAENKEL, A., *Axiomatic set theory*, North-Holland, Amsterdam,1.958. (A-495)
[70] SUPPES, P., *Axiomatic set theory*, Van Nostrand, Princeton, 1.960. (A-886)
[71] MONK, J., *Introduction to set theory*, McGraw-Hill, New York, 1.969. (A-4.353)
[72] TAKEUTI, G. y ZARING, W., *Introduction to axiomatic set theory*, Springer-Verlag, New York, 1.971.
[73] SIERPINSKI, W., *Cardinal and ordinal numbers,* Polska Akademia Nauk, Warsaw, 1.965. (A-1.790 y A-2.512)
[74] BACHMANN, H., *Transfinite Zahlen,* 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 1.967. (A-541)
[75] KRIVINE, J., *Introduction to axiomatic set theory*, Reidel, Dordrecht, 1.971.
[76] FELGNER, U., *Models of ZF-set theory*, Lectures Notes in Mathematics 223, Springer-Verlag, 1.971.
[77] JECH, T., *Lectures in set theory*, Lectures Notes in Mathematics 217, Springer-Verlag, Berlin, 1.971.
[78] JECH, T., *The axiom of choice*, North-Holland, Amsterdam, 1.973. (A-4.096)
[79] MOSTOWSKI, A., *Constructible sets with applications*, North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-3.670)

[80] DEVLIN, K., *Aspects of constructibility*, Lectures Notes in Mathematics 354, Springer-Verlag, Berlin, 1.973. (LNM 354, B-574)

[81] MARTIN, D y SOLOVAY, R., 'Internal Cohen extensions', *Annals of Mathematical Logic*, 2, 143-178, 1.970.

[82] DRAKE, F., *Set theory: an introduction to large cardinals*, North-Holland, Amsterdam, 1.974. (A-4.093)

[83] KURATOWSKI, K., *Topology*, 2 vols, Academic Press, New York, 1966, 1.968.(v1: A-2.331 (en castellano), A-535, A-6.229 y v2: A-6.228)

[84] DEVLIN, K. y JOHNSBRATEN, H., *The Souslin problem*, Lecture Notes in Mathematics 405, Springer-Verlag, Berlin, 1.974. (LNM 405, B-574)

[85] CHANG, C. y KEISLER, H., *Model theory*, North-Holland, Amsterdam, 1.973. (A-4.094)

[86] BELL, J. y SLOMSON, A., *Models and ultraproducts*, 2nd edn, North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-3.878)

[87] MORLEY, M. (ed.), *Studies in model theory*, Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y., 1.973. (A-5.461)

[88] SHELAH, S., *Stability and the number of non-isomorphic models*, North-Holland, Amsterdam, 1.977.

[89] SHELAH, S., 'The lazy model-theoreticians guide to stability', *Logique et Analyse*, 71-72, 241-308, 1.975.

[90] HIRSCHFELD, J. y WHEELER, W., *Forcing, arithmetic and division rings*, Lecture Notes in Mathematics 454, Springer-Verlag, Berlin, 1.975. (LNM 454)

[91] MACHOVER, M. y HIRSCHFELD, J., *Lectures on non-standard analysis*, Lecture Notes in Mathematics 94, Springer-Verlag, Berlin, 1.969.

[92] LUXEMBURG, W. y ROBINSON, A. (eds.), *Contributions to non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1.972.

[93] ROBINSON, A., *Non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1.966. (A-2.798)

[94] DICKMANN, M., *Large infinitary languages: model theory*, North-Holland, Amsterdam, 1.975.

[95] KEISLER, H., *Model theory for infinitary logic: logic with countable conjunctions and finite quantifiers*, North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-4087)

[96] BARWISE, K., 'Axioms for abstract model theory', *Annals of Mathematical Logic*, 7, 221-226, 1.974.

[96a] MAKOWSKY, J., SHELAH, S. y STAVI, J., 'Δ-logics and generalized quantifiers', *Annals of Mathematical Logic*, 10, 155-192, 1.976.

[97] ARTIN, M., GROTHENDIECK, A. y VERDIER, J., *Théorie des topos et cohomologies étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics 269, Springer-Verlag, Berlin, 1.972.

[98] JOHNSTONE, P., *Topos theory*, London Mathematical Society Monographs, Academic Press, London, 1.977. (A-5.154)

[98a] LAWVERE, F., MAURER, C. y WRAITH, G., *Model theory and topoi*, Lecture Notes in Mathematics 445, Springer, Berlin, 1.975. (LNM 445)

[99] DAIGNEAULT, A. (ed.), *Studies in algebraic logic*, Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y., 1.974. (A-5.462)

[100] COHN, P., *Universal algebra*, Harper and Row, New York, 1.965. (A-2.241)

[101] GRÄTZER, G., *Universal algebra*, Van Nostrand, Princeton, 1.968.(A-3.648)
[102] JÓNSSON, B., *Topics in universal algebra,* Lecture Notes in Mathematics 250, Springer-Verlag, Berlin, 1.972. (LNM 250)
[102a] TAYLOR, W., 'Equational logic'
[103] MAL'CEV, A., *Algebraic systems,* Springer-Verlag, Berlin, 1.973. (A-4.705)
[104] MaCLANE, S., *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1.971. (A-4.553)
[105] SCHUBERT,H., *Categories*, Springer-Verlag, Berlin, 1.972.
[106] GRÄTZER, G., *Lattice theory*, Freeman, San Fransisco, 1.971. (A-4.798)
[107] SIKORSKI, R., *Boolean algebras,* Springer-Verlag, Berlin, 1.960. (A-2.113)
[108] COMFORT, W. y NEGREPONTIS, S., *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag, New York, 1.974.
[109] ERDÖS, P. y RADO, R., 'A partition calculus in set theory', *American Mathematical Society. Bulletin*, 62, 427-489, 1.956.
[110] HENKIN, L. (ed.), *Proceedings of the Tarski Symposium*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.974.
[111] JECH, T., 'Trees', *Journal of Symbolic Logic*, 36, 1-14, 1.971.

Souslin, Lusin), la consideraron investigando la estructura de la recta real- debemos a ellos , entre otras, las nociones de conjunto de Borel (o borelianos), medida de Lebesgue, categoría de Baire (cf. sección 14.2). Pero estos hombres también tenían su lado constructivista: ellos eran proclives a creer que un conjunto de números reales debe ser definible para poder existir. Como resultado su trabajo consiste, en su mayor parte, en una teoría de definiciones, y definiciones inductivas en particular. Todo este trabajo temprano está compendiado en el trabajo enciclopédico de Kuratowski [83].

Para una vista moderna de las definiciones inductivas, la cual absorbe simultáneamente una gran parte de la teoría descriptiva de conjuntos y generaliza la teoría de la recursión (cf. sección 6.5), ver Moschovakis [49] y Barwise [48].

Métodos nuevos han conducido a nuevos resultados en algunos de los viejos problemas. Un ejemplo particularmente influyente fue el *problema de Souslin.* Souslin se preguntaba cuando existe un conjunto ordenado densamente completo tal que todo conjunto de intervalos abiertos disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable, pero ningún subconjunto numerable es denso. Ahora sabemos que existe un tal conjunto si V=L pero no si vale el Axioma de Martin para ω_1: ver Devlin y Johnsbräten [84] para un relato pormenorizado. Para nuevos hechos sobre viejas cuestiones, ver Martin en referencia 5.

6.9. TEORIA DE MODELOS:

La teoría de modelos es la teoría de las estructuras matemáticas y sus propiedades. La teoría de modelos de primer orden trata con propiedades *elementales*, es decir, aquellas que pueden ser expresadas por medio de conjuntos de afirmaciones de primer orden (cf. sección 6.3). Por ejemplo, la propiedad de ser un grupo es elemental, puesto que los axiomas de grupos son afirmaciones de primer orden. Un conjunto de afirmaciones se denomina *teoría*; una estructura se dice *modelo* de una teoría si toda afirmación en la teoría es cierta en el modelo. La teoría de modelos ha desarrollado una batería de técnicas para construir modelos de teorías, y para asegurar que los modelos construidos son grandes o pequeños, gordos o delgados, rígidos u homogéneos, como la ocasión lo demande.

Hay un libro excelente de la teoría de modelos de primer orden, el de Chang y Keisler [85]. La primera mitad del de Bell y Slomson [86] es una introducción leíble sobre el tema. Ambos libros consideran *ultraproductos*, los cuales son uno de los métodos más útiles de construcción de modelos (usados, por ejemplo, por Ax y Kochen en su demostración parcial de la conjetura de Artin sobre cuerpos p-ádicos, como se describe en el capítulo 5 de la referencia 86). El otro método más útil es el de los *indiscernibles* o modelos de *Ehrenfeucht-Mostowski*; esto está en la referencia 86 pero no en la 87. El pequeño survey de teoría de modelos editado por Morley [87] es bueno para orientación, y da nuevas referencias.

Desde que se escribió la referencia 86, hubo dos desarrollos principales en teoría de modelos de primer-orden. El primero es la *teoría de estabilidad*, principalmente por Shelah [88], [89]. Esta teoría trata de clasificar teorías en términos de la complejidad de sus modelos; esto conduce a algunos resultados sorprendentes (ambos positivos o negativos) sobre un número de modelos no isomórficos de un tamaño dado que puede tener la teoría.

El segundo desarrollo es *model-theoretic forcing* (en dos formas, finita e infinita) el cual proviene de determinados esfuerzos del fallecido Abraham Robinson para capturar dentro de la teoría de modelos la noción de clausura algebraica. La aparición de los *modelos genéricos* de Robinson coincidieron providencialmente con desarrollos en teorías de grupos y teoría de cuerpos inclinados (skew); ver el trabajo de Keisler en referencia 88 para un resumen rápido de la aplicación a teoría de grupos y Hirschfeld y Wheeler [90] para un relato más completo del forcing junto con el trabajo en cuerpos inclinados.

Otra contribución de Robinson es el *análisis no-estandard*, el cual utiliza métodos de la teoría de modelos para simplificar argumentos analíticos y topológicos. Quizá el ejemplo más simple del método de Robinson es el de sumar infinitesimales a la recta real de tal forma que la noción de "muy pequeño" puede utilizarse como un concepto matemático preciso. Ver la introducción al tema de Machover y Hirschfeld [91], o el survey de Bernstein en referencia 88, o la colección de ensayos editados por Luxemburg y Robinson [92]. El trabajo de Robinson [93] es básico pero difícil de leer.

6.10. GENERALIZACIONES DE LA TEORIA DE MODELOS:

En los últimos 40 años se pudo ver claramente que muchos de los teoremas clásicos de la teoría de modelos de primer-orden permanecían válidos cuando se permitía que las afirmaciones consideradas sean infinitamente largas, siempre que fueran impuestas otras restricciones. Esto dio origen a la teoría de modelos de *lenguajes infinitos*. Dickmann [94] es una buena referencia general y Keisler [95] es un relato detallado de un lenguaje infinito particular. En los primeros tiempos, el interés se centró en las conecciones con grandes cardinales (cf. sección 6.7) y combinatoria infinita (cf. sección 6.12). Más recientemente, los lenguajes infinitos han sido una herramienta útil para comprender algunos conceptos del álgebra; ver Barwise en referencia 88.

Pocos de los teoremas más útiles de la teoría de modelos de primer-orden (como el teorema de compacidad y el teorema de definibilidad de Beth) han resistido la generalización a lenguajes infinitos. Los lógicos se desquitaron aislando axiomáticamente aquellos lenguajes que permiten buenas generalizaciones de esos teoremas; el resultado es la *teoría abstracta de modelos*; ver Barwise [96] y Makowsky, Shelah y Stavi [96a].

En otra dirección, el éxito de Lawvere en llevar el álgebra universal (cf. sección 6.11) a la teoría de categorías ha motivado a muchas personas a tratar de hacer lo mismo con teoría de modelos. El marco usual es un *topo elemental*. Topos elementales son una generalización de la categoría de prehaces de los geómetras algebraicos de la escuela de Grothendieck. Para topos Grothendieck ver Artin, y Grothendieck Verdier [97]; para topos elementales y sus relaciones con la teoría de conjuntos, ver Johnstone [98]; para teoría de modelos con teoría de categorías, ver Lawvere, Mauser y Wraith [98a]. Daigneault [99] contiene otros puntos de vista "algebraicos" de la lógica.

6.11. ALGEBRA UNIVERSAL:

El álgebra universal estudia aquellos hechos que son comunes a todas o a la mayoría de las clases de estructuras que se estudian en álgebra. Por ejemplo, muchas clases familiares de estructuras están definidas por ecuaciones; los grupos son un ejemplo, los anillos otro. Un teorema de Birkhoff caracteriza aquellas clases como las que son cerradas bajo isomorfismo, subestructura, producto e imagen homomórfica. Esto es un teorema típico de álgebra universal. Cohn [100] es una buena referencia, y Grätzer [101] es también buena con una bibliografía comprensible. Jónsson [102] introduce algún trabajo reciente. Ver también Taylor [102a].

En lo que hace a tratamiento de clases definibles de estructuras, el álgebra universal muestra una tendencia a ser absorbida en la teoría de modelos; ver, por ejemplo, Mal'cev [103]. En lo que hace al tratamiento de clases definidas por ecuaciones, el álgebra universal ha sido ocultada en gran medida por la teoría de categorías; ver, por ejemplo, MacLane [104] *passim*, o capítulos 11 y 18 de Schubert [105]. Pero hay también partes del tema que tienen vida por derecho propio. Uno es la teoría de reticulados; ver Grätzer [106]. Aún dentro de la teoría de reticulados, las álgebras Booleanas son un tema auto-contenido; ver Sikorski [107] y Comfort y Negrepontis [108].

La revista *Algebra Universalis* (Birkhäuser, Basel, 1.971-   ) está dedicada al álgebra universal.

6.12. COMBINATORIA NO FINITA:

El campo de la combinatoria no finita, tiene que ver con el estudio de familias infinitas de conjuntos, es solamente una rama marginal de lógica, aunque métodos de la teoría de modelos (cf. sección 6.9) han probado ser útiles en años recientes. Los trabajos de Kunen y Devlin en Barwise [5] proveen un rápido sumario.

Mucho trabajo se ha hecho alrededor del *cálculo de particiones*, el cual parece generalizar el teorema de Ramsey sobre grafos. La mayoría de los hechos conocidos están en una u otra forma en Ërdos y Rado [109] y Ërdos y Hajnal en referencia 11 y 110. Las últimas dos referencias también cubren otras cuestiones combinatorias. Algunos cardinales grandes (cf. sección 6.7) están definidos por sus propiedades particionísticas (de partición); estas incluyen la *compacidad débil* y los *cardinales de Ramsey*, que tienen implicaciones en lógica infinitaria.

Arboles, es decir, ordenes parciales donde los predecesores de cualquier elemento están bien ordenados, han provisto tanto problemas como métodos en combinatoria; Jech [111] es un survey preciso desde el ángulo de la teoría de conjuntos. Los árboles se conectan con *ultrafiltros*, ver Comfort y Negrepontis [108].

Jensen probó que estos principios combinatorios útiles valen en el universo constructible; ver Devlin [80] para los principios $\diamond$ y $\square$. Aunque estos principios pueden no ser ciertos en sentido absoluto, pueden ser usados para probar que algunas conjeturas viejas en topología y álgebra no son refutables sobre la base de las teorías de conjuntos aceptadas.

REFERENCIAS:

[1] SHOENFIELD, J., *Mathematical logic,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.967. (A-3.628).

[2] ENDERTON, H., *A mathematical introduction to logic,* Academic Press, New York, 1.972.

[3] MENDELSON, E., *Introduction to mathematical logic,* Van Nostrand, Princeton, 1.964. (A-6.732, A-1.581 y A-6.612).

[4] CROSSLEY, J. *et al, What is mathematical logic?*, Oxford University Press, Oxford, 1.972.
[5] BARWISE, K. (ed.), *Handbook of mathematical logic,* North-Holland, Amsterdam, 1.977. (A-4.929)
[6] BENACERRAF, P. y PUTNAM, H., *Philosophy of mathematics,* Blackwell, Oxford, 1.964.
[7] van HEIJENOORT, J., *From Frege to Gödel,* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1.967.
[8] HINTIKKA, J. (ed.), *The philosophy of mathematics,* Oxford University Press, Oxford, 1.969.
[9] KNEEBONE, G., *Mathematical logic and the foundations of mathematics,* Van Nostrand, London, 1.963. (A-3.997)
[10] MOSTOWSKI, A., *Thirty years of foundational studies,* Blackwell, Oxford, 1.966.
[11] SCOTT, D. (ed.), *Axiomatic set theory I,* American Mathematical Society, Providence, R. I., 1.971.
[12] HILBERT, D. y ACKERMANN, W., *Principles of mathematical logic,* 2nd edn, Chelsea, New York, 1.950.(A-66)
[13] KALISH, D. y MONTAGUE, R., *Logic: techniques of formal reasoning,* Harcourt Brace and World, New York, 1.964.(A-2.494)
[14] LYNDON, R., *Notes on logic,* Van Nostrand, Princeton, 1.966. (A-2.347)
[15] BETH, E., *Formal methods,* Reidel, Dordrecht, 1.962. (A-2.691)
[16] CHURCH, A., *Introduction to mathematical logic I,* Princeton University Press, Princeton, 1.956. (A-361 y A-6.611)
[17] GÖDEL, K., 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia und verwandter Systeme I'.{traducido en Davis [39] y van Heijenoort [7]} (A-5.537)
[18] HILBERT, D. y BERNAYS, P., *Grundlagen der Mathematik,* 2 vols, 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 1.968, 1.970.
[19] KLEENE, S., *Introduction to metamathematics*, Van Nostrand, London, 1.963. (A-199; en castellano: A-4028)
[20] SMULLYAN, R., *First-order logic*, Springer-Verlag, Berlin, 1.968. (A-3.278)
[21] PRAWITZ, D., *Natural deduction, a proof-theoretic study,* Almqvist and Wiskell, Stockholm, 1.965. (A-3.168)
[22] SCHÜTTE, K., *Beweistheorie*, Srpinger-Verlag, Berlin, 1.960. (A-2.029)
[23] KREISEL, G., 'A survey of proof theory', *Journal of Symbolic Logic*, 33, 321-388, 1.968.
[24] FENSTAD, J. (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*,North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-3.879)
[25] RASIOWA, H. y SIKORSKI, R., *The mathematics of metamathematics*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1.963. (A-1.486)
[26] ASSER, G., 'Theorie der logischen Auswahlfunktionen', *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 3, 30-68, 1.959.
[27] HEYTING, A., *Intuitionism*, 2nd edn, North-Holland, Amsterdam, 1.966. (A-65)
[28] VAN ROOTSELAAR, B. y STAAL, J. (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science III*, North-Holland, Amsterdam, 1.968.

[29] KINO, A., MYHILL, J. y VESLEY, R. (eds.), *Intuitionism and proof theory*, North-Holland, Amsterdam, 1.970.
[30] BISHOP, E., *Foundations of constructive analysis,* McGraw-Hill, New York, 1.967.
[31] LORENZEN, P., *Differential and integral*, University of Texas Press, Austin, 1.971.
[32] DAVIS, M., *Computability and unsolvability*, McGraw-Hill, New Yrok, 1.958.
[33] ROGERS, H. Jr., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill, New York, 1.967. (A-2.617).
[34] PÉTER, R., *Recursive functions*, 3rd edn, Academic Press, New York, 1.967. (A-2.502).
[35] GOODSTEIN, R., *Recursive number theory,* North-Holland, Amsterdam, 1.957. (A-59)
[36] SMULLYAN, R., *Theory of formal systems*, Annals of Mathematics Studies 47, rev. edn, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1.961. (A-1.052)
[37] HERMES, H., *Enumerability, decidability, compatibility*, Springer-Verlag, Berlin, 1.965. (A-2.247).
[38] SHEPHERDSON, J. y STURGIS, H., 'Computability of recursive functions', *Association for Computing Machinery. Journal,* 10, 217-255, 1.963.
[39] DAVIS, M. (ed.), *The undecidable*, Raven Press, Hewlett, N.Y., 1.965. (A-2.306)
[40] ARBIB, M., *Theories of abstract automata*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1.969. (A-3.377)
[41] GINSBURG, S., *The mathematical theory of context-free languages*, McGraw-Hill, New York, 1.966. (A-3.286)
[42] CONWAY, J., *Regular algebra and finite machines*, Chapman and Hall, London, 1.971.
[43] GROSS, M. y LENTIN, A., *Introduction to formal grammars*, Springer-Verlag, Berlin, 1.970.
[44] MANNA, Z., *Mathematical theory of computation*, McGraw-Hill, New York, 1.974.
[45] HINDLEY, J., LERCHER, B. y SELDIN, J., *Introduction to combinatory logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1.972.
[46] SHOENFIELD, J., *Degrees of unsolvability*, North-Holland, Amsterdam, 1.971.
[47] YATES, C., *A new approach to degree theory*
[48] BARWISE, K., *Admissible sets,* Springer-Verlag, Berlin, 1.975. (A-5.102)
[49] MOSCHOVAKIS, Y., *Elementary induction on abstract structures,* North-Holland, Amsterdam, 1.974. (A-4.103)
[50] FENSTAD, J. y HINMANN, P. (eds.), *Generalized recursion theory,* North-Holland, Amsterdam, 1.973.
[51] MAZUR, S., 'Computable analysis', *Rozprawy Matematyczne,* 33, 1-111, 1.963.
[52] CROSSLEY, J. y NERODE, A., *Combinatorial functors,* Springer-Verlag, Berlin, 1.974.
[53] DAVIS, M., 'Hilbert's tenth problem is unsolvable', *American Mathematical Monthly,* 80, 233-269, 1.973.
[54] SUPPES, P. *et al.* (eds), *Logic, methodology and philosophy of science IV,* North-Holland, Amsterdam, 1.973.
[55] ROTMAN, J., *The theory of groups,* 2nd edn, Allyn and Bacon, Boston, 1.973. (A-2.675)

[56] BOONE, W., CANNONITO, F. y LYNDON, R. (eds.), *Word problems*, North-Holland, Amsterdam,1.973. (A-4.091)
[57] MILLER, C., III, *On group-theoretic decision problems and their classification*, Annals of Mathematics Studies 68, Princeton University Press, Princeton, 1.971. (A-5.493)
[58] ERSHOV, Y. *et al*, 'Elementary theories', *Russian Mathematical Surveys*, 20(4), 35-106, 1.965.
[59] TARSKI, A., MOSTOWSKI, A. y ROBINSON, R., *Undecidable theories*, North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-149)
[60] BAR-HILLEL, Y. (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1.964 International Congress*, North-Holland, Amsterdam, 1.965.
[61] ACKERMANN, W., *Solvable cases of the decision problem,* North-Holland, Amsterdam, 1.954. (A-1.024 y A-1.599)
[62] AX, J., 'The elementary theory of finite fields', *Annals of Mathematics,* 88, 239-271, 1.968.
[63] COHEN, P., 'Decision procedures for real and *p*-adic fields', *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 22, 131-151, 1.969.
[64] RABIN, M., 'Decidability of second-order theories and automata on infinite trees', *American Mathematical Society. Transactions,* 141, 1-35, 1.969.
[65] SIEFKES, D., *Büchi's monadic second order successor arithmetic*, Lecture Notes in Mathematics 120, Springer-Verlag, Berlin, 1.970. (B-574)
[66] REINHARDT, W., 'Ackermann's set theory equals ZF', *Annals of Mathematical Logic*, 2, 189-249, 1.970.
[67] QUINE, W., *Set theory and its logic*, 2nd edn, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1.972. (A-1.798)
[68] FRAENKEL, A., BAR-HILLEL, Y. y LEVY, A., *Foundations of set theory*, 2nd edn, North-Holland, Amsterdam, 1.973. (A-494)
[69] BERNAYS, P. y FRAENKEL, A., *Axiomatic set theory*, North-Holland, Amsterdam,1.958. (A-495)
[70] SUPPES, P., *Axiomatic set theory*, Van Nostrand, Princeton, 1.960. (A-886)
[71] MONK, J., *Introduction to set theory*, McGraw-Hill, New York, 1.969. (A-4.353)
[72] TAKEUTI, G. y ZARING, W., *Introduction to axiomatic set theory*, Springer-Verlag, New York, 1.971.
[73] SIERPINSKI, W., *Cardinal and ordinal numbers,* Polska Akademia Nauk, Warsaw, 1.965. (A-1.790 y A-2.512)
[74] BACHMANN, H., *Transfinite Zahlen,* 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 1.967. (A-541)
[75] KRIVINE, J., *Introduction to axiomatic set theory*, Reidel, Dordrecht, 1.971.
[76] FELGNER, U., *Models of ZF-set theory*, Lectures Notes in Mathematics 223, Springer-Verlag, 1.971.
[77] JECH, T., *Lectures in set theory*, Lectures Notes in Mathematics 217, Springer-Verlag, Berlin, 1.971.
[78] JECH, T., *The axiom of choice*, North-Holland, Amsterdam, 1.973. (A-4.096)
[79] MOSTOWSKI, A., *Constructible sets with applications*, North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-3.670)

[80] DEVLIN, K., *Aspects of constructibility*, Lectures Notes in Mathematics 354, Springer-Verlag, Berlin, 1.973. (LNM 354, B-574)

[81] MARTIN, D y SOLOVAY, R., 'Internal Cohen extensions', *Annals of Mathematical Logic*, 2, 143-178, 1.970.

[82] DRAKE, F., *Set theory: an introduction to large cardinals*, North-Holland, Amsterdam, 1.974. (A-4.093)

[83] KURATOWSKI, K., *Topology*, 2 vols, Academic Press, New York, 1966, 1.968.(v1: A-2.331 (en castellano), A-535, A-6.229 y v2: A-6.228)

[84] DEVLIN, K. y JOHNSBRATEN, H., *The Souslin problem*, Lecture Notes in Mathematics 405, Springer-Verlag, Berlin, 1.974. (LNM 405, B-574)

[85] CHANG, C. y KEISLER, H., *Model theory*, North-Holland, Amsterdam, 1.973. (A-4.094)

[86] BELL, J. y SLOMSON, A., *Models and ultraproducts*, 2nd edn, North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-3.878)

[87] MORLEY, M. (ed.), *Studies in model theory*, Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y., 1.973. (A-5.461)

[88] SHELAH, S., *Stability and the number of non-isomorphic models*, North-Holland, Amsterdam, 1.977.

[89] SHELAH, S., 'The lazy model-theoreticians guide to stability', *Logique et Analyse*, 71-72, 241-308, 1.975.

[90] HIRSCHFELD, J. y WHEELER, W., *Forcing, arithmetic and division rings*, Lecture Notes in Mathematics 454, Springer-Verlag, Berlin, 1.975. (LNM 454)

[91] MACHOVER, M. y HIRSCHFELD, J., *Lectures on non-standard analysis*, Lecture Notes in Mathematics 94, Springer-Verlag, Berlin, 1.969.

[92] LUXEMBURG, W. y ROBINSON, A. (eds.), *Contributions to non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1.972.

[93] ROBINSON, A., *Non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1.966. (A-2.798)

[94] DICKMANN, M., *Large infinitary languages: model theory*, North-Holland, Amsterdam, 1.975.

[95] KEISLER, H., *Model theory for infinitary logic: logic with countable conjunctions and finite quantifiers*, North-Holland, Amsterdam, 1.971. (A-4087)

[96] BARWISE, K., 'Axioms for abstract model theory', *Annals of Mathematical Logic*, 7, 221-226, 1.974.

[96a] MAKOWSKY, J., SHELAH, S. y STAVI, J., 'Δ-logics and generalized quantifiers', *Annals of Mathematical Logic*, 10, 155-192, 1.976.

[97] ARTIN, M., GROTHENDIECK, A. y VERDIER, J., *Théorie des topos et cohomologies étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics 269, Springer-Verlag, Berlin, 1.972.

[98] JOHNSTONE, P., *Topos theory*, London Mathematical Society Monographs, Academic Press, London, 1.977. (A-5.154)

[98a] LAWVERE, F., MAURER, C. y WRAITH, G., *Model theory and topoi*, Lecture Notes in Mathematics 445, Springer, Berlin, 1.975. (LNM 445)

[99] DAIGNEAULT, A. (ed.), *Studies in algebraic logic*, Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y., 1.974. (A-5.462)

[100] COHN, P., *Universal algebra*, Harper and Row, New York, 1.965. (A-2.241)

[101] GRÄTZER, G., *Universal algebra*, Van Nostrand, Princeton, 1.968.(A-3.648)
[102] JÓNSSON, B., *Topics in universal algebra,* Lecture Notes in Mathematics 250, Springer-Verlag, Berlin, 1.972. (LNM 250)
[102a] TAYLOR, W., 'Equational logic'
[103] MAL'CEV, A., *Algebraic systems,* Springer-Verlag, Berlin, 1.973. (A-4.705)
[104] MaCLANE, S., *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1.971. (A-4.553)
[105] SCHUBERT,H., *Categories*, Springer-Verlag, Berlin, 1.972.
[106] GRÄTZER, G., *Lattice theory*, Freeman, San Fransisco, 1.971. (A-4.798)
[107] SIKORSKI, R., *Boolean algebras,* Springer-Verlag, Berlin, 1.960. (A-2.113)
[108] COMFORT, W. y NEGREPONTIS, S., *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag, New York, 1.974.
[109] ERDÖS, P. y RADO, R., 'A partition calculus in set theory', *American Mathematical Society. Bulletin*, 62, 427-489, 1.956.
[110] HENKIN, L. (ed.), *Proceedings of the Tarski Symposium*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.974.
[111] JECH, T., 'Trees', *Journal of Symbolic Logic*, 36, 1-14, 1.971.

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

LOGICA:

1. AUMIAUX, M., *Logique binaire et ordinateurs*, Masson, 1.974. (A-5.295)
2. BAYER, R. (ed.), *XVI Congrés International de Philosophie des sciences. II Logique*, 1.951. (A-214)
3. BELL, J. y MACHOVER, M., *A course in Mathematical Logic*, North-Holland, 1.977. (A-4.610)
4. BETH, E., *Las paradojas de la lógica*, Cuadernos "Teorema", 1.975. (A-4.030)
5. BOCHENSKI, J., *Lógica y antología*, Cuadernos "Teorema", 1.977. (A-4.474)
6. BOLZANO, B., *Paradoxes of the infinite*, Routledge & Kegan, 1.950. (A-2.008)
7. COPI, I., *Symbolic logic*, MacMillan, 1.954. (A-373)
8. CUNDY, H. y ROLLETT, A., *Mathematical models*, Oxford, 1.951. (A-1.893)
9. DA COSTA, N., *O Circulo de Viena*, Ediçao "Prata de Casa", 1.952. (A-256)
10. DEQUOY, N., *Axiomatique intuitionniste saus négation de la Géométrie Projective*, Gauthiers-Villars, 1.955. (A-45)
11. DUBARLE, P., *Initiation a la logique*, Gauthiers-Villars, 1.957. (A-46)
12. FEIGENBAUM, E. y FELDMAN, J., *Computers and thought*, McGraw-Hill, 1.963. (A-3.704)
13. FEYERABEND, P., *Cómo ser un buen empirista*, Cuadernos "Teorema", 1.976. (A-4.358)
14. FRÉCHET, M., *Les Mathématiques et le Concret*, Presses Universitaires de France, 1.955. (A-1.962)
15. GARRIDO, M., *Lógica simbólica*, Editorial Temas, 1.974. (A-4.029)
16. GENTZEN, G., *Recherches sur la deduction logique*, Presses Universitaires de France, 1.955. (A-696)
17. GÖDEL, K., *The Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton University Press, 1.940. (A-211)
18. GÖDEL, K., *Obras Completas*, Alianza Editorial, 1.981. (A-5.115)
19. HAMILTON, A., *Logic for Mathematicians*, Cambridge Universtity Press, 1.978. (A-6.301)
20. HIRST, K. y RHODES, F., *Conceptual models in Mathematics sets, logic and probability*, Allen & Unwin LTD, 1.971. (A-4.804)
21. HUNTINGTON, E., *The Continuum and other types of serial order with an introduction to autor's*, Dover, 1.917. (A-1.980)
22. JAGER, R., *Essays in logic from Aristotle to Russell*, Prentice Hall, 1.963. (A-2.914)
23. KALINOWSKI, G., *Introduction a la logique juridique. Éléments de semiotique juridique, logique des normes et logique juridique*, R. Pichon & R. Duran-Auzias, 1.965. (A-2.712)
24. LUKASIEWICZ, J., *Aristotle's syllogistic (From the standpoint of modern formal logic)*, Oxford, 1.957. (A-527)
25. MAKINSON, D., *Topics in modern logic*, Methuen & Co., 1.973. (A-4.027)

26.MORLEY, M. (ed.), *Studies in model theory,* vol. 8, The Mathematical Association of America, 1.973. (A-5.461)
27.NAGEL, E. y NEWMAN, J., *El teorema de Gödel*, Editorial Tecnos, 1.970. (A-4.101)
28.ONICESCU, O., *Principes de logique et de philosophie mathématique*, L'Academie de la Republique Socialista de Rommanie, 1.971. (A-5.713)
29.PLOCHMANN, G. y LAWSON, J., *Terms in their Propositional Contexts in Wittgenstein's TRACTATUS. An index,* Southern Illinois University Press, 1.962. (A-1.752)
30.PONASSE, D., *Logique mathématique*, O.C.D.L., 1.967. (A-3.164)
31.PRIOR, A., *Formal logic*, Oxford, 1.955. (A-118)
32.QUINE, V., *Methods of logic*, Routledge & Kegan, 1.952. (A-120)
33.QUINE, V., *Mathematical Logic,* Harvard University Press, 1.955. (A-119)
34.REEVES, S. y CLARKE, M., *Logic for Computer Science*, Addison-Wesley, 1.990. (A-6.780)
35.RESCHER, N. y URQUHART, A., *Temporal logic*, Springer, 1.971. (A-4.116)
36.ROBBIN, J., *Mathematical logic. A first course*, Benjamin, 1.968. (A-4.107)
37.ROBINSON, G., *An introduction to Mathematical Logic*, Prentice-Hall, 1.969. (A-3.380)
38.RUNKLE, G., *Good thinking. An introduction to logic*, Holt, Rinehart & Winston, 1.978. (A-5.360)
39.RUSSELL HANSON, N., *En lo que no creo*, Cuadernos "Teorema", 1.976. (A-4.397)
40.SIERPINSKI, W., *Hypothese du Continu*, Chelsea, 1.956. (A-466)
41.SPERSCHNEIDER, V. y ANTONION, G., *Logic. A foundation for computer science*, Addison-Wesley, 1.991. (A-6.779)
42.STERN, A., *Matrix Logic and Mind*, North-Holland, 1.992. (A-6.555)
43.TARSKI, A., *Introducción a la Lógica y a la Metodología de las Ciencias Deductivas*, Espasa-Calpe, 1.968. (A-4.335)
44.THOMASON, R., *Symbolic Logic*, MacMillan, 1.970. (A-4.111)
45.WITTGENSTEIN, L., *Tractatus Logico-Philosophicus*, Routledge & Kegan, 1.922. (A-169)
46.ZIPPIN, L., *Uses of Infinite*, NML vol. 7, The Mathematical Association of America, 1.962. (A-5.755)

FUNDAMENTOS:

1. BAR-HILLEL, Y *et al.*, *Essays on the foundations of mathematics*, The Hebrew University, 1.966. (A-3.877)
2. BETH, E., *The foundations of mathematics. A study in the Phylosophy of science,* North-Holland, 1.959. (A-2.085)
3. BURRIS, S. y SANKAPPANAVAR, H., *A course in Universal Algebra*, Springer, 1.981. (A-6.124)
4. CARNAP, R., *Logical foundations of probability*, The University of Chicago Press, 1.950. (A-194)
5. CURRY, H., *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics,* North-Holland, 1.951. (A-39)

6. DE FINETTI, B., *Matemática Logico Intuitiva*, Edizioni Cremonese, 1.959. (A-2.761)
7. DOU, A., *Fundamentos de la matemática*, Nueva Colección Labor, 1.970. (A-4.676)
8. FEFERMAN, S., *The number systems. Foundations of Algebra and Analysis*, Addison-Wesley, 1.964. (A-4.105)
9. HATCHER, W., *Foundations of mathematics*, Saunders, 1.968. (A-6.615)
10.HOFSTADFER, D., *Gödel, Escher, Bach,* Klett-Cotta, 1.986. (A-5.821)
11.MONK, J., *Introduzione alla teoria degli ensiemi*, Boninghieri, 1.972. (A-4.353)
12.REY PASTOR, J., *Teoría de Conjuntos Abstractos*, Instituto de Matemática, San Luis, 1.957. (A-992)
13.RUSSELL, B., *Los principios de la matemática*, Espasa-Calpe, 1.903. (A-2.250)
14.RUSSELL, B., *Los principios de la matemática*, Espasa-Calpe, 1.948.(A-6.236)
15.RUSSELL, B., *An essay on the foundations of geometry*, Dover, 1.956. (A-1.907)
16.RUSSELL, B., y WHITEHEAD, A., *Principia mathematica. Vol. I*, Cambridge, 1.957. (A-2.369)
17.RUSSELL, B., y WHITEHEAD, A., *Principia mathematica. Vol. II*, Cambridge, 1.957. (A-2.046)
18.RUSSELL, B., y WHITEHEAD, A., *Principia mathematica. Vol. III*, Cambridge, 1.957. (A-2.047)
19.VAN HEERDEN, P., *The foundation of mathematics*, N.V. Uitgeveru Wistik, 1.968. (A-2.931)
20.WILDER, R., *Introduction to the foundations of mathematics*, John Wiley, 1.952. (A-2.799)
21.WILDER, R., *The foundations of mathematics*, John Wiley, 1.958. (A-316)

CAPITULO 7: COMBINATORIA (N. L. BIGGS y R. P. JONES)

7.1. INTRODUCCION:

La combinatoria matemática ha alcanzado cierto grado de cohesión en los últimos años. Entre sus primeros propulsores figuran matemáticos famosos como Euler (quien estudió "particiones") y Cayley (quien estudió "árboles"); otros pioneros fueron los bien conocidos excéntricos matemáticos como Kirkman y Sylvester. Los esfuerzos de tales estudiosos tuvo como resultado un tema lleno de fascinantes singularidades, pero sin orden ni clasificación. Puede tenerse un buena idea sobre el estado del arte en el tema al fin del siglo pasado en los tres libros clásicos de recreaciones matemáticas: Lucas [1], Rousse Ball [2] y Ahrens [3].

Intentos previos de organización fueron los trabajos de Netto [4] y MacMahon [5]; estos libros se pueden leer aún hoy, pero dan una idea muy parcial del tema tal como la entendemos hoy en día. En este trabajo nuestro propósito será introducir al lector en las principales áreas de la matemática combinatoria, con énfasis especial en aquellas que son centros de actividad investigativa actual.

Hay varias revistas dedicadas específicamente a este área de la matemática. El *Journal of Combinatorial Theory* (Academic Press, N.Y., 1.966-) se publica en dos series separadas desde 1.971: la serie A contiene trabajos sobre construcciones, diseños y aplicaciones, mientras que la serie B está dedicada principalmente a la teoría de grafos. *Discrete Mathematics* (North-Holland, Amsterdan, 1.971-) tiene trabajos de todos los temas que cubriremos en este resumen, y temas relacionados. Además están *Journal of Graph Theory* (Wiley International, New York, 1.977-) y *Ars Combinatoria* (University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1.975-).

Casi todas las revistas de matemática publican algún trabajo en este campo, y son comentadas en la sección de combinatoria del *Mathematical Reviews*.

7.2. ENUMERACION:

7.2.1 Técnicas elementales:

Todo estudiante de combinatoria está familiarizado con métodos elementales como relaciones de recurrencia, funciones generatrices y el principio de inclusión y exclusión. Hay varios libros buenos en combinatoria elemental; en orden de dificultad creciente podemos recomendar Anderson [6], Ryser [7] y Riordan[8]. Estos libros también contienen el tratamiento de varios problemas famosos de enumeración, incluyendo los problemas de "encuentros" y el problema de "familia".

A nivel más avanzado, una referencia comprensiva para los principios básicos de la combinatoria es Comtet [9]. En la práctica de todos los días hay dos libros muy útiles de referencia: *Identidades combinatorias* de Riordan [10] y *Manual de sucesiones enteras* de Sloane [11]

7.2.2 Teoría de conteo de Pólya:

Una de las técnicas más poderosas en el armamento de un combinatorista es la teoría de enumeración desarrollada en un trabajo por Pólya [12]. Este método combina el uso de funciones generatrices con ideas de la teoría de grupos de permutación y es de un valor incalculable en problemas de enumeración donde hay grupos de simetría. Buenas descripciones pueden encontrarse en los libros de Liu [13] y Berge [14]. El principal teorema de Pólya ha sido generalizado por Bruijn [15].

La teoría de Pólya y de Bruijn está íntimamente relacionada con la teoría clásica de las funciones simétricas; ver Read [16].

7.2.3. Enumeración de grafos:

Esta rama de la teoría enumerativa se la incluye aquí ya que tiene pocas conexiones con otras ramas de la teoría de grafos (ver 7.4). El tema fue iniciado por Cayley y revitalizado por Pólya. Un relato sobre el tema fue hecho por Harary y Palmer [17]. Aunque muchos grafos han sido contados (por ejemplo, los eulerianos por Robinson en referencia 18), quedan todavía muchos problemas importantes.

Una descripción de los problemas asociados con la enumeración de árboles etiquetados está dado por Moon [19].

7.2.4. Fórmulas de inversión:

Sea P un conjunto con un orden parcial $\leq$, y supongamos que el número z satisfaciendo $x \leq z \leq y$ es finito para cada x e y en P. Sean f y g funciones de P en los reales, tales que f(y), g(y) son cero a menos que $p \leq y$, para algún p en P. Entonces la fórmula

$$f(y) = \sum_{x \leq y} g(x)$$

puede invertirse usando la *función de Möbius* μ de un conjunto parcialmente ordenado, introducida por Rota [20]. La fórmula invertida tiene la forma

$$g(y) = \sum_{x \leq y} \mu(x, y) f(x).$$

Estos resultados contienen el principio de inclusión y exclusión, y la bien conocida fórmula de inversión de Möbius de teoría de números. Es un método claro, pero el estudiante debe estar atento ya que las mismas respuestas pueden ser a menudo obtenidas en forma más elemental.

7.3. TEORIA COMBINATORIA DE CONJUNTOS:

7.3.1. Cálculo de particiones:

El resultado más simple y útil sobre las particiones de una conjunto es el famoso principio de Dirichlet (del pichón de paloma): si n+1 objetos se los distribuye entre n clases, entonces por lo menos una clase contiene más de un objeto. Una generalización de este principio fue dada por F. P. Ramsey [21]. Los resultados de Ramsey a menudo son formulados en la "notación flecha"; escribimos $N \to (q_1, q_2, \ldots, q_t)^r$ para indicar que si A es un conjunto cualquiera de cardinalidad N y $A^{(r)}$ es el conjunto de r-elementos que estudia A, entonces cualquier partición

$$A^{(r)} = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_t$$

satisface la condición que para algún i, hay un elemento q_i subconjunto X de A tal que $X^{(r)}$ está contenido en K_i.

Para cardinales finitos dados r, t y $q_1, q_2, \ldots, q_t$, el teorema de Ramsey asegura la existencia de un *número de Ramsey* finito $R=R(r,t,q_1,q_2,\ldots,q_t)$ tal que

$$R \to (q_1, q_2, \ldots, q_t)^r.$$

Por ejemplo, $6 \to (3,3)^2$. Un buen tratamiento de varios aspectos de esta teoría pueden encontrarse en la colección de trabajos de Erdös [22].

Para cardinales finitos, Ramsey probó que

$$\aleph_0 \to (\aleph_0, \aleph_0, \ldots, \aleph_0)^r$$

Un desarrollo completo del cálculo de particiones para números cardinales está dado por Erdös, Hajnal y Rado [23].

7.3.2. Transversales:

Sea $A = \{A_i : i \in I\}$, una familia finita de subconjuntos de algún conjunto finito fijo. Una familia $\{x_i : i \in I\}$ se dice que es *transversal* de A si los x_i son todos distintos y $x_i \in A_i$. En 1.935, P. Hall dio una condición necesaria y suficiente simple (conocida a veces con el nombre de "marriage theorem") para la existencia de una transversal: la unión de k conjuntos cualesquiera de A_i deben tener por lo menos k elementos $(1 \leq k \leq |I|)$. El teorema de Hall es un resultado potente con aplicaciones a través de toda la combinatoria. Una buena introducción es el capítulo 8 de Wilson [24] y más detalles pueden encontrarse en el trabajo de Mirsky y Perfect [25] y en el libro de Mirsky [26].

Han sido estudiadas infinitas versiones del teorema de Hall, entre ellas las de Damerell y Milner [27] y Nash-Williams [28].

7.3.3. Teoremas de intersección:

Sperner probó en 1.928 que si F es una familia de subconjuntos de un conjunto de n elementos, con la propiedad de que ningún miembro de F contiene a otro, entonces F tiene a lo sumo

$$\binom{n}{[\frac{1}{2}n]}$$

miembros. Hay muchas variantes y extensiones de este teorema, algunas de las cuales pueden encontrarse en una selección de trabajos de Erdös [22], y en un artículo de Kleitman [29]. Para aplicaciones a la geometría, el estudiante debe consultar el libro de Hadwiger, Debrunner y Klee [30]

7.3.4. Matroides:

El estudio de los matroides fue iniciado por Whitney en 1.935. Hay varias definiciones; una de ellas es que una *matroide* está formada por un conjunto E y una familia *B* de subconjuntos de E, llamados *bases*. Ninguna base contiene propiamente a otra base y si B_1 y B_2 son dos bases y $x \in B_1$, existe un elemento $y \in B_2$ tal que $(B_1 - \{x\}) \cup \{y\}$ es una base.

Esta definición está modelada sobre las propiedades de el conjunto de bases de un espacio vectorial. Otro ejemplo es provisto por el conjunto de transversales de una familia de subconjuntos de E, y otro por la familia de los árboles generadores de un grafo conexo cuyo conjunto-eje es E.

Una buena introducción a la teoría de matroides es el artículo de Wilson [31]. Tratados más avanzados son Tutte [32] y Welsh [33]; el libro de Tutte contiene la teoría importante de las *"matroides gráficas"*.

Además de una multitud de definiciones posibles hay una terminología alternativa, en que a la matroide se la considera como una "pre-geométrica". Ese desarrollo se hace ampliamente en el libro de Crapo y Rota [34].

7.3.5. Hipergrafos:

Un *hipergrafo* es una familia *E* de subconjuntos de un conjunto; cuando todos los elementos de *E* tienen justo dos elementos, obtenemos un grafo. En el estudio de hipergrafos es costumbre utilizar términos derivados de la teoría de grafos, a pesar de que el hipergrafo no tiene una estructura especial. El libro básico es el de Berge [35], el que ha sido puesto al día en un trabajo importante de Zykov [36].

Un suceso notable de la teoría de hipergrafos fue la demostración de la "conjetura del grafo perfecto" de Lovász [31], usando técnicas de la teoría cromática de hipergrafos; detalles en el libro de Berge [35].

Varios de los temas mencionados en las secciones previas han sido discutidos en la terminología de hipergrafos. Un relato de tales problemas está dada en Katona [38].

7.4. TEORIA DE GRAFOS:

7.4.1. Teoría básica de grafos:

Un *grafo* es un conjunto de *vértices* y un conjunto de *ejes*, junto a una relación de *incidencia* de tal forma que cada eje es incidente con otro en uno o dos vértices. Un eje incidente con exactamente un vértice es un *bucle*. Un grafo que no tiene bucles y con la propiedad de que existe a lo sumo un eje incidente con cada par de vértices se dice *simple*.

El desarrollo de la teoría de grafos desde 1.736 a 1.936 se describe, con extractos de trabajos clásicos, en el libro de Biggs, Lloyd y Wilson [39]; este libro también puede servir como un texto sobre teoría de grafos. Otros, más convencionales, también en teoría básica de grafos son los de Behzad y Chartrand [40], Harary [41] y Wilson [24].

Hay una cantidad considerable de trabajos publicados sobre propiedades elementales de caminos y circuitos en grafos. El problema perenne es encontrar condiciones suficientes para que un grafo tenga un circuito que pase justo una vez por cada vértice (circuito *Hamiltoniano*). Material para este problema puede encontrarse en los libros mencionados anteriormente y en los trabajos originales de Pósa [46], Chvátal [43] y Woodall [44].

La famosa conjetura de los cuatro colores tiene una vasta literatura. Están los libros de Ore [45] y Heesch [46], y los trabajos de Tutte y Whitney [47]. En 1.976, Appel y Haken [48] anunciaron una demostración que hacía uso extensivo de cálculos computacionales.

7.4.2. Problemas de coloreamiento:

El *número cromático* de un grafo es el menor número de colores necesarios de forma tal que vértices adyacentes se le puedan asegurar colores diferentes. La cota más útil para el número cromático es debida a Brooks [49].

G. D. Birkhoff introdujo el polinomio cromático, que da el número de coloramientos permitidos para cada número de colores. Descripciones de las propiedades de estos polinomios están dados por Read [50] y Biggs [51]. W. T. Tutte [52] ha obtenido algunos resultados intrigantes sobre los ceros de polinomios cromáticos de grafos planos.

Se puede también mirar el color de los ejes de un grafo de modo que ejes con vértices comunes estén coloreados de forma diferentes. Hay un análogo del teorema de Brooks para esta situación, debido a Vizing [53]. Wilson [54] da un buen survey sobre resultados sobre coloración de ejes.

La coloración de ejes en el grafo puede ser considerada como una partición de un subconjunto de ejes con la propiedad de que cada parte no contiene ejes adyacentes. Esta aproximación conduce a generalizaciones de problemas de coloración, de distintos grados de utilidad. Una de tales generalizaciones es el problema de *arborización*: aquí las partes pueden contener no circuitos. Nash-Williams [55] han dado una fórmula para la arboricidad de cualquier grafo.

7.4.3. Teoría algebraica de grafos:

Tanto el álgebra lineal como la teoría de grupos han sido usadas con gran efecto en el estudio de los grafos.

La *matriz de adyacencia* de un grafo simple con n vértices es la matriz de n×n, $A=(a_{ij})$ en la cual $a_{ij}=1$ si los vértices i y j son adyacentes, y $a_{ij}=0$ en caso contrario. Los autovalores de A contienen una cantidad de información útil sobre el grafo, pero no lo determina. Una introducción a este campo puede encontrarse en el libro de Biggs [51].

El grupo de *automorfismos* de un grafo es una permutación de su conjunto de vértices, la cual preserva la adyacencia. El conjunto de automorfismos es un grupo con la operación de composición. En 1.938 Frucht probó que todo grupo abstracto es el grupo de algún grafo, y el resultado permanece válido si estipulamos que los grafos deben tener algunas propiedades asignadas (ver Izbicki [56]). Es más instructivo el estudio de los grupos de automorfismos como un grupo de permutaciones, en lugar de un grupo abstracto.

Podemos requerir que el automorfismo actué transitivamente sobre los vértices, o sobre pares de vértices adyacentes, o sobre pares de vértices a cada distancia dada. Esta jerarquía de condiciones de simetría da lugar a más matemática interesante, ver Biggs [51]. En el último de los tres casos mencionados, el grafo tiene la propiedad conocida como la de *regularidad a distancia*; casos especiales incluyen los *grafos de Moove* (Hoffman y Singleton [57], Damerell [58]) y los *grafos fuertemente regulares*, explorados por Hubaut [59].

7.4.4. Problemas extremales:

Un aspecto de la teoría extremal ocurre a partir de las aplicaciones del teorema de Ramsey (cf. subsección 7.3.1.) a los grafos. Por ejemplo, tomando r=t=2 y $q_1=q_2=q$, deducimos que en cualquier 2-coloración de los ejes de un grafo completo con R(2,2,q,q) vértices existe un subgrafo completo monocromático con q vértices. Erdös [22] ha escrito muchos trabajos sobre estas cuestiones; ver también Graver y Yackel [60]. Harary [61] y otros han considerado el número de Ramsey $R(G_1,G_2)$ de dos grafos. Este es definido como el menor número n tal que, en cualquier 2-coloreado de los ejes de un grafo completo sobre n vértices, existirá un G_1 con un color o un G_2 con el otro.

Otro tipo de problema extremal esta ejemplificado por el teorema de Turán [62]: un grafo con n vértices y por lo menos $n^2/4]$ ejes contiene un triángulo. Un desarrollo de estos temas está dado en Erdös [63].

Estrechamente ligado a la teoría extremal está el uso de métodos probabilísticos en teoría de grafos. Por ejemplo, razonamientos probabilísticos pueden utilizarse para probar que hay grafos cuya periferia y número cromático son arbitrariamente grandes. Para detalles consultar el libro de Erdös y Spencer [64].

7.4.5 Grafos dirigidos:

En un *grafo dirigido* (o *digrafo*) los vértices se unen por *arcos* teniendo una dirección asignada; en otras palabras, un arco es un elemento de V×V, donde V es el conjunto de vértices. La teoría básica de digrafos es muy similar a la teoría de grafos, y su teoría se puede encontrar en la mayoría de los textos mencionados en la subsección 7.4.1.

Un digrafo cuyo grafo subyacente es un grafo completo a veces se lo denomina "tournament". En este tema hay un libro estimulante: Moon [65].

7.4.6. Teoría topológica de grafos:

Un grafo puede representarse por un espacio topológico en el cual los vértices están representados por puntos y los ejes por líneas uniendo estos puntos. La teoría topológica de grafos tiene que ver con el problema de sumergir el espacio representativo en ciertas superficies, de tal forma que las líneas se intersectan solamente en los puntos finales asignados. Para un grafo sumergido en una superficie orientable de género g, el número de caras está dada por la fórmula de la *característica de Euler*: V-E+F=2-2g. El *género* $\gamma(G)$ de un grafo G está definido como el menor g tal que G puede sumergirse en la superficie de género g, y la fórmula conduce a una cota inferior para $\gamma(G)$. Para el grafo completo K_n obtenemos

$$\gamma(K_n) \geq \{\frac{1}{12}(n-3)(n-4)\}$$

La *conjetura de Heawood* es que vale la igualdad. Fue probada por Ringel [67] en 1.967. Un desarrollo interesante de algunos aspectos algebraicos de las inversiones de la teoría de grafos puede encontrarse en el libro de White [68].

7.4.7. Tópicos variados:

El *"matching"* de un grafo es un subconjunto de su conjunto de ejes con la propiedad que dos ejes no tienen un vértice común. El matching es *perfecto* (o un 1-factor) si cubre todo vértice. Tutte [69] encontró una condición necesaria y suficiente para que un grafo conexo tenga un 1-factor; una demostración muy corta usando el teorema de Hall está dada por Anderson [70]. Una demostración alternativa a problemas de matching utiliza el denominado método "húngaro" de cadenas alternantes, ver Berge [35] para detalles.

En 1.927 Menger probó un resultado importante concerniente a la "conectividad" de un grafo. Su resultado implica el teorema de Hall y se lo utiliza frecuentemente en la teoría de *transversilidad*. Ver Wilson [24] para un desarrollo elemental.

7.5. GEOMETRIA FINITA Y DISEÑOS:

7.5.1. Teoría general:

Un *diseño* t-(v,k,λ) es una colección B de subconjuntos de un conjunto S, con $|S| = v$, satisfaciendo dos condiciones: (1) cada miembro de B tiene cardinalidad k; (2) cada conjunto de t elementos de S está contenido en exactamente λ miembros de B. Los conjuntos en B se denominan *bloques* y los elementos de S se denominan *puntos*. La posibilidad de "bloques repetidos" frecuentemente no es permitida; esto es, todos los miembros de la colección B son subconjuntos diferentes de S. Cuando $\lambda=1$, el diseño se dice que es un *sistema de Steiner*. Para excluir casos degenerados no interesantes se supone usualmente que $v \geq k \geq t \geq 2$ y $\lambda \neq 0$.

El estudio de diseños se originó en la teoría estadística de experimentos, durante los años 30, pero no fue sino hasta la publicación del importante trabajo de Bruck y Ryser [71] en 1.949 que los matemáticos se interesaron por el tema. En nuestros días la teoría de diseños se ha infiltrado en muchas áreas de la geometría clásica, especialmente al estudio de la geometría en espacios vectoriales y proyectivos sobre cuerpos finitos. Referencias generales son los libros de Hall [72] y Dembowski [73]. Una fuente importante de ideas es el trabajo de Tits [74].

7.5.2. Diseños con t≥3:

Un *diseño t*, es un diseño t-(v,k,λ) para algunos parámetros (v,k,λ). Para $t \geq 3$ existe muy poca teoría general. Se conocen algunos ejemplos, y como estos tienden a ser relacionados con fenómenos no explicados en otros temas, como teoría de grupos, hay un interés considerable en ellos. Algunos criterios generales aplicables para la existencia de tales diseños son los denominados criterios de divisibilidad (ver Dembowski [73]) pero estas condiciones necesarias no son suficientes.

Para t > los únicos diseños conocidos sin bloques repetidos son los diseños en los cuales todo conjunto de k puntos es un bloque. Para t=4 y t=5 hay solamente cuatro diseños conocidos hasta hace poco: ellos son sistemas de Steiner con parámetros 4-(11,5,1), 5-(12,6,1), 4-(23,7,1) y 5-(24,8,1), discutidos por Witt [78]. Algunos de los 5-diseños nuevos con $\lambda\neq 1$ han sido descubiertos en el contexto de la teoría de códigos, y un buen relato de ellos está dado por Cameron y Van Lint [76]. Recientemente, algunos de los 5-diseños nuevos para $\lambda=1$ fueron encontrados por R. H. F. Denniston [77]. Los parámetros de estos diseños son 5-(28,7,1) y 5-(48,6,1).

Para t=3 se sabe que existen infinitos diseños. Ejemplo son los *planos de Möbius* en parámetros 3-(q^2 +1,q+1,1), donde q es una potencia prima (ver Dembowski [73]).

7.5.3. Diseños con t=2:

Un 2-diseño en el cual no todo subconjunto k de S es un bloque es un *diseño incompleto balanceado clásico* (BIBD). Un tratamiento comprensible de tales diseños está dado en el libro de Hall [72]. Este libro también tiene tablas útiles de 2-diseños para valores pequeños de los parámetros, pero el lector debe tener cuidado dado que varios diseños listados como "no conocidos" han sido encontrados desde entonces; Hall en la referencia 78 da información más actualizada.

La herramienta básica en el estudio de los 2-diseños es la matriz de incidencia. Por ejemplo, si b indica el número de bloques, entonces la desigualdad $b\geq v$ puede probarse por argumentos matriciales simples. Cuando $b = v$, el diseño se dice *simétrico*. Hay condiciones necesarias importantes para la existencia de 2-(v,k,λ) diseños simétricos, conocida como el teorema de Bruck-Ryser-Chowla: si v es par, entonces k-v debe ser cuadrada, mientras que si v es impar, la ecuación

$$x^2 = (k-\lambda)y^2 + (-1)^{\frac{1}{2}(v-1)}\lambda z^2$$

debe tener una solución en enteros x, y, z no todos nulos. Ver Biggs [79].

7.5.4. Planos proyectivos:

Una clase particularmente interesante de 2-diseños son los *planos proyectivos*, que tienen parámetros 2-($n^2+n+1,n+$,1). Los bloques de Dembowski [73] y Hall [72] mencionados previamente contienen una gran cantidad de material sobre este tema; un libro más moderno es el de Hughes y Piper [80].

El número n que aparece en la definición se dice el *orden* del plano. Para cada potencia prima de orden q existe un ejemplo estándar construído de la forma clásica como un espacio proyectivo 2-dimensional sobre el cuerpo finito GF(q). Se conocen otros ejemplos, pero todos tienen potencias de orden primo. La posibilidad de un plano proyectivo de orden 10 es materia de especulación. Ver MacWilliams, Sloane y Thompson [81] para una aproximación a traves de la teoría de códigos.

Se ha trabajado mucho sobre la estructura de un grupo de colineaciones de planos proyectivos. Una clasificación completa de las posibilidades está dada en Dembowski [73] y se conoce como el esquema de Lenz-Barlotti. Casi todos los planos conocidos son de la clase conocida como "planos de traslación", este es el tema de las notas de Ostrom [82].

7.5.5. Cuadrados latinos:

Los cuadrados latinos es otro aspecto de la teoría combinatoria que encuentra aplicaciones en el diseño de experimentos. Hay una masa de información heterogenea de diversos aspectos del tema, incluyendo la relación con los planos proyectivos, y el lector es afortunado en poder leer el tratado de Dénes y Keedwell [83] para un buen relato del tema.

7.5.6. Otros temas:

Hay otros muchos temas, varios de ellos relacionados con la teoría de diseños, de los cuales el estudiante debe estar atento. Entre estos estan las matrices de Hadamard y cuadrados de Room (Wallis, Street y Wallis [84]), polígonos generalizados (Dembowski [73]) y biplanos (Cameron [85])

7.6. TEORIA DE CODIGOS:

7.6.1. Teoría y aplicaciones:

Técnicas prácticas de codificación dependen de las teorías matemáticas, teoría de información y teoría combinatoria. Esta última ha conducido a la formulación de varios conceptos nuevos, y el establecimiento de lazos con diseños y grafos.

En los comienzos (alrededor de 1.950) el marco de la teoría de códigos combinatoria era un espacio vectorial F^n de dimensión n sobre el cuerpo F=GF(2). Un subespacio C de F^n es un *e-código binario lineal* (*e*-error correcting code) si dos vectores en C difieren en por los menos $2e+1$ coordenadas; se sigue que cualquier vector en F^n difiere en *e* (o menos) coordenadas con a lo sumo un vector en C.

El primer libro sobre teoría de códigos fue escrito por Peterson [86] en 1.961. Otros son el de Berlekamp [87], que se concentra en códigos ciclícos, y el de Blake y Mullin [88], que contiene mucho material innecesario. Cada uno de estos libros da un panorama de numerosos métodos para construir códigos binarios con propiedades dadas. Para un desarrollo de los "mejores" códigos, en cierto sentido, el estudiante debe consultar a Sloane [89].

Varias generalizaciones del modelo clásico son posibles y esto conduce a cuestiones de considerable interés matemático pero de poca aplicación. Estas cuestiones las consideraremos en las siguientes secciones.

7.6.2. Códigos perfectos:

El cuerpo GF(2) puede reemplazarse por el cuerpo finito general GF(q), q una potencia prima, y el subconjunto C no necesariamente es un subespacio. En este caso, diremos que C es un *e-código perfecto* si cualquier vector en F^n difiere en *e* (o menos) coordenadas de exactamente un vector en C. Una introducción muy leíble de los aspectos matemáticos de esta situación está dada por van Lint [90]. Hay que observar que hay muy pocos códigos perfectos; a parte de los casos triviales y algunas familias de 1-códigos perfectos (denominados códigos de Hamming) hay exactamente dos códigos perfectos: (1) un espacio lineal de dimensión 11 en F^{23}; F=GF(2); (2) un espacio lineal de dimensión 6 en F^{11}, F=GF(3). Este resultado es debido a Tietäväinen [91]. La demostración de Tietäväinen se basa en computos por ordenador para eliminar "pequeños" casos, y la necesidad de esto fue evitada recientemente por Smith [92]. Aplicaciones de la clasificación a códigos binarios perfectos pueden encontrarse en el trabajo sobre paralelismos de Cameron [93]

7.6.3. Otros desarrollos:

El tema de los códigos perfectos ha conducido a la formulación en marcos generales de la teoría de códigos. Delsarte [94] introduce la teoría de esquemas asociados y utiliza métodos de programación lineal; Biggs [95] estudia códigos perfectos en grafos. En ambos contextos es posible probar una versión general del teorema de Lloyd (ver van Lint [90]) que da una condición necesaria para la existencia de un código perfecto en términos de los ceros de un polinomio asociado.

Pequeñas generalizaciones de la noción de código perfecto, "casi perfecto"y códigos "uniformemente empaquetados", son útiles para estudiar otros problemas de combinatoria. La mejor referencia para tales asuntos es el libro de Cameron y van Lint [76].

Otro desarrollo importante es el uso de la teoría de invariantes al estudio de enumeración de códigos con pesos; ver los trabajos de Gleason [96] y Sloane [97].

7.7. APLICACIONES:

Hay diversas aplicaciones de la teoría combinatoria, de tal forma que es imposible describirlas. Los lugares más importantes de aplicaciones son los siguientes:

7.7.1. Teoría de circuitos eléctricos:

El estudio de circuitos eléctricos condujo a Kirchhoff a descubrir algunos teoremas básicos de teoría de grafos hacia 1.847. Hay varios libros que describen técnicas relevantes de ingeniería eléctrica en términos de matrices, por ejemplo, Seshu y Reed [98] y Chen [99]. El estudiante no debe estudiar todo lo que tienen estos libros, pero debe tener conocimiento de lo que tratan.

Otro desarrollo interesante es el uso de "fórmulas topológicas" debido a Mason y Coates para la solución de ecuaciones de circuitos. El libro de Chen contiene un desarrollo extenso de esto.

7.7.2. Flujos de circuitos:

Cuando la variable cuyo flujo debemos medir esta condicionada por una función "capacitaria", la teoría es bastante diferente a la de un flujo de corriente en un circuito eléctrico. La referencia básica es el libro de Ford y Fulkerson [100]. Este libro contiene un desarrollo excelente de las conecciones teóricas con el teorema de Hall y las aplicaciones prácticas a problemas como asignación y transporte.

7.7.3. Grupo de permutaciones:

El estudio de un grupo abstracto, y a veces su propia definición, puede facilitarse considerando un grupo como operando en alguna estructura asignada. Los automorfismos de geometrías finitas. diseños, códigos y grafos han sido investigados por esta razón. Una introducción en este campo está dada por Biggs [79]; ver también Kantor [101].

Mucho interés tiene la construcción de los grupos simples finitos. Higman y Sims [102] descubrieron un nuevo grupo simple, como el grupo de automorfismos de un grafo con 100 vértices, y desde ese momento se han construído de la misma manera una docena de grupos simples "esporádicos". Una relación de esto esta dada en Tits [103].

7.7.4. Modelos de fenómenos físicos:

El prototipo para modelos combinatorios de fenómenos físicos es el famoso modelo de Ising para el ferromagnetismo. Tales modelos tratan, hablando rápidamente, con el comportamiento de funciones cuyo dominio de definición es un conjunto de "estados" sobre un grafo. En el "limite termodinámico", cuando el tamaño del grafo aumenta, estas funciones pueden exhibir singularidades, lo que indica que ocurre una "fase de transición". Una descripción de todo este campo, incluyendo muchas aplicaciones estimulantes de métodos combinatorios, puede encontrarse en una serie de volumenes editados por Domb y Green [104]. El libro de Thompson [105] también es recomendable.

REFERENCIAS:

[1] LUCAS, E., *Récréations mathématiques,* Gauthier-Villars, Paris, 1.882.
[2] ROUSE BALL, W., *Mathematical recreations and problems of past and present times,* Macmillan, London, 1.892.
[3] AHRENS, W. ,*Matematische Unterhaltungen und Spiele,* Teubner, Leipzig, 1.901.
[4] NETTO, E., *Lehrbuch der Combinatorik,* Chelsea, New York, 1.927. (A-562)
[5] MaCMAHON, P., *Combinatory analysis,* Chelsea, New York, 1.960. (A-879)
[6] ANDERSON, I., *A first course in combinatorial mathematics,* Oxford University Press, Oxford, 1.974.
[7] RYSER, H., *Combinatorial mathematics,* The Carus Mathematical Monographs n°14, Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y., Wiley, 1.963. (A-3.154)
[8] RIORDAN, J., *An introduction to combinatorial analysis,* Princeton University Press, 1.978. (A-5.933)

[9] COMTET, L., *Advanced combinatorics: the art of finite and infinite expansions,* rev. edn., Reidel, Dordrecht, 1.974.
[10] RIORDAN, J., *Combinatorial Identities,* Wiley, New York, 1.968. (A-3.768)
[11] SLOANE, N., *A handbook of integer sequences,* Academic Press, New York, 1.973. (A-4.264)
[12] PÓLYA, G., 'Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen', *Acta Mathematica,* 68, 145-254, 1.937.
[13] LIU, C., *Introduction to combinatorial mathematics,* McGraw-Hill, New York, 1.968.
[14] BERGE, C., *Principles of combinatorics,* Academic Press, New York, 1.971. (A-4.142)
[15] de BRUIJN, N., 'Generalisations of Pólya's fundamental theorem in enumerative combinatory analysis', *Indagationes Mathematicae,* 21, 59-69, 1.959.
[16] READ, R., 'The use of S-functions in combinatorial analysis', *Canadian Journal of Mathematics,* 20, 808-841, 1.968.
[17] HARARY, F. y PALMER, E., *Graphical enumeration,* Academic Press, New York, 1.973. (A-4.536)
[18] HARARY, F., (ed.), *Proof techniques in graph theory,* Academic Press, New York, 1.969.
[19] MOON, J., *Counting labelled trees,* Canadian Mathematical Monographs 1, Canadian Mathematical Congress, Montreal, 1.970.
[20] ROTA, G., 'On the foundations of combinatorial theory I: Theory of Möbius functions', *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete,* 2, 340-368, 1.964.
[21] RAMSEY, F., 'On a problem of formal logic', *London Mathematical Society. Proceedings,* 30, 264-286, 1.930.
[22] ERDÖS, P., *The art of counting-selected writings,* M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1.973.
[23] ERDÖS, P., HAJNAL, A. y RADO, R., 'Partition relations for cardinal numbers', *Acta Mathematica Academiae Scientiarium Hungaricae,* 15, 93-196, 1.965.
[24] WILSON, R., *Introduction to graph theory,* Longman, London, 1.975. (A-4.523)
[25] MIRSKY, L. y PERFECT, H., 'Systems of representatives', *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 15, 520-568, 1.966.
[26] MIRSKY, L., *Transversal theory,* Academic Press, New York, 1,.971.
[27] DAMERELL, R. y MILNER, E., 'Necessary and sufficient conditions for transversals of countable set systems', *Journal of Combinatorial Theory. A,* 17, 350-374, 1.974.
[28] NASH-WILLIAMS, C., 'Marriage in denumerable societies', *Journal of Combinatorial Theory. A,* 19, 335-336, 1.975.
[29] KLEITMAN, D., 'On an extremal property of antichains in partial orders, the LYM property and some of its implications and applications', *Mathematical Centre Tracts,* 56, 77-90, 1.974.
[30] HADWIGER, H. y DEBRUNNER, H., *Kombinatorische geometrie in der ebene,* Institute de Mathematiques, Géneve, 1.959. (A-846 y A-1.967)
[31] WILSON, R., 'An introduction to matroid theory', *American Mathematical Monthly,* 80, 500-525, 1.973.

[32] TUTTE, W., *Introduction to the theory of matroids,* American Elsevier, New York, 1.971.

[33] WELSH, D., *Matroid theory,* Academic Press, London, 1.976. (A-4.819)

[34] CRAPO, H. y ROTA, G., *On the foundations of combinatorial theory: combinatorial geometries,* M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1.970.

[35] BERGE, C., *Graphes et hypergraphes*, Dunod, 1.973. (A-4.816)

[36] ZYKOV, A., 'Hypergraphs', *Russian Mathematical Surveys,* 29, 89-156, 1.974.

[37] LOVÁSZ, L., 'Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture', *Discrete Mathematics,* 2, 253-267, 1.972.

[38] KATONA, G., 'Extremal problems for hypergraphs', *Mathematical Centre Tracts,* 56, 13-42, 1.974.

[39] BIGGS, N., LLOYD, E. y WILSON, R., *Gprah theory 1.736-1.936,* Oxford University Press, Oxford, 1.976.

[40] BEHZAD, M. y CHARTRAND, G., *Introduction to the theory of graphs,* Allyn and Bacon, Boston, 1.971.

[41] HARARY, F., *Graph theory,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.969. (A-5.178)

[42] PÓSA, L., 'A theorem concerning Hamilton lines', *Magyar Tudományos Akadémia: Matematikai Kutató Intézet. Közleményei,* 7, 225-226, 1.962.

[43] CHVÁTAL, V., 'On Hamilton's ideals', *Journal of Combinatorial Theory.B,* 12, 163-168, 1.972.

[44] WOODALL, D., 'Sufficient conditions for circuits in graphs', *London Mathematical Society. Proceedings,* 24, 739-755, 1.975.

[45] ORE, O., *The four-color problems,* Academic Press, New York, 1.967. (A-2.780)

[46] HEESCH, H., *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem,* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1.969.

[47] TUTTE, W. y WHITNEY, H., 'Kempe chains and the four colour problem', *Utilitas Mathematica,* 2, 241-281, 1.972.

[48] APPEL, K. y HAKEN, W., 'Every planar map is four-colorable', *American Mathematical Society. Bulletin,* 82, 711-712, 1.976.

[49] BROOKS, R., 'On colouring the nodes of a network', *Cambridge Philosophical Society. Proceedings,* 37, 194-197, 1.941.

[50] READ, R., 'An introduction to chromatic polynomials', *Journal of Combinatorial Theory,* 4, 52-71, 1.968.

[51] BIGGS, N., *Algebraic graph theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.974. (A-4.817)

[52] TUTTE, W., 'On chromatic polynomials and the golden ratio', *Journal of Combinatorial Theory,* 9, 289-296, 1.970.

[53] VIZING, V. 'On an estimate of the chromatic class of a p-graph', *Diskretnyi Analiz,* 3, 25-30, 1.964.

[54] ALAVI, Y. y LICK, D., (eds.), *Theory and Applications of Graphs,* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1.977.

[55] NASH-WILLIAMS, C., 'Edge-disjoint spanning trees of finite graphs', *London Mathematical Society. Journal,* 36, 445-450, 1.961.

[56] IZBICKI, H., 'Unendliche Graphen endlichen Grades mit vorgegebenen Eigenschaften', *Monatshefte für Mathematik,* 63, 298-301, 1.960.

[57] HOFFMAN, A. y SINGLETON, R., 'On Moore graphs with diameters 2 and 3', *IBM Journal of Research and Development,* 4, 497-504, 1.960.

[58] DAMERELL, R., 'On Moore graphs', *Cambridge Philosophical Society. Proceedings,*74, 227-236, 1.973.

[59] HUBAUT, X., 'Strongly regular graphs', *Discrete Mathematics,* 13, 357-382, 1.975.

[60] GRAVER, J. y YACKEL, J., 'Some graph theoretic results associated with Ramsey's Theorem', *Journal of Combinatorial Theory,* 4, 125-175, 1.968.

[61] NASH-WILLIAMS, C. y SHEEHAN, J., (eds.), *Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference, 1.975,* Utilitas Mathematica, Winnipeg.

[62] TURÁN, P., 'Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie', *Matematikai és Fizikai Lapok,* 48, 436-452, 1.941.

[63] HARARY, F., (ed.), *A seminar in graph theory,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1.967.

[64] ERDÖS, P. y SPENCER, J., *Probabilistic methods in combinatorics,* Academic Press, New York, 1.974. (A-4.692)

[65] MOON, J., *Topics on tournaments,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1.968.

[66] KURATOWSKI, K., 'Sur le probléme des courbes gauches en topologie', *Fundamenta Mathematicae,* 15, 271-283, 1.930.

[67] RINGLE, G., *Map color theorem,* Springer-Verlag, Berlin, 1.974.

[68] WHITE, A., *Graphs, groups and surfaces,* American Elsevier, 1.973. (A-4.525)

[69] TUTTE, W., 'The factorization of linear graphs', *London Mathematical Society. Journal,* 22, 107-111, 1.947.

[70] ANDERSON, I., 'Perfect matchings of a graph', *Journal of Combinatorial Theory,* 10, 183-186, 1.971.

[71] BRUCK, R. y RYSER, H., 'The nonexistence of certain finite projective planes', *Canadian Journal of Mathematics,* 1. 88-93, 1.949.

[72] HALL, M., *Combinatorial theory,* Blaisdell, Waltham, Mass., 1.967.

[73] DEMBOWSKY, P., *Finite geometries,* Springer-Verlag, Berlin, 1.968. (A-3.040)

[74] TITS, J., *Buildings of spherical type and finite BN-pairs,* Lecture Notes in Mathematics 386, Springer-Verlag, 1.974. (B-574, L-386)

[75] WITT, E., 'Über Steinersche System', *Hamburg, Universität: Mathematische Seminar. Abhandlungen,* 12, 265-275, 1.938.

[76] CAMERON, P. y VAN LINT, J., *Graph theory, coding theory and block designs,* London Mathematical Society Lecture Note Series 19, Cambridge University Press, Cambridge, 1.975.

[77] DENNISTON, R., 'Some new 5-designs', *London Mathematical Society. Bulletin,* 8, 263-267, 1.976.

[78] SRIVASTAVA, J. (ed.), *A survey of combinatorial theory,* North-Holland, Amsterdam, 1.973.

[79] BIGGS, N., *Finite groups of automorphisms,* London Mathematical Society Lecture Note Series 6, Cambridge University Press, Cambridge, 1.971.

[80] HUGHES, D. y PIPER, F., *Projective planes,* Springer-Verlag, New York, 1.973 (A-6.013)

[81] MaCWILLIAMS, F., SLOANE, N. y THOMPSON, J., 'On the existence of a projective plane of order 10', *Journal of Combinatorial Theory. A,* 14, 66-78, 1.973.

[82] OSTROM, T., *Finite translation planes,* Lecture Notes in Mathematics 158, Springer-Verlag, Berlin, 1.970. (B-574, L-158)
[83] DÉNES, J y KEEDWELL, A., *Latin squares and their applications,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1.974.
[84] WALLIS, W., STREET, A. y WALLIS, J., *Combinatorics: Room squares, sum-free sets, Hadamard matrices,* Lecture Notes in Mathematics 292, Springer-Verlag, Berlin, 1.972. (B-574, L-292)
[85] CAMERON, P., 'Characterisations of some Steiner systems, paralleslisms and biplanes', *Mathematische Zeitschrift,* 136, 31-39, 1.974.
[86] PETERSON, W., *Error correcting codes,* M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1.972. (A-3.578)
[87] BERLEKAMP, E., *Algebraic coding theory,* MacGraw-Hill, New York, 1.968.
[88] BLAKE, I. y MULLIN. R., *The mathematical theory of coding,* Academic Press, New York, 1.975.
[89] SLOANE, N., 'A survey of constructive coding theory and a table of binary codes of highest known rate', *Discrete Mathematics,* 3, 265-294, 1.972.
[90] LINT, J., *Coding theory,* Lecture Notes in Mathematics 201, Springer-Verlag, Berlin, 1.971.
[91] TIETÄVÄINEN, A., 'On the non-existence of perfect codes over finite fields', *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 24, 88-96, 1.973.
[92] SMITH, D., 'An improved version of Lloyd's theorem', *Discrete Mathematics,* 15, 175-184, 1.976.
[93] CAMERON, P., *Parallelisms of complete designs,* London Mathematical Society Lecture Note Series 23, Cambridge University Press, Cambridge, 1.976. (A-6.138)
[94] DELSARTE, P., 'The association schemes of coding theory', *Mathematical Centre Tracts,* 55, 139-157, 1.974.
[95] BIGGS, N., 'Perfect codes in graphs', *Journal of Combinatorial Theory. B,* 15, 289-296, 1.973.
[96] GLEASON, A., 'Weight polynomials of self-dual codes and the MacWilliams identities', *International Congress of Mathematicians. Proceedings,* 3, 211-215, 1.970.
[97] SLOANE, N., 'Weight enumerators of codes', *Mathematical Centre Tracts,* 55, 111-138, 1.974.
[98] SESHU, S. y READ, M., *Linear graphs and electrical networks,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.961.
[99] CHEN, W., *Applied graph theory; graphs and electrical networks,* North-Holland, 1.976. (A-5.184)
[100] FORD, L. y FULKERSON, D., *Flows in networks,* Princeton University Press, Princeton, 1.962.
[101] KANTOR, W., '2-transitive designs', *Mathematical Centre Tracts,* 57, 44-97, 1.974.
[102] HIGMAN, D. y SIMS, C., 'A simple group of order 44, 352, 000', *Mathematische Zeitschrift,* 105, 110-113, 1.968.
[103] *Séminaire Bourbaki, Exposés 364-381,* Lecture Notes in Mathematics 180, Springer-Verlag, Berlin, 1.971. (B-574, L-180)
[104] DOMB, C. y GREEN, M., *Phase transitions and critical phenomena,* 6 vols, Academic Press, New York, 1.972-1.976.

[105] THOMPSON, C., *Mathematical statistical mechanics,* Macmillan, New York, 1.972.

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

1. BECKENBACH, E. *et al, Applied Combinatorial Mathematics*, Krieger, 1.981. (A-5.361)
2. BRUALDI, R., *Introductory Combinatorics*, North-Holland, 1.977. (A-5.176)
3. ERDOS, P. y SPENCER, J., *Probabilistic Methods in Combinatorics*, Academic Press, 1.974. (A-4.692)
4. GRIMALDI, R., *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison-Wesley, 1.989. (A-6.300)
5. McMAHON, P., *Combinatory analysis*, Chelsea, 1.960. (A-879)
6. NIVEN, I., *Mathematics of choice*, NML vol. 15, The Mathematical Association of America, 1.965. (A-5.445)
7. RIORDAN, J., *An introduction to combinatorial analysis*, Princeton University Press, 1.978. (A-5.933)
8. ROTA,. G., *Combinatorial theory and invariant theory*, Bowdoin College, 1.971. (A-6.748)
9. ROTA, G. (ed.), *Studies in Combinatorics*, vol. 17, MAA Studies in Mathematics, The Mathematical Association of America, 1.978. (A-5.467)
10. STANLEY, R., *Enumerative Combinatorics,* vol. 1, Wadsworth & Brooks, 1.986. (A-6.534)
11. VILENKIN, N., *Combinatorics*, Academic Press, 1.971. (A-4.154)
12. WELSH, D., *Combinatorial mathematics and its applications,* Academic Press, 1.971. (A-4.503)
13. BRUCK, R., *A survey of binary systems*, Springer Verlag, 1.958. (A-699)
14. BRYANT, V., *Aspects of Combinatorics*, Cambridge University Press, 1.993. (A-6.815)
15. KAUFMANN, A., *Introducción a la Combinatoria y sus aplicaciones*, C.E.C.S.A., 1.971. (A-4.021)
16. LYNDON, R., *Combinatorial group theory*, Springer Verlag, 1.977. (A-4.971)
17. RIORDAN, J., *An introudtion to Combinatorial Analysis*m, Princeton University Press, 1.978. (A-5.935)

GRAFOS:

1. BALABAN, A. (ed.), *Chemical applications of graph theory*, Academic Press, 1.976. (A-4.504)
2. BARTHÉLEMY, J. y GUENOCHE, A., *Trees and proximity representations*, Wiley, 1.991. (A-6.873)
3. BOLLOBÁS, B., *Graph theory. An introductory course*, Springer, 1.979. (A-4.999)
4. BOLLOBÁS, B., *Random graphs*, Academic Press, 1.985. (A-5.808)
5. BUSACKER, R. y SAATY, T., *Finite graphs and networks, an introduction with applications*, McGraw-Hill, 1.965. (A-2.940)
6. FULKERSON, D. (ed.), *Studies in Graph Theory*, vol. I, MAA Studies in Mathematics vol.11, The Mathematical Association of America, 1.975. (A-4.689)

7. FULKERSON, D. (ed.), *Studies in Graph Theory*, vol. II, MAA Studies in Mathematics vol.12, The Mathematical Association of America, 1.975. (A-4.620)
8. GROSSMAN, I. y MAGNUS, W., *Groups and their graphs*, NML vol. 14, The Mathematical Association of America, 1.964. (A-4.833)
9. KAUFMANN, A., *Graphs, dynamic programming and finite games*, Academic Press, 1.967. (A-2.581)
10. MIRKIN, B. y RODIN, S., *Graphs and Genes*, Biomathematics, vol. III, Springer, 1.984. (A-5.916)
11. SAATY, T. y KAINEN, P., *The four color problem. Assaults and conquest*, McGraw-Hill, 1.977. (A-5.013)
12. TUTTE, W., *Graph Theory*, Encyclopaedia of Mathematics and its applications 21, Addison-Wesley, 1.984. (A-6.154)

CODIGOS:

1. RAY-CHAUDHURI, D. (ed.), *Coding theory and design theory. Part I, Coding theory*, Springer, 1.990. (A-6.688)
2. RAY-CHAUDHURI, D. (ed.), *Coding theory and design theory. Part II, Design theory*, Springer, 1.990. (A-6.689)
3. THOMPSON, T., *From error-correcting codes through sphere packings to simple groups,* The Carus Mathematical Monographs, The Mathematical Association of America, 1.983. (A-5.766)

HANDBOOK OF COMBINATORICS

Editores R. L. Graham, M. Grötschel y L. Lovász, Amsterdan y Cambridge; Elsevier and the MIT Press, 1.966. 2 volúmenes, 2.350 páginas.

El crecimiento explosivo de la matemática discreta en los últimos 20 años ha ido de acuerdo con el crecimiento en el conocimiento público y el uso de las computadoras, las cuales son inherentemente discretas, y con el crecimiento de las matemáticas y ciencias en general durante los años post-Sputnik. El tema es ahora sumamente vasto y diverso, comprendiendo enumeración, grafos, aleatoriedad, algoritmos, análisis de complejidad, códigos, matroides, lenguajes formales, optimización, geometría discreta, funciones especiales e identidades, conjuntos parcialmente ordenados, combinatoria algebraica, estimación asintótica, teoría de Ramsey, teoría de conjuntos extremales, etc., lo que implica que no puede haber una enciclopedia de combinatoria. Pero existe realmente un Handbook of Combinatorics, y es un soberbia exposición de muchos de los aspectos del tema, escrito por aquellos que crearon y/o enriquecieron el campo sobre el que ellos escriben.

Es una colección de 44 "capítulos" individuales, muchos de los cuales son realmente libros en si mismos, con la organización, longitud, alcance y bibliografía, etc., que uno espera encontrar en un libro.

Por ejemplo, el capitulo 22 trata de Métodos asintóticos de enumeración, cuyo autor es Andrew Odlyzko, y tiene alrededor de 170 páginas, incluyendo una bibliografía de 17 páginas. Tomado en sí mismo, este capítulo es un excelente libro sobre asintótica, y puede compararse solamente con el clásico de Bruijin, 'Asymptotic methods in analysis', de 1.958, del cual es en parte digno sucesor, en parte puesta al día y en parte complementario.

El capítulo 25 es la teoría de Ramsey. Bien, si hay un capítulo con un título absoluto como este, debe contener una parte autorizada sobre el estado del arte en el tema, escrito por un experto. Y es así. Jacoslav Nesetrïl es el autor, y el ha escrito un survey espléndido y autocontenido de la teoría de Ramsey, con una bibliografía, a la cual recomiendo sin hesistar que la consulte cualquier estudiante brillante o graduado (o un colega, o yo mismo!) para un curso en el tema. El primer capítulo, Teoría de grafos básica, caminos y circuitos, por J. A. Bondy, es un minilibro de 108 páginas, claro y sagaz, con una bibliografía de 17 páginas, y parece fácilmente el mejor "libro" conseguible en el área.

Aquí está la lista de todos los capítulos: teoría básica de grafos; caminos y circuitos; circuitos de flujo y conectividad; coordinación y extensiones; coloreado, conjuntos estables y grafos perfectos: inversiones y menores; grafos aleatorios; hipergrafos; conjuntos parcialmente ordenados; matroides; matroides menores; optimización de matroides y algoritmos; grupos de permutación; geometrías finitas; diseño de bloques; esquemas de asociación; códigos; problemas extremales en geometría combinatoria; politopos convexos y complejos relacionados; reticulados puntuales; teoría de números combinatoria; enumeración algebraica; métodos de enumeración asintótica; teoría de grafos extremales; sistemas de conjuntos extremales; teoría de Ramsey; teoría de la discrepancia; grupos de automorfismos, isomorfismos, reconstrucción; optimización combinatoria; complejidad computacional; combinatoria poliédrica; herramientas de álgebra lineal; herramientas de álgebra superior; métodos probabilísticos; métodos topológicos; combinatoria en investigación operativa; combinatoria en ingeniería eléctrica y estática; combinatoria en física estadística; combinatoria en química; aplicaciones de la combinatoria a la biología molecular; combinatoria en ciencias de la computación; combinatoria en matemática pura; combinatoria infinita.

Los capítulos en su mayoría están al día, y han sido escritos desde el punto de vista sofisticado que uno siempre espera de los expertos. El capítulo de B. Bollobás sobre teoría de grafos extremales es un buen ejemplo de ello. Es una narración de lo que se conoce, de lo nuevo, lo que no se sabe, y como todo esto actúa conjuntamente con una bibliografía profusa, es una comida deliciosa para la inteligencia. El nivel de los capítulos es bastante consistente con la idea de "aquí hay un mapa de la frontera", y los autores tratan de decirle a uno exactamente que es lo conocido y cuales son las principales preguntas por responder. Se siguen altos estándares de aliento y profundidad, casi sin excepción.

Los editores deben ser premiados no solamente por la concepción del trabajo, sino por los detalles, que los hay miles. La uniformidad del formato de los capítulos, las hermosas y comprensivas bibliografías, las inusuales, y virtualmente sin precedentes en estos trabajos, referencias cruzadas entre capítulos, la completitud del índice, la rareza extrema de la tipografía y la impecable elección que han hecho de los contribuyentes, todo contribuye a la calidad del trabajo editorial.

¿De qué podemos quejarnos?. Esto es por supuesto una cuestión muy subjetiva, y que aquí está la réplica del comentarista. A mi me gusta contar objetos. Hago combinatoria principalmente porque me gusta contar objetos, pero estos dos volúmenes enfatizan otras áreas del tema. Pero "contar cosas" está en el corazón de la combinatoria, y un número de sus brillantes estrellas no está en estos volúmenes. No encontré los resultados recientes importantes sobre las tablas de Young, sobre la combinatoria de palabras, sobre demostración automática de identidades y manipulaciones simbólicas en general y sobre lenguajes formales. Los triunfos de la teoría de lenguajes formales, debida en gran parte a Marcel Schützenberger, cuando fueron aplicadas por el grupo LABRI (Viennot, Delest, Bousquetmélon, etc., en Bordeaux) al conteo de muchas variedades de poliominoes (polyominoes; N.T.: un poliomino es una unión finita P de cuadrados unitarios en el plano tales que los vértices de los cuadrados tienen coordenadas enteras, y P es conexo y no tiene un conjunto finito de corte). El arte de la biyección ha sido pulido muy recientemente, con un gran trabajo realizado sobre particiones enteras, caminos reticulados, y tablas, para mencionar unas pocas áreas. Un capítulo maravilloso, o aún algunos pudieron ser escritos sobre métodos biyectivos, pero no hay ninguno. Los nombres de muchas de las figuras más importantes en combinatoria enumerativa aparecen aquí no muy frecuentemente. La razón de estas omisiones, por supuesto, es que los editores apuntan a otras direcciones. Ellos observan en el prefacio que "es inevitable que algunas áreas sean dejadas de lado...". La brillante calidad de la mayoría de los contribuyentes a los volúmenes en cuestión me da esperanzas de un tercer volumen, que podría subsanar algunas de las omisiones mencionadas.

Un trabajo de esta envergadura invita a hacer algunas medidas estadísticas. Los dos volúmenes juntos pesan 5 libras, y cuestan u$a 300, lo que representa u$a 60 por libra. Esto se compara con, por ejemplo, alrededor de u$a 26 por libra para A = B, del cual yo soy uno de los autores y por lo tanto, por unidad de precio base, somos los mejores pagos por libra.

El índice, que es absolutamente magnífico, contiene información sobre los trabajos de Paul Erdös, citados en 173 páginas, es decir, alrededor de un 6.2% de todas las páginas, un bello tributo a sus numerosas contribuciones seminales en el tema. (N. T.: P. Erdös falleció el 20 de setiembre de 1.996, en Varsovia).

La matemática discreta es afortunada de tener una fuerza tan creativa en su seno.

La matemática discreta es también afortunada de tener el Handbook de Combinatorics en su bibliografía.

Será una referencia estándar en el tema para trabajadores y estudiantes en este campo por un largo tiempo.

Herbert S. Wilf

Traducido del *Mathematical Intelligencer*, Vol. 19, N°2, Primavera 1.997, pág. 68,69.

PUESTAS AL DIA:

A) El volumen 17 de los MAA Studies in Mathematics: Studies in Combinatorics, cuyo editor es Gian Carlo Rota, es un excelente libro, editado en 1.978, para iniciarse en algunos temas. Los capítulos son:

0. Introducción (Gian Carlo Rota).
1. Teoría de matrices combinatoria (H. J. Ryser).
2. Técnicas de demostración en la teoría de conjuntos finitos (C. Greene y D. Kleitman)
3. Teoría de Ramsey (R. L. Graham y B. L. Rothschld)
4. Funciones generatrices (R. P. Stanley)
5. Métodos no constructivos en matemática discreta (J. Spencer)
6. Matroides y geometría combinatoria (T. Brylansky y D. G. Kelley)
7. Construcciones combinatorias. (M. Hall, Jr.). (A-5.467)

B) Enumerative Combinatorics, Vol. I, Richard P. Stanley, Wadsworth & Brooks, 1.986. (A-6.534)

CAPITULO 8: ANILLOS Y ALGEBRAS (P. M. COHN)

8.1.INTRODUCCION:

La abstracción es la marca de fábrica del álgebra moderna. Si examinamos las leyes y operaciones del sistema numérico usual, pero haciendo abstracción de la naturaleza de los números, llegamos a la noción de *anillo*, o de *cuerpo*, si se permite la división. El desarrollo de la teoría de anillos se hizo en dos direcciones. Por una parte, los cuaterniones y álgebras de matrices dieron lugar a las álgebras asociativas (y a veces no asociativas) lineales, las cuales evolucionaron hacia el estudio de anillos artinianos y, más recientemente, noetherianos. Por otra parte, están los anillos de enteros algebraicos, que son esencialmente anillos de Dedekind, que aparecen también en geometría algebraica como anillos coordenados de curvas y los cuales dan forma a un campo muy activo de estudio: teoría de anillos conmutativos, el que, especialmente en las últimas décadas, ha recibido ímpetus a partir de la geometría algebraica.

Varios tipos de álgebras no asociativas aparecen con bastante naturalidad en diferentes contextos, por ejemplo, las *álgebras de Lie*, en estrechos vínculos con los grupos (tanto finitos como infinitos). Estudiando la estructura subyacente de grupo o álgebra, uno es llevado a la noción de reticulado, lo que a su vez está estrechamente relacionado con álgebras de Boole en lógica y sistemas algebraicos ordenados (ver 6.11). Haciendo un análisis más profundo de los grupos y álgebras se rescata la noción de grupo y transformación (mapping). Esto nos conduce al concepto de categoría, que provee de un lenguaje apropiado para estudiar álgebras y también otras partes de la matemática, además de ser un tema que se estudia por derecho propio. Crece a partir de métodos del álgebra homológica desarrollados por el año 1.940 para describir técnicas de topología algebraica, pero desde entonces ha devenido una herramienta indispensable para el álgebra misma.

8.2.ANILLOS ASOCIATIVOS:

La mayoría de los cursos incluye alguna discusión de anillos, en particular, el ejemplos de los números enteros y el anillo K[X] de los polinomios en una indeterminada x sobre el cuerpo K. Entre las propiedades de los números enteros y de K[X], el *Algoritmo de Euclides*, juega un papel fundamental. Además del interés en sí mismo, sirve para establecer la unicidad de la factorización y el hecho de que estos anillos son anillos a ideales principales. Muchas de las propiedades básicas de los anillos pueden verse en estos ejemplos, entre ellas, las congruencias conducen a la noción de clases residuales; en un nivel más avanzado el completamiento de un anillo local se ilustra con el ejemplo de los números p-ádicos; los aspectos más formales de la teoría de espacios vectoriales pueden establecerse en el marco de los módulos sobre un anillo general. Un tratamiento invariante (es decir, sin coordenadas) de los espacios vectoriales nos prepara mejor para trabajar con módulos, donde las bases pueden no existir. Un primer curso debe tratar con las propiedades generales, por ejemplo, teoremas de isomorfismos, que pueden ser enunciados para grupos de operadores, de modo de aplicarlos a módulos, y, modificados convenientemente, a los anillos mismos. De aquí puede seguirse con la clasificación de módulos sobre anillos de integridad principales, útiles en sí mismos por la reducción de matrices. Todos estos temas son tratados en la mayoría de los textos para alumnos, por ejemplo: Jacobson [1], Herstein [2], Lang [3] y Cohn [4], y su conocimiento se asume en cualquier discusión más avanzada.

Las matrices, especialmente sobre números reales y complejos, han sido estudiadas bastante, pero no nos concierne en este apartado. Sin embargo, se debe hacer mención de un reciente trabajo de Gelfand, Ponomarev y otros matemáticos, tratando problemas de clasificación de álgebra lineal por diagramas análogos a los diagramas de Coxeter-Dynkin para álgebras de Lie semisimples. Ver Bernstein, Gelfand y Ponomarev [5], [6], Gabriel [7], [8], Dlab y Ringel [9] y Ringel [10].

La parte central de la teoría de anillos es la clasificación de los anillos semisimples, en particular, los teoremas de Wedderburn. Hay dos aproximaciones principales. La primera es vía módulos semisimples (es decir, completamente reducibles), posiblemente usando álgebra homológica. La otra es vía la teoría de estructuras Jacobson, que permite llegar al resultado con un mímimo de hipótesis. El radical de Jacobson puede definirse para cualquier anillo (aún sin unidad) y, para anillos artinianos, éste se reduce al conjunto de los elementos propiamente nilpotentes. Los teoremas de densidad se aplican a cualquier anillo primitivo, pero nuevamente, para anillos artinianos nos conducen a los teoremas de Wedderburn. Una de las principales aplicaciones es la teoría de representaciones para grupos finitos de característica cero (o un número primo con el orden del grupo) Para un estudio de esto ver Curtis y Reiner [11], pero las nociones básicas pueden encontrarse en la mayoría de los textos para graduados, por ejemplo Lang [3] o Cohn [12].

Un importante desarrollo es la teoría de los anillos de Artin que no son semisimples. Estos anillos aparecen en el estudio de representaciones de grupos sobre cuerpos cuya característica divide al orden del grupo (representaciones modulares).Aquí el álgebra tiene una dualidad que ha sido estudiada en abstracto bajo el nombre de *Algebra de Frobenius*. Una forma más débil, el *anillo cuasi-Frobenius* (un anillo artiniano en el cual cada ideal lateral es un anulador) ha sido objeto de un estudio independiente, ver Curtis y Reiner [11]. Se ha trabajado mucho en este contexto más general, especialmente en el estudio de los módulos indescomponibles; ver Roiter [13].

Así como los enteros sirven como prototipo de un anillo, los números racionales son un modelo de un cuerpo. Aunque los cuerpos numéricos algebraicos fueron estudiados bastante en el siglo 19, los fundamentos para su estudio general están en el trabajo clásico de Steinitz [14]. La mayor parte de esto, junto a la teoría de Galois, está en los libros más usuales (por ejemplo Jacobson [15], Lang [3] o Cohn [12]). Otros desarrollos de la teoría de cuerpos están en la dirección de la teoría de funciones (Chevalley [16]), geometría algebraica (Safarevich [17]) o teoría de números (Lang [18]). Hay también bastante trabajo anterior que aguarda ser considerado nuevamente, por ejemplo, sobre ecuaciones con grupo icosahédrico; una fuente excelente para este material es Weber [19]. En algunas de estas cuestiones, por ejemplo el problema de Noether (determinación del cuerpo fijo sobre un grupo de permutaciones actuando sobre una extensión puramente trascentente) ha habido un progreso considerable; para un survey lúcido realizado por uno de sus principales cultores, ver Lenstra [20]. La teoría de Galois ha sido generalizada para tratar con ciertas extensiones de anillos conmutativos por Chase, Harrison y Rosenberg [21].

Mucho menos se conoce sobre anillos con división (que no son necesariamente conmutativos), aunque aparecen naturalmente en el lema de Schur y en el teorema de densidad. La mayoría de lo que se conoce se refiere a los anillos con división de dimensión finita sobre su centro. Tales álgebras con división son un caso especial de álgebras centrales simples, las que fueron estudiadas extensivamente alrededor de 1.930. Las álgebras centrales simples sobre un cuerpo K dado se dividen en dos clases de álgebras similares, y esas clases forman un grupo, llamado el *grupo de Brauer* de K, que a su vez es invariante homológico básico de K. Un trabajo excelente, aunque condensado es el de Deuring [22]; para un tratamiento más moderno, ver Serre [23], Weil [24] o Reiner [25]. La estructura del grupo de Brauer de Q puede ser completamente determinada, pero requiere algunos resultados de teoría de cuerpo de clases, (ver Cassels y Fröhlich [26]). Usando métodos homológicos se puede definir el grupo de Brauer para cualquier anillo conmutativo A (Auslander y Goldman [27]) como un grupo de clases de semejanzas de A-álgebras centrales separables (es decir, álgebras de Azumaya sobre A, ver Azumaya [28]) y varios resultados de la teoría clásica permanecen válidos en este contexto. La motivación para estos trabajos proviene de la geometría algebraica (ver Grothendieck [29]), pero hay actualmente tratamientos puramente algebraicos, como los de Knus y Ojanguren [30], y para una introducción relativamente autocontenida, Orzech y Small [31].

Los anillos con división de dimensión infinita sobre su centro aparecieron por primera vez en Hilbert [32], donde se muestra que anillos con división ordenados no necesitan ser conmutativos. Estos anillos habían aparecido en ejemplos aislados (Koethe [33]), así como en la construcción de Ore [34] del anillo con división de un anillo con la "condición de Ore". En Cohn [35], se obtiene un análogo para anillos con división de la construcción para grupos de Higman-Neumann-Neumann, y esto es usado por Macintyre [36] para construir un anillo con división con un problema de palabras insoluble, y por Hirschfeld y Wheeler [37], quienes exhiben modelos de aritmética de segundo orden en un anillo con división existencialmente cerrado, y también obtuvieron una forma no conmutativa del Nullstellensatz. Para un estudio preliminar de técnicas en este área ver Cohn [38]; también Cohn [39] para un criterio general para la inmersión de un anillo en un anillo con división y Cohn [40] para un programa de "geometría algebraica no conmutativa".

En una dirección ligeramente diferente, la aritmética en álgebras simples conduce a la teoría de órdenes maximales. Esto se originó en el estudio de anillos de grupos; si G es tal álgebra de grupo sobre Q, el subanillo ZG es un orden, aunque no generalmente maximal. La teoría fue formulada por Brandt, quien probó que los ideales forman un grupoide bajo multiplicación (llamado grupoide de Brandt); ver Deuring [22] y Jacobson [41]. Posteriormente, la teoría fue generalizada y estudiada bajo el punto de vista homológico, en términos de "órdenes hereditarios", por Auslander y Goldman [42], Brumer [43] y Harada [44]; ver también Reiner [25].

Los anillos de grupos han sido estudiados también para grupos infinitos; aquí el propósito ha sido relacionar propiedades de un grupo con propiedades del anillo (Hall [45]). Un relato comprensible está en Passman [46], puesto al día en Passman [47], pero hay cuestiones básicas abiertas: ¿puede en anillo grupal (sobre Z) de un grupo sin torsión tener divisores de cero?. Resultados notables en esta dirección fueron obtenidos por Lewin y Lewin [48], quienes probaron que el anillo grupal de un grupo sin torsión con una relación puede ser sumergido en un anillo con división, y Farkas y Snider [49], que probaron lo mismo para grupos policíclicos sin torsión.

Mientras que la teoría de Wedderburn para álgebras fue extendida en un primer momento para anillos artinianos (Artin [50]) no pueden esperarse extensiones de este tipo para anillos noetherianos. El sustituto correcto a esta situación fue encontrado por Goldie [51], que usó la construcción de Ore, convenientemente generalizada (Asano [52]) para probar que un anillo noetheriano (semi)-primo tiene un anillo de fracciones que es (semi)-simple artiniano. Este resultado clave dio lugar a mucha actividad en anillos noetherianos; para exposiciones de varios aspectos ver Lambek [53] y Faith [54]. Un estudio interesante de anillos de Dedekind no conmutativos fue hecho por Robson [55].

La construcción de Ore y sus generalizaciones fueron tomadas por Gabriel [56], quien dio un tratamiento con categorías de la localización, que condujo a las teorías de torsión para categorías abelianas, y más particularmente anillos de cocientes. Un survey muy útil fue dado por Stenström [57] (ver también Golan [58]), pero la teoría probablemente no ha alcanzado aún su forma definitiva. Otras importantes contribuciones son las de Lambek [59]-[61], Goldman [62], y Walker y Walker [63]. Para trabajos relacionados en diferentes direcciones, ver Goodearl, Handelman y Lawrence [64].

Anillos que satisfacen identidades polinomiales, brevemente anillos P.I.-anillos, aparecen primero en el estudio de los fundamentos de la geometría; ver Dehn [65] y Wagner [66]. Desarrollos posteriores mostraron cierto paralelo con los anillos noetherianos, con el teorema de Posner correspondiendo al teorema de Goldie. El tema ha sido desarrollado en una serie de trabajos de Kaplansky, Levitzki, Amitsur, Procesi y otros. Por cuestiones conectadas, ver Procesi [67]. Un resultado notable es la construcción de polinomios centrales para anillos de matrices por Formanek [68], e independientemente por Razmyslov [69], [70]. Además de su interés en sí mismos, estos temas han conducido a demostraciones más simples del teorema de Posner (Rowen [71]) y de otros resultados. Las álgebras de Azumaya fueron caracterizadas por identidades polinomiales por Artin [72]; su demostración fue simplificada por Amitsur [73], Procesi [67] y Goldie [74]; ver también Cohn [12].

Los analistas han estudiado el anillo de los operadores diferenciales lineales y probaron una propiedad de factorización única para ellos. Esto pasó por diversas generalizaciones hasta que Ore [75] trató ecuaciones diferenciales formales y anillos de polinomios inclinados por el algoritmo de Euclides. Cohn[76] observó que una forma útil del algoritmo vale para una amplia clase de anillos, incluyendo álgebras libres, y es suficientemente fuerte para permitir derivar conclusiones similares. Una exposición puede encontrarse en Cohn [39], que incluye el teorema centralizador de Bergman (Bergman [77]), y el skew polynomial ring iterado de Jategaonkar (Jategaonkar [78]).

La estructura de las álgebras de Weyl (que ocurren en mecánica cuántica), y álgebras envolventes de Lie han dado lugar a mucha actividad, cuyos resultados han sido reunidos por Dixmier [79]; ver también Gelfand y Kirillov [80]. Bernstein [81] renovó el interés en anillos de operadores diferenciales; ver también Björk [82]. Los cuerpos diferenciales han sido estudiados desde el punto de vista de las funciones en lugar de los operadores. Esto fue iniciado por Ritt [83]; luego vienen los trabajos de Kolchin y otros resumidos en Kolchin [84]. Ver también Kaplansky [85], y para el tema relacionado con las álgebras diferenciales, Cohn [86].

Estrechamente relacionado con las álgebras libres es el estudio de los productos libres o "co-productos" (Cohn [87], [88]). Bergman [89] prueba teoremas fuertes de estructuras de módulos sobre co-productos de anillos, lo cual, en efecto, permite la construcción de un anillo, en el cual el monoide de proyectivos finitamente generados tiene una estructura prescripta.

Desde el punto de vista de las categorías, una K-álgebra puede definirse como un módulo A con dos operaciones: multiplicación $A \times A \to A$ y un elemento unitario $K \to A$, tal que ciertos diagramas conmuten. Si todas las flechas son invertidas, se obtiene una *co-álgebra*. Un módulo donde ambas estructuras (álgebra y co-álgebra) sean compatibles se denomina un *álgebra de Hopf* (ya que Hopf usó esta estructura sobre el anillo de co-homología de un grupo de Lie). Un álgebra de grupo tiene una estructura natural de álgebra de Hopf, así como la envolvente asociativa de una álgebra de Lie, y las álgebras de Hopf aparecen naturalmente en muchos otros contextos; para una introducción ver Sweedler [90]. Las álgebras de Hopf también prometen ser de importancia en el estudio de cuerpos inseparables, ver Chase [91], Sweedler [92].

8.3.ANILLOS CONMUTATIVOS:

El término anillo aparece por primera vez en el "Zahlbericht", de Hilbert [93], donde se refiere al anillo de los enteros en un cuerpo algebraico numérico. La teoría de ideales de tales anillos fue descripta por Dedekind [94], a quien le debe el nombre. En geometría algebraica se necesita una clase más general de anillos (los anillos de Dedekind son sólo unidimensionales) y para este propósito fue desarrollada en principios de siglo la teoría de los anillos de polinomios, y luego rápidamente formulada en el contexto más general de los anillos "noetherianos", por Noether [95]. Le siguió un vigoroso desarrollo, debido principalmente a Noether, Krull, Prüfer y otros, que está comentado en Krull [96]. Mientras tanto prosiguió la algebrización de la geometría, y Zariski [97] da un tratamiento algebraico de varias nociones geométricas. En particular, el concepto de anillo local regular (que fue introducido por Krull [98] bajo el nombre de p-Reihenring, y luego desarrollado por Chevalley [99] y Cohen [100]) corresponde a un punto simple de una variedad algebraica. Estos anillos fueron caracterizados homológicamente y se probó que son dominios de factorización única (Serre [101], Auslander y Buchsbaum [102]), y un buen número de mejoramientos técnicos, notablemente el lema de Artin-Rees (Rees [103]), permiten que el estudio de completamientos sea aplicado en el caso (noetheriano) general.

Varios libros con estos temas han aparecido en los últimos cuarenta años. Northcott [104] da una introducción breve pero leíble; para un tratamiento completo y aún placentero de los elementos (incluyendo teoría de cuerpos) hasta anillos locales regulares, ver Zariski y Samuel [105]. Nagata [106] cubre bastante más (incluyendo Henselisation y anillos de series de potencias), presentando ejemplos ingeniosos, todo en forma más concisa. Las notas de Serre [107] dan un tratamiento de multiplicidades de intersección. Kaplansky [108] da un tratamiento suave de partes selectas (no completamiento) con ejercicios sustanciales. Atiyah y Macdonald [109] es un relato introductorio con excelente tratamiento de teoría de la dimensión y con ejercicios para enfatizar la analogía geométrica. En mayor escala, aunque aún elemental, está Bourbaki [110], cuyos 7 capítulos (más de 700 páginas y 500 ejercicios) van desde módulos playos y localización hasta anillos de Krull. En 1.960 comenzaron a aparecer los "Elementos de geometría algebraica" de Grothendieck, que tuvieron una profunda influencia en el desarrollo del álgebra conmutativa. Quizá la mayor novedad fue que fueron utilizados los métodos homológicos más ampliamente que antes y en un contexto geométrico que hizo progresar bastante al tema, el cual trasladado nuevamente al álgebra brindó nuevos puntos de vista a la teoría de anillos conmutativos, pero la complejidad del aparato matemático hizo que esta transferencia se hiciera en forma lenta.

8.4. CATEGORIAS Y ALGEBRA HOMOLOGICA:

El álgebra homológica se desarrolló debido a los esfuerzos realizados para dar una descripción invariante de grupos de homología, en una serie de trabajos de Eilenberg y MacLane, así como de Hurewicz, Horschild y otros. La referencia básica es Cartan y Eilenberg [111]; a pesar de los progresos sucesivos en el área, es aún un excelente libro de referencia. Una introducción breve y muy clara puede encontrarse en el libro de Godement [112]. Un trabajo mayor poniendo énfasis en las motivaciones geométricas es MacLane [113], y un trabajo posterior enfatizando las extensiones de grupos es Hilton y Stammbach [114].

La teoría de categorías, en principio fue desarrollada como parte del álgebra homológica, pero gradualmente devino un tema independiente, con sus resultados y problemas propios. Uno de los trabajos básicos es Grothendieck [115]; aquí se desarrolla la teoría de categorías abelianas para utilizarla en teoría de haces. Una introducción breve y leíble es Freyd [116]; un tratamiento más completo es Mitchell [117], MacLane [118] es más moderno (aunque no tan elemental como el título sugiere), Bucur y Deleanu [119] es más orientado hacia las aplicaciones en teoría de anillos, y Herrlich y Strecker [120] contiene un amplio tratamiento de los fundamentos, con una bibliografía de 50 páginas. Algunas nociones que no son realmente algebraicas, tales como completamiento, han sido estudiadas en el contexto de las categorías (ver, por ejemplo, Lambek [59]), y las categorías han sido usadas en el estudio de los fundamentos de la teoría de conjuntos, especialmente por Lawvere [121].

Un concepto básico que aparece en diferentes contextos es el de *construcción universal*. Puede resumirse bajo la noción de *functor adjunto*; las condiciones para su existencia son descriptas por el teorema del functor adjunto (ver Freyd [116] y MacLane [118]). Este dio origen a la noción de *triple* (también denominado *monad*), lo cual incluye no solamente las construcciones universales en álgebra, sino también otros casos tales como la compactificación de Stone-Cech (ver el simposio editado por Eckmann [122]).

El álgebra homológica ha tenido un profundo efecto en la teoría de anillos. Para cualquier anillo R, la categoría M_R de los R-módulos a derecha es una categoría abeliana y las nociones categóricas, como módulos inyectivos o proyectivos y la dimensión global, proveen invariantes básicos (Kaplansky [123], Bass [124]). La cápsula inyectiva es una construcción útil de un módulo (aunque en la mayoría de los casos no es exactamente "constructiva"), la cual está en la base de las teorías de torsión para anillos, así como la descomposición de Matlis-Gabriel para módulos sobre anillos noetherianos (Mathis [125] y Gabriel [56], [126]). La noción dual de cubrimiento proyectivo no necesariamente existe; condiciones precisas para su existencia han sido estudiadas por Bass [127], y esto ha conducido a la noción de anillo perfecto y semiperfecto (ver Björk [128]). Otro estudio interesante es el de la falta de simetría de M_R realizado por Chase [129]. La dimensión homológica de anillos y módulos es examinada en una larga serie de trabajos en los '50 en el *Nagoya* y *Pacific Journal of Mathematics*. En particular, *anillos hereditarios* (es decir, de dimensión global a lo sumo 1) fueron estudiados desde diferentes puntos de vista; ver, por ejemplo, Small [130], Jategaonkar [78] y Bergman [131]. Para un camino en el cual entran en discusión cuestiones de teoría de conjuntos, ver Osofsky [132]. La dimensión global de anillos de operadores lineales diferenciales, y más generalmente las álgebras de Weyl, han sido examinadas por Rinehart [133], Roos [134] y Björk [135]. La noción de dimensión ha sido aplicada a las categorías abelianas mismas tomando M_R como 0-dimensional y haciendo una "resolución modular" por categorías de la forma M_R ,ver Roos [134].

Morita [136] ha hecho un estudio detallado de la dualidad entre módulos y categorías. Esto llevó a Chase, Schanuel, Bass y otros a examinar el caso de equivalencia entre categorías modulares, y esto dio lugar a la noción de *equivalencias de Morita* para anillos, que llegó a ser el principio de clasificación más útil; ver Bass [137] y Cohn [138], para un estudio detallado, Bass [139], [140].

Con posterioridad se comprendió que el álgebra lineal puede en principio ser hecha para módulos sobre un anillo arbitrario, una vez que hayan sido reconocidos los grupos de obstrucción adecuados. Esto condujo al desarrollo de la K-teoría (cuyos ímpetus provienen de la topología y geometría algebraicas), y cuyos primeros éxitos fueron los teoremas de estabilidad dados por Bass [141], y Bass, Heller y Swan [142], usando el modelo de la geometría algebraica dado por Serre [143]. Un tratamiento más detallado, en el que se conectan distintas partes del álgebra y teoría de números, y que da un panorama informativo del álgebra de categorías para los teóricos de los anillos, está en Bass [140]. Bass, en un conjunto de notas anteriores [139], trata con más detalles el caso de las formas cuadráticas. Todas estas referencias se concentran en los grupos K_0 y K_1 ; fue luego de experimentaciones prolongadas que se encontraron formas satisfactorias para los grupos K_2 y K-grupos superiores. Este fue principalmente el trabajo de Quillen, fundado en los resultados de Bass, Swan, Gersten, Villamayor y otros, y esta descripto en los Proceedings of the Battelle Institute Conference (Bass [144]). El grupo K_2 fue estudiado para cuerpos globales por Bass y Tate; ver Tate [145] y, para una descripción conexa, Milnor [146].

8.5.ALGEBRAS DE LIE Y OTRAS ALGEBRAS NO ASOCIATIVAS.

Las álgebras de Lie aparecieron primero como anillos de operadores diferenciales lineales en un grupo de Lie (es decir, el grupo continuo). El mejor ejemplo conocido es el espacio de vectores 3-dimensional con la operación de multiplicación vectorial. Esta es justamente el álgebra de Lie del grupo de vectores tridimensional. La clasificación de las álgebras de Lie semisimples fue comenzada por Killing y completada por E. Cartan [147] en su tesis. La serie de trabajos de Weyl [144] sobre representación de grupos de Lie semisimples es bastante leíble, y aún de interés. La referencia estándar moderna de la teoría de álgebras de Lie es Jacobson [149]; la clasificación actual es en términos de los diagramas de Coxeter-Dynkin, los cuales aparecen en muchos otros contextos (ver Coxeter [150] para la clasificación de grupos de rotación finitos). Se ha trabajado mucho sobre la representación de álgebras de Lie, en particular con vistas a las aplicaciones físicas. Zassenhaus [151] estudió la conexión de las álgebras de Lie con grupos finitos y fue seguido por Lazard [152]. Para una descripción de la analogía con la teoría de los grupos infinitos, ver Amayo y Stewart [153].

En el estudio de los grupos de Lie formales, el algebra de Lie es menos prominente, ya que no es suficiente determinar el álgebra de Lie en característica distinta de cero (el caso de principal interés). Su lugar es ocupado por una cierta álgebra de Hopf (también denominada bigebra), ver Dieudonné [154] y Manin [155].

Desde un punto de vista formal, las álgebras de Jordan son paralelas a las álgebras de Lie; en efecto, éstas no están tan estrechamente ligadas a las álgebras asociativas como las álgebras de Lie, pero tienen una rica historia. Una descripción apropiada es Jacobson [156]; otro punto de vista que las relaciona más estrechamente con los grupos algebraicos (y usa la teoría de clasificación de esta última) es adoptado por Springer [157]. Vinberg [158] usa las álgebras de Jordan en el estudio de dominios convexos, y (aparte de las aplicaciones originales a la mecánica cuántica) las álgebras de Jordan y los sistemas triples de Jordan también entran en el estudio de la geometría diferencial; ver Loos [159]. Para una descripción de las álgebras excepcionales de Jordan y su conexión con las álgebras de Lie, ver Jacobson [160].

El álgebra alternativa mejor conocida es el álgebra de Cayley-Dickson (octoniones), formada por los cuaterniones en la misma forma que estos últimos están formados a partir de los números complejos. Su rol es clasificado por el teorema de Bruck-Kleinfeld (Bruck y Kleinfeld [161] y Skornyakov [162]). Dorofeev [163] obtuvo resultados que muestran que los anillos libres alternativos se comportan en forma muy diferente tanto de los anillos asociativos libres como de los de Lie libres.

Además de estas álgebras hay muchos otros tipos de álgebras no asociativas, usualmente definidas por identidades, que fueron estudiadas en varios momentos; ver Albert [164] y Schafer [165], y para una descripción más reciente McGrimmon [166].

Una generalización diferente de un anillo se obtiene dando una ley distributiva y una ley conmutativa de la adición. La estructura resultante es un *anillo cercano*; aparece naturalmente como el conjunto de aplicaciones de un grupo abeliano en sí mismo. El estudio de anillos cercanos condujo a los *cuerpos cercanos*, cuyo uso es útil para el estudio de los planos proyectivos y se remonta a Dickson. La clasificación de near fields finitos (Zassenhaus [167]) fue utilizada por Amitsur [168] para determinar todos los subgrupos finitos de anillos con división. Para un relato de near fields, ver Wähling [169].

8.6. MONOIDES Y SISTEMAS MAS GENERALES:

El estudio de la multiplicación en su forma más pura conduce naturalmente a los *semigrupos* (sistemas con una multiplicación asociativa) o *monoides* (semigrupos con unidad). Los monoides no tienen la misma importancia que los grupos, pero han sido estudiados bastante, ver Lyapin [170], y para una descripción de todo el tema, Clifford y Preston [171]. La teoría de estructura principal es debida a Suschkewitsch, Rees, Green y Schützenberger. Una buena introducción puede encontrarse en Howie [172].

Los monoides juegan un papel en teoría de códigos (un código comma-free es esencialmente un conjunto libre en un monoide libre), y sobre esto han trabajado mucho

Schützenberger y su escuela. La teoría algebraica de lenguaje y teoría de autómatas también tiene estrechos vínculos con los monoides; ver Gross y Lentin [173]. Un desarrollo comprensivo del tema, que generaliza y unifica lo conocido es Eilenberg [174]; para una descripción breve de teoría de lenguajes ver Cohn [175]. Muchos de los trabajos de la revista *Information and Control* tratan estos temas. Los aspectos de la teoría de autómatas son enfatizados en Arbib [176]. Un estudio de los monoides desde este punto de vista (incluyendo la noción de "complejidad" de un monoide) fue hecho por Krohn y Rhodes [177].

Los biólogos han estudiado modelos de división celular (sistemas de Lindenmayer) que se parecen a los lenguajes libres de contexto, y su desarrollo planteó cuestiones interesantes sobre endomorfismos en monoides libres; ver Herman y Rozenberg [178] y Rozenberg y Salomaa [179].

De los numerosos sistemas con una operación binaria que han sido estudiados (ver Bruck [180]), *loops* y *cuasi-grupos* son los más importantes luego de los monoides. Aparecen en geometría (Blaschke y Bol [181]) y en conexión con cuerpos alternativos, pero las principales aplicaciones son a las cúbicas y a las superficies cúbicas. La adición sobre una curva cúbica no singular es descripta usualmente en términos de grupo abeliano, pero este grupo es realmente derivado a partir de un cuasi-grupo que aparece naturalmente. En la misma forma una hipersuperficie cúbica da lugar a un cuasi-grupo que es asociado con un loop conmutativo de Moufang. Un desarrollo bastante lúcido de la conexión puede encontrarse en Manin [182].

8.7. REVISTAS:

La actividad en álgebra está reflejada en varias revistas que se dedican exclusivamente al tema:

Algebra i Logika (Academia de Ciencias de la URSS, Novosibirsk, 1.962-). A partir del número 7 es traducida como *Algebra and Logic* (Consultants Bureau, New York, 1.968).
Communications in Algebra (Dekker, New York, 1.974-).
Information and Control (Academic Press, New York, 1.958-).
Journal of Algebra (Academic Press, New York, 1.964-).
Journal of Pure and Applied Algebra (North-Holland, Amsterdan, 1.972-).
Semigroup Forum (Springer, Berlin, 1.972-).

Conferencias especiales, seminarios y congresos aparecen comunmente en la serie Lecture Notes de Springer. En particular, varios números están dedicados a la teoría de categorías; ver sección 2.9.(N.T.: Está practicamente completa en la Biblioteca del Instituto de Matemática).

Los *Proceedings* del ICM (International Congress of Mathematicians) son también una buena fuente de artículos tipo survey. El Congreso se reúne cada cuatro años y se publican los proceedings. En un nivel ligeramente inferior, pero a menudo muy informativo, están los artículos en el *American Mathematical Monthly* y en *Elemente der Mathematik.* Los trabajos en el *Bulletin* de la Sociedad Matemática de Londres y trabajos especiales en el *Bulletin* de la American Mathematical Society son habitualmente buenos, aunque a veces más técnicos. Los *Russian Mathematical Surveys* son muy útiles, aunque hay más preponderancia del análisis.

REFERENCIAS:

[1] JACOBSON, N., *Lectures in abstract algebra, Vol. II*, Van Nostrand, Princeton, 1.953. (A-72 y A-2.337)

[2] HERSTEIN, I. N., *Topics in algebra,* Blaisdell, Boston, Mass., 1.964. (A-1.420)

[3] LANG, S., *Algebra,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.965. (A-2.364)

[4] COHN, P. M., *Algebra, Vol. I*, Wiley, London, 1.982- 1.991. (A-6.428)

[5] BERNSTEIN, I., GELFAND, I. y PONOMAREV, V., 'Coxeter functors and Gabriel's theorem', *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 28, 19-33, 1.973; traducido en *Russian Mathematical Survey,*28, 17-32, 1.973.

[6] GELFAND, I. y PONOMAREV, V., 'Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space', *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai. Proceedings,* 5, 163-237, 1.970.

[7] GABRIEL, P., 'Unzerlegbare Darstellungen I', *Manuscripta Mathematica,* 6, 71-103, 1.972.

[8] GABRIEL, P., 'Indecomposable representations II', *Symposia Mathematica,*11, 81-104, 1.973.

[9] DLAB, V. y RINGEL, C., *Representations of graphs and algebras,* Carleton Lecture Notes, Carleton University, Ottawa, 1.974.

[10] RINGEL, C., 'Representations of K-species and bimodules', *Journal of Algebra* , [por aparecer]

[11] CURTIS, C. y REINER, I., *Representations theory of finite groups and associative algebras,* Wiley, New York, 1.962. (A-1.083)

[12] COHN, P. M., *Algebra,* Vol. II, Wiley, London, 1.989. (A-6.429)

[13]ROITER, A., 'Unboundedness of the dimensions of indescomposable representations of algebras having infinitely many indecomposable representations', *Akademiya Nauk SSSR, Izvestiya-Seriya Matematicheskaya,* 32, 1275-1282. 1.968.

[14] STEINITZ, E., 'Algebraische Theorie der Körper', Chelsea Publishing and Co., New York, 1.950. (A-461)

[15] JACOBSON, N., *Structure of rings,* Colloquium Publications 37, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.957. (A-408)

[16]CHEVALLEY, C., *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable,* Mathematical Surveys 6, American Mathematical Society, New York, 1.951. (A-402 y A-1.888)

[17] SAFAREVICH, I. R., *Basic algebraic geometry,* Springer, Berlin, 1.974.

[18] LANG, S., *Diophantine geometry,* Wiley, New York, 1.962. (A-1.059)

[19] WEBER, H., *Lehbruch der Algebra,* Teubner, Leipzig, 1.908; reimpreso Chelsea, New York, 1.965, (A-1.088, A-1.089 y A-1.090)

[20] LENSTRA, H. W., 'Rational functions invariant under a finite abelian group', *Inventiones Mathematicae,* 25, 299-325, 1.974.

[21] CHASE, S., HARRISON, D. y ROSENBERG, A., 'Galois theory and Galois cohomology of commutative rings', *American Mathematical Society. Memoirs,* 52, 1-79, 1.965.
[22] DEURING, M., *Algebren,* Springer, Berlin, 1.934; reimpreso Chelsea, New York, 1.948.
[23] SERRE, J.P., *Corps locaux,* Hermann, Paris, 1.962.
[24] WEIL, A., *Basic number theory,* Springer-Verlag, New York, 1.974. (A-4.326)
[25] REINER, I., *Maximal Orders,* London Mathematical Society Monographs 5, Academic Press, London, 1.975. (A-4.838)
[26] CASSELS, J. y FRÖHLICH, A., *Algebraic number theory,* Academic Press, London, 1.967.
[27] AUSLANDER, M. y GOLDMAN, O., 'The Brauer group of a commutative ring', *American Mathematical Society. Transactions,* 97, 367-409, 1.960.
[28]AZUMAYA, G., 'On maximally central algebras', *Nagoya Mathematical Journal,* 2, 119-150, 1.951.
[29] GROTHENDIECK, A., 'Le groupe de Brauer, I-III, Séminaire Boubaki 1.965/66' in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (ed. J. Giraud *et al.*), North-Holland, Amsterdam, 1.968.
[30] KNUS, M. y OJANGUREN, M., *Théorie de la descente et algébres d'Azumaya,* Lecture Notes in Mathematics 389, Springer, Berlin, 1.973. (LNM-389)
[31] ORZECH, M. y SMALL, C., *The Brauer group of conmutative rings,* Dekker, New York, 1.975. (A-4.910)
[32] HILBERT, D., *Über die Grundlagen der Geometrie,* Teubner, Leipzig, 1.898.
[33] KOETHE, G., 'Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum', *Matematischen Annalen,* 105, 15-39, 1.931.
[34] ORE, O., 'Linear equations in non-conmutative fields', *Annals of Mathematics,* 32, 463-477, 1.931.
[35] COHN, P. M., 'On the embedding of firs in skew fields', *London Mathematical Society. Proceedings,* 23, 193-213, 1.971.
[36] MACINTYRE, A., 'Combinatorial problems for skew fields' [por aparecer]
[37] HIRSCHEFELD, J. y WHEELER, W., *Forcing, arithmetic, division rings,* Lecture Notes in Mathematics 454, Springer, Berlin, 1.975. (LNM-454)
[38] COHN, P. M., *Skew field constructions,* London Mathematical Society Lecture Notes Series 27, Cambridge University Press, Cambridge, 1.977. (A-5.049)
[39] COHN, P. M., *Free rings and their relations,* London Mathematical Society Monographs 2, Academic Press, London, 1.971. (A-5.797 a-2)
[40] COHN, P. M., 'Progress in free associative algebras', *Israel Journal of Mathematics,* 19, 109-151, 1.974.
[41] JACOBSON, N., *Theory of rings,* Mathematical Surveys 2, American Mathematical Society, New York, 1.943. (A-4.720)
[42] AUSLANDER, M. y GOLDMAN, O., 'Maximal orders', *American Mathematical Society. Transactions,* 97, 1-24. 1.960.
[43] BRUMER, A., 'Pseudocompact algebras, profinite groups and class-formations', *Journal of Algebra,* 4, 442-470, 1.966.

[44] HARADA, M., 'Structure of hereditary orders', *Osaka City University. Journal of Mathematics,* 14, 1-22, 1.963.

[45] HALL, P., 'On the finiteness of certain soluble groups', *London Mathematical Society. Proceedings,* 9, 595-622, 1.959.

[46] PASSMAN, D. S., *Infinite group rings,* Dekker, New York, 1.971.

[47] PASSMAN, D. S., 'Advances in group rings', *Israel Journal of Mathematics,* 19, 67-107, 1.974.

[48] LEWIN, J. y LEWIN, T., 'An embedding of the group algebra of a torsionfree 1-relator group in a field', *Journal of Algebra,* [por aparecer]

[49] FARKAS, D. y SNIDER, R., 'K_0 and Noetherian group rings', *Journal of Algebra,* 42, 192-198, 1.976.

[50] ARTIN, E., 'Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen', *Hamburg, Universität: Mathematische Seminar. Abhandlungen,* 5, 251-260, 1.928; reimpreso en *Collected papers*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.965.

[51] GOLDIE, A. W., 'The structure of rings under ascending chain conditions', *London Mathematical Society. Proceedings,* 8, 589-608, 1.958.

[52] ASANO, K., 'Über die Quotientenbildung von Schiefringen', *Mathematical Society of Japan. Journal,* 1, 73-78, 1.949.

[53] LAMBEK, J., *Rings and modules,* Blaisdell, Boston, Mass., 1.966.

[54] FAITH, C., *Algebra: rings, modules and categories I,* Springer, Berlin, 1.973- 1.981, (A-5.683)

[55] ROBSON, J. C., 'Non-conmutative Dedekind rings', *Journal of Algebra,* 9, 249-265, 1.968.

[56] GABRIEL, P., 'Des catégories abéliennes', *Société Mathématique de France. Bulletin,* 90, 323-448, 1.962.

[57] STENSTRÖM, B., *Rings and modules of quotients,* Lecture Notes in Mathematics 237, Springer, Berlin, 1.971. (L-237, B-574)

[58] GOLAN, J. S., *Localization of noncommutative rings,* Dekker, New York, 1.975. (A-4.750)

[59] LAMBEK, J., *Completion of catogories,* Lecture Notes in Mathematics 24, Springer, Berlin, 1.966. (LNM-24)

[60] LAMBEK, J., *Torsion theories, additive semantics and rings of quotients,* Lecture Notes in Mathematics 177, Springer, Berlin, 1.971. (LNM-177)

[61] LAMBEK, J., 'Noncommutative localization', *American Mathematical Society. Bulletin,* 79, 857-872, 1.973.

[62] GOLDMAN, O., 'Rings and modules of quotients', *Journal of Algebra,* 13, 10-47, 1.969.

[63] WALKER, E. y WALKER, C., 'Quotient categories and rings of quotients', *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 2, 513-555, 1.972.

[64] GOODEARL, K., HANDELMAN, D. y LAWRENCE, J., *Strongly prime and completely torsionfree rings,* Carleton Mathematical Series 109, Carleton University, Ottawa, 1.974.

[65] DEHN, M., 'Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme', *Mathematische Annalen,* 85, 184-193, 1.922.

[66] WAGNER, W., 'Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme', *Mathematische Annalen,* 113, 528-567, 1.936-1.937.
[67] PROCESI, C., *Rings with polynomial identities,* Dekker, New York, 1.973.
[68] FORMANEK, E., 'Central polynomials for matrix rings', *Journal of Algebra,* 23, 129-133, 1.972.
[69] RAZMYSLOV, YU. P., 'On a problem of Kaplansky', *Akademiya Nauk SSSR. Izvestiya-Seriya Mathematicheskaya,* 37, 483-501, 1.973.
[70] RAZMYSLOV, YU. P., 'Trace identities on full matrix rings over fields of characteristic 0', *Akademiya Nauk SSSR. Izvestiya-Seriya Mathematicheskaya,* 38, 723-756, 1.974.
[71] ROWEN, L. H., 'On rings with a central polynomial', *Journal of Algebra,* 31, 393-426, 1.974.
[72] ARTIN, M., 'On Azumaya algebras and finite-dimensional representations', *Journal of Algebra,* 11, 532-563, 1.969.
[73] AMITSUR, S. A., 'Polynomial identities and Azumaya algebras', *Journal of Algebra,* 27, 117-125, 1.973.
[74] GOLDIE , A. W., 'Azumaya algebras and rings with polynomial identity', *Cambridge Philosophical Society. Proceedings,* 79, 393-399, 1.976.
[75] ORE, O., 'Theory of non-commutative polynomials', *Annals of Mathematics,* 34, 480-508, 1.933.
[76] COHN, P. M., 'On a generalization of the Euclidean algorithm', *Cambridge Philosophical Society. Proceedings,* 57, 18-30, 1.961.
[77] BERGMAN, G. M., 'Centralizers in free associative algebras', *American Mathemaitcal Society. Transactions,* 137, 327-344, 1.969.
[78] JATEGAONKAR, A. V., 'A counter-example in homological algebra and ring theory', *Journal of Algebra,* 12, 418-440, 1.969,
[79] DIXMIER, J., *Algébres enveloppantes,* Gauthier-Villars, Paris, 1.974.(En inglés, edición 1.977, A-5.162).
[80] GELFAND, I. y KIRILLOV, A., 'Sur les corps liés aux algébres enveloppantes des algébres de Lie', *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques,* 31, 5-19, 1.966.
[81] BERNSTEIN, I., 'The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter', *Funktsional'nyi Analiz I Ego Prilozheniya,* 6, 26-40, 1.972; traducido en *Functional Analysis and its Applications,* 6, 273-285, 1.973.
[82] BJÖRK, J., E., 'I. N. Bernstein's functional equation'{por aparecer}
[83] RITT, J. F., *Differential algebra,* Colloquium Publications 33, American Mathematical Society, New York, 1.950. (A-4.787)
[84] KOLCHIN, E. R., *Differential algebra and algebraic groups,* Academic Press, New York, 1.973. (A-5.089)
[85] KAPLANSKY, I., *An introduction to differential algebra,* Hermann, Paris, 1.955. (A-704)
[86] COHN, R.M., *Difference algebra,* Wiley, New York, 1.965.
[87] COHN, P. M., 'On the free product of associative rings, I', *Mathematische Zeitschrift,* 71, 380-398, 1.959.

[88] COHN, P. M., 'On the free product of associative rings, II', *Mathematische Zeitschrift,* 73, 433-456, 1.960.

[89] BERGMAN, G. M., 'Modules over coproducts of rings', *American Mathematical Society. Transactions,* 200, 1-32, 1.974.

[90] SWEEDLER, M. E., *Hopf algebras,* Benjamin, New York, 1.969.
En el Instituto está: SWEEDLER, M. E., *Hopf algebras and Galois theory,* Lectures Notes in Mathematics 97, Springer, Berlin, 1.969. (LNM97, B-574)

[91] CHASE, S. U., 'On inseparable Galois theory', *American Mathematical Society. Bulletin,* 77, 413-417, 1.971.

[92] SWEEDLER, M. E., 'The predual theorem to the Jacobson Bourbaki correspondence', *American Mathematical Society. Transactions,* 213, 391- 406, 1.975.

[93] HILBERT, D., 'Die Theorie der algebraischen Zahlkörper', *Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Jahresbericht,* 4, 175-546, 1.897.

[94] DEDEKIND, R., 'Über die Theorie der ganzen algebraische Zahlen', 11th supplement to *Vorlesungen über Zahlentheorie* (P.G. Lejeune Dirichlet), reimpreso Vieweg, Braunschweig, 1.964.

[95] NOETHER, E., 'Idealtheorie in Ringbereichen', *Mathematische Annalen,* 83, 24-66, 1.921.

[96] KRULL, W., *Idealtheorie,* Springer, Berlin, 1.935; reimpreso Chelsea, New York, 1.948.(A-4.332)

[97] ZARISKI, O., 'The concept of a simple point of an abstract algebraic variety', *American Mathematical Society. Transactions,* 62, 1-52, 1.947; reimpreso en *Collected papers,* Vol. 1, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1.972. (A-5.008)

[98] KRULL, W., 'Dimensionstheorie in Stellenringen', *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* 179, 204-226, 1.938.

[99] CHEVALLEY, C., 'On the theory of local rings', *Annals of Mathematics,* 44, 690-708, 1.943.

[100] COHEN, I. S., 'On the structure and ideal theory of complete local rings', *American Mathematical Society. Transactions,* 59, 252-261, 1.946.

[101] SERRE, J. P., 'Sur la dimension homologique den anneaux et des modules Noethériens', in *Symposium on algebraic number theory,* Tokyo-Nikko, 1.955.

[102] AUSLANDER, M. y BUCHSBAUM, D., 'Unique factorization in regular local rings', *National Academy of Sciences, United States. Proceedings,* 45, 733-734, 1.959.

[103] REES, D., 'Two classical theorems of ideal theory', *Cambridge Philosophical Society. Proceedings,* 52, 155-157, 1.956.

[104] NORTHCOTT, D. G., *Ideal theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.953.

[105] ZARISKI, O. y SAMUEL, P., *Commutative algebra,* 2 vols, Van Nostrand, Princeton, 1.958-1.960. (A-656 y A-4.751)

[106] NAGATA, M., *Local rings,* Wiley, New York, 1.962. (A-1.068)

[107] SERRE, J. P., *Algébre locale, multiplicités,* Lecture Notes in Mathematics 11, Springer, Berlin, 1.965. (A-3.147)

[108] KAPLANSKY, I., *Commutative rings,*Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1.970. (A-5.004)

[109] ATIYAH. M. y McDONALD, I., *Introduction to conmutative algebra,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.969. (A-3.623)

[110] BOURBAKI, N., *Algébre commutative,* 4 vols, Hermann, Paris, 1.961-1.965. (cap. 1 y 2:A-2.821, cap. 3 y 4: A-2.822, cap. 5 y 6: A-2.824, cap. 7: A-2.825 y cap.8 y 9: A1.C 8-9)

[111] CARTAN, H. y EILENBERG, S., *Homological algebra,* Princeton University Press, Princeton, 1.956.

[112] GODEMENT, R., *Théorie des faisceaux,* Hermann, Paris, 1.958.

[113] McLANE, S., *Homology,* Springer, Berlin, 1.963. (A-1.165)

[114] HILTON, P. y STAMMBACH, U., *A course in homological algebra,* Springer, Berlin, 1.971. (A-6.002)

[115] GROTHENDIECK, A., 'Sur quelques points d'algébre homologique', *Tohoku Mathematical Journal,* 9, 119-221, 1.957.

[116] FREYD, P., *Abelian categories, an introduction to the theory of functors,* Harper and Row, New York, 1.964. (A-1.764)

[117] MITCHELL, B., *Theory of categories,* Academic Press, New York, 1.965. (A-2.350)

[118] McLANE, S., *Categories for the working mathematician,* Springer, Berlin, 1.971. (A-4.553)

[119] BUCUR, I. y DELEANU, A., *Categories and functors,* Wiley, New York, 1.968.

[120] HERRLICH, H. y STRECKER, G., *Category theory,* Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1.973.

[121] LAWVERE, F. W., 'The category of categories as a foundation for mathematics' in *Proceedings of the Conference on categorical algebra. La Jolla, California, 1.965* (ed. por S. Eilenberg *et al*), Spinger, Berlin, 1.966.

[122] ECKMANN, B., *Seminar on triples and categorical homology theory,* Lecture Notes in Mathematics 80, Springer, Berlin, 1.969.

[123] KAPLANSKY, I., 'Projective modules', *Annals of Mathematics,*68, 372-377,1.958.

[124] BASS. H., 'Big projective modules are free', *Illinois Journal of Mathematics,* 7, 24-31, 1.963.

[125] MATLIS, E., 'Injective modules over Noetherian rings', *Pacific Journal of Mathematics,* 8, 511-528, 1.958.

[126] GABRIEL, P., 'Objets injectifs dans les catégories abéliennes', *Séminaire Dubreil-Pisot 1958/59,* Institut Henri Poincaré, Paris, 1.959.

[127] BASS, H., 'Finitisitic dimension and a homological generalization of semiprimary rings', *American Mathematical Society. Transactions,* 95, 466-488, 1.960.

[128] BJÖRK, J. E., 'Rings satisfying a minimum condition on principal ideals', *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,* 236, 112- 119, 1.969.

[129] CHASE, S. U., 'Direct products of modules', *American Mathematical Society. Transactions,* 97, 457-473, 1.960.

[130] SMALL, L. W., 'Orders in semihereditary rings', *American Mathematical Society. Bulletin,* 73, 656-658, 1.967.

[131] BERGMAN, G. M., 'Hereditary commutative rings and the centers of hereditary rings', *London Mathematical Society. Proceedings,* 23, 214-236, 1.971.

[132] OSOFSKY, B. L., 'Homological dimension and the continuum hypothesis', *American Mathematical Society. Transactions,* 32, 217-230, 1.968.

[133] RINEHART, G. S., 'Note on the global dimension of a certain ring', *American Mathematical Society. Proceedings,* 13, 341-346, 1.962.

[134] ROOS, J. E., 'On the structure of abelian categories with generators and exact direct limits'{por aparecer}

[135] BJÖRK, J. E., 'Global dimension of algebras of differential operators', *Inventiones Mathematicae,* 17, 69-78, 1.972.

[136] MORITA, K., 'Duality for modules and its application to the theory of rings with minimum condition', *Tokyo Kyoiku Daigaku. Science Reports. A,* 6, 83- 142, 1.958.

[137] BASS, H., *The Morita theorems,* Lecture notes, Universtiy of Oregon, Eugene, 1.962.

[138] COHN, P. M., *Morita equivalence and duality,* Lecture notes, Queen Mary College, University of London, 1.966; reimpreso 1.974.

[139] BASS, H., *Topics in algebraic K-theory,* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1.967.

[140] BASS, H., *Algebraic K-theory,* Benjamin, New York, 1.968. (A-3.893)

[141] BASS, H., 'K-theory and stable algebra', *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques,* 22, 5-60, 1.964.

[142] BASS, H., HELLER, A. y SWAN, R., 'The Whitehead group of a polynomial extension', *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques,* 22, 61-79, 1.964.

[143] SERRE, J. P., 'Modules projectifs et espaces fibrés á fibre vectorielle', *Séminaire Dubreil 23, 1.957/58,* Institut Henri Poincaré, Paris, 1.958. (A-2.076)

[144] BASS, H. (ed.), *Algebraic K-theory,* 3 vols, Lecture Notes in Mathematics 341, 342, 343, Springer, Berlin, 1.973.

[145] TATE, J. T., 'Symbols in arithmetic', *International Congress of Mathematicians. Proceedings,* 1, 201-211, 1.971.

[146] MILNOR, J. W., *Introduction to algebraic K-theory,* Princeton University Press, Princeton,N. J., 1.971.

[147] CARTAN, E., 'Sur la structure des groupes de transformations finis et continus', en *Oeuvres complétes,* 6 vols, Gauthier-Villars, Paris, 1.952-1.955.

[148] WEYL, H., 'Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen', *Mathematische Zeitschrift,* 23, 271-309, 1.925; 24, 328-376, 377-395, 1.926.

[149] JACOBSON, N., *Lie algebras,* Wiley, New York, 1.962. (A-3.697)

[150] COXETER, H. S. M., *Regular polytopes,* Macmillan, London, 1.948.

[151] ZASSENHAUS, H., 'Ein Verfahren, jeder endlichen p-Gruppe einen Lie Ring mit der Charakteristik p zuzuordnen', *Hamburg, Universität: Mathematisches Seminar. Abhandlungen,* 13, 200-207, 1.939.

[152] LAZARD, M., 'Sur des groupes nilpotents et les anneaux de Lie', *École Normale Supérieure. Annales Scientifiques,* 3me serie, 71, 101-190, 1.954.

[153] AMAYO, R. y STEWART, I., *Infinite-dimensional Lie algebras,* Norh-Holland, Amsterdam, 1.974.

[154] DIEUDONNÉ, J., *Introduction to the theory of formal groups,* Dekker, New York, 1.973.

[155] MANIN, YU. I., 'The theory of formal commutative groups over fields of finite characteristic', *Uspekhi Matematicheskikh Nauk,* 18(6), 3-90, 1.963; traducido en *Russian Mathematical Surveys,* 18, 1-83, 1.963.

[156] JACOBSON, N., *Structure and representation of Jordan algebras,* Colloquium Publications 39, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.968. (A-4.570)

[157] SPRINGER, T. A., *Jordan algebras and algebraic groups,* Springer, Berlin, 1.973. (A-4.325)

[158] VINBERG, E. B., 'The theory of homogeneous convex cones', *Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Trudy* 12, 303-358, 1.963; traducido en *Moscow Mathematical Society. Transactions,* 12, 340-403, 1.963.

[159] LOOS, O., *Lectures on Jordan triples,* University of British Columbia, Vancouver, B. C., 1.974.

[160] JACOBSON, N., *Exceptional Lie algebras,* Dekker, New York, 1.967. (A-4.749)

[161] BRUCK, R. y KLEINFELD, E., 'The structure of alternative division rings', *American Mathematical Society. Proceedings,* 2, 878-890, 1.951.

[162] SKORNYAKOV, L. A., 'Alternative fields', *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal,* 2, 70-85, 1.950. {en ruso}

[163] DOROFEEV, G. V., 'Alternative rings on three generators', *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal,* 4, 1.029-1.048, 1.963. {en ruso}

[164] ALBERT, A. A., 'Power-associative rings', *American Mathematical Society. Transactions,* 64, 552-593, 1.948.

[165] SCHAFER, R. D., *An introduction to non-associative algebras,* Academic Press, New York, 1.966. (A-2.429)

[166] McCRIMMON, K., 'Quadratic methods in non-associative algebras', *International Congress of Mathematicians. Proceedings,* 1, 325-330, 1.975.

[167] ZASSENHAUS, H., 'Über endliche Fastkörper', *Hamburg, Universität. Mathematische Seminar. Abhandlungen,* 11, 187-220, 1.936.

[168] AMITSUR, S. A. , 'Finite subgroups of division rings', *American Mathematical Society. Transactions,* 80, 361-386, 1.955.

[169] WÄHLING, H., 'Bericht über Fastkörper', *Deustche Mathematiker-Vereinigung. Jahresbericht,* 76, 41-103, 1.974.

[170] LYAPIN, E. S., *Semigroups,* 2nd edn, Translations of Mathematical Monographs 3, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.968.

[171] CLIFFORD, A. y PRESTON, G., *The algebraic theory of semigroups,* 2 vols, Mathematical Surveys 7, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1.961-1.967. (v1: A-2.256 y v2: A-2.801)

[172] HOWIE, J. M., *Introduction to semigroup theory,* London Mathematical Society Monographs 7, Academic Press, London, 1.976.

[173] GROSS, M. y LENTIN, A., *Introduction to formal grammars,* Springer, Berlin, 1.970.

[174] EILENBERG, S., *Automata, languages and machines,* vol. A, Academic Press, New York, 1.974. (A-5.150)

[175] COHN, P. M., 'Algebra and language theory', *London Mathematical Society. Bulletin,* 7, 1-29, 1.975.

[176] ARBIB, M.A. (ed.), *Algebraic theory of machines, languages and semigroups,* Academic Press, New York, 1.968. (A-3.577)

[177] KROHN, K. y RHODES, J., 'Complexity of finite semigroups', *Annals of Mathematics,* 88, 128-160, 1.968.

[178] HERMAN, G. y ROZENBERG, G., *Developmental systems and languages,* North-Holland, Amsterdam, 1.974.
[179] ROZENBERG, G. y SALOMAA, A., *L-systems,* Lecture Notes in Computer Science 15, Springer, Berlin, 1.974.
[180] BRUCK, R. H., *A survey of binary systems,* Springer, Berlin, 1.958. (A-699)
[181] BLASCHKE, W. y BOL, G., *Geometrie der Gewebe,* Springer, Berlin, 1.938.
[182] MANIN, YU. I., *Kubicheskie formy: algebra, geometriya, arifmetika,* Nauka, Mosow, 1.972; traducido: *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic,* Nort-Holland, Amsterdam, 1.974.

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

1. ALBERT, A., *Structure of algebras*, American Mathematical Society, 1.939. (A-403)
2. COHN, P., *Algebra,* vol. III, Wiley, 1.991. (A-6.669)
3. FAITH, C., *Algebra*, vol. II, 1.981. (A-5.327)
4. GENTILE, E., *Aritmética Elemental*, EDIPUBLI S.A., 1.991. (A-6.426)
5. GENTILE, E., *Notas de álgebra. Números complejos*, Editorial Funtor, 1.969. (A-3.014)
6. HONSBERGER, R., *Ingenuity in mathematics,* NML vol. 23, The Mathematical Association of America, 1.970. (A-5.448)
7. HUNGERFORD, T., *Algebra,* Springer, 1.984. (A-5.996)
8. JACOBSON, N., *Lectures in abstract algebra,* vol. I, Van Nostrand, 1.951-1.964. (A-177 y A-2.921)
9. JACOBSON, N., *Lectures in abstract algebra,* vol. III, Van Nostrand, 1.951-1.964. (A-1.421)
10. JONES, A., *Notas de Algebra,* U. San Pablo, 1.979. (A-5.554)
11. JONES, B., *The Arithmetic theory of Quadratic forms*, The Carus Mathematical Monographs N° 10, Mathematical Association of America, Wiley, 1.950. (A-303)
12. KALMIN, R., *Algebra y funciones elementales*, Editorial MIR, 1.973. (A5.267)
13. KEMENY, J., MIRKIL, H., SNELL, J. y THOMPSON, G., *Finite Mathematical Structures*, Prentice Hall, 1.958. (A-2.383)
14. KEMENY, J., SNELL, J. y THOMPSON, G., *Introduction to Finite Mathematics,* Prentice Hall, 1.957. (A-665)
15. KLEIN, F., *Aritmética y Algebra. Matemática elemental desde el punto de vista superior,* Ibero-Americana, 1.948. (A-1.985)
16. KOSTRIKIN, A., *Introducción al álgebra*, Editorial MIR, 1.978. (A-5.262)
17. KUROSH, A., *Curso de Algebra Superior*, Editorial MIR, 1.977. (A-5.246)
18. OUBINA, L., *Estructuras algebraicas*, Editorial Exacta, 1.994. (A-6.901)
19. PERELMAN, Y., *Algebra recreativa*, Editorial MIR, 1.975. (A-5.266)
20. REY PASTOR, J., *Elementos de Análisis Algebraico*, Kapeluz, 1.948. (A-6.737)
21. SIEGLER, L., *Algebra,* Springer, 1.976. (A-5.483)
22. VARSAVSKY, O., *Algebra para escuelas secundarias. Tomo I. Matemática Intuitiva*, EUDEBA, 1.964. (A-6.730)
23. VARSAVSKY, O., *Algebra para escuelas secundarias. Tomo I. Matemática Educativa*, EUDEBA, 1.964. (A-6.731)
24. YOUNG, J., *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*, MacMillan & Co., 1.911. (A-6.246)
25. BIRKHOFF, G. y McLANE, S., *A survey of modern algebra,* MacMillan, 1.966. (A-2.601)
26. CHATELET, A., *Arithmétique et Algébre modernes,* vol. I, Presses Universitaires de France, 1.954. (A-1.887)
27. CHATELET, A., *Arithmétique et Algébre modernes,* vol. II, Presses Universitaires de France, 1.956. (A-4.062)
28. QUEYSANNE, M. y DELACHET, A., *L'Algébre Moderne*, Collection ¿Que sais-je?, Presses Universitaires de France, 1.960. (A-661)

29.VAN DER WAERDEN, B., *Modern algebra,* vol. I, Ungar, 1.937. (A-2.054)
30.VAN DER WAERDEN, B., *Modern algebra,* vol. II, Ungar, 1.940. (A-2.053)
31.YOUNG, J. (ed.), *Monographs on topics of modern mathematics (relevant to the elementary field)*, Dover, 1.911. (A-2.093)
32.COHN, P., *Linear equations,* Library of Mathematics, Routledge & Kegan, 1.958. (A-2.637)
33.DICKSON, L., *New first course in the theory of equations,* Wiley, 1.939. (A-294)
34.DOBBS, D. y HANKS, R., *A modern course on the theory of equations*, Polygonal Pub. House, 1.980. (A-6.829)
35.KUROSH, A., *Ecuaciones algebraicas de grados arbitrarios,* Editorial MIR, 1.976. (A-5.879)
36.KHINCHIN, A., *Continued fractions,* Phoenix Science Series, 1.961. (A-1.413)
37.OLDS, C., *Continued fractions*, Random House, New Mathematical Library, 1.963. (A-1.688)
38.KOLCHIN, E., *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, 1.973. (A-5.089)

ALGEBRA LINEAL:

1. BERBERIAN, S., *Linear algebra*, Oxford Science Publications, 1.992. (A-6.862)
2. BROIDA, J. y WILLIAMSON, S., *Linear algebra*, Addison-Wesley, 1.989. (A-6.696)
3. CURTIS, M., *Abstract linear algebra*, Springer, 1.990. (A-6.506)
4. DIEUDONNE, J., *Algébre Linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, 1.978. (A-4.828)
5. GOLOVINA, L., *Algebra lineal y aplicaciones,* Editorial MIR, 1.974. (A-5.257 y A-5.258)
6. KOSTRIKIN, A. y MANIN, YU., *Linear algebra and geometry*, Gordon & Breach, 1.981. (A-6.695)
7. MALTSEV, A., *Fundamentos de algebra lineal*, Editorial MIR, 1.978. (A-5.247)
8. MOSTOW, G. y SAMPSON, J., *Linear algebra,* McGraw-Hill, 1.969. (A-4.317)
9. NOBLE, B. y DANIEL, J., *Applied linear algebra,* Prentice Hall, 1.988. (A-6.862)
10.SHILOV, G., *Theory of linear spaces*, Prentice Hall, 1.961. (A-2.703)

CATEGORIAS:

1. BASS, H., *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1.968. (A-3.893)
2. McLANE, S., *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, 1.971. (A-4.553)
3. SWAN, R., *Algebraic K-theory*, Lecture Notes in Mathematics 76, Springer-Verlag, 1.968. (B-574)

ALGEBRAS CONMUTATIVAS Y NO CONMUTATIVAS:

1. BLANCHARD, A., *Les corps non commutatifs*, Collection "SUP" Presses Universitaires de France, 1.972. (A-4.830)

2. HERSTEIN, I., *Noncommutative Rings*, The Carus Mathematical Monographs N° 15, Mathematical Association of America, 1.968. (A-3.915)
3. ZARISKI, O. y SAMUEL, P., *Conmutative Algebra*, Van Nostrand, 1.958-1.960. (v1: A-656 y v2: A-4.751)

TEORIA DE NUMEROS:

1. GELFOND, A., *Transcendental and algebraic numbers*, Dover, 1.960. (A-1.563)
2. GELFOND, A., *The solution of Equations in Integers*, Golden Gate Book, 1.961. (A-1.415)
3. HILBERT, D., *Gesamnelte Abhandlungen*, vol. II, Chelsea, 1.885-1.909. (A-2.422)
4. RINBENBOIM, P., *Tópicos de Teoría dos Números*, IMPA, 1.966. (A-5.548)
5. ROBINSON, A., *Numbers and Ideals*, Holden Day, 1.965. (A-3.664)
6. STEWART, I. y TALL, D., *Algebraic number theory*, Chapman & Hall, 1.979. (A-6.458)
7. VOROBIOV, N., *Criterios de divisibilidad*, Editorial MIR, 1.975. (A-5.874)

ALGEBRAS DE BOOLE. LATTICES:

1. FAURE, R. y HEURGON ,E., *Structures Ordonnees et Algébres de Boole*, Gauthier-Villars, 1.971. (A-3.838)
2. KAYE, D., *Sistemas booleanos*, Editorial Alhambra, 1.968. (A-4.019)
3. MENDELSON, E., *Boolean Algebra & Switching Circuits*, Schaum's Mc Graw-Hill, 1.970. (A-4.113)
4. MONK, J. (ed.), *Handbook of Boolean Algebras*, vol. I, North-Holland, 1.989. (A-6.358)
5. MONK, J. (ed.), *Handbook of Boolean Algebras*, vol. II, North-Holland, 1.989. (A-6.359)
6. MONK, J. (ed.), *Handbook of Boolean Algebras*, vol. III, North-Holland, 1.989. (A-6.360)
7. BALBES, R. y DWINGER, P., *Distributive lattices*, University of Missouri Press, 1.974. (A-6.460)
8. DAVEY, B. y PRIESTLEY, H., *Introduction to lattices and order*, Cambridge Mathematical Texts, 1.990. (A-6.493)
9. GRÄTZER, G., *Lattice theory. First concepts and Distributtive lattices*, Freeman & Co., 1.971. (A-4.798)
10. GRÄTZER, G., *General lattice theory*, Birkhäuser, 1.978. (A-5.905)

ANILLOS Y CUERPOS:

1. ADAMSON, I., *Introduction to field theory*, University Mathematical Texts, Oliver & Boyd, 1.964. (A-1.953)
2. HADLOCK, CH., *Field theory and its Classical Problems*, The Carus Mathematical Monographs N° 19, The Mathematical Association of America, 1.978. (A-5.459)
3. LAMBEK, J., *Torsion theories, additive semantics and rings of quotients*, Springer-Verlag, 1.971. (LNM-177)

4. McCOY, N., *Rings and Ideals,* The Carus Mathematical Monographs N° 8, The Mathematical Association of America, 1.948. (A-5.455)
5. PILZ, G., *Near rings,* North-Holland, 1.977. (A-5.212)
6. STENSTRÖM, B., *Rings of quotients*, Springer-Verlag, 1.975. (A-4.559)

CAPITULO 9: TEORIA DE GRUPOS (P. M. NEUMANN)

La teoría de grupos y sus parientes cercanos incluye una amplia variedad de matemática que hace necesaria alguna subdivisión para hacer posible su descripción en el presente. Para ello hemos dividido esta descripción en seis capítulos principales: trabajos introductorios; grupos finitos; teoría de representación; grupos infinitos; grupos algebraicos y de Lie y estructuras relacionadas. Como en cualquier tema, varias partes se interrelacionan continuamente, y cualquier subdivisión de este tipo es necesariamente subjetiva y poco importante. Nuestra elección al hacer esta subdivisión no indica una equivalencia en peso o importancia medida por el volumen de las publicaciones o cualquier otro parámetro. Está basada en la creencia subjetiva de que cada una de estas áreas tiene su estilo distintivo.

9.1. TRABAJOS INTRODUCTORIOS:

En la bibliografía al final de este capítulo hemos descripto como "textos" algunos libros que son apropiados para una introducción al tema, y que no están dedicados a un aspecto particular del mismo. Todos ellos tratan la axiomática de la teoría de grupos, subgrupos, clases y el denominado Teorema de Lagrange, subgrupos normales y grupos cocientes, y homomorfismos. Casi todos tratan los productos directos, extensiones, el teorema de estructura para grupos abelianos finitos, teoremas de Sylow para grupos finitos y la presentación de grupos por generadores y relaciones. Casi todo esto puede encontrarse en muchos de los textos de álgebra abstracta que han sido escritos para uso de alumnos o graduados recientes.

Los libros de Ledermann [1], Macdonald [2], Rotman [3] y Schmidt [4] son aconsejablemente elementales para alumnos. Los restantes textos son apropiados para alumnos avanzados y posgraduados, y cada uno tiene sus rasgos distintivos. El hermoso trabajo escrito por Kurosh [5] [6], está dedicado principalmente a los grupos infinitos; Marshall Hall [7] incluye material sobre: grupos de permutaciones, problema de Burnside y aplicaciones al estudio de planos proyectivos, cuya influencia ha sido inusual; los libros de Hall [7], Schenkman [8], Scott [9] y Speiser [10] contienen capítulos que dan una introducción a la teoría de representación de grupos finitos; Hall [7] y Scott [9] ofrecen también una descripción del denominado homomorfismo de transferencia, que no es fácilmente accesible en este nivel y es una herramienta útil en teoría de grupos finitos. El libro de Speiser [10] contiene un hermoso tratamiento de la simetría de ornamentos.

9.2. GRUPOS FINITOS:

Entre los '60 y '80 hubo un progreso espectacular en el estudio de los grupos finitos. Mucho de ello ha estado relacionado con, o inspirado por la búsqueda para grupos simples finitos (Davis [11], Gorenstein [12]). Siguiendo a Galois (1.832), un grupo se dice simple si no tiene subgrupos normales, salvo él mismo y el grupo trivial. Como un grupo finito G que tenga un subgrupo normal no trivial H puede pensarse como construido por los grupos menores G/H y H, cada uno de los cuales puede a su vez ser analizado de esta forma, todo grupo finito puede ser, en definitiva, considerado como formado a partir de grupos simples así como todo entero puede obtenerse como producto de números primos. (La analogía va más allá, ya que el Teorema de Jordan-Hölder puede considerarse como una suerte de teorema de factorización única. Esto garantiza que las componentes simples de un grupo son independientes de la forma en la que esté analizado).

Además de los grupos cíclicos de primer orden, los grupos simples mejor conocidos son probablemente los grupos alternanados A_n (para $n \geq 5$) y los grupos lineales proyectivos especiales PSL(n,q), que están definidos como el grupo cociente SL(n,q) /Z, donde SL(n,q) indica el grupo de matrices $n \times n$ de determinante 1 con coordenadas en un cuerpo de Galois con q elementos; y Z indica el grupo de matrices escalares contenido en SL(n,q). Construcciones similares con matrices ortogonales, matrices simplécticas y matrices unitarias sobre cuerpos convenientes dan otras familias de grupos finitos que son conocidos desde el siglo pasado y se denominan "grupos clásicos" (ver Jordan [13], Dickson [14] y Dieudonné [15]). En un artículo publicado en 1.955 y que tuvo enorme influencia, Chevalley [16] probó como la mayoría de éstos y grupos similares podían obtenerse en forma uniforme como grupos de automorfismos de análogos de las clásicas álgebras de Lie simples definidas sobre cuerpos finitos. Su construcción fue complementada por un proceso de "torsión" que introdujeron Steinberg, Ree y Tits, y para 1.962 todas las familias infinitas de grupos simples, incluyendo los grupos de Suzuki que habían sido recientemente descubiertos como la solución de un problema de grupos de permutaciones, estaban computados. Los grupos de Chevalley y versiones con torsión, generalmente conocidos como grupos "del tipo de Lie" han sido descriptos en una monografía por Carter [17].

A partir de estas familias infinitas solamente son conocidas una familia finita de grupos simples, los denominados grupos "esporádicos". Cinco de ellos, los grupos de Mathieu: M_{11} , M_{12} , M_{22} , M_{23} y M_{24} , son conocidos desde hace más de 100 años. Los otros han sido encontrados a intervalos irregulares desde 1.965. El último capítulo de Carter [17] está dedicado a grupos esporádicos; se puede encontrar información más exhaustiva en el artículo de Feit [18]. Para 1.976 la lista actualizada era:

R de orden	$2^{14} \times 3^3 \times 5^3 \times 7 \times 13 \times 29$	("Rudvalis")
ONS	$2^9 \times 3^4 \times 5 \times 7^3 \times 11 \times 19 \times 3$	("O'Nan-Sims")
$F(=F_5)$	$2^{14} \times 3^6 \times 5^6 \times 7 \times 11 \times 19$	("Harada-Norton")
$E(=F_3)$	$2^{15} \times 3^{10} \times 5^3 \times 7^2 \times 13 \times 19 \times 31$	("Thompson-Smith")
$B?(=F_2)$	$2^{41} \times 3^{13} \times 5^6 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 31 \times 47$	("Baby Monster")
$M?(=F_1)$	$2^{46} \times 3^{20} \times 5^9 \times 7^6 \times 11^2 \times 13^3 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 7$	("Fischer's Monster")
Ja?	$2^{21} \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11^3 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 4$	("New Janko")

De éstos, se ha confirmado la existencia de los cuatro primeros: el grupo de Rudvalis, por Conway y Wales [19], el grupo de O'Nan-Sims, por Sims en 1.973 (ver O'Nan [20]), el grupo de Thompson-Smith, por P. E. Smith [21] y el grupo de Harada-Norton por S. Norton en su tesis de doctorado (Cambridge, 1.974, ver Harada [22]). Fue anunciada una construcción del "Baby Monster" utilizando computadoras, por J. S. Leon y

C. C. Sims en noviembre de 1.976 (no publicada), ver también Fischer [22a]. Los dos grupos restantes han sido descriptos por Griess [23] y Fischer, y Janko [23a], respectivamente, pero su existencia no ha sido aún establecida (1.976). Estos nuevos grupos esporádicos simples han ido apareciendo por distintos métodos. Algunos provienen del desarrollo de la teoría, algunos aparecieron por azar como grupos de automorfismos de estructuras geométricas o combinatorias interesantes, otros son resultado de búsquedas experimentales, y se ha probado la existencia de algunos otros por medio de computadoras. En vista de la gran variedad de circunstancias, aparentemente accidentales, que posibilitan la existencia de estos nuevos grupos, parece plausible que un número substancial de ellos estén aún por ser descubiertos.

Mientras que la búsqueda de nuevos ejemplos continúa, el análisis general y la clasificación de los grupos simples ha proseguido con mayor vigor. En efecto, el descubrimiento de algunos de los grupos nuevos fue algo más que un producto excitante de estas investigaciones teóricas. La fractura más famosa fue el teorema de Feit y Thompson [24], publicado en 1.963, de que solamente los grupos simples de orden impar son los grupos cíclicos de primer orden. Desde entonces, la clasificación de los grupos simples en términos de la estructura de sus 2-subgrupos de Sylow, o de los centralizadores de elementos de orden 2, o de otras propiedades internas, ha tenido gran éxito, no solamente por los resultados obtenidos, sino por el desarrollo de nuevas técnicas. Así, por ejemplo, se conocen todos los grupos simples cuyos 2-subgrupos de Sylow son abelianos, o de clase de nilpotencia 2 (Walter [25], Bender [26], Gilman y Gorenstein [27]); también hay grupos simples en los cuales el 2-subgrupo de Sylow contiene un subgrupo abeliano fuertemente cerrado no trivial (Goldschmidt [28]). Aschbacher, Goldschmidt, Thompson y Foote han desarrollado teoremas de functor señalador que aparecen como ampliamente aplicables y también prometen la clasificación de todos los grupos conteniendo un elemento de orden 2 cuyo centralizador no es 2-restringuido.

El libro de Gorenstein [29] explica la mayor parte de los antecedentes sobre grupos finitos y la mayoría de las técnicas básicas, excepto para functors señalador, que no son usados en esos teoremas de clasificación. Los artículos de Glauberman, Gorenstein y Dade en los *Proceedings* [30] de una conferencia en Oxford 1.969, y los de Gorenstein y Walter [31], son exposiciones que calan más hondo. Puestas al día han sido publicadas por Feit [18] y Gorenstein [32]. El último tiene una buena bibliografía, aunque en razón del rápido desarrollo del tema, queda rápidamente atrasado; el último libro no tiene bibliografía y es menos comprensible, pero nos da un agradable y leíble relato de los propósitos, las tácticas y las estrategias de la investigación en marcha.

Una de las áreas de la teoría de grupos finitos, que en algunos aspectos es bastante próxima a la búsqueda para grupos simples, es el estudio de los grupos de permutación. Estos permanecieron dormidos por muchos años, pero han resurgido revitalizados en parte por los trabajos de Wielandt [33] [34] y en parte por el descubrimiento de algunos grupos simples finitos nuevos como grupos de permutación interesantes. En efecto, varios de ellos fueron descubiertos como grupos de rango 3: el "rango" de un grupo G de permutaciones de un conjunto Ω se define como el número de órbitas de G actuando sobre el conjunto Ω^2 de todos los pares ordenados de Ω. Para grupos de rango 3, de los cuales hay muchos ejemplos interesantes en grupos definidos geométricamente, hay una rica teoría que ha sido desarrollada principalmente por D. G. Higman. Si el orden del grupo G de rango 3 es par (lo que en la práctica ocurre siempre), entonces G tiene exactamente dos órbitas sobre el conjunto $\{\Omega^2\}$ de pares no ordenados de Ω. Tomando una de estas órbitas como el conjunto eje se obtiene un gráfico con vértices en Ω admitiendo G como un grupo de automorfismos. Este gráfico tiene muchas virtudes. Es, por ejemplo, "fuertemente regular" y los autoespacios de su matriz de adyacencia se corresponden con la reducción del carácter de permutación de G. Generalmente, ésta es la representación del grupo por automorfsimos del gráfico y de estructuras combinatorias estrechamente relacionadas, que provee las facilidades para comprender el grupo. Aunque esta teoría es para grupos de rango 3, también funciona para grupos de orden mayor. Uno encuentra que cada órbita de G sobre Ω^2 da lugar a un gráfico. Es la estructura de cada gráfico, la relación entre distintos gráficos y la estructura del álgebra generada por las matrices adyacentes de los gráficos (conocida como "álgebra centralizadora" de G, o, a veces, como el "álgebra de Hecke" por la semejanza del anillo de Hecke de un subgrupo aritmético de un grupo de Lie), lo que provee de medios para estudiar a G. La teoría de los grupos de rango 3 está reseñada en Higman [35]; una exposición elemental de la teoría del gráfico y la teoría del anillo centralizador en general está dada en Neumann [36]; un estudio más profundo está dado en Cameron [37]; un estudio muy general de la teoría combinatoria involucrada está en Higman [38] [39].

En el párrafo precedente, nuestros grupos de permutación eran de rango 3 ó más. Un grupo es de rango 2 precisamente cuando es múltiplemente transitivo. Así como los grupos simples transitivos pueden ser estudiados como grupos de automorfismos de gráficos, los grupos doblemente transitivos frecuentemente actúan como grupos de automorfismos de estructuras geométricas o combinatorias, como diseño en bloques o sistemas de Steiner. Un desarrollo de esta teoría, con una excelente bibliografía, ha sido dado por Kantor [40]. Las técnicas y éxitos de trabajos recientes en grupos simples fueron aplicados al estudio de grupos doblemente transitivos pos Aschbacher, Bender, Holt, O'Nan y otros. Por ejemplo, es conocida la estructura normal del estabilizador puntual de un grupo doblemente transitivo (O'Nan [41]), y de todos los grupos doblemente transitivos, en los cuales los estabilizadores puntuales son solubles (O'Nan [42] y Holt [43]). Se puede esperar que, ya que la alta transitividad es mucho más fuerte que la transitividad doble, los nuevos teoremas conducirán a la tan buscada clasificación de los grupos transitivos, o por lo menos a una respuesta a la pregunta de Jordan, de más de 100 años, sobre si los grupos simétricos y alternados son los únicos grupos seis veces transitivos. Sin embargo, las nuevas técnicas funcionan bien cuando un estabilizador puntual tiene un subgrupo normal abeliano no trivial, y esto casi nunca ocurre en un grupo altamente transitivo. Es bastante probable que las cuestiones clásicas de la teoría de grupos de permutación, por las cuales Jordan es el más famoso, deban aguardar algún tiempo para su solución, por lo menos hasta que la clasificación de los grupos finitos simples sea completada.

Una tercera parte de la teoría de grupos de permutación, que ha hecho progresos significativos, concierne a la vieja búsqueda de los grupos transitivos de grado primo p, y cuestiones nuevas de un tipo similar sobre grupos de grado $2p, 3p, \ldots, p^2, p^3, \ldots$. Aquí la herramienta principal es la teoría de representaciones. Ambas, caracteres ordinarios y representaciones modulares se han utilizado con éxito. El survey y las notas de Neumann

[44] [45] se centran principalmente sobre grupos de primer grado y tienen bibliografías extensas; Wielandt [34] introduce nuevas técnicas importantes e interesantes con amplia aplicabilidad en el área.

Como mencionamos al comienzo de esta sección, una vía para analizar un grupo finito es separarlo en partes más pequeñas: un subgrupo normal y su cociente, y así arribar a constituyentes simples, conocidas como sus factores de composición. Para que esta idea sea útil es necesario que uno pueda comprender el proceso inverso al de formar el grupo cociente por un subgrupo normal. Lo que se requiere es cierta maquinaria para descubrir todos los grupos G que tienen un grupo A dado como subgrupo normal, con un grupo específico B como grupo cociente G\A. Utilizando técnicas basadas en los teoremas de Sylow y en el denominado argumento de Frattini, usualmente se puede reducir al caso donde el subgrupo normal A es nilpotente, y entonces ciertamente un p-grupo abeliano, para algún número primo p. En este punto los métodos del álgebra homológica son útiles para dar un survey de las posibles extensiones. Exposiciones elementales de la teoría de extensión se pueden encontrar, por ejemplo, en Kurosh [5] y Rotman [3]; descripciones más extensas se encuentran en Hall [7], Huppert [46], Zassenhaus [47] y MacLane [48].

La teoría de representación de grupos finitos resolubles es un buen ejemplo de lo indicado en el párrafo anterior. Un grupo se dice resoluble cuando sus factores de composición son grupos cíclicos de órdenes primos. En un famoso paper de 1.928, Hall [49] usa inducción en el orden del grupo e información sobre extensiones de grupos para probar una importante generalización de los teoremas de Sylow para grupos resolubles. Por métodos similares, en un paper de 1.961, Carter [50] muestra la existencia de una única clase conjugada de subgrupos auto-normalizados nilpotentes y los relaciona con factores de un grupo finito resoluble. Siguió una elegante teoría, desarrollada por P. Hall, Carter, Gaschütz, Hawkes y otros, que está explicada en el cap. VI de Huppert [46] y es materia de una monografía prometida por Doerk y Hawkes.

Dado que gran parte de la teoría de grupos finitos depende fuertemente de los teoremas de Sylow, que garantizan la existencia de los llamados p-grupos (subgrupos de órdenes potencia de primos), el estudio de éstos es indispensable para la comprensión de la teoría general. Sin embargo, los problemas relativos a p-grupos son muy variados para comentarlos aquí. El estudio de los p-grupos se remite a Sylow y Burnside, pero la teoría moderna se basa en otro trabajo famoso de Hall [51], donde se introduce el cálculo del conmutador. Hay una exposición, por ejemplo, en Hall [7] y una más extensa en Huppert (capítulo III) [46]. El anillo de Lie asociado, el cual linealiza los cálculos del conmutador se describe en Gorenstein [29], en Lazard [52] y en Magnus, Karrass y Solitar [53]. Un catálogo de los 2-subgrupos hasta el orden 64, con un relato interesante de la teoría apropiada, está dado en Hall y Senior [54].

9.3. TEORIA DE REPRESENTACIONES:

La teoría de representaciones es considerada como el arte, la ciencia y la técnica de escribir grupos, como grupos de matrices, o lo que es equivalente, como grupos de transformaciones lineales de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo F. Por un lado, esto se aplica a los grupos finitos; y a los grupos de Lie y grupos algebraicos por el otro. Aunque estas dos partes de la matemática tienen fundamentos similares, sus sabores y su ramificaciones posteriores son bastante diferentes: la teoría de representación de grupos finitos es fuertemente aritmética, y está basada en la teoría de anillos; y la teoría de representación de grupos de Lie y grupos algebraicos está estrechamente conectada con el análisis de Fourier y otras partes del análisis funcional. Nos limitaremos aquí a los grupos finitos y, brevemente, al lado algebraico de la teoría de representación de grupos de Lie, en la sección 9.5.

Sea G un grupo finito. Una representación de G de grado n sobre el cuerpo F es un homomorfismo $\rho:G\rightarrow GL(n,F)$, donde $GL(n,F)$ es el grupo de matrices inversibles (es decir, no sigulares) $n\times n$ sobre F. Las representaciones ρ_1, ρ_2 se dicen equivalentes, y son tratadas como indistinguibles, si existe una matriz $n\times n$ inversible T tal que $T^{-1}g\rho_1 T = g\rho_2$ para todo $g\in G$. Asociado con una representación ρ hay un módulo para el álgebra de grupo FG, y, recíprocamente, un módulo (unital) para el anillo FG, de dimensión finita, sobre F, da lugar en forma natural a una representación de G; la equivalencia de las representaciones es lo mismo que el isomorfismo de módulos; en esta forma, las técnicas de la teoría de anillos pueden ser aplicadas. Si el cuerpo F tiene característica 0, típicamente el cuerpo de los complejos o un cuerpo numérico suficientemente grande, entonces se habla de representaciones "ordinarias". Cuando la característica de F es un número primo p que no divide al orden de $|G|$, la teoría torna a ser casi exactamente la misma que la teoría ordinaria de representación para G. Si la característica de F es un número primo p que divide a $|G|$, entonces se habla de representaciones "modulares" o "p-modulares".

Las representaciones ordinarias de G están determinadas por sus "caracteres", siendo el carácter asociado con ρ la función $\chi:G\rightarrow F$ cuyo valor en g es la traza de la matriz $g\rho$. Por lo tanto, la teoría ordinaria de representación se denomina teoría de los caracteres. Todo carácter puede ser expresado como una suma de los denominados "caracteres irreducibles", de los cuales G tiene solamente un número finito, y por lo tanto las representaciones comunes de G son conocidas cuando se tiene la tabla de caracteres. Esta es una disposición conveniente de los valores de los (absolutamente) irreducibles caracteres de G. Como los valores de los caracteres son siempre enteros algebraicos (que están en un campo numérico ciclotómico conveniente), y además la teoría debe satisfacer varias condiciones (tales como las relaciones de ortogonalidad de Schur o que la restricción a un subgrupo es un carácter), es a menudo posible conocer el carácter de la tabla, o un fragmento significativo de ella, a partir de muy poca información sobre la estructura interna de G. Así, el conocimiento de los caracteres de G conduce a más información sobre su estructura. Utilizada en esta forma, la teoría de los caracteres es una importante herramienta en la búsqueda de grupos simples y en la teoría de grupos de permutación.

La primera exposición en forma de libro de texto es la de Burnside [55], la cual es aún de interés (a pesar del lenguaje desactualizado), no solamente por razones históricas, sino también por las aplicaciones que da Burnside. Otras exposiciones introductorias se pueden encontrar en Hall [7], Schenkman [8], Speiser [10], Gorenstein [29] y Serre [56], entre otros. Tratamientos más extensivos son los de Huppert [46], Curtis y Reiner [57], Dornhoff [58], Feit [59] e Isaacs [60].

La teoría modular de representaciones es bastante más complicada que la teoría ordinaria. Se debe principalmente a los trabajos de Richard Brauer, quien la desarrolló como una herramienta para encontrar y clasificar los caracteres ordinarios de G y para probar propiedades aritméticas profundas de ellos. En efecto, el puente entre las representaciones modulares y ordinarias son las denominadas representaciones "integrales": si R es un subanillo del cuerpo F de característica 0, de forma tal que F es el cuerpo de fracciones de R y el primo p no es inversible en R, entonces una representación de G por matrices sobre R puede verse como una representación ρ de G sobre F, y por otro lado produce una representación sobre un cuerpo K de característica p cuando las coordenadas de las matrices son todas reducidas módulo un ideal maximal M de R que contiene a p. Para descripciones elementales de este proceso ver Curtis y Reiner [57] (Capítulo 12), Serre [56] o Dornhoff [58] (Parte B). El artículo de Dade en *Proceedings* [30] muestra en magnífica forma como la teoría puede ser aplicada directamente a la búsqueda de grupos simples. Para resultados más profundos lo es mejor consultar varios de los muchos artículos originales de Brauer, y de otros como Feit, Dade y J.A. Green. En particular, la filosofía de Green parece ser algo diferente de la de Brauer. El estudia las representaciones modulares de G, sin referencia a los caracteres, usando métodos homológicos. Esto lo lleva a una exposición desde el punto de teoría de anillos como la que dan Green [61] y Hamernik [62]. Una exposición exhaustiva de todos los aspectos de la teoría está dada en las notas de Feit [63].

La teoría p-modular de representaciones de un grupo cuyos p-subgrupos de Sylow son cíclicos ha sido particularmente bien trabajada y se le han encontrado muchas aplicaciones. Fue originalmente producida por Brauer y desde entonces multiplicada por Thompson [64] y extendida por Dade [65] y muchos otros. Descripciones pueden encontrarse en Dornhoff [58], Green [61] y Feit [63]. Esta teoría se aplica casi toda vez que se computa la tabla de caracteres de un grupo simple grande (ver por ejemplo, O'Nan [20] y Hall [66]), y se ha probado que también es útil en el estudio de ciertos grupos de permutaciones (ver Neumann [45] para una exposición y referencias).

Uno de los propósitos de la teoría de representación es el cálculo explícito de las tablas de caracteres de todos los grupos finitos. Esto fue comenzado por Frobenius para los grupos simétricos y alternados, y hay muchas exposiciones de los resultados en Littlewood [67], Robinson [68], Coleman [69], Kerber [70] y otros. El cálculo de los caracteres de los grupos lineales sobre los cuerpos finitos fue terminado en 1.955 por Green [71] y los trabajos posteriores de Carter y Lusztig [72], Deligne y Lusztig [73] y otros (ver artículos en Borel *et al* [74] y el survey de Springer [75]) representan buenos progresos hacia la producción tanto de los caracteres modulares como de los ordinarios de los grupos finitos remanentes de tipo Lie. Se conocen tablas de caracteres de los grupos esporádicos simples, pero no han sido publicadas aún. La bibliografía de Feit [18] da fuentes para muchos de estos grupos; tablas para los grupos simples menores fueron proporcionadas por Mc Kay y Lambert [76]; una colección completa fue compilada por J. H. Conway y R. T. Curtis en Cambridge.

9.4. GRUPOS INFINITOS:

Como en la colección de reviews editada por Baumslag [77], la teoría de grupos infinitos significa el estudio general de los grupos, en los cuales la finitud o las topologías no juegan un papel especial. El trabajo de Kurosh [5] sigue siendo la mejor introducción en este área. Un suplemento agregado en la tercera edición rusa [6], publicada en 1.967, contiene un survey y una rica bibliografía que cubre los años 1.952-1.965. Hay alguna esperanza de que sea traducido y publicado como un tercer volumen de la edición americana [5]. Otros libros que contienen introducciones a partes del tema, usualmente grupos libres y grupos abelianos, son los de Ledermann [1], Macdonald [2], Rotman [3], Hall [7], Schenkman [8] y Scott [9].

Una de las primeras y más fuertes razones para estudiar los grupos infinitos proviene de los roles que ellos juegan en análisis y topología, y en la teoría de funciones automorfas como grupos de monodromía de ecuaciones diferenciales lineales, y como grupos fundamentales de variedades y otros espacios topológicos. En tales contextos un grupo será usualmente primero descripto por una presentación en términos de generadores y relaciones, y una gran parte de la teoría de los grupos infinitos concierne a estas presentaciones. Las monografías de Coxeter y Moser [78], de Magnus, Karrass y Solitar [53] y de Lyndon y Schupp [79] ofrecen detalladas exposiciones y buenas bibliografías. El último de éstos contiene un relato de presentaciones de grupos en los cuales cantidades relativamente pequeñas de cancelaciones son posibles entre diferentes relatores, tratados por métodos geométricos y topológicos introducidos por Lyndon los cuales contienen el viejo método de la "criba" de Tartakovski. También contiene un relato de "estructuras bipolares" en productos libres. Estos fueron introducidos primero por Stallings en 1.968 en su demostración de que grupos de dimensión cohomológica uno son libres, y una descripción en el contexto de aplicaciones y motivaciones topológicas se encuentra en su monografía [80]. Una técnica elegante de un tipo similar, de grupos actuando sobre árboles, debida a Serre y Bass [81], aparecerá en las Lecture Notes.

La mayoría de los grupos que aparecen en la práctica en análisis o topología son finitamente presentados, esto es, presentados en términos de un número finito de generadores y de relaciones. Los interrogantes más importantes para presentaciones finitas son algorítmicos: el denominado "problema de las palabras"(que es un algoritmo para decidir si cualquier producto dado de generadores y de sus inversos es o no el elemento unidad del grupo), el "problema de conjugación", el "problema de isomorfismo" y otros. Ejemplos de grupos finitamente presentados con problemas de palabras insolubles fueron dados por Novikov, Britton y Boone. Por otra parte otros algoritmos a mano para resolver el problema de palabras son conocidos para una variedad de clases importantes de grupos finitamente presentados tales como grupos con un relator, grupos con pocas cancelaciones, grupos finitos residuales y grupos simples. No se conoce demasiado aún respecto al problema de conjugación y al problema de isomorfismo. Aún para las presentaciones un-relator, para las cuales la solución del problema de las palabras fue resuelto por Magnus en 1.932, no se sabe cuando estos problemas son resolubles o no. Este área general tiene un fuerte encanto lógico ya que se utiliza teoría de la recursión para probar la no existencia de algoritmos y la no decibilidad de algunas cuestiones. La monografía de Miller [82] además de incorporar nuevos resultados contiene un relato muy útil de estos problemas lógicos. Un survey más general ha sido escrito por Baumslag, con una buena bibliografía, de grupos finitamente presentados y un survey especializado [84] de problemas sobre grupos un-relator.

Una cuestión vieja y con importancia, conocida como el problema de Burnside, puede ser vista como una cuestión sobre generadores y relaciones. En su versión original fue esencialmente la pregunta de cuando un grupo finitamente generado, cuyos elementos son todos de orden finito, debe ser finito. Un contra-ejemplo fue dado primero por Golod [85] en 1.964; una aproximación interesante y entretenida, aunque diferente fue exhibida por Alesin [86] en 1.972. Sin embargo, en el transcurso del tiempo, el problema de Burnside para exponente n se transformó en el de averiguar cuándo un grupo finitamente generado, cuyos elementos son todos de orden finito divisor de n, es necesariamente finito. Se sabe que es cierto si n es 1, 2, 3, 4 ó 6 (ver Hall [7], capítulo 18) y se sabe que es falso si n es un múltiplo de un número impar no menor que 665. Una solución fue publicada por Novikov y Adjan en 1.968, mejorada por Adjan [87]; otra solución, anunciada en 1.965, fue publicada por Britton [88].

La mayoría de las variantes interesantes del problema de Burnside, y muchas cuestiones relacionadas con él son de naturaleza varietal. Los grupos varietales son una clase de grupos que pueden ser axiomatizados agregando otras relaciones idénticas a axiomas que describen grupos en general. Así, por ejemplo, la clase de todos los grupos abelianos es una variedad y puede ser definida por una relación de identidad $x \times y = y \times x$, como también la clase B_n, la variedad de Burnside consistente de todos los grupos de exponente dividiendo n, la cual puede ser definida por la relación $x^n = 1$. El estudio de variedades en general pertenece propiamente a la teoría de modelos y al álgebra universal (ver, por ejemplo, Cohn [89]), pero es en teoría de grupos que las variedades aparecen más naturalmente, y han sido las variedades de grupos las que fueron estudiadas con intensidad. La monografía de Neumann [90] da un excelente survey del tema. Está un poco desactualizada, debido al progreso en los problemas formulados en él; un artículo de Kovács y Newman [91] da información de todos aquellos problemas y una extensión de la bibliografía.

Una parte de la teoría de grupos infinitos aparece por analogía o generalización de grupos de Lie de dimensión finita o de grupos finitos. Así, se dice que un grupo infinito es nilpotente si tiene una serie central de longitud finita, o que es resoluble si tiene una serie normal de longitud finita con factores abelianos. El cálculo de conmutadores originado por P. Hall [51] y su reflexión en propiedades de un anillo de Lie asociado, es útil para el estudio de grupos nilpotentes en general, así como para p-grupos finitos. En particular, se conoce bastante sobre grupos nilpotentes finitamente generados. Las notas de Hall [92] y Baumslag [93] son excelentes fuentes. Varios métodos para tratar grupos resolubles infinitos fueron descriptos por Hall en una trilogía [94] [96] la cual es aún la mejor introducción al tema. Existe una vasta colección de otras propiedades que han sido sugeridas y estudiadas como generalizaciones de nilpotencia o resolubilidad, generalizaciones en el sentido de que uno de esos es el que se reduce a un grupo finito. Kurosh [5] (Capítulos XIII, XIV y XV) da una buena introducción a este área; la monografía de Robinson [97], complementada con su artículo [98], da un survey exhaustivo con una buena bibliografía. En otra dirección, una generalización de la finitud que ha recibido considerable atención, en particular con referencia a los teoremas generalizados de Sylow y al estudio de grupos simples, es el de finitud local. Un grupo se dice localmente finito si todo conjunto finito de elementos está contenido en un subgrupo finito. La monografía de Kegel y Wehrfritz [99] ofrece una buena introducción al tema, un buen survey e igualmente una buena bibliografía.

Muchos de los grupos infinitos que aparecen en análisis y geometría son lineales, es decir, grupos de matrices invertibles de n×n sobre un cuerpo. Aunque algunos de los resultados se remontan a Burnside y Schur en la primera década de este siglo, el primer trabajo sistemático sobre grupos lineales fue hecho por Mal'cev en 1.940. Una exposición de la teoría en un contexto muy general esta dada en Plotkin [100], y una exposición menos ambiciosa en Dixon [101], un survey profundo y una buena bibliografía fué publicada por Wehrfritz [102].

Anillos de grupos han recibido también considerable atención, tanto de parte de los especialistas en teoría de grupos, como de los de teoría de anillos. El estudio de grupos resolubles infinitos conduce directamente a cuestiones sobre anillos de grupos, como mostró Hall [94] [96], y el tema ha recibido considerable ímpetu a partir de los esfuerzos para probar que no hay divisores de cero en el anillo de grupo de un grupo libre de torsión y que el radical de Jacobson de un álgebra de grupo sobre un cuerpo de característica cero es trivial. La monografía de Passman [103] está un poco obsoleta, probablemente debido a los problemas que plantea en su capítulo final, pero ha publicado recientemente un artículo introductorio [104] que es un complemento muy útil.

En sus primeros 30 años de historia la teoría de grupos de cohomología fue desarrollada como un área de álgebra, con aplicaciones no solo en topología algebraica y teoría de la extensión de la cual surge, sino también en teoría de números, en geometría y en teoría de representación. El primer libro de texto sobre el tema, que tuvo enorme influencia, fue el de Cartan y Eilenberg [105]; pero cualquier buen libro de álgebra homológica en general, como el de MacLane [48] o Hilton y Stammbach [106], incluyen una introducción fácil a la teoría de grupos de homología y cohomología. Los libros de Kurosh [5], Rotman [3], Hall [7] y Huppert [46] contienen una cierta cantidad de la teoría desarrollada como herramienta para usar en el problema de extensión. La teoría de cohomología de grupos finitos tiene un interés especial, en parte porque la finitud tiene consecuencias útiles que la hacen una teoría más rica; y en parte por la influencia a las aplicaciones de la teoría de números y requerimientos sobre ella. Esto es inmediato en el libro de Babakhanian [107] y en el artículo expositorio de Atiyah y Wall [108]. Por otra parte, las notas de Gruenberg [109] y Stammbach [110] dan considerable información sobre homología y cohomología, en particular para grupos infinitos. Hay un capítulo (el octavo) particularmente útil en el primero sobre dimensión cohomológica finita, un tema que está en progreso, debido a Bieri, K. F. Brown, Chiswell, Eckmann, Serre y otros, que produjeron una buena teoría de la característica de Euler para una clase amplia de grupos infinitos. Los grupos de cohomología pueden definirse en toda su generalidad para las denominadas categorías "triples", en particular, para variedades en el sentido del álgebra universal. Un estudio interesante de esta cohomología triple en variedades de grupos ha sido producido por Leedham-Green [111] y sus colaboradores.

Quizás la rama autónoma más amplia de la teoría de grupos infinitos es el estudio de los grupos abelianos. Los libros de Kurosh [5], Rotman [3], Hall [7] y Schenkman [8] dan breves introducciones que van un poco más allá del teorema de estructura estándar para grupos abelianos finitamente generados. Para otras exposiciones, y para algunas indicaciones de cómo se generaliza el tema a módulos sobre anillos a ideales principales hay un pequeño libro de Kaplansky [112] el cual, en su segunda edición, contiene notas útiles sobre la literatura. La referencia estándar en este área es la monografía en dos volúmenes de Fuchs [113], el cual mejora mucho su libro anterior (Pergamon Press, Oxford, 1.960). Sin embargo, poco después parte del tema cambió un poco por la invasión de la combinatoria y teoría de modelos introducida por Shelagh [114].

9.5. GRUPOS ALGEBRAICOS Y DE LIE:

Las teorías de grupos algebraicos y grupos de Lie son considerablemente más geométricas y topológicas que algebraicas. Sin embargo, hay puntos de contacto y semejanzas con algunas partes de la teoría de grupos discretos, y es éste el punto que discutiremos brevemente.

Un grupo algebraico es una estructura de grupo en la categoría de variedades algebraicas, esto es, es un grupo cuyo conjunto subyacente es una variedad algebraica, y en la cual la multiplicación y la inversa están dadas por funciones polinomiales en términos de coordenadas locales convenientes. Análogamente, un grupo de Lie es una estructura de grupo en la categoría de las variedades suaves (o variedades con estructura analítica real). Hay una semejanza muy fuerte entre las teorías de grupos algebraicos y de grupos de Lie. La diferencia principal es que los primeros pueden definirse y estudiarse sobre cualquier cuerpo, aún sobre cuerpos de característica finita y en consecuencia hay dificultades técnicas mayores en los teoremas y demostraciones. Los libros de Borel [115] y Humphries [116] ofrecen una buena introducción a los grupos algebraicos. El primero da pocas referencias a otros trabajos, pero tiene buenas notas bibliográficas en diferentes secciones. El libro de Humphries tiene una bibliografía extensa. Hay otros trabajos introductorios sobre grupos de Lie, con puntos de vista que varían ampliamente desde la topología diferencial hasta la física. Dos de los más conocidos son Bourbaki [117], que tiene un tratamiento exhaustivo pero cuya bibliografía no es mucha y Chevalley [118] que es una referencia estándar, pero sin bibliografía.

Un grupo algebraico conexo de dimensión finita o grupo de Lie tiene un único subgrupo normal maximal soluble y el grupo cociente, que es "semisimple", es esencialmente un producto directo de grupos simples. Así, por comparación con los grupos finitos, cuya construcción a partir de sus factores componentes puede ser muy complicada, la construcción de los grupos algebraicos conexos o grupos de Lie a partir de los más "simples" es facilmente comprensible. Además, los simples son conocidos explícitamente. Para grupos de Lie hay un resultado clásico de Killing y Cartan; su análogo para grupos algebraicos fue probado por Chevalley, y posteriormente por Borel y Tits. El libro de Carter [17] explica cómo ellos están relacionados con los grupos finitos simples. En un conjunto notable de notas, Tits [119] hace un análisis de la geometría detrás de los grupos algebraicos simples suficiente para su clasificación y para su uso en la construcción de grupos finitos de tipo Lie.

Para aplicaciones en física y química y en varias ramas de matemática pura lo que es importante es la teoría de representación de grupos de Lie. Uno de los trabajos más influyentes en este tema fue el de Weyt; [120]. El expone la relación (debida escencialemente a Schur) entre la teoría de representación del grupo simétrico y la descomposición de las representaciones tensoriales del grupo lineal general (o del grupo ortogonal), la relación entre las representaciones de un grupo semisimple conexo y las de sus subgrupos compactos maximales (truco unitario de Weyl), y el uso de integración sobre un grupo compacto para reemplazar el proceso de promediar que se usa cuando se trata con los caracteres de un grupo finito. Un libro con buena bibliografía es Boerner [121]. Existe una buena introducción de la teoría de representaciones de grupos compactos en Adams [122]. Es bastante diferente a los tratamientos más viejos. No trata de calcular los caracteres explícitamente; por otra parte, su aproximación abstracta y elegante hacen de él un excelente survey de la teoría.

9.6. ESTRUCTURAS RELACIONADAS:

Los temas que trae el *Mathematical Reviews* al final de la sección descripta como "Teoría de grupos y sus generalizaciones", es considerada hoy en día como el álgebra universal como variante de la teoría de grupo. Por lo tanto la mencionaremos brevemente. La monografía de Bruck [123] es aún la mejor fuente de información sobre algunas de estas estructuras, particularmente lazos. Sin embargo la teoría de semigrupos ha desarrollado una amplia literatura por mérito propio; y la literatura referente a lazos a menudo se encuentra clasificada como teoría combinatoria de cuadrados latinos.

En la teoría de semigrupos el trabajo en dos volúmenes de Clifford y Preston [124] ha sido una fuente estándar por varios años. El primer volumen es una descripción de la estructura y teoría de la representación de semigrupos germen que surgen de la teoría de ideales de J. A. Green y las relaciones de equivalencia a que dan lugar y del teorema de Rees sobre una forma de representación matricial de semigrupos. El segundo volumen contiene información variada sobre presentaciones, inmersiones, congruencias, representaciones y otros tópicos. La estructura de semigrupos conmutativos finitamente generados está tratada exhaustivamente en Rédei [125], y en la monografía de Howie [126] que contiene *inter alia* una buena introducción y un largo capítulo sobre semigrupos inversos (es decir, semigrupos en los cuales todo elemento a tiene un "inverso" x tal que $x \times a \times x = x$ y $a \times x \times a = a$). Una nueva y promisoria línea se desarrolla motivada por las aplicaciones a las máquinas con un número finito de estados. Esto puede encontrarse, por ejemplo, en los libros de Arbib [127] y Eilenberg [128]. La apropiada teoría de descomposición de semigrupos, utilizada en esta forma por Krohn y Rhodes, involucra el denominado producto wreath, que aparece primero en varias partes de la teoría de grupos. Un survey elemental de los productos wreath, con buena información bibliográfica, está dado por Wells [129], y, más actualizado sobre la teoría de descomposición es el escrito por Rhodes [130] y sus colaboradores.

REFERENCIAS

[1] LEDERMANN, W., *Introduction to group theory,* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1.973. {text}

[2] McDONALD, I., *The theory of groups,* Clarendon Press, Oxford, 1.968. {text}

[3] ROTMAN, J., *The theory of groups: an introduction,* Allyn and Bacon, Boston, 1.965. (A-2.675). {text}

[4] SCHMIDT, O. U., *Abstract theory of groups,* Freeman, San Fransisco, 1.966. {text}

[5] KUROSH, A., *The theory of groups*, 2 vols., Chelsea, New York, 1.955, (v1: A-546, v2: A-547). {text}

[6] KUROSH, A., *Teoriya grupp,* 3rd edn, Nauka, Moscow, 1.967.
[7] HALL, M., *The theory of groups,* Macmillan, New York, 1.959. (A-1.657 y A-6.223). {text}
[8] SCHENKMAN, E., *Group theory,* Van Nostrand, Princeton, 1.965. (A-2.345) {text}
[9] SCOTT, W. R., *Group theory,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.964. {text}
[10] SPEISER, A., *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung,* 4th edn, Birkhäuser, Basel, 1.956. (A-493) {text}
[11] DAVIS, C., *A Bibliographical survey of simple groups of finite order, 1.900-1.965,* Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1.969.
[12] GORENSTEIN, D., (ed.), *Reviews on finite groups, as printed in Mathematical Reviews, 1.940-1.970, Volumes 1-40,* American Mathematical Society, Providence, R. I., 1.974.
[13] JORDAN, C., *Traité des substitutions et des équations algébriques,* Gauthier-Villars, Paris, 1.870.
[14] DICKSON, L. E., *Linear groups with an exposition of the Galois field theory,* 2nd edn, Dover, New York, 1.958. (A-1.148)
[15] DIEUDONNÉ, J., *La géométrie des groupes classiques,* 2nd edn, Springer, Berlin, 1.963.
[16] CHEVALLEY, C., 'Sur certain groupes simples', *Tohoku Mathematical Journal,* 7, 14-66, 1.955.
[17] CARTER, R., *Simple groups of Lie type,* Wiley, London, 1.972. (A-4.937)
[18] FEIT, W., 'The current situation in the theory of finite simple groups', *International Congress of Mathematicians. Proceedings,* 1, 55-93, 1.970.
[19] CONWAY, J, y WALES, D., 'Construction of the Rudvalis group of order 145,926,144,000', *Journal of Algebra,* 27, 538-548, 1.973.
[20] O'NAN, M., 'Some evidence for the existence of a new simple group', *London Mathematical Society. Proceedings,* 32, 421-479, 1.976.
[21] SMITH, P., 'A simple subgroup of M? and $E_8(3)$', *London Mathematical Society. Bulletin,* 8, 161-165, 1.976.
[22] HARADA, K., 'On the simple group F of order $2^{14} \times 3^6 \times 5^6 \times 7 \times 11 \times 19$' in *Proceedings of the Conference on finite groups, Utah 1.975,* (ed. W. Scott y F. Gross), Academic Press, New York, 1.976.
[22a] FISCHER, B., 'Finite groups generated by 3-transpositions', *Inventiones Mathematicae,* 13, 232-246, 1.971.
[23] GRIESS, R.Jr., 'The structure of the "Monster" simple group' in *Proccedings of the Conference on finite groups. Utah 1.975,* (ed. W. Scott y F. Gross), Academic Press, New York, 1.976.
[23a] JANKO, Z., 'A new finite simple group of order 86.775.571.046.077.562.880 wich possesses M_{24} and the full covering group of M_{22} as subgroups', *Journal of Algebra,* 42, 564-596, 1.976.
[24] FEIT, W. y THOMPSON, J., 'Solvability of groups of odd order', *Pacific Journal of Mathematics,* 13, 775-1.029, 1.963.
[25] WALTER, J., 'The characterization of finite groups with Abelian Sylow 2-subgroups', *Annals of Mathematics,* 89, 405-514, 1.969.

[26] BENDER, H., 'On groups with Abelian Sylow 2-subgroups', *Mathematische Zeitschrift,* 117, 164-176, 1.970.

[27] GILMAN, R. y GORENSTEIN, D., 'Finite groups with Sylow 2-subgroups of class 2', *American Mathematical Society. Transactions,* 207, 1-126, 1.975.

[28] GOLDSCHMIDT, D., '2-fusion in finite groups', *Annals of Mathematics,* 99, 70-117, 1.974.

[29] GORENSTEIN, D., *Finite groups*, Harper and Row, New York, 1.968.

[30] POWELL, M. y HIGMAN, G., (eds.), *Finite simple groups. Proceedings of a NATO-LMS instructional conference, Oxford, 1.969,* Academic Press, London, 1.971.

[31] GORENSTEIN, D. y WALTER, J., 'Balance and generation in finite groups', *Journal of Algebra,* 33, 224-287, 1.975.

[32] GORENSTEIN, D., 'Finite simple groups and their classification', *Israel Journal of Mathematics,* 19, 5-66, 1.974.

[33] WIELANDT, H., *Finite permutation groups,* Academic Press, New York, 1.964. (A-1.602)

[34] WIELANDT, H., *Permutation groups through invariant relations and invariant functions,* Lecture Notes, Ohio State University, Columbus, Ohio, 1.969.

[35] HIGMAN, D., 'A survey of some questions and results about rank 3 permutation groups', *International Congress of Mathematicians. Proceedings,* 1, 361-365, 1.970.

[36] NEUMANN, P., 'Finite permutation groups, edge-coloured graphs and matrices', in *Proceedings of the conference on group theory and computation, Galway 1.973,* Academic Press, London, 1.977.

[37] CAMERON, P., 'Suborbits in transitive permutation groups' in *Combinatorics* (ed. M. Hall, Jr. y J. H. van Lint), Nato Advanced Study Institute (Series C) 16, Reidel, Dordrecht, 1.974.

[38] HIGMAN, D. G., 'Coherent configurations, I', *Padova, Universita degli Studi di: Seminario Matematico. Rendiconti,* 44, 1-25, 1.970.

[39] HIGMAN, D. G., *Combinatorial considerations about permutation groups,* Lecture Notes, Mathematical Institute, Oxford, 1.972.

[40] KANTOR, W. M., '2-transitive designs' in *Combinatorics* (ed. M. Hall, Jr. y J. H. van Lint), Nato Advanced Study Institute (Series C) 16, Reidel, Dordrecht, 1.974.

[41] O'NAN, M., 'Normal structure of the one-point stabilizer of a doubly-transitive permutation group, I, II', *American Mathematical Society. Transactions,* 214, 1-42, 43-74, 1.975.

[42] O'NAN, M., 'Doubly transitive groups of odd degree whose one point stabilizers are local', *Journal of Algebra,* 39, 440-482, 1.976.

[43] HOLT, D., 'Doubly transitive groups with a solvable one point stabilizer', *Journal of Algebra.* {por aparecer}

[44] NEUMANN, P., 'Transitive permutation groups of prime degree' in *Proceedings of the international conference on the theory of groups, Canberra, 1.973,* (ed. M. Newman), Lectures Notes in Mathematics 372, Springer, Berlin, 1.974.

[45] NEUMANN, P., *Permutationsgruppen von Primzahlgrad,* Vorlesungen aus dem Mathematischen Institut, Giessen. {por aparecer}

[46] HUPPERT, B., *Endliche Gruppen,I,* Springer, Berlin, 1.967.

[47] ZASSENHAUS, H., *The theory of groups,* 2nd edn, Chelsea, New York, 1.958. (A-545)

[48] McLANE, S., *Homology,* Springer, Berlin, 1.963. (A-1.165)

[49] HALL, P., 'A note on soluble groups', *London Mathematical Society. Journal,* 3, 98-105, 1.928.

[50] CARTER, R. W., 'Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups', *Mathematische Zeitschrift,* 75, 136-139, 1.961.

[51] HALL, P., 'A contribution to the theory of groups of prime power order', *London Mathematical Society. Proceedings,* 36, 29-95, 1.933.

[52] LAZARD, M., 'Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie', *Ecole Normale Supérieure. Annales Scientifiques,* 71, 101-190, 1.954.

[53] MAGNUS, W., KARRASS, A. y SOLITAR, D., *Combinatorial group theory,* Wiley-Interscience, New York, 1.966.

[54] HALL, M. Jr, y SENIOR, J., *The groups of order* 2^n *($n \leq 6$),* Macmillan, New York, 1.964.

[55] BURNSIDE, W., *Theory of groups of finite order,* Dover, 1.955. (A-1.896)

[56] SERRE, J. P., *Réprésentations linéaires des groupes finis,* Hermann, Paris, 1.971. (A-3.902)

[57] CURTIS, C. y REINER, I., *Representation theory of finite groups and associative algebras,* Wiley-Interscience, New York, 1.962, (A-1.083)

[58] DORNHOFF, L., *Group representation theory: Part A: ordinary representation theory, Part B: modular representation theory,* Marcel Dekker, New York, 1.971-1.972.

[59] FEIT, W., *Characters of finite groups,* Benjamin, New York, 1.967. (A-2.551)

[60] ISAACS, I., *Character theory of finite groups,* Academic Press, New York, 1.976.

[61] GREEN, J., *Vorlesungen über modulare Darstellungstheorie endlicher Gruppen,* Vorlesungen aus dem Matematischen Institut, Giessen, 1.974.

[62] HAMERNIK, W., *Group algebras of finite groups: defect groups and vertices,* Vorlesungen aus dem Mathematischen Institut, Giessen, 1.974.

[63] FEIT, W., *Representations of finite groups, I, II,* Lecture Notes, Yale University, New Haven, 1.969-1.976.

[64] THOMPSON, J., 'Vertices and sources', *Journal of Algebra,* 6, 1-6, 1.967.

[65] DADE, E. C., 'Blocks with cyclic defect groups', *Annals of Mathematics,* 84, 20-48, 1.966.

[66] HALL, M. Jr, 'A search for simple groups of order less than one million' in *Computational problems in abstract algebra* (ed. J. Leech), Pergamon Press, Oxford, 1.970.

[67] LITTLEWOOD, D., *The theory of group characters and matrix representations of groups,* 2nd edn, Clanderon Press, Oxford, 1.950. (A-93)

[68] ROBINSON, G., *Representation theory of the symmetric group,* University of Toronto Press, Toronto, 1.961.

[69] COLEMAN, A., *Induced representations with applications to* S_n *and* $GL(n)$*,* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics 4, Queen's Universtity, Kingston, Ontario, 1.966.

[70] KERBER, A., *Representations of permutation groups,I, II,* Lecture Notes in Mathematics 240, 495, Springer, Berlin, 1.971. (LNM-240, LNM-495)

[71] GREEN, J, 'The characters of the finite general linear groups', *American Mathematical Society. Transactions,* 80, 402-447, 1.955.

[72] CARTER, R. y LUSZTIG, G., 'On the modular representations of the general linear and symmetric groups', *Mathematische Zeitschrift,* 136, 193-242, 1.974.

[73] DELIGNE, P. y LUSZTIG, G., 'Representations of reductive groups over finite fields', *Annals of Mathematics,* 103, 103-161, 1.976.

[74] BOREL, A. *et al.*, *Seminar on algebraic groups and related finite groups,* Lecture Notes in Mathematics 131, Springer, Berlin, 1.970. (B-574, L-131)

[75] SPRINGER, T. A., 'Caractéres de groupes de Chevalley finis' in *Séminaire Bourbaki, 1.973,*Lecture Notes in Mathematics 383, Springer, Berlin, 1.974.

[76] McKAY, J., *The character tables of the known finite simple groups of order less than* 10^6, Mathematical Institute, Oxford, 1.970; editado por P. J. Lambert.

[77] BAUMSLAG, G. (ed.), *Reviews on infinite groups, as printed in Mathematical Reviews, 1.940-1.970, Volumes 1-40,* 2 vols., American Mathematical Society, Providence, R. I., 1.974.

[78] COXETER, H. y MOSER, W., *Generators and relations for discrete groups,* Springer, Berlin, 1.965. (A-2.311)

[79] LYNDON, R. y SCHUPP, P., *Combinatorial group theory,* Springer, Berlin, 1.977. (A-4.971)

[80] STALLINGS, J., *Group theory and three-dimensional manifolds,* Yale University Press, New Haven, 1.971.

[81] SERRE, J. y BASS, H., *Arbres, amalgames et* SL_2 , Lecture Notes, Collége de France, 1.969. {por aparecer en Lecture Notes in Mathematics, Springer}

[82] MILLER, C., *On group-theoretic decision problems and their classification,* Annal of Mathematics Studies 68, Princeton University Press, Princeton, 1.971. (A-5.493)

[83] BAUMSLAG, G., 'Finitely presented groups' in *Proceedings of the international conference on the theory of groups, Canberra, 1.965,* (ed. L. Kovács y B. Neumann), Gordon and Breach , New York, 1.967.

[84] BAUMSLAG, G., 'Some problems on one-relator groups' in *Proceedings of the international conference on the theory of groups, Canberra, 1.973,* (ed. M. Newman), Lecture Notes in Mathematics 372, Springer, Berlin, 1.974.

[85] GOLOD, E. S., 'On nil-algebras and residually finite p-groups', *Akademiya Nauk SSSR. Izvestiya-Seriya matematicheskaya,* 28, 273-276, 1.964; traducido en *American Mathematical Society. Tranlations,* 48, 103-106, 1.965.

[86] ALESIN, S. V., 'Finite automata and the Burnside problem for periodic groups', *Matematicheskie Zametki,* 11, 319-328, 1.972; traducido en *Mathematical Notes,* 11, 199-203, 1.972.

[87] ADJAN, S., *The Burnside problem and identical relations in groups,* Nauka, Moscow, 1.975; {en ruso, una traducción está por aparecer por Springer}

[88] BRITTON, J., 'The existence of infinite Burnside groups' en *World problems* (ed. W. Boone, F. Cannonito y R. Lyndon), North-Holland, Amsterdam, 1.973.

[89] COHN, P., *Universal Algebra,* Harper and Row, London, 1.965. (A-2.241)

[90] NEUMANN, H., *Varieties of groups,* Springer, Berlin, 1.967. (A-3.276)

[91] KOVÁCS, L. y NEWMAN, M., 'Hanna Neumann's problems on varieties of groups' in *Proceedings of the international conference on the theory of groups, Canberra, 1.973,* (ed. M. Newman), Lecture Notes in Mathematics 372, Springer, Berlin, 1.974.

[92] HALL, P., *Nilpotent groups,* Queen Mary College, London, 1.969; notes of lectures given at the Canadian Mathematical Congress, Alberta, 1.957.

[93] BAUMSLAG, G., *Lecture notes on nilpotent groups,* CBMS Regional Conference Series in Mathematics 2, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.971. (A-4.014)

[94] HALL, P., 'Finiteness conditions for soluble group', *London Mathematical Society. Proceedings,* 4, 419-436, 1.954.

[95] HALL, P., 'On the finiteness of certain soluble groups', *London Mathematical Society. Proceedings,* 9, 595-622, 1.959.

[96] HALL, P., 'The Frattini subgroups of finitely generated groups', *London Mathematical Society. Proceedings,* 11, 327-352, 1.961.

[97] ROBINSON, D., *Finiteness conditions and generalised soluble groups,* 2 vols., Springer, Berlin, 1.972.

[98] ROBINSON, D., 'A new treatment of soluble groups with finiteness conditions on their Abelian subgroups', *London Mathematical Society. Bulletin,* 8, 113-129, 1.976.

[99] KEGEL, O. y WEHRFRITZ, B., *Locally finite groups,* North-Holland, Amsterdam, 1.973.

[100] PLOTKIN, B., *Groups of automorphisms of algebraic systems,* Nauka, Moscow, 1.966; traducción publicada por Wolters-Noordhoff, Groningen, 1.972.

[101] DIXON, J., *The structure of linear groups,* Van Nostrand Reinhold, London.

[102] WEHRFRITZ, B., *Infinite linear groups,* Springer, Berlin, 1.973.

[103] PASSMAN, D., *Infinite group rings,* Marcel Dekker, New York, 1.971.

[104] PASSMAN, D., 'What is a group ring?', *American Mathematical Monthly,* 83, 175-185, 1.976.

[105] CARTAN, H. y EILENBERG, S., *Homological algebra,* Princeton University Press, Princeton, 1.956. (A-367)

[106] HILTON, P. y STAMMBACH, U., *A course in homological algebra,* Springer, Berlin, 1.971. (A-6.002)

[107] BABAKHANIAN, A., *Cohomological methods in group theory,* Marcel Dekker, New York, 1.972.

[108] ATIYAH, M. y WALL, C., 'Cohomology of groups' in *Algebraic number theory* (ed. J. Cassels y A. Fröhlich), Academic Press, London, 1.967.

[109] GRUENBERG, K., *Cohomological topics in group theory,* Lecture Notes in Mathematics 143, Springer, Berlin, 1.970. (LNM-143)

[110] STAMMBACH, U., *Homology in group theory,* Lecture Notes in Mathematics 359, Springer, Berlin, 1.973. (B-574, L-359)

[111] LEEDHAM-GREEN, C. R. *et al.*, 'Homology in varieties of groups, I-V', *American Mathematical Society. Transactions,* 162, 1-33, 1.971; 170, 293-303, 1.972; *Acta Mathematica* {por aparecer}

[112] KAPLANSKY, I., *Infinite Abelian groups*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1.960. (A-734)

[113] FUCHS, L., *Infinite abelian groups,* 2 vols., Academic Press, New York, 1.970-1.973. (v1: A-4.303 y v2: A-4.506)

[114] SHELAGH, S., 'Infinite Abelian groups, Whitehead problem and some constructions' y 'A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals', *Israel Journal of Mathematics,* 18, 243-256, 1.974; 21, 319-349, 1.975.

[115] BOREL, A., *Linear algebraic groups,* Benjamin, New York, 1.969. (A-3.632)

[116] HUMPHRIES, J., *Linear algebraic groups,* Springer, Berlin, 1.975. (A-4.702)

[117] BOURBAKI, N., *Éléments de mathématiques: Groupes et algébres de Lie,* 1.960-1.975, (Fasc.XXVI, Cap.1: B-LIE, 1, A-239; Fasc. XXXVII, Cap.2 y 3: B-LIE, 2-3, A-4.845; Cap.4, 5 y 6: LIE IV-V-VI; Fasc.XXXVIII, Cap.7 y 8: B-LIE, 7-8, A-4.846)

[118] CHEVALLEY, C., *Theory of Lie groups,* Princeton University Press, Princeton, 1.946. (A-42 y A-2.330)

[119] TITS, J., *Buildings of spherical type and finite BN-pairs,* Lecture Notes in Mathematics 386, Springer, Berlin, 1.974. (B-574, L-386)

[120] WEYL, H., *The classical groups: their invariants and representations,* 2nd edn, Princeton University Press, Princeton, 1.946. (A-156 y A-2.048)

[121] BOERNER, H., *Darstellungen von Gruppen,* 2nd edn, Springer, Berlin, 1.967.

[122] ADAMS, J., *Lectures on Lie groups,* Benjamin, New York, 1.969. (A-3.890)

[123] BRUCK, R., *A survey of binary systems,* Springer, Berlin, 1.958. (A-699)

[124] CLIFFORD, A. y PRESTON, G., *The algebraic theory of semigroups,* 2 vols., American Mathematical Society, Providence, R. I., 1.967. (v1: A-2.256 y v2: A-2.801)

[125] RÉDEI, L., *The theory of finitely generated commutative semigroups,* Pergamon Press, Oxford, 1.965.

[126] HOWIE, J. M., *An introduction to semigroup theory,* London Mathematical Society Monographs 7, Academic Press, London, 1.976.

[127] ARBIB, M., *Theories of abstract automata,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.969. (A-3.377)

[128] EILENBERG, S., *Automata, languages and machines,* 2 vols, Academic Press, New York, 1.973- 1.976.(v1: A-5.150 y v2: A-5.151)

[129] WELLS, C., 'Some applications of the wreath product construction', *American Mathematical Monthly,* 83, 317-338, 1.976.

[130] RHODES, J. *et al.,* 'Global structure theories for finite semigroups', *Advanced in Mathematics,* 11, 157-266, 1.973. {introducción y cuatro artículos}

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

1. CHEVALLEY, C., *Fundamental concepts of algebra*, Academic Press, 1.956. (A-6.215)
2. GASTAMINZA, M., *Extensiones algebraicas. Teoría de Galois,* Dpto. de Matemática U.N.S., 1.991. (A-6.890)
3. PAPY, G., *Grupoides*, P.U.F., 1.965. (A-2.722)
4. PAPY, G., *Groupes*, Dunod, 1.961. (A-1.568)
5. PONTRIAGUIN, L., *Grupos continuos*, Editorial MIR, 1.978. (A-5.276)
6. ROTMAN, J., *Galois theory*, Springer, 1.990. (A-6.507)
7. THOMPSON, T., *From error-correcting codes through sphere packings to simple groups*, The Carus Mathematical Monographs N°21, The Mathematical Association of America, 1.983. (A-5.766)
8. ZASSENHAUS, H., *The theory of groups*, Chelsea, 1.958. (A-545)

GRUPOS FINITOS:

1. FEIT, W., *The representation theory of finite groups*, North-Holland, 1.982. (A-5.816)
2. LEDERMANN, W., *Introduction to the theory of finite groups*, University Mathematical Texts, Oliver & Boyd, 1.957. (A-286)
3. MILLER, G., BLICHFELDT, H. y DICKSON, L., *Theory and Applications of Finite Groups,* Dover, 1.961. (A-1.151)

CAPITULO 10: MEDIDA Y PROBABILIDAD. (S. J. TAYLOR)

10.1 TEORIA DE LA MEDIDA:

Es una de las herramientas básicas del análisis del siglo veinte. Una buena comprensión de la medida es esencial si uno debe estudiar los desarrollos recientes en casi todas las ramas del análisis y también en las aplicaciones a la física matemática. Comenzaremos por describir las principales ideas. Para la mayoría de la gente, una descripción lógica de la estructura de la teoría de la medida en su forma mas avanzada no es la mejor fuente para un primer encuentro. Es mejor comenzar por entender algunos de los problemas importantes del análisis alrededor de 1.900.

Cuando hacemos las primeras armas en el cálculo, aprendemos rápidamente que, si

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

entonces la derivada F'(x) existe y es igual a f(x), por lo menos en los puntos donde f es suave. Esto significa que podemos considerar la diferenciación e integración como procesos inversos, y ese es el medio común utilizado para evaluar integrales. En 1.881 Volterra, que fue estudiante de Dini en Pisa, publicó un ejemplo de función F, definida en el intervalo (0,1) cuya derivada f = F' existe, es acotada, pero no es integrable en el sentido de Riemann, quién hasta ese momento era el que había dado la única definición rigurosa de integrabilidad. Este ejemplo está basado en la función $g(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, para $x \neq 0$ y $g(0) = 0$; Volterra juntó varias de estas funciones para exhibir las discontinuidades en todos los puntos de un conjunto E de longitud positiva. Henri Lebesgue [1] en su tesis de 1.902, mencionaba el ejemplo de Volterra, y aceptó como uno de sus objetivos la definición de una integral para la cual las operaciones de diferenciación e integración fueran operaciones inversas una de la otra para una clase más amplia de funciones. Una necesidad evidente en esos tiempos era también la de tener una buena definición de integral que permitiera integrar término a término una serie convergente.

El paso crucial necesario para modificar la integral de Riemann fue el desarrollo de la noción de "longitud" para un conjunto lineal. A fines del siglo diecinueve, la teoría de cardinales había sido desarrollada suficientemente como para clarificar el significado de conjunto numerable. El estudio de la topología de $\mathbb{R}$ había conducido a la noción de *completitud* y al teorema de Baire que dice que un espacio métrico completo no puede expresarse como unión numerable de conjuntos cerrados en ninguna parte densos. Emile Borel extendió la noción de longitud para intervalos en $\mathbb{R}$ a una clase más amplia de conjuntos. Lebesgue descubrió la teoría de integración asociada y al hacer esto, encontró necesario extender la noción de longitud de Borel, a lo que hoy denominamos la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Los trabajos originales de Lebesgue [1]-[3] son importantes para su lectura, así como las notas históricas de Bourbaki [4] en la introducción de su libro de integración, y hay bastante material fascinante en Saks [5].

La contribución de E. Borel es evaluada por Frechet [6] (pp. 53-63). Su idea principal fue considerar la importancia de la aditividad numerable: en otras palabras, si E_1,

$E_2,\ldots, E_n,\ldots$ es una sucesión de conjuntos disjuntos para los cuales se define la medida, y E =

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i ,$$

entonces la medida de E esta definida, y

$$mE = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i \,.(10.1)$$

Peano había definido previamente el contenido interior y exterior para conjuntos planos y probó que una función acotada f es integrable Riemann sobre [a,b] si y sólo si estos dos contenidos son iguales para el "área bajo la gráfica". Jordan desarrolló esto y obtuvo la teoría de las funciones de conjuntos finitamente aditivas, pero Borel insistió que la clase apropiada A de subconjuntos de X sobre los cuales se define la medida debe ser una σ - álgebra, σ -borelianos o una clase cerrada bajo complementaciones y uniones numerables (y por lo tanto, intersecciones numerables). Se denomina *medida* a una función de conjunto $m{:}A \to \Re^+$ que asigna a cada $E \subset A$ un número real no negativo (o $+\infty$) si satisface 10.1, y (X, A,m) se denomina entonces un espacio de medida. Aún para $X = \mathbb{R}$ no es obvio que exista una medida no trivial. Lebesgue construyó una σ - álgebra M de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contienen intervalos abiertos (y por lo tanto todos los subconjuntos de Borel) y una medida m sobre M tal que:
cuando

$$I = (a, b),\ mI = b - a \qquad (10.2)$$

para cualquier

$$E \in M,\ m(x + E) = mE \qquad (10.3)$$

donde x + E es el resultado de sumar al número real fijo x los elementos de E (esta propiedad 10.3 se denomina invariancia por traslaciones).

Aún cuando sea de importancia menor, en los desarrollos posteriores, es necesario preguntarse si es posible o no extender la definición de m a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que preserven las ecuaciones (10.1) - (10.3). Usando el axioma de elección, Vitali probó en 1.905 que la respuesta es negativa, pero este resultado dió origen al denominado "problema de la medida". En $\Re^k$,¿es posible definir una función de conjunto *finitamente aditiva* no trivial μ sobre todos los subconjutos, tales que μ es finita para conjuntos acotados e igual para conjuntos congruentes ?. Una aplicación del teorema de Hahn-Banach (que a su vez presume el axioma de elección), muestra que en $\mathbb{R}$ y $\Re^2$ es posible definir una tal μ que coincide con la medida de Lebesgue m sobre M. Que el recíproco es válido en $\Re^3$ (y por lo tanto en $\Re^k$, $k \geq 3$) se sigue de la paradoja de Banach-Tarski, la que puede ser formulada así: sean S y T esferas sólidas disjuntas con el mismo radio. Existen conjuntos disjuntos E_1, $E_2, \ldots, E_{41} \subset S$, $F_1, F_2,\ldots, F_{41} \subset S \cup T$ tales que E_i es congruente con F_i para cada i y

$$S = \bigcup_{i=1}^{41} E_i , \qquad SUT = \bigcup_{i=1}^{41} F_i$$

si μ fuera solución del problema de medida, entonces $\mu S = \mu T$, $\mu E_i = \mu F_i$, de modo que

$$\mu S = \sum \mu E_i = \sum \mu F_i = \mu(SUT) = \mu S + \mu T = 2\mu S$$

y μ sería cero para toda esfera y, por lo tanto, para todo conjunto cerrado. Hay una buena descripción de este problema en Sierpinski [7].

Los detalles de la construcción de la medida de Lebesgue son profundos, y es claro ahora, después de varias generalizaciones que medidas especiales sobre $\mathbb{R}$ no son fáciles de obtener en un espacio de medida (X,A,m). Es, por lo tanto, más eficiente estudiar la medida de Lebesgue, la cual se extiende a un espacio general (X,A,m), o estudiar directamente espacios de medida generales y tratar la medida de Lebesgue como un caso especial importante, el cual provee motivaciones y clarifica el significado de los resultados. Hay muchas descripciones de la teoría de la medida que usan el proceso de extensión dado por Carathéodory en 1.914. Quizá Munroe [8] da la explicación más clara del uso de una "pre-medida" para obtener una medida exterior definida sobre todos los subconjuntos (las medidas exteriores son sub-aditivas). Estas medidas exteriores son medidas cuando se las restringe a la σ-álgebra M de conjuntos "medibles". Este método conduce automáticamente a un espacio de medida completo (X,M,μ); esto es, un espacio para el cual $A \in M$, $\mu(A) = 0$, $B \subset A$ implica $B \in M$ (y por lo tanto $\mu B = 0$). El libro de Taylor [9] usa una variante de esta aproximación en la cual el punto de partida es una medida definida en una clase muy restringuida C de conjuntos y la extensión dada por Carathéodory está definida por el completamiento de la σ-álgebra generada por C.

Dado un espacio de medida (X,M,μ), una función a valores reales $f:X \to \Re^*$ ($+\infty$ es aceptado) se dice medible si, para todo abierto $G \subset \Re^*$, $f^{-1}(G) \in M$. Esta medibilidad puede ser pensada como de suavidad relativa a M. Si X tiene una topología, es usual para M contener los abiertos (y por lo tanto los borelianos); en este caso la medibilidad es claramente una condición más débil que la continuidad. La medida μ se dice *regular* si, para todo $\varepsilon > 0$, $E \subset M$, existe un cerrado F y un abierto G, con $F \subset E \subset G$ tal que $\mu(G/F) < \varepsilon$. Uno de los teoremas clave sobre funciones medibles es el denominado teorema de Lusin, aunque la primera demostración es debida a Vitali (1.905). El teorema nos dice que si μ es una medida regular sobre un espacio de medida completo (X,M,μ) y X es un espacio localmente compacto, entonces, para cada $\varepsilon > 0$ y $f:X \to \Re$ medible, que se anula fuera de un conjunto $E \subset M$ con $\mu(E)<\infty$, existe una función continua $g:X \to \mathbb{R}$ tal que $\mu\{x: f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$. Por lo tanto, las funciones que son medibles son las mismas que las funciones continuas, fuera de un conjunto de medida pequeña. Una excelente descripción de estos hechos se puede encontrar en Natanson [10].

Dado un espacio de medida (X,M,μ) y una función medible $f:X \to \Re^*$, hay distintas formas de definir la integral absoluta $\int f d\mu$. La idea de Lebesgue para integrales sobre $\mathbb{R}$ es la de reemplazar las particiones de Riemann del dominio, por disecciones del rango, que dan sumas aproximantes

$$S_\alpha = \sum y_{i+1} mA_i \,, \qquad s_\alpha = \sum y_i mA_i$$

donde $A_i = \{x:\ y_i \le f(x) < y_{i+1}\}$. Así esta teoría de la medida es utilizada para obtener valores de f(x) "aproximadamente iguales" en una forma delicada. Una aproximación moderna a este método de definir la integral está dada en Benedetto [11]. Su desventaja es que no da directamente la integral sobre un conjunto de medida infinita y no es posible la extensión a este caso aún cuando (X,M,μ) es tal que X no puede ser expresado como unión numerable de conjuntos de medida finita. Un método más rápido y más general es definir la integral primero para funciones simples no negativas, que toman valores constantes sobre cada uno de los conjuntos de una partición de X y entonces extender la definición por convergencia monótona a una función f medible no negativa. Ya que toda función medible es la diferencia de dos no negativas, una función medible es integrable si ambas partes dan una integral con resultado finito. Este método de obtener la integral puede encontrarse en la referencia 9.

Una vez que la integral ha sido definida, hay una sucesión de teoremas que siguen naturalmente, aunque el orden depende del tratamiento particular que se ha seguido. Un libro estándar de "medida e integración" da estos resultados, pero el Royden [12] da una descripción bien motivada de las propiedades de la integral . Quizá la propiedad más usada sea el "teorema de la convergencia dominada" que dice que si f, g y $\{f_n, n = 1,2,...\}$ son funciones medibles, g integrable y

$$f_n(x) \to f(x), \qquad |f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.t. } x$$

entonces

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu .$$

Dijimos que uno de los problemas que llevó a Lebesgue a definir su integral fue la necesidad de extender la clase de funciones para las cuales la integración y diferenciación son procesos inversos. Para cualquier función f integrable Lebesgue, la integral indefinida

$$F(x)= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

es absolutamente continua: esto es, $\sum|F(b_i) - F(a_i)|$ es pequeña para cualquier colección finita de intervalos disjuntos (a_i,b_i) de longitud total pequeña. Además, $F'(x) = f(x)$ para todo x excepto para un conjunto de medida cero, y es posible dar una definición descriptiva de la integral de Lebesgue restringiendo la clase de las funciones primitivas a las absolutamente continuas. Aunque la integral de Lebesgue resuelve el problema original de Volterra (donde la derivada $F'(x)$ era acotada), no es lo suficientemente general para integrar la derivada $f(x) = F'(x)$ de toda función con derivada finita para todo x. Dos métodos diferentes, pero equivalentes, de extender la definición de una integral sobre $\mathcal{R}$, una debida a Perron y la otra a Denjoy, fueron desarrolladas para una clase más amplia de funciones F, las que son la integral de su derivada. Para cada integral, se ha dado una definición descriptiva usando las propiedades que caracterizan las funciones primitivas F que pueden obtenerse. Una descripción clara de esta rama de la teoría de integración está dada por Saks [5].

La noción de continuidad absoluta de Lebesgue para funciones reales se generaliza a un espacio de medida $(X,\mathcal{M},\mu)$. Una función de conjunto σ- aditiva τ sobre $\mathcal{M}$ se dice absolutamente continua (con respecto a μ) si, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$E \in \mathcal{M},\ \mu(E)<\delta \Rightarrow |\tau(E)|<\varepsilon .$$

Es claro que, para cualquier f integrable

$$\tau E = \int_E f(x)\mu dx \qquad (10.4)$$

define una τ absolutamente continua. El recíproco de este resultado es el célebre teorema de Radon-Nikodym. Dada una τ que es absolutamente continua, ¿existe una f tal que τ está dada por la ecuación (10.4)?. Bajo condiciones adicionales adecuadas (que ciertamente se satisfacen para $\mathcal{R}$), f puede obtenerse como la derivada puntual de τ con respecto a μ. La mejor referencia para resultados hasta 1.930 es nuevamente la referencia 5, pero extensiones modernas, en particular al caso de τ finitamente aditivas, están dadas en Dunford y Schwartz [13].

En muchos casos, tenemos que identificar dos funciones medibles f_1, f_2 tales que $\{x: f_1(x)\neq f_2(x)\}$ tiene medida cero. El método abstracto es tomar la clase de equivalencia de funciones a.e.(almost everywhere: casi por doquier, c.d.) f como un nuevo objeto de estudio. Es en este sentido que la derivada de Radon-Nikodym es única. Sin embargo, es obviamente atractivo tener un procedimiento, el cual toma un representante canónico de cada clase. Si se usa el axioma de elección, para hacerlo, se pierde toda la fluidez de la situación. El problema del "lifting" ("levantamiento") tiene que ver con la definición de la función elegida que preserve la estructura algebraica. En una forma fuerte se requiere elegir una función ρ tal que:

1. $\rho(f) \equiv f$
2. $f \equiv g \Rightarrow \rho(f) = \rho(g)$
3. $\rho(1) = 1$
4. $f \geq 0 \Rightarrow \rho(f) \geq 0$
5. $\rho(af + bg) = a\rho(f) + b\rho(g)$
6. $\rho(f.g) = \rho(f).\rho(g)$

donde la convergencia es la igualdad c.d.. Una descripción clara del conocimiento hasta nuestros días sobre la existencia de levantamientos y algunos de sus usos está dado en Ionescu-Tulceas [14].

El uso de la medida y la integración absoluta condujo rápidamente al desarrollo de varias áreas del análisis, debido principalmente a que para aplicarlas son necesarias muy pocas condiciones (y ciertamente las más naturales). Por ejemplo, la teoría de las series trigonométricas, que fue explorada en el siglo 19 por Riemann y otros, resulta mucho más simple usando la integral de Lebesgue. Dada una sucesión ortonormal completa $\{f_n\}$ de funciones medibles tales que f_n^2 es integrable, existe un único desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

donde la igualdad debe entenderse en el sentido que

$$\int (f - \sum_{n=1}^{m} c_n f_n(x))^2 d\mu \to 0.$$

Una descripción completa y leíble de la teoría de las series trigonométricas está dada por Zygmund [15]. Hay que hacer notar que este es el punto de partida de un nuevo tema: el análisis armónico. Podemos pensar las funciones trigonométricas como definidas sobre el grupo circular $T = [0,2\pi]$ en el cual la adición se realiza módulo 2π. Este es un ejemplo de un grupo topológico, ya que la operación de grupo es continua con respecto a la topología usual. Dado un grupo topológico abeliano G compacto, existe una única medida μ sobre G que es invariante bajo la operación de traslación por un elemento de G (esta es la propiedad 10.3, de la medida de Lebesgue). Esta medida se denomina la medida de Haar sobre G. La definición se extiende al caso no abeliano y al caso σ-compacto. El análisis armónico es el estudio de funciones y medidas definidas sobre grupos topológicos. Para los estudios iniciales del análisis armónico ver Katznelson [16]; un desarrollo más general está dado en Hewitt y Ross [17].

El estudio de la teoría ergódica es una abstracción matemática que ocurre en la teoría de Gibbs de la mecánica estadística. Cuando μ es la medida de Haar sobre un grupo G, entonces μ es invariante bajo la operación grupal $E \rightarrow a^{*}E$, para $a \in G$. En un espacio de medida general $(X,\mathcal{M},\mu)$, las transformaciones $T:X\to X$ que preservan la medida son aquellas para las cuales $\mu(TE) = \mu E$ para todo $E\in\mathcal{M}$. En este caso es claro que las iteradas T^k de T también preservan la medida . Si f es integrable, entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$$

converge para casi todo x a una función integrable f^* que es invariante bajo T (esto es, $f^*(Tx) = f^*(x)$ c.d). Si $\mu X < \infty$, entonces $\int f^* d\mu = \int f d\mu$. La transformación se dice ergódica (una clase de "mixing condition") si no hay subconjuntos propios invariantes de X. En este caso la función límite f^* de arriba debe ser constante. Esto significa que la medida espacial es igual c.d. a la media temporal

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum f(T^i x).$$

Una introducción a esta importante y fascinante área de la matemática se puede encontrar en Halmos [18] o para una aproximación que ilustra la teoría por argumentos geométricos intuitivos en [0,1], ver Friedman [19].

La relación entre la teoría de la medida y el análisis funcional es de la mayor importancia. En efecto, una forma popular de definir la medida es usar la técnica del análisis funcional. Si X es localmente compacto, $C_0(X)$ indica el espacio de Banach de las funciones continuas $f:X\to\Re$ con la propiedad que para todo $\varepsilon > 0$, existe un compacto K tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo x fuera de K. La norma es

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

M(X) es el espacio de las medidas sobre (X,B) acotadas regulares con signo, donde B es la σ -álgebra de los borelianos, es también un espacio de Banach con norma

$$\|\mu\| = |\mu|(X)$$

El teorema de representación de Riesz establece que el espacio dual $C_0(X)$'(de las funcionales lineales sobre $C_0(X)$) es isomorfo isométricamente a M(X); esto es, para cada $L\in C_0(X)'$ existe una única $\mu\in M(X)$ tal que

$$L(f) = \int f d\mu, \text{ para todo } f\in C_0(X).$$

Este teorema tiene un serio defecto que reduce su utilidad, el hecho de que M(X) es pequeño: en efecto, si $X = \mathcal{R}$ con la topología usual, $M(\mathcal{R})$ no contiene una medida de Lebesgue m, ya que $m(\mathcal{R}) = \infty$. En orden para obtener una clase mas grande de funcionales, necesitamos tomar un espacio de Banach más pequeño. El conjunto $C_k(X)$'de funcionales lineales $\mu: C_k(X)\to\mathcal{R}$, es el espacio de las medidas de Radon sobre X. Cuando la medida de Radon se restringe a un subconjunto compacto de X, es una funcional lineal sobre $C_0(X)$. Sobre todo el espacio X es σ -finita. Un buen lugar para aprender sobre teoremas de representación es el Hewitt y Stromberg [20].

Muchos autores han usado las conexiones observadas en el último párrafo como una herramienta para obtener medidas utilizando las funcionales lineales. Una buena exposición de este orden inverso está dado en Riesz y Sz.-Nagy [21], pero es también usado por Bourbaki [4] y muchos otros autores. Ellos parten de $C_k(X)$ y obtienen propiedades del espacio dual $C_k(X)$'. Aunque los elementos de este espacio dual no están unívocamente definidos como una función de conjunto, pueden ser deducidas todas las propiedades clásicas de una función σ-aditiva de conjunto. Las funcionales lineales positivas en $C_k(X)'$ pueden identificarse como medidas positivas sobre la σ-álgebra B de los conjuntos de Borel, las que asignan medidas finitas a todo conjunto compacto. Todo lector familiarizado con el análisis puede estudiar teoría de la medida vía la siguiente ruta: para la mayoría de los analistas, la ruta histórica que mencioné anteriormente es intuitivamente más fácil de seguir.

Otra desventaja de la aproximación a la medida vía funcionales lineales es que, aunque la mayoría de las medidas en el uso diario son medidas de Radon, hay medidas útiles e interesantes que no pueden obtenerse de esta forma. Podemos estar interesados en espacios de medidas abstractos sin topologías o con topologías malas. O podemos tener una buena topología y queremos una medida que no es finita sobre conjuntos compactos. En el espacio euclídeo $\mathfrak{R}^k$ (el método se generaliza a un espacio métrico), Hausdorff definió una clase importante de tales medidas que son medidas de Radon aunque comparten con la medida de Lebesgue la propiedad de invariancia bajo transformaciones isométricas. Partimos con una función real $\phi:\mathfrak{R}^+ \to \mathfrak{R}^+$ que es monótona y satisface

$$\lim_{s\downarrow 0}\phi(s) = 0.$$

Para cualquier subconjunto $E\subset\mathfrak{R}^k$, se define una medida exterior por medio de

$$\phi - m^*E = \lim_{\delta\downarrow 0}\ \inf_{\substack{E\subset\cup C_i \\ d(C_i)<\delta}} \sum\phi(d(C_i)) \qquad (10.5)$$

donde $d(C_i)$ indica el diámetro del conjunto C_i ,y el ínfimo en la ecuación 10.5 se toma sobre cubrimientos numerables de E por conjuntos C_i, con diámetro$<\delta$. Esta medida exterior determina la clase $\mathcal{M}_\phi$ de subconjuntos ϕ-medibles y una medida sobre $\mathcal{M}_\phi$. Si $\phi(s)/s^k \to \infty$ cuando $s\downarrow 0$, es fácil ver que ϕ no es σ-finita sobre una esfera cerrada. Una exposición reciente de la teoría de medidas de Hausdorff puede encontrarse en Rogers [22]. Estas medidas tienen propiedades geométricas muy significativas con $\phi(s) = s^m$ y este es un entero. Este es el punto de partida para la teoría geométrica de la medida. El mejor libro en este área es el de Rado [23].

La teoría de la medida es también usada para obtener información adicional sobre conjuntos que se sabe son pequeños. Por ejemplo, en la teoría L_2 de las series trigonométricas, la convergencia puntual ocurre excepto para un conjunto excepcional de medida de Lebesgue cero. Diferentes medidas, tales como la de Hausdorff mencionada arriba, dan información acerca del "tamaño" del conjunto excepcional. Hay muchos problemas de este tipo en análisis armónico clásico, y algunos de ellos se extienden a la situación abstracta. Una buena descripción es la de Lindahl y Poulsen [24].

Es necesario puntualizar que hay todavía una forma distinta de introducción a la medida. En lugar de utilizar todo el aparato del análisis funcional, Daniel extrajo algunas técnicas específicas y obtuvo una definición relativamente simple de integral. Parte de una clase simple de funciones (las funciones escalera sobre $\mathfrak{R}$, donde $\int f$ tiene un valor obvio) y extiende la clase tomando límites monótonos. La integral resultante es equivalente a la integral de Lebesgue sobre la recta, de modo que la medida de Lebesgue puede ser obtenida como $mE = \int I_E$, donde I_E indica la función característica de E, y pueden extraerse todas las propiedades usuales. Una versión cuidadosa y simplificada de este método está dado en Weir [25].

La riqueza de la matemática proviene de la interrelación de ideas y técnicas desde ramas aparentemente no relacionadas. Si tratamos de hacer un recuento de las áreas donde se utiliza la teoría de la medida, necesitaríamos un volumen entero. Por ejemplo, Dieudonné [26] primero define la integral y obtiene la medida, pero entonces explora las conecciones con los grupos de Lie, geometría riemanniana, topología diferencial y álgebra multilineal; Dinculeanu [27] estudia medidas que toman valores en un espacio de Banach en lugar de en $\mathcal{R}$; y Fremlin [28], usa la estructura de reticulado para definir la medida sobre un anillo booleano. Describimos ahora en detalle un área que debe su existencia en la forma moderna a su base en la medida, y al aparato analítico que ahora es fácil de desarrollar.

10.2 TEORIA DE LAS PROBABILIDADES:

El análisis de los juegos por dinero proveyó un estímulo desde los primeros tiempos de las probabilidades. La idea básica fue la honestidad o simetría, lo cual significa que cada uno de los posibles resultados del juego debe ser igualmente probable. (Así, si se lanza una moneda, esta muestra cara o seca cada una con probabilidad 1 en 2; si se lanza un dado cúbico, cada cara sale arriba con probabilidad 1 en 6; si se lanza una bola en la ruleta se termina deteniendo en un número con probabilidad 1 en 37; un naipe bien barajado de cartas tiene una disposición o un orden de probabilidad 1 en 52!, etc.). Hay por lo menos dos inconvenientes con esta idea como base de la teoría de la probabilidad. La primera es que no se puede tratar con la situación donde el número de resultados posibles es infinito; y el segundo es que en la vida hay falta de equidad, de modo que, en el mundo real, aún cuando el número de resultados es finito, hay una carencia manifiesta de simetría, por lo que el modelo de "resultados igualmente posibles" es muy raro.

Los primeros intentos de generalizar el modelo a eventos igualmente probables al caso infinito utiliza el cálculo y conduce al estudio de "probabilidad geométrica". Se descubrió rápidamente que cuestiones tales como "¿Cuál es la probabilidad que una cuerda de un círculo sea mayor que su radio?", no tiene una única respuesta: en efecto, por lo menos tres métodos de cálculo pueden considerarse como plausibles y conducen a tres respuestas diferentes. Es la denominada paradoja de Bertrand.

La situación en los comienzos del siglo veinte fue claramente insatisfactoria, y los libros más serios escritos en esos tiempos contenían gran parte de filosofía - tratando de definir objetos actuales en lugar que relaciones. A esta altura la estadística comenzó a ser objeto de estudio, y esto reveló que las ideas clásicas de probabilidades eran inadecuadas. Von Mises introdujo la idea de "colectivo" - que ahora denominamos espacio muestral - de todos los resultados concebibles de un experimento, y definió la probabilidad de un evento como el límite de razón de la frecuencia del número de veces que el evento ocurre en n pruebas, dividido por n. Una aproximación axiomática en la cual las probabilidades están definidas en términos de frecuencias límites, no ha sido muy aceptada debido a su complejidad. Pero la noción de Von Mises de espacio muestral es la llave de la base axiomática, claramente formulada por Kolmogorov [29], la que hoy es ampliamente aceptada. En este modelo se considera un espacio de medida (Ω, F, P) en el cual la medida P satisface $P(\Omega)=1$, y los eventos E son subconjuntos en F de los que se dicen ocurren con probabilidad P(E). Esto es hoy en día universalmente aceptado como la base correcta para la teoría de la probabilidad y muy pocos de los probabilistas tratan con los fundamentos. Hay sin embargo algunos estadísticos que tienen preocupación por este estado de cosas, y un lector interesado en estas cuestiones filosóficas puede ver Gillies [30].

Quizá el lector está tentado a concluir que la probabilidad es un caso especial de la teoría de medida finita, con la condición extra de normalización $P(\Omega)=1$. En cierto sentido esto es cierto, pero la estructura adicional impuesta por conceptos estadísticos lleva a una rica teoría que es visible en situaciones bastante simples. Por lo tanto, quiero avisar al lector que antes de tratar de familiarizarse con la teoría abstracta de la probabilidad en su total generalidad, debe leer primero Feller [31], este es el libro que, mejor que cualquier otro, ha introducido la probabilidad en los curriculums normales de los estudios que conducen a un grado en matemática. Una razón para el éxito de la referencia 31 es la colección brillante de ejemplos vívidos y diferentes y aplicaciones con que es ilustrada la teoría. Hay dos aspectos del desarrollo de la teoría de probabilidad: uno es el riguroso trabajo axiomático usando las herramientas de la teoría de la medida; el otro es el desarrollo de aquellas configuraciones utilizando situaciones del juego, lanzamientos de monedas, movimiento de una partícula en física. Ambos son importantes para dar una aproximación intuitiva del tema. La insistencia en la referencia 31 es para tratar de establecer la correcta idea del modelo. El libro considera únicamente un espacio muestral discreto Ω, con una cantidad numerable de puntos $\{w_i\}$. A cada $\{w_i\}$ se le asigna la probabilidad p_i, $0 \le p_i \le 1$, donde

$$\sum p_i = 1 \text{ (La suma sobre todos los puntos).}$$

Esto significa que F debe ser la clase de todos los subconjuntos de Ω con P definida por

$$PE = \sum_{w_i \in E} p_i$$

La integración se reduce a sumar una serie absolutamente convergente, y se puede desarrollar toda la teoría sin el aparato de la teoría de la medida, aunque resulta que todas las técnicas pueden pensarse como casos especiales de teoremas de la teoría de la medida.

Quizá el concepto más importante en teoría de la probabilidad es el de independencia. Es una abstracción matemática de la noción que el conocimiento que ha ocurrido un evento A no afecta la probabilidad de un segundo evento B. Decimos que A y B son independientes si

$$P(A \cap B) = PA \cdot PB$$

Esto se extiende a una familia $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in I$. Estos se dicen independientes si PA_α no es afectado por el conocimiento de cualquier número finito de otros eventos en esa colección. La herramienta matemática que permite generar eventos independientes es la noción de producto de medidas sobre el producto cartesiano de espacios de medida, y se puede obtener una sucesión de eventos independientes considerando la medida producto sobre un producto numerable. Si consideramos una sucesión de pruebas de Bernoulli, en el cual se observa el número de veces que un evento E ocurre en n pruebas independientes, se computa la frecuencia relativa $r_n(E)$. Observando la medida producto P_n es fácil probar que , para todo $\varepsilon > 0$,

$$P_n\{|r_n(E) - p| > \varepsilon\} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

donde p=PE es la probabilidad de un evento E. Esta es la denominada "ley de los grandes números": precisa la idea que la frecuencia relativa de la ocurrencia de E es "próxima" a p cuando el número de pruebas es grande. No es posible deducir de esto la ley fuerte de los grandes números, que puede enunciarse así:

$$P_\infty\{\lim r_n(E)=p\}=1 \qquad (10.6)$$

donde P_∞ indica la medida producto en el producto cartesiano numerable de copias de $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Esto tiene conexión con los axiomas de Von Mises: tomando un espacio de medida como objeto básico, es posible *probar* que, para casi todas las sucesiones simples, $r_n(E)$ tiene el comportamiento límite que postulaba Von Mises. Las leyes de los grandes números son válidas en situaciones más generales que para una sucesión de pruebas de Bernoulli y la prueba de la ley fuerte de los grandes números en el caso general es bastante profunda. Hay un sentido en el cual el teorema ergódico es equivalente a la ley fuerte. Casi todo texto básico en teoría de probabilidades incluye una discusión de las leyes de los grandes números. Por ejemplo, hay una buena descripción en el capítulo 2 de Lamperti [32], o el capítulo 13 de Kingman y Taylor [33].

Otro concepto clave es el de variable aleatoria. El nombre le fue puesto por que fue pensada como una medida numérica de un fenómeno aleatorio. Sin embargo, el nombre es desafortunado porque una variable aleatoria *no* es una variable ni es aleatoria!. Se la define precisamente como una función medible $X:\Omega\to\mathcal{R}$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},P)$. El estudio de las propiedades de variables aleatorias forma la mayor parte de la teoría de probabilidades. Dos parámetros importantes son el promedio, media o esperanza, definida por

$$\mu=E(X)=\int X(w)P(dw)$$

cuando existe como integral absoluta; y la varianza

$$\sigma^2(X)=E(X-\mu)^2.$$

Un ejemplo de una desigualdad útil es la debida a Tchebyshev:

$$P\{|X-\mu|>\lambda\sigma\}\leq\frac{1}{\lambda^2}.$$

Con el modelo de la teoría de medida para la teoría de probabilidad, este tipo de resultados son una aplicación trivial de la teoría de integración.

Cuando un probabilista piensa una variable aleatoria, no se remonta a la definición básica de una función $X:\Omega\to\mathcal{R}$ sobre un espacio de medida, porque su interés está en los valores X(w) y cómo ellos se distribuyen. Hay varias formas equivalentes de conseguir este interés: el más básico es el estudio de la función de distribución, definida por

$$F(x)=P\{w:X(w)\leq x\}.$$

Es claro que, $F:\Re\to[0,1]$ es monótona creciente, continua a la derecha con límite izquierdo c.s. y

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1\,,\ \lim_{x\to-\infty}F(x)=0.$$

Si con D indicamos el conjunto de tales funciones F y, para toda $F\in D$ le corresponde una medida μ_F (de Lebesgue-Stieltjes) sobre $\mathcal{R}$ que satisface, para todo espacio de probabilidad $(\mathcal{R},B,\mu_F)$,

$$\mu_F\{t\in\Re;t\leq x\}=F(x).$$

Esto significa que la variable aleatoria X(t)=t, definida sobre este espacio de probabilidad tiene una función de distribución F. Teoremas sobre aplicaciones entre espacios de medidas permiten encontrar todas las propiedades de la variable aleatoria X en términos de esta realización particular como una medida μ_F sobre $\mathcal{R}$.

Para un t real se puede definir siempre

$$\Phi_X(t) = E\exp(itX)$$

para una variable X aleatoria dada. La función Φ_X se denomina la función característica de X. Como hay una correspondencia (1,1) entre funciones de distribución y funciones características, estas últimas son una herramienta alternativa para estudiar el comportamiento de las variables aleatorias. Decimos que una familia $\{X_\alpha\}$ de variables aleatorias es independiente si el conocimiento de los valores que toman un número finito de ellas no afectan la distribución de las restantes. La potencia de la función característica como una herramienta proviene del hecho que, si X e Y son independientes, y Z=X+Y, entonces

$$\Phi_Z = \Phi_X \cdot \Phi_Y .$$

El estudio de las funciones características es un caso especial importante del análisis de Fourier sobre $\Re$. El libro de Bochner [34] es una referencia clave para su estudio, pero introducciones adecuadas se pueden encontrar en el capítulo 8 de Breiman [35] o en el capítulo 12 de la referencia 33.

Un problema de gran importancia en el desarrollo histórico es la cuestión: ¿Cuáles son las distribuciones de probabilidad que pueden obtenerse como límite de una sucesión de distribuciones, cada una correspondiente a una suma finita de variables aleatorias independientes?. En el siglo XVIII, Bernoulli y de Moivre sabían que si las variables aleatorias que se suman tienen varianza finita, y la suma es estandarizada convenientemente, entonces la distribución límite es normal. Este resultado se lo conoce con el nombre de teorema central del límite: es la base para la teoría de errores, relevante en muchas situaciones experimentales. Lindeberg y Lévy obtuvieron condiciones suficientes y necesarias para que la distribución límite sea normal. Paul Lévy fue el responsable de ampliar el problema clásico del límite central omitiendo la condición de varianza finita para los sumandos, y su estudio de estos temas [36] da una buena visión de la situación. Una descripción mas sistemática de estos resultados está dada en Gnedenko y Kolmogorov [37] y un resumen muy bueno en el capítulo 6 de Tucker [38].

Las leyes límites que discutimos en la última sección son leyes débiles- tienen que ver solamente con la distribución de la suma. Un estudio detallado del problema de la convergencia de medidas está dado en Billingsley [39]. Otra cuestión interesante tiene que ver con el comportamiento asintótico de la sucesión actual de sumas de variables aleatorias. Como caso especial de esta situación nos podemos preguntar: "En la ley fuerte de los grandes números (10.6), ¿Cuán rápido $r_n(E)$ converge a p?". La respuesta a esto es la celebrada ley del logaritmo iterado, que nos dice que

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\sup(r_n(E)-p).\sqrt{\frac{n}{\log\log n}} = c\right\}=1,$$

donde c es una constante finita y positiva que depende de p. Esta clase de comportamiento asintótico ocurre cuando vale el teorema del límite central; otros tipos de comportamiento son posibles para otras distribuciones límites. Una descripción sistemática de otras partes de esta teoría está dada en la referencia 37; hay una prueba de la ley del logaritmo iterado y una discusión del lema de Borel-Cantelli en el capítulo 13 de la referencia 33.

10.3 PROCESOS ESTOCASTICOS:

En la vida real, las variables aleatorias raramente ocurren solas: ellas aparecen en familias y a menudo hay un parámetro natural, el tiempo, según el cual uno puede indexarlas. Es razonable preguntarse por una teoría matemática que describa la evolución de alguna medida. La teoría de los procesos estocásticos ha crecido a partir de este estímulo; y tiene conexiones con diversas áreas de la matemática, con teoría de la medida, teoría del potencial, análisis de Fourier, semigrupos de operadores en espacios de Banach, teoría espectral y teoría ergódica; y en el caso de las aplicaciones, con la topología, desigualdades funcionales, ecuaciones diferenciales, teoría de la información y a través de las integrales estocásticas, en diversas áreas de la física matemática. Así, "los procesos estocásticos" son un excelente ejemplo moderno de un área de la matemática que ha sido estimulada por sus aplicaciones, mientras que ha originado mucha investigación en áreas bien establecidas para desarrollar técnicas que le eran necesarias. El abuelo de todos los procesos estocásticos en tiempo continuo es el movimiento browniano, en el sentido que fue el primero rigurosamente definido y estudiado en profundidad. Paul Lévy dio una cantidad de resultados sorprendentes. Su punto de vista fue el de una partícula situada en $X(t)$ y viajando a lo largo de un camino cuando t crece. Su propia descripción [40] ha sido bien estudiada, aunque debemos remarcar que el siempre asumió que el desarrollo futuro de X es independiente del pasado, aún si t, el tiempo, es aleatorio; en la terminología moderna, el utilizó la propiedad fuerte de Markov aunque no estaba formulada ni probada en ese tiempo. Una descripción mucho más extensiva sobre el movimiento browniano y los procesos de difusión relacionados está dado en Ito y McKean [41]; muchos libros contienen buenas introducciones, incluido Breiman [35], pero quizá el más leíble es el libro de Freedman [42].

La teoría general de los procesos estocásticos está dada en el marco propuesto por Kolmogorov [29], quien usó el método de Carathéodory para extender medidas, para establecer medidas en espacios funcionales. Sin embargo, Doob fue responsable por detalles técnicos y el establecimiento de un marco riguroso, que se ha usado desde siempre. Su descripción [43] es un clásico que amerita un estudio cuidadoso; ver Karlin [44] para una descripción menos técnica, motivada por las aplicaciones. La primera dificultad es que la σ-álgebra natural no contiene suficientes conjuntos, y un conjunto simple como $\{a \leq X(t) \leq b$ para todo t en un intervalo I$\}$ puede no ser medible, y por lo tanto no hay una probabilidad asignada a ese conjunto. Este problema se soluciona con la condición de separabilidad, la cual puede pensarse como asegurando que los valores de $X(t)$ están determinados cuando ellos se conocen para todo t en un conjunto denso numerable conveniente. Esto conduce al establecimiento de propiedades de medibilidad para $X(t,w)$ en el espacio producto $T \times \Omega$, las que son necesarias para justificar el uso de métodos de integración. Con condiciones de regularidad adicionales bastante débiles se puede suponer que, para w fijo, $X(t,w)$ tiene únicamente discontinuidades simples: en este caso es usual suponer que cada camino muestral es continuo a derecha con límites a izquierda casi por doquier.

Una herramienta importante en el estudio de los procesos estocásticos es el teorema de convergencia de martingalas. Antes de establecerlo necesitamos entender la operación de "condicionamiento" con respecto a un σ-álgebra G sobre (Ω,F,P), $G \subset F$. Para una variable aleatoria X con valor esperado finito, el teorema de Radon-Nikodym asegura la existencia de una función G-medible $\Phi(w)$ tal que, para todo $B \in G$,

$$\int_B X dP = \int_B \Phi dP$$

Esta función se denomina la esperanza condicional de X dada G, y se escribe $E\{X/G\}$. Observe que esta es una variable aleatoria. Una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias se denomina una martingala si, para $n > m$,

$$X_m = E\{X_n/G_m\} \qquad \text{c.d.}$$

donde G_m es la menor σ-álgebra para la cual $X_1, X_2, \ldots, X_m$ son medibles. Si $\{X_n\}$ es una martingala e Y es una variable aleatoria tal que

$$E\{Y/G_n\} = X_n, \text{ c.d.}$$

entonces existe una variable aleatoria límite X tal que $X_n \to X$, c.d. y en media. Una primera descripción de la teoría de las martingalas está dada en la referencia 43 y un buen resumen de resultados importantes, en el capítulo 7 de Tucker [38].

Las martingalas han devenido una herramienta muy poderosa en análisis. Por ejemplo, muchas de las desigualdades básicas de Hardy-Littlewood concernientes a funciones en L_p eran conocidas únicamente para $p > 1$ o $p \geq 1$. El uso del movimiento browniano y las martingalas da una formulación y demostración correcta para $0 < p < 1$. El trabajo fundamental es el de Burkholder, Gundy y Silverstein, y un excelente (N.T.) desarrollo en Garsia [45], que es el mejor lugar de partida para su estudio.

Los procesos de Markov forman una clase especial de procesos estocásticos. Intuitivamente un proceso es de Markov si, dado $X(t_0)$, el futuro desarrollo $X(t)$, $t > t_0$, y la historia pasada $X(t)$, $t < t_0$ son independientes. El estudio de procesos de Markov para espacios de estados generales y $T=[0,\infty]$ requiere un marco de teoría de la medida muy elaborado, el cual puede establecerse en varias formas. La mayoría de las ideas pueden pensarse como generalizaciones de resultados conocidos del movimiento browniano y para un resumen de esta aproximación, ver el capítulo 12 del libro de Breiman [35]. Una aproximación desde el análisis funcional, usando semigrupos de operadores y generadores infinitesimales, está dado por Dynkin [46]. Una clase importante de procesos de Markov en $\Re^k$ fueron estudiados por Paul Lévy: ellos tienen incrementos que son independientes. Esto es, para $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, los vectores aleatorios $\{X(t_i)-X(t_{i-1})\}$, $2 \leq i \leq n$, son independientes con una distribución dependiente del incremento del tiempo (t_i-t_{i-1}). Para un descripción de las propiedades de tales procesos ver Taylor en referencia 47. Procesos de Markov con un espacio numerable de estados pueden tener una estructura complicada en tiempo continuo. La mejor referencia para esto es Chung [48]. Sin embargo, simplificaciones reales resultan no solamente cuando el espacio de estados es discreto, pero también el tiempo se lo reemplaza por enteros positivos. Mucho del espíritu probabilístico de los procesos de Markov pueden obtenerse estudiando cadenas de Markov discretas, ver Kemeny, Snell y Knapp [49], o también caminos aleatorios, donde hay una condición adicional de pasos independientes sobre un reticulado en $\Re^k$: una descripción completa de caminos aleatorios está dada por Spitzer [50].

Kakutani fue el primero en darse cuenta que el movimiento browniano en $\Re^3$ tiene propiedades en relación con la teoría del potencial. Si E es un cuerpo cerrado en $\Re^3$ y $x \notin E$, entonces el camino browniano partiendo de x o vuelve a E o lo pierde.

$$\Phi(x,E) = P^x\{X(t) \in E \text{ para algún } t > 0\}$$

es armónica en x con valores de contorno 1 sobre E y 0 al infinito también es la solución del problema exterior de Dirichlet para E. Los conjuntos E que son alcanzados con probabilidad 0 a partir de todo punto x de partida se corresponden con conjuntos de capacidad newtoniana cero (por ejemplo, una recta infinita). Para todo proceso de Markov hay una teoría potencial correspondiente. Esto fue probado primero por Hunt, pero descripciones sistemáticas han sido dadas por Meyer [51] y Blumenthal y Getoor [52]. La teoría del potencial es más simple, pero aún interesante, para la clase especial de los procesos de Markov discutidos en el último párrafo, y cada uno de los libros allí citados discuten lo relevante de la teoría del potencial. El uso de la teoría de potencial da "una topología fina" sobre el espacio de los estados en el cual las "funciones excesivas" (la generalización apropiada de las funciones subarmónicas) son continuas. Se ha probado, no hace mucho, que los resultados clásicos tales como el teorema de Picard para funciones de una variable compleja pueden deducirse a partir de propiedades de los caminos brownianos en el plano vía la teoría del potencial.

Integrales estocásticas y diferenciales son herramientas importantes en mecánica estadística. Dado que el cuadrado del incremento (X(t+h)-X(t)) sobre un camino browniano es del orden de h, si consideramos el diferencial de una función suave del camino $t \to X(t)$, tenemos que considerar dos términos en el desarrollo en serie de potencias, y reemplazar $(dx)^2$ por dt.

Así

$$df(X)=f'(X)dX + \frac{1}{2}f''(X)dX^2, \text{ ó:}$$

$$\int_0^t f'(X)dX = [f(X)|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X)ds.$$

Se necesita una teoría nueva para tratar con el término extra en la diferencial. Esta teoría utiliza propiedades relativamente simples del movimiento browniano y martingalas, pero requiere de desarrollos propios. Hay un tratamiento elemental bueno en el capítulo 5 de Luckas [53] y uno mucho más completo en el libro de McKean [54]. El Seminario 75/76 del Instituto de Matemática de la Universidad de Estrasburgo produjo una nueva aproximación a las integrales estocásticas que es más general y al mismo tiempo mas fácil de tratar.

Las probabilidades han sido aplicadas en muchas otras ramas de la matemática pura. Un ejemplo de las diversas aplicaciones son los libros de Kac [55], [56].

REFERENCIAS

[1] LEBESGUE, H., 'Intégrale, longueur, aire', *Annali di Matematica Pura ed Applicata,* 7, 231-358, 1.902.

[2] LEBESGUE, H., *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives,* 2nd edn, Gauthier-Villars, Paris, 1.928.

[3] LEBESGUE, H., *Measure and the integral,* Holden-Day, San Fransisco, 1.966. (A-4.043)

[4] BOURBAKI, N., *Intégration,* Hermann, Paris, 1.965. (A-2.812)

[5] SAKS, S., *Theory of the integral,* Hafner, New York, 1.950.
[6] FRÉCHET, M., *La vie et l'oeuvre d'Emile Borel,* Monographies de l'Enseignement Mathématique 14, University of Geneva Press, Geneva, 1.965.
[7] SIERPINSKI, W., *On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition,* reimpreso Chelsea, New York, 1.967.
[8] MUNROE, M., *Measure and integration,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.953.
[9] TAYLOR, S. J., *Introduction to measure and integration,* Cambridge Universtiy Press, Cambridge, 1.974.
[10] NATANSON, I., *Theory of functions of a real variable,* 2 vols., Ungar, New York, 1.960. (vol.1: A-2.329 y vol.2: A-2.323)
[11] BENEDETTO, J. J., *Real variable and integration,* Teubner, Stuttgart, 1.976.
[12] ROYDEN, H., *Real analysis,* Macmillan, 1.963. (A-1.650)
ROYDEN, H., *Real analysis,* Macmillan, 1.988. (A-6.525 a-3)
[13] DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J., *Linear operators, part I: general theory,* Interscience, 1.957-1.971. (A-4.696)
[14] IONESCU-TULCEA, A. y IONESCU-TULCEA, C., *Topics in the theory of lifting,* Springer-Verlag, Berlin, 1.969. (A-3.033)
[15] ZYGMUND, A., *Trigonometrics series,* Dover, 1.955. (A-2.132)
[16] KATZNELSON, Y., *Introduction to harmonic analysis,* Wiley, New York, 1.968. (A-3.135)
[17] HEWITT, E. y ROSS, K., *Abstract harmonic analysis,* Springer-Verlag. Berlin; Academic Press, New York,, 1.963.
[18] HALMOS, P., *Lectures in ergodic theory,* Publications of the Mathematical Society of Japan 3, Nihon Sugakkai, Tokyo, 1.956. (A-994 y A-1.762)
[19] FRIEDMAN, N. A., *Introduction to ergodic theory,* Van Nostrand, New York, 1.970.
[20] HEWITT, E. y STROMBERG, K., *Real and abstract analysis,* Srpinger-Verlag, Berlin, 1.965.
[21] RIESZ, F. y Sz.-NAGY, B., *Leçons d'analyse fonctionnelle,* 5th edn, Akadémiai Kiadó, Budapest; Gauthier- Villars, Paris, 1.953. (A-518)
[22] ROGERS, C., *Hausdorff measures,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.970. (A-5.657)
[23] RADO, T., *Length and area,* Colloquium Publications 30, American Mathematical Society, New York, 1.948. (A-640)
[24] LINDAHL, L. y POULSEN, F., *Thin sets in harmonic analysis,* Marcel Dekker, New York, 1.971.
[25] WEIR, A. J., *Lebesgue integration and measure,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.973.
[26] DIEUDONNÉ, J., *Treatise on analysis,* Academic Press, New York, 1.969-1.978. (vol.1: A-5.067, vol.2: A-5.068, vol.3: A-4.257, vol.4: A-5.069, vol.5: A-5.070 y vol.6: A-5.071)
[27] DINCULEANU, N., *Vector measures,* Pergamon, Oxford, 1.967. (A-2.745)
[28] FREMLIN, D., *Topological Riesz spaces and measure theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.974.
[29] KOLMOGOROV, A., *Foundations of the theory of probability,* Chelsea, New York, 1.956. (A-468)

[30] GILLIES, D. A., *An objective theory of probability,* Methuen, London, 1.973.
[31] FELLER, W., *An introduction to probability theory and its applications,* vol. 1, Wiley, New York, 1.958. (A-295)
[32] LAMPERTI, J., *Probability,* Benjamin, New York, 1.966. (A-2.535)
[33] KINGMAN, J. y TAYLOR, S., *Introduction to measure and probability,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.974.
[34] BOCHNER, S., *Harmonic analyisis and the theory of probability,* Universtiy of California Press, Berkeley, Calif., 1.955. (A-426)
[35] BREIMAN, L., *Probability,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.968. (A-3.858)
[36] LÉVY, P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires,* Gauthier-Villars, Paris, 1.954.
[37] GNEDENKO, B. y KOLMOGOROV, A., *Limit distributions for sums of independent random variables,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.968. (A-2.969)
[38] TUCKER, H., *A graduate course in Probability,* Academic Press, New York, 1.967. (A-2.583)
[39] BILLINGSLEY, P., *Convergence of probability measure,* Wiley, New York, 1.968. (A-3.755)
[40] LÉVY, P., *Processus stochastiques et mouvement Brownien,* 2nd edn, Gauthier-Villars, Paris, 1.965. (A-4.055)
[41] ITO, K. y McKEAN, H., *Difussion processes and their sample paths,* Academic Press, New York, 1.964. (A-3.280)
[42] FREEDMAN, D., *Brownian motion and diffusion,* Holden-Day, San Fransisco, 1.971.
[43] DOOB, J., *Stochastic processes,* Wiley, New York, 1.953. (A-2.650)
[44] KARLIN, S., *A first course in stochastic processes,* Academic Press, New York, 1.966. (A-2.243)
[45] GARSIA, A., *Martingale inequalities: seminar notes on recent progress,* Benjamin, Reading, Mass., 1.973. (A-4.058)
[46] DYNKIN, E., *Markov processes,* 2 vols., Springer-Verlag, Berlin, 1.965. (vol.1: A-3.575, A-6.572 y vol.2: A-3.576, A-6.573)
[47] KENDALL, D. y HARDING, E. (eds.), *Stochastic analysis,* Wiley, London, 1.973.
[48] CHUNG, K., *Markov chains with stationary transition probability,* Springer-Verlag, Berlin, 1.960. (A-1.649)
[49] KEMENY, J., SNELL, L. y KNAPP, A., *Denumerable Markov chains,* Springer-Verlag, 1.976. (A-4.851)
[50] SPITZER, F., *Principles of random walk,* Springer Verlag, 1.976. (A-4.524)
[51] MEYER, P., *Probabilités et potentiel,* Hermann, Paris, 1.966. (A-3.070)
[52] BLUMENTHAL, R. y GETOOR, R., *Markov processes and potential theory,* Academic Press, New York, 1.968. (A-2.942 y A-6.213)
[53] LUKACS, E., *Stochastic convergence,* Heath, Lexington, 1.968.
[54] McKEAN, H., *Stochastic integrals,* Academic Press, New York, 1.969. (A-3.359 y A-6.533)
[55] KAC, M., *Statistical independence in probability, analysis and number theory,* Carus Mathematical Monographs, Mathematical Association of America, Buffalo, N. Y., 1.959. (A-3.152)

[56] KAC, M., *Probability and related topics in physical sciences,* Interscience, New York, 1.959.

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

PROBABILIDAD:

1. BAYER, R., *Congres International de Philosophie des sciences, IV Calcul des Probabilités*, Hermann, 1.951. (A-216)
2. BOREL, E., *Éléments de la théorie des Probabilités*, Albin Michel, 1.950. (A-2.006)
3. DE FINETTI, B., *Theory of Probability*, vol. I, Wiley, 1.974. (A-4.860)
4. DE FINETTI, B., *Theory of Probabilty*, vol. II, Wiley, 1.975. (A-4.861)
5. DE FINETTI, B., *Probabilty,Induction, and Statistics,* John Wiley, 1.972. (A-4.223)
6. POYLE, P. y SNELL, J., *Random walks and electric networks*, The Carus Mathematical Monographs 22, The Mathematical Association of America, 1.984. (A-5.767)
7. DURRETT, R., *Brownian motion and martingales in analysis*, Wadsworth, 1.984. (A-5.690)
8. GILLES, VON MISES, PRIGOGINE, FRECHET, *et al, Théorie des Probabilités. Exposés sus ses fondements et ses applications*, Sociedad Belga de Lógica y Filosofía de las Ciencias, Gauthier Villars, 1.952. (A-44)
9. GRAY, J., *Probability*, University Mathematical Texts N° 36, Oliver and Boyd, 1.967. (A-4.207)
10. GNÉDENKO, B. y KHINTCHINE, A., *Introduction á la théorie des Probabilités*, Dunod, 1.964. (A-2.616)
11. HO, K., *Diffusion processes and their sample paths*, Academic Press, 1.964. (A-3.280)
12. HODGES, J. y LEHMAN, E., *Elements of finite Probability*, Holden Day, 1.964. (A-1.952)
13. KAC, M., *Statistical Independence in Probabilty, Analysis and Number Theory,* The Carus Mathematical Monographs N° 14, Mathematical Association of America, 1.959. (A-3.152)
14. KEMENY, J. y SNELL, J., *Finite Markov chains*, Van Nostrand, 1.960. (A-1.585)
15. LUCAS, J., *The concept of Probability*, Clarendon Press, Oxford, 1.970. (A-4.068)
16. MOSTELLER, F., ROURKE, R. y THOMAS, G., *Probability with statistical applications*, Addison-Wesley, 1.961. (A-4.166)
17. NEYMAN, J. y LE CAM, L., *Bernoulli (1.713), Bayes (1.763), Laplace (1.813). Anniversary Volumen*, Springer- Verlag, 1.965. (A-3.848)
18. REICHENBACH, H., *The theory of probability*, University of California Press, 1.949. (A-197)
19. RENYI, A., *Calcul des probabilités*, Dunod, 1.966. (A-2.613)
20. ROSENBLATTI, M. (ed.), *Studies in Probability Theory*, MAA Studies in Mathematics, vol. 18, The Mathematical Association of America, 1.978. (A-5.468)
21. ROZANOV, Y., *Procesos aleatorios*, Editorial MIR, Moscú, 1.973. (A-5.271)
22. SNELL, J., *Introduction to Probability Theory with Computing*, Prentice Hall, 1.975. (A-4.919)

CAPITULO 11: ANALISIS COMPLEJO Y FUNCIONES ESPECIALES. (I. N. SNEDDON)

11.1 TEXTOS BASICOS EN ANALISIS COMPLEJO:

Dado que la teoría en funciones de una variable compleja juega un rol central en la matemática pura moderna y en sus aplicaciones a la física y a la ingeniería, hay naturalmente una plétora de textos elementales sobre el tema. Restringiremos nuestra atención a la bibliografía en inglés. La elección se hace difícil ya que algunos textos están dirigidos a estudiantes de matemática pura y otros a estudiantes de ingeniería o física y, como es de esperar, cada uno trata de abarcar "nuevos mercados".

Para futuros matemáticos, ya sea teóricos o aplicados, las mejores introducciones son probablemente (todavía) los libros de Copson [1] y de Titchmarsh [2], aunque el de Ahlfors [3] los está reemplazando rápidamente como el libro estándar para no graduados en análisis complejo. Este último libro conlleva toda la autoridad de un autor que dedicó su vida como investigador distinguido a la teoría de funciones y lo mismo puede decirse del libro de Nevanlinna y Paatero [4] y el de Levinson y Redheffer [5]. Aunque todos estos libros alcanzan el nivel de rigurosidad que uno espera de sus autores, son todos, con la excepción del Titchmarsh, accesibles a matemáticos aplicados y estudiantes graduados de ingeniería. Si uno tiene que inclinarse y elegir un texto para un curso con "intereses mixtos" probablemente elija el libro de Levinson y Redheffer [5] el cual está muy bien escrito y tiene muchas ilustraciones para el uso de la teoría.

Para el matemático puro está Saks y Zygmund [6] y el más moderno de Conway [7] puede resultar más atractivo. Hay buenos libros, como los de Nehari [8] y Duncan [9], útiles para un primer curso pero ninguno conduce tan directa y fácilmente en las profundidades de la teoría de funciones de una variable compleja como el libro de Conway [7]. Un estudiante pretencioso puede pretender más respuestas, por ejemplo acerca de la topología del plano complejo. Puede consultar el libro de Newman [10] y el de Whyburn [11] que tratan específicamente estos problemas.

La elección para estudiantes de matemática aplicada es más complicada. En muchos aspectos, el libro más adecuado para aquellos que desean usar la teoría de funciones complejas es el de MacRobert [12]. Tiene la ventaja adicional de las ilustraciones de la teoría general y desarrolla aquellas propiedades de la funciones especiales estándar de uso más frecuente en las aplicaciones. Los libros de Churchill [13] y Dettman [14] están escritos específicamente para "usuarios" de la matemática, pero en varios aspectos no van muy lejos, a pesar de las virtudes obvias de proveer un primer curso para tales lectores.(N.T.: Además, la versión en castellano del Churchill tiene errores). Hay varios libros rusos admirables traducidos al inglés; el mejor es el de Smirnov [15] y el de Fuchs y Levin y Fuchs y Shabat [16]. Hay que observar que en la teoría de funciones complejas, como en otras ramas de la matemática, el principiante llega a adquirir un conocimiento verdadero del tema no solo leyendo la solución de los problemas sino tratando de resolverlos;Volkoyskii, Lunts y Aramanovich [17] es particularmente útil.

Algunos autores colocan la teoría de funciones de variable compleja en un contexto más general. Uno de los más notables es Rudin, cuyo libro [18] en análisis real y complejo es un clásico moderno. Está en duda que sea apto para el principiante. Hay que mencionar también los libros (más elementales) de Cartan [19] y Kaplan [20], los que no solamente dan una buena descripción de la teoría básica de funciones de una variable compleja, sino que también tienen un capítulo sobre funciones de varias variables complejas, y el capítulo IX de Dieudonné [21] el cual, en forma muy interesante, coloca la teoría de funciones complejas en el marco del análisis abstracto.

11.2 TEMAS ESPECIALES EN ANALISIS COMPLEJO:

Hay muchos libros dedicados al estudio de clases especiales de problemas en análisis complejo y la mayoría de los cuales contiene material para un primer curso en el tema. Notables son los de Heins [22], [23], Fuchs [24] y Veech [25], los dos volúmenes del Carathéodory [26] y Hille [27] y los tres volúmenes de Markushevich [28] y de Siegel [29].

Una de las más fructíferas aplicaciones de la teoría es el uso del teorema integral de Cauchy en la evaluación de las integrales. Este tema se discute en la mayoría de los textos de análisis complejo, y en toda su amplitud en el MacRobert [12], pero debe prestarse atención a la pequeña monografía clásica de Lindelof [30] y a la más nueva de Mitrinovic [31], ambos dedicados únicamente a esta aplicación particular.

El otro concepto de la teoría que ha probado ser de gran utilidad en matemática aplicada es el de la transformación conforme (aplicación del plano real en sí mismo con la propiedad de transformar arcos suaves que se intersectan en arcos suaves que se intersectan según el mismo ángulo). Todos los libros elementales dan la demostración de que si f es holomorfa (diferenciable) en un dominio D, entonces la aplicación $f:D\to C$ es conforme, pero aún hay cuestiones interesantes por resolver. Estas son discutidas en los libros de Bergman [32], Betz [33], Carathéodory [34], Courant [35], Nehari [8] y Jenkins [36]. Además el método es usado extensivamente en teoría clásica de campos, en física para resolver problemas en dos dimensiones; el libro de von Koppenfels y Stallman [37] y el diccionario de transformaciones de Kober [38] son de un valor incalculable en la solución de problemas particulares.

La idea de superficie de Riemann se encuentra en los principios del estudio del análisis complejo, pero la mayoría de los libros elementales se contentan con dar un ejemplo simple. El estudio de las superficies de Riemann se ha desarrollado por sus propios medios en los últimos 50 años. El trabajo clásico es el de Hermann Weyl [39], pero hay descripciones más leíbles, como las de Springer [40], o las de Ahlfors y Sario [41]; el trabajo de Pfluger [42] también puede ser consultado.

Las funciones que son holomorfas en todo el plano -llamadas funciones *enteras o integrales*- han sido extensivamente estudiadas; descripciones de estas investigaciones han sido dadas por Valiron [43], Boas [44], Cartwright [45] y Holland [46]. Una función meromorfa es aquella que es holomorfa salvo en los polos; el mejor tratado sobre tales funciones es el de Hayman [47].

En 1.907, Koebe introdujo la idea de función *schlicht*. Una función se dice schlicht en un dominio D, si para dos puntos cualesquiera z_1 y z_2 de D, vale $f(z_1)=f(z_2)$ solamente si $z_1=z_2$; en estos días tales funciones se dicen univalentes. Estas funciones han sido estudiadas extensivamente y los resultados, comunicados por Montel [48], Schaeffer y Spencer [49] y Jenkins [36]. Funciones multivalentes han sido discutidas por Montel [48] y Hayman [50].

Un problema que aparece en teoría de control (y en otras ramas de la matemática aplicada donde se utiliza la transformada de Laplace) es el de calcular la ubicación en el plano complejo de los polinomios en una variable compleja. Los distintos métodos de solucionar este problema están en Marsden [51]. Walsh [52] trata el problema relacionado de localizar los puntos críticos de las funciones holomorfas.

Recientemente ha renacido el interés- particularmente por los analistas numéricos - en el problema de aproximar una función holomorfa por un polinomio o una función racional en el plano complejo y el problema asociado de interpolación en el plano complejo. Estos problemas han sido discutidos en las monografías de Whittaker [53], Walsh [54] y Sewell [55].

El trabajo clásico sobre series de Taylor de Dienes [56] no ha sido superado, pero la monografía de Levinson [57] sobre gap y teoremas de densidad deben ser consultados.

En años recientes se ha avivado el interés en la teoría de funciones automorfas, pero está en duda dónde clasificarla, si como teoría de funciones ó como teoría de grupos (hay que recalcar que la teoría clásica de las funciones automorfas, creada por Klein y Poincaré, concernía al estudio de funciones analíticas en el disco unitario que son invariantes bajo un grupo discreto de transformaciones). El primer tratado accesible en inglés es el de Ford [58] y es aún una referencia válida para una introducción; el libro estándar en el tema es el de Lehner [59], el cual, usando conceptos algebraicos y topológicos modernos, da una descripción concisa pero detallada de las ideas importantes introducidas en los últimos años (N.T.: Fue escrito en 1.977) después de la publicación del libro de Ford. Recientes desarrollos están cubiertos por Shimura [60].

Uno de los temas que ha atraído mucha atención en análisis funcional es el de demostrar el valor de interrelacionar los aspectos algebraicos y analíticos de problemas en teoría de funciones. La teoría de espacios lineales de funciones holomorfas tiene sus orígenes en el trabajo sobre espacios H^p p realizado por matemáticos como Hardy, Littlewood, Privalov y Smirnow, que estaban en principio preocupados con las propiedades de funciones individuales de la clase H^p. En años recientes el desarrollo del análisis funcional ha estimulado el interés en las clases H^p como espacios lineales, y esto ha dado nuevos métodos de ataque conduciendo a importantes avances en la teoría. Un libro admirable -que trata ambos aspectos de la teoría, el clásico y el moderno- es el de Duren [61]. Una monografía que se publicó poco tiempo antes es la de Porcelli [62] y también merece consideración. En análisis complejo elemental estudiaremos funciones que transforman un dominio D del plano complejo en sí mismo. Generalizaremos el concepto, tomando a D como un espacio más general -por ejemplo, un álgebra de Banach- y definiremos funciones holomorfas en este nuevo contexto. Extensiones de la teoría clásica obtenidas en esta forma se discuten en las monografías de Hoffman [63] y de De Branges [64].

Podemos generalizar la teoría de funciones complejas en otra dirección. Considerando la teoría clásica como basada en el concepto de función holomorfa como un par ordenado (u,v) de funciones a valores reales x e y que satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. La idea es definir una función holomorfa generalizada como un tal par ordenado cuando u y v son soluciones de un sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales elípticas fue sugerida por Bers [65] en sus Lecture Notes y en la monografía de Vekua [66].

Una rama del análisis complejo que cae entre la teoría de funciones y la teoría de ecuaciones integrales es el estudio de las integrales de Cauchy; tiene que ver con el estudio de funciones de la forma

$$\int_L \frac{f(\tau)}{z-\tau} d\tau$$

donde L es un arco en el plano complejo, y f una función no necesariamente holomorfa, pero que obedece alguna condición, por ejemplo, la condición de Lipschitz. Una descripción de las propiedades de estas integrales está dada por Muskhelishvili [67].

Estrechamente relacionadas con este tema, y también de gran valor en matemática aplicada es la técnica de Wiener-Hopf, la que mediante el uso de ideas provenientes de la teoría de prolongación analítica da soluciones de ecuaciones integrales singulares y de problemas de contorno en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales. La referencia usual en el tema es Noble [68].

11.3 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES COMPLEJAS:

La primera publicación extensa sobre la teoría de funciones de varias variables complejas fue la de Colloquium Lectures de Osgood [69], para la American Mathematical Society, cuyo material fue desarrollado posteriormente como parte de un libro de teoría de funciones [70]. Después de unos 10 años, apareció el libro de Behnke y Thullen [71] en alemán. En ambos libros, la motivación de la teoría nace en querer generalizar la teoría clásica de las funciones de una variable compleja. El libro de Bochner y Martin [72] puede ser reconocido como aquellos que desarrollan el tema por derecho propio.

La actividad más reciente ha sido motivada por desarrollos en análisis abstracto por un lado, y por otro, en cuestiones más aplicadas, como teoría cuántica de campos y ecuaciones diferenciales parciales.

Parte de la teoría elemental, que comprende la teoría de Hartog, dominios de holomorfía y automorfismos de dominios acotados está tratada en los libros de Hörmander [73] y de Gunning y Rossi [74] y en las Lecture Notes de Cartan [75]. Hay capítulos introductorios en Cartan [19] y Kaplan [20], pero desde lejos las mejores introducciones son las de Kaplan [76] y Narasimhan [77].

Al estudio global y local de los conjuntos analíticos en espacios complejos se refieren los libros de Herve [78], de Gunning y Rossi [74] y de Narasimhan [79], y las Lecture Notes de Cartan [80], [81] y Narasimhan [82].

La teoría de variedades de Stein y de haces analíticos coherentes y la teoría global de ideales está discutida el los libros de Hörmander [73], de Gunning y Rossi [74] y en las Lecture Notes de Cartan [75], Malgrange [83] y Frenkel [84].

En aplicaciones a la teoría cuántica de campos, el interés está puesto en el problema de prolongación analítica de funciones holomorfas de varias variables complejas y en la construcción de la envolvente de holomorfía de una función. Los libros de Fuks [85] y Vladimirov [86] tratan con este tópico y otras aplicaciones de la teoría; pueden también utilizarse también como textos introductorios, ya que están escritos en forma lúcida y estilo discursivo.

11.4 TEXTOS ESPECIALES SOBRE FUNCIONES ESPECIALES:

A primera vista la teoría de funciones especiales de la física matemática parece algo más que una masa desorganizada de fórmulas. Hay cerca de 50 funciones especiales, cada una de las cuales puede definirse en una variedad de formas; para cada una hay una profusión de representaciones, ya sea por integrales o series, fórmulas de recurrencia y ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son funciones relacionadas, y así siguiendo. La riqueza del material y el desafío de imponer alguna clase de orden en el caos aparente atrajo a algunos de los matemáticos más importantes en los 200 últimos años que trabajaron - y escribieron !- sobre el tema. Gauss, Euler, Fourier, Legrende, Bessel y Riemann están entre los nombres ilustres que aparecen en la literatura del tema. Usando las palabras de Wigner: "Todos nosotros hemos admirado, en distintos momentos, la teoría de las funciones trascendentes, que también se denominan funciones especiales de física matemática. La variedad de propiedades de estas funciones, las que pueden expresarse en términos de ecuaciones diferenciales que ellas satisfacen, en términos de teoremas de adición o integrales definidas sobre los productos de esas funciones, es sorprendente. Son superadas solamente por las propiedades de las trascendentes elementales, esto es, la función exponencial, y las funciones derivadas de allí, como las funciones trigonométricas. Al mismo tiempo, funciones especiales, como su nombre lo indica, aparecen aquí y allá como soluciones de problemas en física teórica".

Por esta razón, muchos de los textos introductorios sobre funciones especiales como los de Hochstadt [87], [88], Lebedev [89], Rainville [90], Sneddon [91] y Spain y Smith [92] hacen uso de técnicas matemáticas bastante elementales. Como están designados principalmente para el uso de matemáticos aplicados, ellos tratan de introducir al lector a las funciones especiales a través del uso de los métodos de análisis elemental y de proveerlos con una cantidad suficiente de conocimientos para hacer accesibles a ellos las numerosas compilaciones de las propiedades de las funciones especiales, de los cuales el mas distinguido es el de Erdélyi *et al* [93].

Ya que las funciones especiales son funciones holomorfas de sus argumentos es usual derivar sus propiedades más sofisticadas usando la teoría de funciones de una variable compleja. La evidencia de esta afirmación está corroborada por el hecho de que la segunda mitad del tratado clásico de Whittaker y Watson [94] de "análisis moderno" está dedicado a la derivación de propiedades detalladas de las funciones especiales mediante el uso sistemático de técnicas desarrolladas en la primera mitad. Análogamente, por compilar una colección de resultados, los cuales fueran de utilidad para los usuarios de la matemática, Watson [95] escribió en su tratado monumental sobre funciones de Bessel que su propósito fue desarrollar "...aplicaciones de los procesos fundamentales de la teoría de funciones de variable compleja. Para este propósito las funciones de Bessel están adaptadas admirablemente; mientras que ellas ofrecen al mismo tiempo una amplia variedad para la aplicación de partes de la teoría de funciones de una variable real, que es provista por las funciones trigonométricas en la teoría de las series de Fourier". En forma similar, la mejor descripción de los armónicos esféricos y elípticos está dado por Hobson [96] quien adaptó la filosofía de Watson.

Un principio unificador llega, bastante sorpresivamente, no del análisis, sino de álgebra, a través de la teoría de representaciones de grupos. En su histórico trabajo de 1.929 Elie Cartan estableció primero la conexión entre funciones especiales y representaciones de grupos, y en los años que siguieron a su publicación, la aplicación de la teoría de representación de grupos a la mecánica cuántica jugó una parte importante en la utilización de este descubrimiento. Para grupos de Lie simples, podemos elegir una base en el espacio de representaciones de forma tal que los elementos de algún subgrupo H están dados todos por matrices diagonales cuyos elementos son funciones exponenciales. Si h_1 y h_2 son elementos de H, los restantes elementos del grupo pueden representarse en la forma $h_1 g h_2$, donde g(t) se toma sobre cierta variedad mono-paramétrica; se encuentra que para grupos particulares las funciones g pueden identificarse con las funciones especiales de la física matemática. Por ejemplo, representaciones del grupo euclidiano del plano están conectados con las funciones de Bessel de primera clase.

Este método de desarrollar la teoría de funciones especiales es ciertamente el mejor para los estudiantes serios de matemática pura, ya que se da un significado a algo que aparece como caótico. También, ya que la teoría de representación de grupos simples juega un papel principal en la matemática aplicada moderna, un estudiante del lado aplicado también saca su provecho al aproximarse a las funciones especiales en esta dirección. Afortunadamente hay tres buenos libros en inglés, el trabajo enciclopédico de Vilenkin [97] y el de Miller [98], un tratado más modesto. Sin embargo, una introducción más atractiva a este complejo de ideas- especialmente para un matemático aplicado- es la de Talman [99] en su breve libro basado en las clases de Wigner. No es inapropiado dejar a Wigner decir la última palabra: "Naturalmente, el punto de vista común a partir del cual se consideran las funciones especiales, y también la clasificación natural de sus propiedades, destruye parte del mito que ha rodeado y aún rodea a estas funciones. Si esto es mejor o peor, lo decidirá el lector".

La gran actividad en el siglo presente en análisis funcional condujo al estudio de funciones especiales en el contexto de bases ortonormales en ciertos espacios de Hilbert. Este es el camino tomado por Szego [100] en su clásico trabajo de polinomios ortogonales y posteriormente por Freud [101] y Sansone [102].

Una forma diferente de una teoría unificada de funciones especiales se debe a Truesdell [103]; esta ha sido despreciada, pero la monografía de McBride [104] muestra que no ha sido olvidada del todo. El propósito de Truesdell es "proporcionar una teoría general la cual motive, descubra y coordine estas relaciones que parecen desconectadas entre funciones especiales particulares" y que se conoce que existen. Su método toma como punto de partida la ecuación funcional $\frac{\partial F(z,\sigma)}{\partial z} = F(z,\partial+1)$, a cada una de sus soluciones analíticas le corresponde la función generatriz de un conjunto de funciones especiales; él procede a demostrar como las fórmulas comunes de la teoría de las funciones especiales puede deducirse a partir de una gran cantidad de resultados derivados del estudio de esas funciones generatrices.

Otra aproximación es considerar la función hipergeométrica de Gauss y la función hipergeométrica confluente de Kummer como formando parte del corazón de la teoría de funciones especiales, ya que muchas funciones especiales pueden expresarse en términos de una o de otra. Generalizaciones naturales de estas funciones son la función hipergeométrica generalizada ${}_pF_q$, la E-función de MacRobert y la G-función de Meijer, y es posible establecer un cuerpo de resultados relacionados con estas funciones y luego deducir las propiedades de las funciones especiales clásicas. Esta aproximación, que al autor le parece que carece de interés, ha sido seguida por Luke [105]; su libro no puede ser recomendado como libro de texto, pero si es útil como libro de consulta.

Los desarrollos asintóticos de funciones especiales juegan un rol significativo tanto en la teoría como en las aplicaciones. Por esta razón, debe hacerse referencia al excelente libro de Olver [106], el que desarrolla la teoría general del comportamiento asintótico mano a mano con la teoría de las funciones especiales.

11.5 TEMAS ESPECIALES EN LA TEORIA DE FUNCIONES ESPECIALES:

La teoría de funciones de Legrende y la teoría asociada de armónicos esféricos es descripta en detalle por Hobson [96] y por MacRobert [107], aunque, como se ha puntualizado antes, muchas de las fórmulas importantes para Legendre y funciones asociadas de Legrende pueden encontrarse en MacRobert [12].

El tratado de Watson permanece, después de mas de cincuenta años, sigue siendo el mejor libro de funciones de Bessel, pero un estudiante de matemática aplicada que busca una introducción puede usar el libro de Tranter [108].

Los polinomios de Tchebycheff están tratados usualmente en textos generales sobre funciones especiales, pero por su importancia en teoría de aproximación y análisis numérico se han escrito libros sobre el tema, alguno de los cuales son: Karlin y Studden [109], Fox y Parker [110] y Rivlin [111].

Ya que una función elíptica es una función meromorfa doblemente periódica, resultados elementales referidos a las funciones elípticas se los encuentra más usualmente en libros de análisis complejo que en aquellos de funciones especiales. La mejor introducción es provista probablemente por los capítulos relevantes de MacRobert [12] o el de Whittaker y Watson [94]. Funciones Jacobianas elípticas e integrales elípticas y funciones relacionadas son discutidas en detalle en Tricomi [112] y Neville [113]. El libro de Tricomi contiene una presentación de la propiedad de Weierstrass de las funciones elípticas y funciones relacionadas. Siegel [29] discute funciones elípticas y teoría de uniformización en el volumen I de su tratado, mientras que en los volúmenes II y III discute funciones automórficas e integrales abelianas y funciones modulares de varias variables respectivamente. La monografía de Graeser [114] en alemán es también una fuente valiosa. Una guía útil para la teoría de funciones eliptícas es el libro de Byrd y Friedman [115]; este contiene también una colección valiosa de fórmulas.

Las funciones de Lamé, Mathieu y otras relacionadas son tratadas desde el punto de vista de soluciones de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos por Arscott [116]. Una introducción breve de las propiedades de las funciones de Mathieu está en el libro de Whittaker y Watson [94] y otros resultados están dados en los libros de McLachlan [117], Campbell [118] y Meixner y Schafke [119].

Las funciones hipergeométricas son tratadas en detalle en Buchholz [120] y las funciones hipergeométricas generalizadas por Slater [121].

Otras funciones especiales, como aquellas asociadas con los nombres de Hermite y Laguerre, las cuales surgen en la solución de problemas especiales en mecánica de ondas, son tratadas en la mayoría de los textos generales cuyas referencias se han dado más arriba y también en tratados sobre los métodos de la física matemática como Morse y Feshbach [122].

REFERENCIAS

[1] COPSON, E. T., *An introduction to the theory of functions of a complex variable,* Clarendon Press, Oxford, 1.962. (A-3.166)

[2] TITCHMARSH, E. C., *The theory of functions,* 2nd edn, Oxford University Press, Oxford, 1.939. (A-949, A-2.067 y A-6.241)

[3] AHLFORS, L. V., *Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1.953. (A-2 y A-6.212)

[4] NEVANLINNA, R. y PAATERO, V., *Introduction to complex analysis,* Addison-Wesley, Reading, Mass, 1.969.

[5] LEVINSON, N. y REDHEFFER, R. M., *Complex variables,* Holden-Day, San Francisco, 1.970.

[6] SAKS, S. y ZYGMUND, A., *Analytic Functions,* Polisch Scientific Publishers, 1.965. (A-1.750)

[7] CONWAY, J. B., *Functions of one complex variable,* Springer-Verlag, Berlin, 1.978. (A-6.161 a-2).

[8] NEHARI, Z., *Conformal mapping,* McGraw-Hill, New York, 1.952. (A-107).

[9] DUNCAN, J., *Elements of complex analysis,* Wiley, New York, 1.968.

[10] NEWMAN, M. H. A., *Elements of the topology of plane sets of points,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.954. (A-2.143)

[11] WHYBURN, G. T., *Topological analysis,* Princeton University Press, Princeton, 1.958. (A-1.040).

[12] McROBERT, T. M., *Functions of a complex variable,* 5th edn, Macmillan, London, 1.962. (A-542)

[13] CHURCHILL, R. V., *Complex variables and applications,* McGraw- Hill, New York, 1.960. (En castellano, A-2.997)

[14] DETTMAN, J.W., *Applied complex variables,* Macmillan, New York, 1.965.

[15] SMIRNOV, V. I., *Complex variables; special functions,* Pergamon, Oxford, 1.964.

[16] FUCHS, B. A., *et al*, *Functions of a complex variable, and some of their applications,* 2 vols., Pergamon Press, Oxford, 1.961,1.964. (A-1.530)

[17] VOLKOVYSKII, L., LUNTS, G y ARAMANOVICH, V., *A collection of problems on complex analysis,* Pergamon Press, Oxford, 1.965. (A-2.612).

[18] RUDIN, W., *Real and complex analysis,* McGraw-Hill, New York, 1.966. (A-2.536).

[19] CARTAN, H., *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables,* Addison-Wesley, Reading, Mass, 1.963. (A-1.418 y A-1.437).

[20] KAPLAN, W., *Introduction to analytic functions,* Addison-Wesley, Reading, Mass, 1.966. (A-2.591).

[21] DIEUDONNÉ, J., *Foundations of modern analysis,* Academic Press, New York, 1.969.(A-2.563).

[22] HEINS, M., *Selected topics in the classical theory of functions of a complex variable,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1.962.
[23] HEINS, M., *Complex function theory,* Academic Press, New York, 1.968. (A-2.943).
[24] FUCHS, W. H. J. , *Topics in the theory of functions of one complex variable,* Van Nostrand, Princeton, 1.967.
[25] VEECH, W. A., *A second course in complex analysis,* Benjamin, New York, 1.967. (A-2.597)
[26] CARATHÉODORY, C., *Theory of functions,* 2 vols., Chelsea, New York, 1.954. (v1: A-24 y v2: A-25).
[27] HILLE, E., *Analytic function theory,* 2 vols, Ginn, Boston, 1.959.
[28] MARKUSHEVICH, A. I., *Theory of functions of a complex variable,* 3 vols., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1.967. (v1: A-2.504, v2: A-2.150 y v3: A-3.296).
[29] SIEGEL, C. L., *Topics in complex function theory,* 3 vols, Wiley, New York, 1.969-1.973. (A-4.932, A-4.933 y A-4.934).
[30] LINDELOF, E., *Le calcul des residus, et ses applications a la théorie des fonctions,* Ghelsea, Paris, 1.947.(A-447)
[31] MITRINOVIC, D. S., *Calculus of residues,* Noordhoff, Groningen, 1.966.
[32] BERGMAN, S., *The kernel function and conformal mapping,* Mathematical Surveys 5, American Mathematical Society, New York, 1.950. (A-401).
[33] BETZ, A., *Konforme Abbildung,* 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin, 1.964. (A-3.037)
[34] CARATHÉODORY, C., *Conformal representations,* 2nd edn, Cambridge Universtiy Press, Cambridge, 1.952. (A-394).
[35] COURANT, R., *Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces,* Interscience, New York, 1.950. (A-282).
[36] JENKINS, J.A., *Univalent functions and conformal mapping,* Springer-Verlag, Berlin, 1.958. (A-1.989)
[37] VON KOPPENFELS, W. y STALLMAN, F., *Praxis der konformen Abbildung,* Springer-Verlag, Berlin, 1.959.
[38] KOBER, H., *Dictionary of conformal representations,* 2nd edn, Dover, New York, 1.957.
[39] WEYL, H., *The concept of a Riemann surface,* Addison-Wesley, Reading, Mass, 1.964. (A-4.417).
[40] SPRINGER, G., *Introduction to Riemann surfaces,* Addison-Wesley, Reading, Mass, 1.957. (A-6.238).
[41] AHLFORS, L. y SARIO, L., *Riemann surfaces,* Princeton University Press, Princeton, 1.960. (A-1.054)
[42] PFLUGER, A., *Theorie der Riemannschen Flächen,* Springer-Verlag, Berlin, 1.957.
[43] VALIRON, G., *Lectures on the general theory of integral functions,* el autor, Toulouse, 1.923.
[44] BOAS, R.P., *Entire functions,* Academic Press, New York, 1.954. (A-460).
[45] CARTWRIGHT, M. L., *Integral functions,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.956. (A-393)
[46] HOLLAND, A.S.B., *Entire functions,* Academic Press, New York, 1.973.
[47] HAYMAN, W. K., *Meromorphic functions,* Clanderon Press, Oxford, 1.964.

[48] MONTEL, P., *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivantes,* Gauthier-Villars, Paris, 1.933.

[49] SCHAEFFER, A. y SPENCER, D., *Coefficient regions for schlicht functions,* Colloquium Publications 35, American Mathematical Society, New York, 1.950. (A-637).

[50] HAYMAN, W. K., *Multivalent functions,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.958.

[51]MARDEN, M., *The geometry of zeros of a polynomial in a complex variable,* Mathematical Surveys 3, American Mathematical Society, New York, 1.949. (A-399 y A-2.162).

[52] WALSH, J. L., *The location of critical points of analytic and harmonic functions,* Colloquium Publications 34, American Mathematical Society, New York, 1.950. (A-406).

[53] WHITTAKER, J. M., *Interpolatory function theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.960.

[54] WALSH, J. L., *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain,* Colloquium Publications 20, American Mathematical Society, New York, 1.960. (A-638).

[55] SEWELL, W. E., *Degree of approximation of polynomials in the complex domain,* Princeton University Press, Princeton, 1.965. (A-5.472).

[56] DIENES, P., *The Taylor series: an introduction to the theory of functions of a complex variable,* Clarendon Press, Oxford, 1.931.

[57] LEVINSON, N., *Gap and density theorems,* Colloquium Publications 26, American Mathematical Society, New York, 1.940. (A-3.134).

[58] FORD, L. R., *Automorphic functions,* Chelsea, New York, 1.951. (A-469).

[59] LEHNER, J., *Discontinuous groups and automorphic functions,* Mathematical Surveys 8, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.964. (A-4.721).

[60] SHIMURA, G., *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions,* Princeton University Press, Princeton, 1.971.

[61] DUREN, P. L., *Theory of H^p spaces,* Academic Press, New York, 1.970. (A-3.679).

[62] PORCELLI, P., *Linear spaces of analytic functions,* Rand McNally, Chicago, 1.966. (A-3.101).

[63] HOFFMAN, K., *Banach spaces of analytic functions,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.962. (A-998).

[64] DE BRANGES, L., *Hilbert spaces of entire functions,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.968. (A-3.360).

[65] BERS, L., *Theory of pseudo-analytic functions,* Lecture Notes, New York University , New York, 1.953.

[66] VEKUA, I. N., *Generalized analytic functions,* Pergamon Press, Oxford, 1.962.

[67] MUSKHELISHVILI, N. I., *Singular integral equations,* Noordhoff, Groningen, 1.953. (A-642).

[68] NOBLE, B., *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations,* Pergamon Press, Oxford, 1.958.

[69] OSGOOD, W. F., *Topics in the theory of functions of several complex variables,* Colloquium Publications 4 Part II, American Mathematical Society, New York, 1.914. (A-5.403).

[70] OSGOOD, W. F., *Lehrbuch der Funktionentheorie,* Bd II, Teubner, Leipzig, 1.924.

[71] BEHNKE, H. y THULLEN, P., *Theorie der Funktionen mehrer komplexer Veränderlichen,* Springer-Verlag, Berlin, 1.970. (A-3.345).

[72] BOCHNER, S. y MARTIN, W. , *Several complex variables,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1.948. (A-18)

[73] HÖRMANDER, L., *An introduction to complex analysis in several variables,* Van Nostrand, Princeton, 1.968. (A-6.226)

[74] GUNNING, R. y ROSSI, H., *Analytic functions of several complex variables,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.965. (A-3.368 y A-6.222).

[75] CARTAN, H., *Séminaire 1.951/52,* École Normale Supérieure, Paris, 1.952.

[76] KAPLAN, W., *Functions of several complex variables,* Ann Arbor Publishers, Ann Arbor, Mich., 1.964.

[77] NARASIMHAN, R., *Several complex variables,* University of Chicago Press, Chicago, 1.971.

[78] HERVE, M., *Several complex variables: local theory,* Oxford University Press, Oxford, 1.963. (A-1.600).

[79] NARASIMHAN, R., *Analysis on real and complex manifolds,* North-Holland, Amsterdan, 1.968.

[80] CARTAN, H., *Séminaire 1.953/54,* École Normale Supérieure, Paris, 1.954.

[81] CARTAN, H., *Séminaire 1.960/61,* Secretariat Mathématique Paris, 1.962. (Fasc.1: A-1.107 y Fasc.2: A-1.110).

[82] NARASIMHAN, R., *Introduction to the theory of analytic spaces,* Lecture Notes in Mathematics 25, Springer- Verlag, Berlin, 1.966.

[83] MALGRANGE, B., *Lectures on functions of several complex variables,* Tata Institute, Bombay, 1.958. (A-2.646).

[84] FRENKEL, J., *Séminaire sur les théorémes A et B pour les éspaces de Stein,* Université de Strasbourg (Institut de Mathématiques), Strasbourg, 1.965.

[85] FUCKS, B. A., *Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables,* Translations of Mathematical Monographs 8, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1.965. (A-2.959).

[86] VLADIMIROV, V. S., *Methods of the theory of functions of many complex variables,* M. I. T. Press, Cambridge, Mass, 1.966.

[87] HOCHSTADT, H., *Special functions of mathematical physics,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1.961.

[88] HOCHSTADT, H., *The functions of mathematical physics,* Wiley, New York, 1.971. (A-4.930).

[89] LEBEDEV, N. N., *Special functions and their applications,* Prentice- Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.965. (A-2.984).

[90] RAINVILLE, E. D., *Special functions,* Macmillan, New York, 1.960.

[91] SNEDDON, I. N., *The special functions of mathematical physics and chemistry,* 2nd edn, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1.961.

[92] SPAIN, B. y SMITH, M., *Functions of mathematical physics,* Van Nostrand Reinhold, London, 1.970.

[93] ERDÉLYI, A., *et al., Higher transcendental functions,* 3 vols., Macmillan, New York, 1.953-1.955. (v1: A-8, v2: A-9 y v3: A-10).

[94] WHITTAKER, E. y WATSON, G., *A course of modern analysis,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.952. (A-2.126).

[95] WATSON, G., *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1.952. (A-5.687).

[96] HOBSON, E. W., *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.931.

[97] VILENKIN, N., *Special functions and the theory of group representations,* Translations of Mathematical Monographs 22, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.968. (A-4.006).

[98] MILLER, W., *Lie theory and special functions,* Academic Press, New York, 1.968. (A-2.945).

[99] TALMAN, J. D., *Special functions: a group theoretic approach,* Benjamin, New York, 1.968.

[100] SZEGO, G., *Orthogonal polynomials,* 3rd edn, Colloquium Publications 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.967.

[101] FREUD, G., *Orthogonal polynomials,* Pergamon Press, Oxford, 1.971.

[102] SANSONE, G., *Orthogonal functions,* Interscience, New York, 1.958. (A-281).

[103] TRUESDELL, C. A., *An essay towards a unified theory of special functions,* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1.965. (A-5.676).

[104] McBRIDE, E. B., *Obtaining generating functions,* Springer-Verlag, Berlin, 1.971.

[105] LUKE, Y. L., *The special functions and their approximations,* 2 vols., Academic Press, New York, 1.969. (v1: A-4.260 y v2: A-4.261).

[106] OLVER, F. W. J., *Asymptotics and special functions,* Academic Press, New York, 1.974.

[107] McROBERT, T. M., *Spherical harmonics,* 3rd edn, Pergamon, Oxford, 1.967. (A-4.076).

[108] TRANTER, C. J., *Bessel functions with some physical applications,* English Universitites Press, London, 1.968.

[109] KARLIN, S. y STUDDEN, W., *Tchebycheff systems: with applications in analyisis and statistics,* Wiley, New York, 1.966. (A-3.999)

[110] FOX, L. y PARKER, I., *Chebyshev polynomials in numerical analysis,* Oxford University Press, Oxford, 1.968. (A-3.946 y A-4.070).

[111] RIVLIN, T.T., *The Chebyshev polynomials,* Wiley, New York, 1.974. (A-5.173)

[112] TRICOMI, F. G., *Elliptische Funktionen,* Akademische Verlag, Leipzig, 1.948.

[113] NEVILLE, E. H., *Jacobian elliptic functions,* 2nd edn, Clarendon Press, Oxford, 1.951.

[114] GRAESER, E., *Einfühurung in die Theorie der Elliptischen Funktionen und deren Anwendung,* Oldenbourg, Munich, 1.950.

[115] BYRD, P y FRIEDMAN, M., *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists,* Springer-Verlag, Berlin, 1.954.

[116] ARSCOTT, F. M., *Periodic differential equations,* Pergamon Press, Oxford, 1.964. (A-2.626).
[117] McLACHLAN, N. W., *Theory and applications of Mathieu functions,* Dover, New York, 1.964. (A-2.630).
[118] CAMPBELL, R., *Théorie générale de l'equation de Mathieu,* Masson et Cie, Paris, 1.955.
[119] MEIXNER, J. y SCHAFKE, F., *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen,* Springer-Verlag, Berlin, 1.954. (En inglés, edición 1.980, B-574, L-837).
[120] BUCHHOLZ, H., *The confluent hypergeometric function with emphasis on its application,* Springer-Verlag, Berlin, 1.969.
[121] SLATER, L. J., *Generalized hypergeometric functions,* Cambridge University Press, Cambridge, 1.966.
[122] MORSE, P. y FESHBACH, H., *Methods of theoretical physics,* McGraw-Hill, New York, 1.953. (Part1: A-102 y Part2: A-103).

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

1. ASH, J. (ed.), *Studies in harmonic analysis*, MAA Studies in Mathematics, vol. 13, The Mathematical Association of America, 1.976. (A-5.464)
2. CARATHÉODORY, C., *Conformal representations*, Cambridge University Press, 1.952. (A-394)
3. CARTAN, H., *Elementary theory of analytic functions of one or several variables*, Hermann, Addison-Wesley, 1.963. (A-1.418 y A-1.437)
4. FATTORINI, H., *The Cauchy problem*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, vol. 18, Addison-Wesley, 1.983. (A-6.092)
5. FUCHS, B., *Functions of a complex variable and some of their applications*, Pergamon Press, 1.964. (A-1.530)
6. FUCHS, B., *Introduction to their theory of analytic functions of several complex variables*, American Mathematical Society, 1.965. (A-2.959)
7. HIRSCHMAN, I. (ed.), *Studies in real and complex analysis*, MAA Studies in Mathematics, vol. 3, Mathematical Association of America, 1.965. (A-2.701)
8. JONES, G. y SINGERMAN, D., *Complex functions*, Cambridge University Press, 1.987. (A-6.326)
9. KATZNELSON, Y., *An introduction to harmonic analysis*, Wiley, 1.968. (A-3.135)
10. KNOPP, K., *Teoría de funciones*, Manuales Técnicos Labor, 1.946. (A-1.994)
11. LEDERMANN, W., *Complex numbers*, Library of Mathematics, Routledge & Kegan, 1.960. (A-2.633)
12. LEHTO, O. y VIRTANEN, K., *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer, 1.973. (A-6.496)
13. MARDSEN, J. y HOFFMAN, M., *Basic Complex Analysis*, Freeman, 1.987. (A-6.811)
14. MARKUSHEVICH, A., *The theory of analytic functions*, Hindustan, 1.963. (A-1.328)
15. MARKUSHEVICH, A., *Teoría de las funciones analíticas*, Tomo I, Editorial MIR, 1.970. (A-3.967)
16. MARKUSHEVICH, A., *Teoría de las funciones analíticas*, Tomo II, Editorial MIR, 1.970. (A-3.968)
17. MEDEIROS, L., *Funçoes complexas*, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1.972. (A-5.557)
18. NARASIMHAN, R., *Several complex variables VI*, Springer-Verlag, 1.990. (A-6.560)
19. PHILLIPS, E., *Functions of a complex variable with applications*, Oliver and Boyd, 1.940. (A-284)
20. REMMERT, R., *Theory of complex variables,* Springer, 1.989. (A-6.692)
21. SHERVATOV, V., *Funciones hiperbólicas*, Editorial MIR, 1.975. (A-5.876)
22. VALIRON, G., *Fonctions entiéres d'ordre fini et fonctions méromorphes*, Monographies de l'Enseignement Mathématique N° 8, Institut de Mathématiques, 1.960. (A-2.060)

CAPITULO 12: CONVEXIDAD (P. McMULLEN)

12.1 INTRODUCCION:

Uno de los principales problemas al tratar de reseñar la literatura de convexidad es la diversidad del tema; ciertamente, mientras que algunas áreas han sido investigadas durante años, y como resultado hay un respetable cuerpo teórico, otras han sido estudiadas también por mucho tiempo, pero aún permanecen como una colección de resultados débilmente relacionados. Otro problema serio es que desde el libro de Bonnesen y Fenchel [1], no ha habido intentos de cubrir todo el tema en un solo texto, aún para la convexidad de dimensión finita. En efecto, por ejemplo, la referencia 1 contiene poco material de naturaleza combinatoria.

A esta altura, debemos una explicación. Aunque en los últimos años se ha trabajado mucho en convexidad en espacios de dimensión infinita, que generalizan los resultados de dimensión finita, y que en ciertos casos es bastante combinatoria, sin embargo es cierto que la convexidad en espacios de dimensión infinita es una herramienta para el uso en análisis funcional y teoría de la medida. Por esta razón, y aún más importante, en razón de interés personal, limitaremos aquí nuestra atención al caso de la teoría de dimensión finita. Sin embargo, trataremos de dar una visión amplia del tema. Quizá, sobredimensionaremos el material combinatorio a expensas del resto.

Comenzaremos por enumerar textos útiles. Desde el punto de vista histórico, el pionero en convexidad es Minkowski [2] (la referencia es a sus obras completas); sin embargo, no debemos despreciar anteriores trabajos de Steiner [3], Schäfli [4], Eberhard [5] o Brückner [6]. Hemos mencionado Bonnesen-Fenchel [1]; entre los trabajos importantes primigenios están los de Blaschke [7,8], Steinitz [9] y Steinitz y Rademacher [10].

Con respecto a textos más recientes para la teoría métrica general, debemos referirnos a Eggleston [11], Hadwiger [12], Rockafellar [13] y Valentine [14]. Otros libros particularmente útiles son los de Aleksandrov [15], Busemann [16], Hadwiger [17] y Santaló [18].

El crecimiento relativamente grande en material en años recientes ha tenido que ver con la teoría de politopos convexos. La monografía indispensable aquí es la de Grünbaum [19]; también nos referiremos frecuentemente al texto introductorio de McMullen y Shephard [20]. Otros trabajos sobre politopos son Aleksandrov [21], Fejes Tóth [22] y Lyusternik [23], aunque nuevamente aquí prevalece el interés métrico. Muy útiles son los surveys de Grünbaum y Shephard [24] y Grünbaum [25].

Para un punto de vista más amplio del tema se pueden consultar dos colecciones de artículos editados por Klee [26] y Fenchel [27] basados en conferencias.

Por razones de conveniencia organizativa, dividimos la discusión en Teoría Básica, Teoría Combinatoria y Teoría Métrica, aunque estas divisiones no pueden de ninguna manera ser consideradas como estancos.

12.2 TEORIA BASICA:

12.2.1. Conjuntos convexos:

Un subconjunto K de un espacio real lineal es *convexo* si, para todo x, $y \in K$ el *segmento (cerrado)*

$$[xy]=\{(1-\lambda)x+\lambda y \,/\, 0 \le \lambda \le 1\}$$

está contenido en K. En esta sección daremos las propiedades básicas de los conjuntos convexos; como lo dijimos en la introducción, confinamos nuestra atención a espacios de dimensión finita. En efecto, trabajaremos en el espacio euclideo E^d, munido del producto escalar o interno usual $\langle \cdot,\cdot \rangle$ y una norma o distancia $\|\cdot\|$.

La teoría algebraica de conjuntos convexos tiene muchos puntos en común con la teoría de espacios lineales (ver referencias 1, 11, 13, 14, 19, 20). Por ejemplo, si K, K_1 y K_2 son subconjuntos convexos de E^d, en el cual trabajamos, y si λ es real, el *múltiplo escalar*

$$\lambda K=\{\lambda x \,/\, x \in K\}$$

y la *suma vectorial o de Minkowski*

$$K_1+K_2=\{x_1+x_2 \,/\, x_1 \in K_1 \text{ y } x_2 \in K_2\}$$

es también convexa. La intersección de conjuntos convexos es convexa. La cápsula convexa conv X de un subconjunto X de E^d es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a X; es también el conjunto de todas las *combinaciones convexas*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \qquad (\lambda_i \ge 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1)$$

de puntos $x_i \in X$ (i=1,2,...,k). Todo conjunto convexo K tiene una dimensión natural, dim K que es la dimensión del menor subespacio afín (variedad lineal, flat) aff K, la *cápsula afín* de K, que contiene K.

Sin embargo hay una diferencia cuando llegamos al teorema de Carathéodory. Si $y \in$ conv X, entonces y es la combinación convexa de a lo sumo d+1 puntos de X; sin embargo, los puntos que se eligen de X variarán en general con y, y no tenemos exactamente una teoría análoga a las "bases convexas". Hay varios refinamientos del teorema de Carathéodory (Reay [28]; también ver referencias 11 y 14); una generalización puede encontrarse en Valentine [14].

Un resultado estrechamente relacionado es el teorema de Radon: un conjunto X con por lo menos d+2 puntos en E^d admite una partición en subconjuntos disjuntos Y y Z, tales que conv Y $\cap$ conv Z $\neq \emptyset$. Hay un buen número de generalizaciones del teorema de Radon, con condiciones que aseguran que dim (conv Y $\cap$ conv Z)$\ge k$, o permitiendo partir a X en un mayor número de subconjuntos (Tverberg [29], Reay [30]).

Un tercer resultado, también estrechamente relacionado con los dos anteriores es el teorema de Helly. Este dice que si cualquier d+1 miembros de una familia finita de conjuntos convexos en E^d tiene intersección no vacía, entonces esta propiedad la tiene toda la familia. También hay muchas generalizaciones, y se conocen muchos teoremas de tipo Helly; ver referencias 11, 14 y Danzer, Grünbaum y Klee [31] para una discusión extensiva. Para una versión más fuerte del teorema de Helly, considerando una infinidad de conjuntos convexos, ver referencia 13. Para algunas de las relaciones entre los teoremas de Helly y Carathéodory, ver referencia 11.

Un comentario final algebraico; observemos que la convexidad es preservada por transformaciones afines y aún transformaciones proyectivas convenientes.

Las propiedades topológicas de los conjuntos convexos son bastante simples. Trabajamos con la topología métrica euclídea, pero recalcamos que los espacios lineales de dimensión finita son espacios lineales topológicos de una única forma. Los hechos básicos son que la clausura cl K y el interior int K de un conjunto convexo K son convexos. A menudo es más conveniente tratar con un conjunto K dentro de aff K; así el *interior relativo* relint K es el interior de K relativo a aff K. Entonces, relint K es convexo; en efecto, si $x \in$ cl K e $y \in$ relint K, entonces todo punto del segmento abierto

$$]xy[=\{(1-\lambda)x+\lambda y \,/\, 0<\lambda<1\}$$

está en relint K. Se tiene además cl K = cl (relint K) y relint K= relint (cl K). Indicaremos frontera con bd y frontera relativa con relbd. Para detalles ver referencias 13 y 14.

El teorema de Caratheódory nos conduce a que la cápsula convexa de un conjunto compacto es compacta.

Antes de seguir, indicaremos algunos ejemplos particulares de conjuntos compactos. Un *politopo* es la cápsula convexa de un conjunto finito; la familia de los politopos en E^d se la indica con P^d. Un *conjunto poliedral* o poliedro es la intersección de un número finito de subespacios cerrados, esto es, conjuntos de la forma

$$H^{-}(u,\alpha)=\{x \in E^d \,/\, \langle x,u\rangle \leq \alpha\}$$

siendo los politopos precisamente los conjuntos poliédricos acotados. C es un *cono* (convexo) con *vértice* en a, si para todo $x \in C$, el *rayo* o semirrecta

$$[ax=\{(1-\lambda)a+\lambda x \,/\, \lambda \geq 0\}$$

está en C. La familia de los conjuntos convexos compactos en E^d se la indica con K^d ; si $K \in K^d$ tiene interior no vacío, decimos K es un *cuerpo convexo*. La *bola unitaria* $B^d=\{x \in E^d \,/\, \|x\| \leq 1\}$ es un cuerpo convexo; su frontera es la esfera unitaria $S^{d-1}=\{x \in E^d \,/\, \|x\|=1\}$, que no es convexa.

Con todo conjunto convexo K está asociado un cono, su *cono de recesión* (o cono asintótico, cono característico) rec K, definido así:

$$\text{rec } K=\cap\{\lambda(K-z) \,/\, \lambda>0\},$$

donde $z \in$ relint K es elegido arbitrariamente. La cara de vértices de rec K es el *espacio de linealidad* de K, rec K $\cap$ (-rec K). Todo conjunto convexo cerrado puede ser expresado como una suma directa de sus espacios de linealidad y un conjunto convexo que no contenga una recta.

Un hiperplano

$$H(u,\alpha)=\{x \in E^d \,/\, \langle x,u\rangle=\alpha\}$$

se dice que es el *soporte* de un conjunto convexo K, con *normal exterior u*, si

$$\alpha=\sup\{\langle x,u\rangle \,/\, x \in K\}=h(K,u).$$

Todo punto frontera de K pertenece por lo menos a un hiperplano soporte de K; hay muchas demostraciones de esto (ver referencias 11, 13, 14, 19 y 20). Un conjunto convexo cerrado K es *suave* si cada punto frontera de K está exactamente sobre un hiperplano de soporte. K es *estrictamente convexo* si cada hiperplano soporte corta a K en un único punto; o lo que es equivalente, si $x, y \in K$, entonces $]x,y[\, \subseteq$ int k. Si valen ambos, entonces K es *regular* (aunque esta palabra es utilizada en forma diferente por varios autores) y existe una transformación 1:1 entre bd K y S^{d-1} , que es continua en ambas direcciones. Más generalmente, la imagen esférica de un subconjunto A de bd K es el conjunto de normales exteriores unitarias de hiperplanos soportes de K que intersectan A, y la imagen esférica inversa de un subconjunto $w \in S^{d-1}$ es el conjunto de puntos de bd K que están sobre los hiperplanos soporte de K con normales exteriores en w (Busemann [16]). Como una consecuencia de los hiperplanos soporte, todo conjunto convexo cerrado está en la intersección de subespacios cerrados.

La función h(K,.) introducida recién es la *función soporte* de K; es convexa (ver subsección 12.2.2) y homogénea positiva, de tal forma que

$$h(K, \lambda u + \mu v) \leq \lambda h(K, u) + \mu h(K, v)$$

para $u, v \in E^d$, $\lambda, \mu \geq 0$. Cualquier función convexa homogénea positiva es la función soporte de un conjunto convexo cerrado; de este hecho son conocidas tres demostraciones: la primera usa propiedades de diferenciabilidad de funciones convexas (cf. subsección 12.2.2), la segunda utiliza la *polaridad* (ver más abajo). mientras que la tercera y más reciente, es elemental (ver referencias 11, 13, 14 y McMullen [32]).

Dos conjuntos convexos K_1 y K_2 están *separados* por un hiperplano $H(u,\alpha)$, si ellos están en diferentes subespacios acotados por $H(u,\alpha)$, de forma tal que $\langle x_1, u\rangle \leq \alpha \leq \langle x_2, u\rangle$ para todo $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$. Si tenemos la desigualdad estricta, la separación es *estricta*. Las propiedades de separación y de soporte pueden deducirse unas de las otras; para detalles ver referencias 11, 13, 14 y 19.

Si X es cualquier subconjunto de E^d, entonces el *polar* de X, X^* se define por

$$X^* = \{x^* \in E^d / \langle x, x^*\rangle \leq 1, \text{p.t.} x \in X\};$$

X^* es cerrado y convexo, y X^{**} = cl con $(X \cup \{0\})$. Si C es un cono con vértice 0, entonces también lo es C^* y la definición en este caso puede ser reemplazada por

$$C^* = \{x^* \in E^d / \langle x, x^*\rangle \leq 0, \text{p.t.} x \in C\};$$

si C es cerrado y convexo, entonces $C^{**} = C$. Si $k \in K^d$ con $0 \in \text{int } K$, entonces $K^* \in K^d$ con $0 \in \text{int } K^*$, y $K^{**} = K$. Además, en este caso la función soporte de K^* es la *distancia o función gauge* de g(K,.) de K, definida por

$$g(K, x) = \inf\{\lambda \geq 0 / x \in \lambda K\}.$$

Si K es *centralmente simétrico* (alrededor del 0), esto es: K = -K, entonces g(K,.) es una norma. La geometria métrica utilizando tal norma es la *geometria de Minkowski*; para una introducción de esto, ver Minkowski [2] y Busseman [33]. Para detalles generales, ver referencias 11, 13, 14, 19 y 20.

La familia de subconjuntos compactos de E^d tiene una métrica, la *métrica de Hausdorff* ρ, definida por

$$\rho(X, Y) = \inf\{\rho \geq 0 / X \subseteq Y + \rho B^d, Y \subseteq X + \rho B^d\}.$$

En esta métrica los subconjuntos cerrados de cualquier conjunto compacto fijo, forman un conjunto secuencialmente compacto; este es el teorema de selección de Blaschke. El límite de un conjunto convexo es nuevamente un conjunto convexo, así K^d es un espacio métrico localmente compacto en la métrica de Hausdorff. Observe que

$$\rho(K_1, K_2) = \sup\{h(K_1, u) - h(K_2, u)| / u \in S^{d-1}\},$$

para $K_1, K_2 \in K^d$. Para detalles ver referencias 1, 11, 12 y 14.

Muchas funciones sobre K^d que uno considera naturalmente son continuas en la métrica de Hausdorff. Por lo tanto, es a menudo útil probar primero resultados para un subconjunto convenientemente denso de K^d. Uno de estos subconjuntos densos es la familia P^d de politopos. Otro, es el formado por los conjuntos convexos regulares. En efecto, se pueden tomar las funciones soportes de los cuerpos aproximantes, siendo analíticas (Minkowski [2]) o también algebraicas (Hammer [34], una demostración particularmente corta se debe a Firey [35]).

Concluimos la sección observando que los conjuntos pueden ser caracterizados como convexos por medio de la convexidad local o propiedades locales de soporte; ver referencia 14 para una discusión de este tema.

12.2.2. Funciones convexas:

Una función f a valores reales cuyo dominio es un subconjunto convexo D de E^d se dice *convexa* si

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y),$$

para todo x,y∈D y $0 \leq \lambda \leq 1$. Si -f es convexa, decimos que f es *cóncava*. La conexión entre conjuntos convexos y funciones convexas es estrecha, ya que f es una función convexa si y sólo si *epigrafo*:

$$\text{epi}\, f = \{(x,\lambda) \,/\, \lambda \geq f(x), x \in D\}$$

es convexo. A menudo es conveniente considerar funciones reales extendidas, que pueden tomar los valores $\pm\infty$; entonces, el *dominio efectivo* de f es

$$\text{dom}\, f = \{x \in E^d \,/\, f(x) < +\infty\}.$$

que es un conjunto convexo. Así, por ejemplo, a un conjunto convexo K le corresponde su *función indicatriz* $\delta(K,.)$, definida por

$$\delta(K,x)\begin{cases} 0, x \in K \\ +\infty, x \notin K \end{cases}$$

Las funciones convexas tienen buenas propiedades de continuidad. Una función convexa es semicontinua superiormente, esto es, si:

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x$$

entonces

$$\lim_{i\to\infty} f(x_i) \leq f(x).$$

Así, la continuidad es equivalente a la semicontinuidad inferior, y esta, a su vez, es equivalente a que el epigrafo de f es cerrado. Esto conduce a una *operación de clausura* para funciones continuas: cl f se define así: epi (cl f) = cl (epi f). En cualquier caso, f y cl f coinciden sobre relint (dom f) (para detalles, referencia 13).

Las funciones convexas tienen *derivadas direccionales*

$$f'(x,y) = \lim_{\lambda\downarrow 0}(f(x+\lambda y)-f(x))\,/\,\lambda,$$

cuando f(x) es finita (el límite puede ser $+\infty$). Entonces, $f'(x,y)$ es una función convexa homogénea positiva de y. Así, $-f'(x,-y) \leq f'(x,y)$, si tenemos la igualdad, entonces f tiene derivada en dirección y. Si f tiene derivadas en x en direcciones independientes, entonces f es diferenciable en x, y $f'(x,y) = \langle \nabla f(x), y\rangle$, donde $\nabla f(x)$ es el gradiente de f en x. Pero tenemos un concepto que reemplaza el gradiente si f no es diferenciable. Un vector x^* es un *subgradiente* de f si $f(z) \geq f(x) + \langle x^*, z-x\rangle$, para todo z. Esto significa que $(x^*, -1)$ es una normal exterior al hiperplano soporte de epi f en (x,f(x)). El conjunto de todos los subgradientes de f en x forma el *subdiferencial* $\partial f(x)$, el cual es un subconjunto convexo. (Para lo de arriba, ver referencias 1 y 13).

En efecto, una función convexa sobre un conjunto abierto es diferenciable, y ciertamente, dos veces diferenciable, casi por doquier (c.d.) (Bussemann y Feller [36], Aleksandrov [37]).

Una idea importante, introducida por Fenchel, es la de *funciones conjugadas*. Si f es una función convexa, su *conjugada* f^* está definida por:

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^*\rangle - f(x) \,/\, x \in E^d\}.$$

Entonces, f^* es cerrado y convexo, siendo el supremo de funciones afines, y f^{**} = cl f. Como un ejemplo, la conjugada de la función indicatriz de un conjunto convexo cerrado es su función soporte. Una conexión con subdiferenciales es que, si f(x) = cl f(x), entonces $x^* \in \partial f(x)$ si y sólo si $x \in \partial f^*(x^*)$. Esta idea está relacionada estrechamente con la transformada de Legendre. Para detalles, ver referencia 13.

12.3.TEORIA COMBINATORIA:

12.3.1. Caras de conjuntos convexos:

Hay dos definiciones de cara de un conjunto convexo (cerrado) K. Una *cara expuesta* o simplemente una *cara* de K es la intersección de K con el hiperplano soporte. Intrínsicamente, una *cara extrema* de K es un subconjunto convexo F de K tal que, si x, y$\in$K y $]xy[\cap F \neq \emptyset$, entonces $[xy] \subseteq F$. Caras de cada tipo son cerradas y convexas; caras expuestas son extremas, pero la recíproca es generalmente falsa. Una cara F es una j-cara si dim F = j. Por convención, tomamos K como teniendo una (-1)-cara ϕ, y, si $\dim K = d$, una d-cara K. El conjunto de j-caras extremas (expuestas) de K es denotada por $E^j(K)$ ($F^j(K)$), y los conjuntos:

$$\bigcup_{j=-1}^{k} E^j(K)$$

y

$$\bigcup_{j=-1}^{k} F^j(K)$$

son el *K-esqueleto extremo y expuesto* de K; el primero se escribe $\mathrm{skel}_k K$. La unión de todas las j-caras extremas (expuestas) de K para $j \leq k$ está indicada por $\mathrm{ext}_k K (\exp_k K)$. El d-esqueleto respectivo de K se lo indica por E(K) y F(K); ambos son reticulados, parcialmente ordenados por inclusión.

Nosotros escribiremos $\mathrm{ext}_0 K$ = ext K y $\exp_0 K$ = exp K; estos son los *puntos extremos y expuestos* de K. Indicaremos aquí el teorema de Krein-Milman (debido a Minkowski [2] en E^d ; ver referencia 19): si $K \in \mathcal{K}^d$, entonces K = conv (ext K). Además, ext K $\subseteq$ cl (exp K) y K = cl conv (exp K) (Strasewicz, Klee; ver referencia 19).

El conjunto convexo cerrado P es poliedral si y sólo si E(P) es finito, y en este caso, caras extremas y expuestas coinciden; un politopo es justamente un conjunto poliedral acotado. Para un conjunto poliedral P, escribiremos ext P = vert P, el conjunto de *vértices* de P. Denominamos *ejes* a las 1-caras de P, y si dim P = k, sus (k-1)-caras son sus *facets*. Dos politopos son *combinatoriamente isomorfos* si sus reticulados de caras son isomorfos. Un problema interesante, pero muy difícil, es enumerar los tipos combinatorios de d-politopos con v vértices; aparte de resultados obtenidos usando diagramas de Gale (cf subsección 12.3.2), solamente son conocidos resultados esporádicos (ver referencia 19 y Altshuler y Steinberg [38]). Dos politopos son *duales* si sus reticulados de caras son anti-isomorfos; politopos polares son duales.

Clases particulares de politopos son importantes. Un *simplex* es la cápsula convexa de un conjunto de puntos afinamente independientes. Un politopo cuyas caras (todas) propias son simples se dice *simplicial*. El dual de un politopo simplicial es simple; o lo que es equivalente, cada vértice de un d-politopo simple pertenece a d caras. Un politopo cuyas caras (todas) son isomorfas con cubos, es un politopo *cúbico*. Un politopo *centralmente simétrico* P tiene un centro c, tal que -P = P-2c; usualmente tomamos c = 0, el vector cero. *Zonotopos* son sumas vectoriales de un número finito de segmentos de rectas; ellos son centralmente simétricos. Un conjunto convexo que es un límite de zonotopos se denomina *zonoide*. Finalmente, un politopo es *k-cercano* (k-neighbourly) si todo k de sus vértices son los vértices de una cara de P; si P es centralmente simétrico, tomamos los k vértices siendo no-antipodales de a pares. Si dim P = d y $K=\left[\frac{1}{2}d\right]$, simplemente decimos que P es *cercano*; ejemplos de politopos cercanos son los politopos cíclicos. Para todo ver referencias 19 y 20.

Un d-politopo es *facet forming* si existe un (d+1)-politopo cuyas caras (todas) son combinatoriamente isomorfas a P; de otro modo P es *not-facet* . Perles y Shephard [39] demostraron la existencia de varios non-facets; por ejemplo, el politopo d-cruzado (d-cross-politopo) (análogo al octaedro) si $d \geq 6$.

El 1-esqueleto gráfico G(P) de un d-politopo P es d-convexo; esto es, existen d caminos independientes en G(P) entre dos vértices cualesquiera de P (Balinski; ver referencia 19). Más generalmente, hay d caminos independientes en G(P), a lo largo de los cuales una funcional lineal dada crece estrictamente desde su valor mínimo hasta su valor máximo sobre P. Además, F(P) considerada como un complejo (complex) es un refinamiento de F(T) para un T d-simple. El único resultado no trivial caracterizando las caras reticuladas de politopos es debido a Steinitz [9] (vea referencia 19): un grafo es isomorfo al grafo de un 3-politopo si y sólo si es plano y 3-conexo. Una técnica útil para investigar politopos es la de los diagramas de Schlegel; un *diagrama de Schlegel* de P se obtiene por proyección radial a partir de un punto, justo arriba de una cara de F de P, de las caras remanentes de P en F. Sin embargo, se ha probado que hay complejos, superficialmente como los diagramas de Schlegel de 4-politopos que no son ni siquiera isomorfos a diagramas de Schlegel. Para discusiones en este área, ver Grünbaum [19].

Retornando al grafo de un d-politopo P, Larman y Mani [40] demostraron que dados $\left[\frac{1}{3}(d+1)\right]$ pares cualesquiera de vértices de P, hay caminos-ejes disjuntos en G(P) uniendo los pares correspondientes. Ellos conjeturaron que debería ser posible elegir $\left[\frac{1}{2}d\right]$ cualesquiera de tales pares, pero Gallivan [41] demostró que son posibles a lo sumo $\left[\frac{1}{5}(2d+3)\right]$; la cota exacta no se conoce. Sin embargo, para politopos simpliciales Larman y Mani [40], demostraron que aún puede darse $\left[\frac{1}{2}(d+1)\right]$ pares.

En conexión con los caminos ejes, fue conjeturado hace mucho tiempo que entre todo par de vértices de un d-politopo con n caras hay un camino de a lo sumo n-d ejes; esta es la *conjetura acotada de Hirsch.* El caso n = 2d es el más importante; esta es la conjetura de *d-pasos* (d-step conjecture). La conjetura acotada de Hirsch es cierta para $d \leq 3$, y la conjetura de d-pasos para $d \leq 5$. En general, son conocidas como falsas las conjeturas correspondientes para conjuntos poliédricos no acotados. Para detalles, consultar las referencias 19 o el importante trabajo de Klee y Walkup [42]; ver también Barnette [43].

Podemos tratar de generalizar las ideas de más arriba para un cuerpo convexo K arbitrario. En general, es más útil estudiar el esqueleto extremo (extreme skelet) $\mathrm{skel}_k K$. Entonces, $\mathrm{skel}_1 K$ es conexo y, ciertamente, d-conexo (Larman y Rogers [44]). Pero no necesariamente hay d caminos crecientes independientes, como tenemos para los politopos; es más, no necesariamente debe haber un camino estrictamente creciente en $\mathrm{skel}_1 K$ lejos de un punto extremo dado (Gallivan [41]). Sin embargo, hay siempre por lo menos dos caminos estrictamente crecientes en el 1-esqueleto expuesto desde abajo hacia arriba (Larman y Rogers [45]).

A lo largo de líneas ligeramente diferentes, Ewald, Larman y Rogers [46], probaron que las direcciones de segmentos de línea en bd K forman un conjunto de medida de Hausdorff (d-2)-dimensional σ finita sobre S^{d-1} ; esto nos da generalizaciones a r-bolas en bd K. Un resultado de Anderson y Klee [47], que es en sentido vago, dual, es que el conjunto de puntos en bd K que están en dos hiperplanos de soporte tiene medida (d-2) σ finita.

12.3.2. Técnicas de diagrama:

Una de las pocas nuevas teorías notables de la convexidad en años recientes es la de varias clases de técnicas de diagramas. Los orígenes de la teoría pueden remontarse a Whitney [48], en el cual se fundamenta la teoría de matroides, pero que aparece por primera vez en forma reconocible en Gale [49]. El desarrollo presente de la teoría debe mucho a Perles, cuyo trabajo está descripto en Grünbaum [19].

La idea básica es representar un d-politopo P con n vértices por un cierto conjunto de n puntos en E^{n-d-1} , en correspondencia 1:1 con los vértices de P, denominado el diagrama de Gale de P. La descripción original fue algebraica (referencias 19, 20; ver también Grünbaum y Shepard [24] y Grünbaum [25]) y tomará mucho espacio aquí. Una formulación geométrica debida a McMullen (descripta por Grünbaum y Shepard [24]) es como sigue. Un conjunto (ordenado) X de n puntos con aff $X = E^d$ es equivalentemente afín a la imagen bajo proyecciones ortogonales del conjunto de vértices de un (n-1)- simple regular T en E^{n-1} con centroide en 0 (consideramos a E^d como un subespacio coordenado de

E^{n-1}). Un conjunto (ordenado) $\overline{X}$ que es linealmente equivalente a la imagen de vert T bajo proyecciones ortogonales sobre el complemento ortogonal E^{n-d-1} de E^d se denomina una *transformación afín o de Gale* de X. Debemos considerar los conjuntos como ordenados, desde que podemos tener coincidencias bajo proyecciones.

La correspondencia combinatoria fundamental entre X y $\overline{X}$ es la *relación de diagrama de Gale*. Si $Y \subseteq X$, escribimos $\widetilde{Y} = \{\overline{x} \in \overline{X} / x \notin Y\}$. Entonces F = conv Y es una cara de conv X, con $F \cap X = Y$, si y sólo si $0 \in \operatorname{relint} \operatorname{conv} \widetilde{X}$. Esta relación claramente da lugar a un *isomorfismo* entre transformaciones afines. Cualquier conjunto isomorfo a una transformación afín del conjunto de vértices de un politopo P se denomina un *diagrama de Gale* de P.

Un hecho útil de los diagramas de Gale es que, si n no es mucho más grande que d (digamos $n \leq d+3$ o $d+4$), entonces el diagrama de Gale es de menor dimensión, y su investigación es intuitivamente más fácil que el politopo original. Por ejemplo, Perles (ver referencia 19) ha enumerado los tipos combinatorios de d-politopos simpliciales con $d+3$ vértices, mientras que Lloyd [51] resolvió el mismo problema para todos los d-politopos con $d+3$ vértices (ver también Altshuler y McMullen [52] y McMullen [53]).

Otras aplicaciones de diagramas de Gale, también debidas a Perles, son los *politopos proyectivamente únicos*, que son tales que cualquier politopo combinatoriamente isomorfo es en la actualidad proyectivamente equivalente (ver Grünbaum [19], Perles y Shepard [54] y McMullen [55]), y a *politopos irracionales*, que son aquellos que no pueden tener un politopo con todos sus vértices combinatoriamente isomorfos a puntos con coordenadas cartesianas racionales (ver referencia 19).

Una aproximación categórica a diagramas de Gale es debida a Ewald y Voss [56]. Una aproximación completamente diferente se expone en McMullen [57] (una idea relacionada, pero menos versátil, se debe a Shephard [58]). Sea P(U) la clase de los conjuntos poliédricos de la forma:

$$P(y) = \{x \in E^d / \langle x, u_i \rangle \leq n_i, (i = 1, \dots, n)\},$$

donde $y = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in E^n$ y $U = (u_1, \dots, u_n)$ es un conjunto ordenado fijo de vectores generando a E^d. Obtenemos una *representación* de P(U) indentificando trasladadas. Como $P(y) + t = P(y')$, donde $y' = (\eta_1', \dots, \eta_n')$ y $\eta_i' = \eta_i + \langle t, u_i \rangle$, $(i = 1, .., n)$, hacemos esto tomando la imagen de y bajo la aplicación lineal $\sigma: E^n \to E^{n-d}$, cuyo núcleo consiste de los vectores $(\langle t, u_1 \rangle, \dots, \langle t, u_n \rangle)$, con $t \in E^d$. La posición de $p(y) = \sigma(y)$ relativa a los vectores $\overline{u}_i = \sigma(e_i)$, con $\{e_1, .., e_n\}$ la base canónica de E^n, determina la estructura combinatoria de P(y). Hay una conexión con los diagramas de Gale; si P(y) es un politopo, entonces la imagen de $\overline{U} = (\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n)$ bajo una aplicación lineal cuyo núcleo es la recta a través de p(y) es un diagrama de Gale del dual de P(y).

Hay tantas aplicaciones combinatorias como métricas de esta técnica de representación. Por ejemplo, un d-politopo con n caras es la suma de Minkowski de a lo sumo (n-d) politopos indescomponibles, que no admiten una representación no trivial como una suma (McMullen [57]). Las representaciones también han sido usadas para investigar la conexión entre los dos problemas siguientes. Primero, ¿en qué grado el tipo combinatorio de un politopo está determinado por las normales exteriores de sus caras?. Segundo, ¿cuál es la relación entre un politopo y sus intersecciones con sus trasladadas? (ver McMullen, Schneider y Shephard [59]; compare también con Rogers y Shephard [60] y Schneider [61]).

Excepto para el caso fácil de un d-politopo cruzado, un d-politopo centralmente simétrico tiene a lo sumo 2d+2 vértices. Así su diagrama de Gale tiene dimensión mayor que el politopo original, y por lo tanto tiene una utilidad limitada. Pero hay una variante técnica conveniente debida a Shephard (ver McMullen y Shephard [50]); nuevamente daremos una descripción simplificada. Un conjunto centralmente simétrico X de 2n puntos generando E^d es linealmente equivalente a la imagen bajo proyección ortogonal del conjunto de vértices de un n-politopo cruzado C en E^n. Un conjunto $\overline{X}$, el cual es linealmente equivalente a la imagen de vert C bajo una proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal E^{n-d} de E^d , es un transformado central (c.s) de X. La relación combinatoria entre X y $\overline{X}$ es más complicada que para transformadas afines, pero aún obtenemos una relación de isomorfismo, y diagramas centrales correspondientes para politopos centralmente simétricos.

A pesar de estas complicaciones, McMullen y Shephard probaron que, si k(d,m) es el máximo de líneas de proximidad (neighbourliness) de un cierto d-politopo centralmente simétrico con 2(d+m) vértices, entonces $k(d,1)=\left[\frac{1}{2}d\right]$ y $k(d,2)=\left[\frac{1}{3}(d+1)\right]$. Schneider [62] ha probado que

$$\liminf_{d\to\infty} k(d,m)/(d+m) \geq b(m),$$

donde b(m) decrece cuando m crece, y

$$\lim_{m\to\infty} b(m) = 1-\operatorname{erf}(\sqrt{\log 2}) = 0.2390...$$

Si un politopo P tiene un cierto grupo de simetrías afines, entonces se puede elegir un diagrama de Gale de P teniendo un grupo isomorfo de simetrías lineales, excepto que debemos permitir simetrías intrínsicas, las cuales permutan puntos coincidentes del diagrama. Usando esta idea, ha sido posible enumerar ciertos tipos combinatorios de politopos con simetrías. (McMullen y Shephard [63], Ewald-Voss [56]).

Sea ahora $Z = S_1+...+S_n$, $S_i = [(-x_i)x_i]$, $(i+1,...,n)$ un d-zonotopo en E^d . Existe una relación combinatoria entre Z y una transformación central $\overline{X}$ de $X=(\pm x_1,...,\pm x_n)$ que nos permite definir un *diagrama zonal* de Z. McMullen [64] usó este técnica para enumerar los tipos combinatorios de d-zonotopos que son la suma de a lo sumo d+2 segmentos.

Si $\overline{X}=(\pm\overline{x}_1,...,\pm\overline{x}_n)$ es un diagrama zonal de Z, y escribimos $\overline{S}_i = [(\overline{x}_i)\overline{x}_i]$ $(i=1,...,n)$, entonces el (n-d)-zonotopo $\overline{Z} = \overline{S}_1+...+\overline{S}_i$ se dice *asociado* con Z. McMullen [64] probó que esta asociación es de naturaleza combinatoria, y remarcó que esto conduce a una correspondencia combinatoria entre arreglos de n hiperplanos en el espacio proyectivo de k y n-k-2 dimensiones. Shephard [65] usó esta asociación, probando, por ejemplo, que si Z y $\overline{Z}$ son disecados (ver subsección 12.4.1) en cubos con trasladadas de S_i y $\overline{S}_i$ como lados, entonces el número de cubos en cada disección es el mismo. Shephard [66] investigó zonotopos que embaldosan el espacio (tile spaces); probó la equivalencia de varias condiciones en dimensiones menores, de las cuáles la más importante es que si Z embaldosa E^d , entonces $\overline{Z}$ embaldosa E^{n-d}. La demostración general fue dada por McMullen [67].

Finalmente, si X es una base positiva de E^d , entonces un subconjunto $\overline{X}$ de E_n^{n-d-1} cuya transformada afín es isomorfa a X se denomina un *diagrama positivo* de X. Shephard [68], a quien se debe este concepto, probó que cada vértice de conv $\overline{X}$ es un punto de $\overline{X}$ de multiplicidad por lo menos 2. Usando diagramas positivos, pudo dar demostraciones concisas de muchos de los resultados estándar sobre bases positivas; por ejemplo, el teorema de Steinitz que X tiene a los sumo 2d puntos es una consecuencia de la observación sobre conv $\overline{X}$ de más arriba.

12.3.3. <u>Los números de caras de politopos:</u>

Si $f_i(P)$ es el número de j-caras de un d-politopo P, el *f-vector* de P es $(f_0(P),\ldots,f_{d-1}(P))$. El problema básico considerado en esta sección es el de clasificar los f-vectores de todos los d-politopos, o de los d-politopos de ciertas clases especiales. En general, este problema esta muy lejos de estar solucionado.

Primero, observemos que los f-vectores satisfacen la relación de Euler:

$$\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j f_j(P) = 1-(-1)^d .$$

Para $d = 3$, el resultado es debido a Euler mismo. Para $d \geq 4$, la relación fue descubierta por Schläfli [4], aunque no fue publicada en ese momento. Hay muchas demostraciones incompletas entre 1.880 y 1.890; los vacíos en estas demostraciones fueron llenados recientemente por Bruggesser y Mani [69], cuando probaron que el complejo frontera de un politopo puede ser *shelled*, esto es, las caras pueden ser ordenadas $F_1,\ldots,F_k$ de tal forma que $r = 1,\ldots,$ k-1, $G_r = F_1\cup\ldots\cup F_r$ es una (d-1)-bola topológica y $G_r \cap F_{r+1}$ es una (d-2)-bola topológica. La primera demostración rigurosa fue de Poincaré; demostraciones más simples se deben a Hadwiger, Klee y Grünbaum (ver referencias 19, 20), la última es completamente elemental. Se puede demostrar que la relación de Euler es esencialmente la única relación afín satisfecha por los f-vectores de todos los politopos. Ver referencia 19 para un relato histórico detallado de la relación de Euler.

Pero la relación de Euler no es claramente la única restricción. Por ejemplo, Steinitz (ver referencia 19) probó que los f-vectores de los 3-politopos son exactamente aquellos vectores (f_0,f_1,f_2) satisfaciendo la relación de Euler y

$$4 \leq f_0 \leq 2f_2-4,\; 4 \leq f_2 \leq 2f_0-4 .$$

Sin embargo, aún para $d = 4$, una clasificación completa no se conoce; resultados parciales pueden encontrarse en referencia 19 y Barnette y Reay [70], que describen los pares posibles $(f_i(P),f_j(P))$ cuando dim $P = 4$.

Por lo tanto, debemos disminuir nuestros propósitos, y preguntarnos, por ejemplo, por el máximo o el mínimo de $f_j(P)$ cuando es fijado $f_i(P)$. Uno de estos problemas está completamente resuelto. Sea $f_j(v,d)$ el número de j-caras de un simplicial d-politopo cercano con v vértices. Entonces tenemos el teorema del supremo: si P es un d-politopo con v vértices, entonces $f_j(P) \leq f_j(v,d)$, con la igualdad para cualquier $j \geq \left[\frac{1}{2}(d-1)\right]$

caracterizando a P como simplicial y cercano. Este resultado es debido a McMullen (ver referencia 20); para resultados parciales anteriores, ver referencias 19, 20, 24 y 25.

La demostración del teorema del supremo nos conduce a restringir nuestra atención a politopos simpliciales. Los números de caras de estos satisfacen otras relaciones además de las de Euler, llamadas las ecuaciones de Dehn-Sommerville. Estas tienen varias reformulaciones, pero quizás las más útil es la debida a McMullen y Walkup [71] (ver también referencia 20). Para $e \geq d$, escribimos

$$g_k^{(e)} = \sum_{j=-1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{e-j-1}{e-k-1} f_j$$

donde $f_j = f_j(P)$, y $f_{-1} = 1$. Entonces tenemos $g_k^{(e)} = (-1)^{e-d} g_{e-k-2}^{(e)}$ para cada k. (el caso e=d es debido a Sommerville; los números $g_k^{(e)}$ son utilizados en la demostración del teorema del supremo).

Existe una conjetura sobre los f-vectores posibles de los d-politopos simpliciales. Si a es un entero positivo, la expresión canónica de a es:

$$a = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_i}{i}$$

donde los a_j están unívocamente definidos por $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_i \geq i$. Escribimos

$$a^{\langle j/k \rangle} = \binom{a_k + j - k}{j} + \binom{a_{k-1} + j - k}{j-1} + \ldots + \binom{a_i + j - k}{i + j - k}$$

omitiendo coeficientes binomiales con entradas negativas. También escribimos $0^{\langle j/k \rangle} = 0$. Entonces, la denominada g-conjetura de McMullen [72] es: $(f_0, \ldots, f_{d-1})$ es el f-vector de algún d-politopo simplicial si y sólo si $g_k^{(d+1)} = -g_{d-k-1}^{(d+1)}$ para cada k, y $g_{k-1}^{(d+1)} (g_k^{(d+1)})^{\langle k/k-1 \rangle}$ cuando $g_k^{(d+1)} \geq 0$.

Esta g-conjetura debe tener la implicación $g_k^{(d+1)} \geq 0$ para $k = 0, \ldots, \left[\frac{1}{2} d\right] - 1$; estas desigualdades constituyen la conjetura generalizada del ínfimo de McMullen y Walkup [71]. El caso k=0 es trivial y el caso k=1 es equivalente al teorema del ínfimo de los politopos simpliciales, probado pos Barnette [73]. La g-conjetura misma fue probada para $d \leq 5$ o $f_0 \leq d + 3$ (McMullen [72]). Finalmente, por métodos algebraicos usando unas pocas propiedades de los politopos, Stanley [74] probó que $g_k^d \leq (g_{k-1}^{(d)})^{\langle k+1, k \rangle}$, un resultado que establece una forma más fuerte del teorema del supremo, y que indica la plausibilidad de la g-conjetura.

Respecto al ínfimo de $f_j(P)$ para d-politopos generales P con un número v de vértices, hay una conjetura para $v \leq 2d$, la que fue probada para $v \leq d + 4$, y una conjetura complicada para j=d-1, sólo establecida para un rango muy restringido de valores de v (McMullen [75]).

Los números de caras de politopos cúbicos satisfacen relaciones análogas a las ecuaciones de Dehn-Sommerville (ver referencia 19), pero poco es conocido sobre los f vectores posibles de esos politopos.

También se sabe poco sobre f-vectores de politopos centralmente simétricos, o aún, politopos centralmente simétricos simpliciales. No hay conjeturas sobre el máximo posible de números de caras; la situación es complicada aquí por el hecho de que un d-politopo centralmente simétrico con demasiados vértices no puede ser cercano (cf. subsección 12.3.2).

Mucho más se conoce sobre 3-politopos, y particularmente, sobre 3-politopos simples. Si $p_j = p_j(P)$ es el número de caras j-gonales de un 3-politopo simple P, entonces

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{j\geq 7}(j-6)p_j$$

(ver referencia 19). Eberhard [5] probó que ,dada una sucesión $(p_3, p_4, p_5, p_7, \ldots)$ satisfaciendo esta ecuación, existe un p_6 y un 3-politopo P simple con $p_j = p_j(P)$ para todo j. Ciertamente, si $p_3 = p_4 = 0$, podemos tomar cualquier $p_6 \geq 8$ (Grünbaum [76]). Si p_3 o p_4 no son cero, hay otras restricciones sobre p_6; para un relato sobre estas y cuestiones relacionadas, ver Grünbaum [25]. Resultados análogos valen para 3-politopos con vértices 4-valentes.

12.4. TEORIA METRICA:

12.4.1. Valuaciones y volumen:

Al desarrollar la teoría del volumen de conjuntos convexos, podemos asumir la teoría de la medida de Lebesgue. Sin embargo, existe una aproximación alternativa, debida básicamente a Hadwiger [12], que conduce a muchas generalizaciones interesantes y fructíferas.

Una valuación es una función φ sobre P^d o K^d, tomando valores en algún espacio lineal real, tal que $\varphi(K_1 \cup K_2) + \varphi(K_1 \cap K_2) = \varphi(K_1) + \varphi(K_2)$, cuando $K_1 \cup K_2$ es convexo. Decimos que φ es simple si $\varphi(K) = 0$ cuando $\dim K < d$. Si G es un grupo de movimientos euclideos, decimos que φ es una G-valuación si $\varphi(\psi K) = \varphi(K)$ para todo $\psi \in G$.

Hadwiger [12] caracteriza volúmenes sobre P^d como la única valuación simple (a valores reales) invariante por traslaciones (no negativa) que toma el valor 1 sobre el cubo unitario estándar. En el curso de esta demostración, él probó que una valuación ϕ simple invariante por traslaciones admite un desarrollo polinomial

$$\varphi(\lambda P) = \sum_{r=1}^{d} \lambda^r \varphi_r(P)$$

para λ racional no negativo (si φ es continua o monótona, λ puede ser real). Para volumen V, la no negatividad implica monoticidad, y esto nos permite definir el volumen de Jordan de un K general, $K \in K^d$ por

$$V(K) = \sup\{V(P) / P \in P^d, P \subseteq K\} = \inf\{V(Q) / Q \in P^d, K \subseteq Q\}$$

En efecto, se puede usar la relación inclusión-exclusión, que sigue de la propiedad de valuación (Volland [77], Sallee [78]), para definir el volumen de cualquier unión finita de conjuntos convexos compactos. En una dirección diferente, se puede también obtener la medida de Lebesgue. Una consecuencia particular de la aproximación de Hadwiger es que el volumen es invariante bajo movimientos rígidos.

Una idea en la base de la discusión de más arriba es la de disecciones. Una expresión $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k$, donde $\dim(P_i \cap P_j) < d$ si $i \neq j$, es una *disección* del d-politopo P. Sea G un grupo de movimientos, como arriba. Si $Q \in P^d$ tiene una disección $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_k$, tal que $Q_i = \psi_i P_i$ para algún $\psi_i \in G$ $(i = 1,\ldots,k)$, nosotros decimos que P y Q son *G-equidisecables*. Condiciones necesarias y suficientes para que dos politopos sean equidisecables por traslación, conjeturadas por Hadwiger [79] (ver también referencia 12), fueron probadas por Jessen y Thorup [80]; estas condiciones involucran ciertas clases de valuaciones simples. Hay conjeturas sobre condiciones para la equidisectabilidad por movimientos rígidos (ver referencia 12), pero este problema permanece abierto para $d \geq 4$.

Para discutir valuaciones generales, necesitamos cierto material preliminar. El *ángulo* de un cono convexo C con vértice a es aquella proporción de la bola en aff C con centro a que está en C (así todos los ángulos están normalizados y medidos intrínsicamente). Si F es una cara de un conjunto poliedral P, definimos el *ángulo interno* $\beta(F,P)$ de P en F como el ángulo de un cono generado por P, con un punto de relint F como vértice, y el *ángulo externo* $\alpha(F,P)$ de P en F como el ángulo de un cono de vectores normales exteriores a hiperplanos soportes de P que contiene F. Estos ángulos internos y externos satisfacen varias relaciones cuadráticas, que conducen a la fórmula de inversión: si φ y Ψ son funciones sobre politopos, entonces son equivalentes:

$$\psi(P) = \sum_F (-1)^{\dim P - \dim F} \beta(F,P)\varphi(F)$$

$$\varphi(P) = \sum_F \gamma(F,P)\psi(F)$$

donde la suma se extiende sobre todas las caras no vacías F de P (incluyendo P mismo). Esto se debe a McMullen [81]. Ahora, si φ es una valuación, entonces Ψ es (esencialmente) una valuación simple (McMullen [82]).

Podemos deducir ahora que valuaciones generales invariantes por traslaciones tienen expansiones polinomiales

$$\varphi(\lambda P) = \sum_{r=0}^{d} \lambda^r \varphi_r(P);$$

si φ es continua, los coeficientes pueden ser números reales no negativos, y los argumentos conjuntos convexos compactos cualesquiera. Pero tenemos aún desarrollos polinomiales para $\varphi(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k)$. Los coeficientes se denominan *valuaciones mixtas*; cada una es una valuación homogénea invariante por traslaciones de un grado apropiado en sus distintos argumentos (para todo esto, ver McMullen [82]). Cuando la valuación original es el volumen, obtenemos los *volúmenes mixtos* bien conocidos (ver referencias 1, 11 y16); el volumen mixto más general es $V(K_1,\ldots,K_d)$ donde $d!V(K_1,\ldots,K_d)$ es el coeficiente de $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ en $V(\lambda_1 K_1 + \lambda_d K_d)$.

Como un ejemplo particularmente importante, escribimos:

$$V(K + \rho B^d) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \rho^i W_i(K),$$

donde W_i (la cual es homogénea de grado (d-i)) es la i-ésima *quermassintegral* (ver referencias 1, 8, 12; cf. subsección 12.4.4 para definiciones alternativas). Hadwiger [12] ha caracterizado combinaciones lineales (no negativas) de quermassintegrals como las valuaciones continuas (monótonas) invariantes bajo movimientos rígidos.

Podemos extender el marco de esta teoría a valuaciones *equivalentes por traslaciones*, las que bajo traslaciones obedecen una regla de la forma $\varphi(P+t)=\varphi(P)+\upsilon(P,t)$, donde es lineal en t. En particular, partiendo del vector momento (Zielvektor) $z(K)=V(K)g(K)$, donde g(K) es el centro de gravedad de K, Schneider [83] definió vectores momentos mixtos y Hadwiger y Schneider [84] caracterizaron los vectores quermass, que son los análogos vectoriales de los quermassintegrals.

Si φ es una valuación, y definimos φ^* por

$$\varphi^*(P)=\sum_F(-1)^{\dim F}\varphi(F)$$

entonces φ^* es también una valuación (Sallee [78], McMullen [82]). Decimos que φ satisface una relación de tipo Euler si $\varphi^*(P)=\pm\varphi(\pm P)$ (para alguna elección fija de signos). Shephard [85] encontró muchos ejemplos de relaciones de tipo Euler incluyendo aquellos que involucran volúmenes mixtos (ver referencia 19). McMullen [82] probó que estos son casos de un teorema general: si φ es una valuación de grado r, homogénea, invariante por traslaciones, entonces $\varphi^*(P)=(-1)^r\varphi(-P)$, para cada $P\in P^d$.

Hay teoremas de tipo Euler involucrando únicamente ángulos, tales como el teorema de Gram:

$$\sum_F(-1)^{\dim F}\beta(F,P)=0$$

(si $\dim P>0$), teoremas de deficiencias angulares (debido a Perles y Shephard) y ángulos de Grassmann (debido a Grünbaum). Estos son todos los casos especiales de relaciones generales (ver McMullen [81] para detalles y referencias).

Se deben a Schneider algunas ideas relacionadas. Un *endomorfismo* de K^d es una transformación $\phi:K^d\to K^d$ tal que $\phi(K_1+K_2)=\phi(K_1)+\phi(K_2)$. Si ϕ es continua y preserva volúmenes, existe una afinidad ψ que preserva volúmenes de E^d tal que $\phi(K)$ es una trasladada de $\psi(K)$, para todo $K\in K^d$ (Schneider [86]). Schneider [87] también caracterizó endomorfismos continuos que conmutan con movimientos rígidos. En una vena ligeramente diferente, Schneider [88] probó que una isometría de K^d es inducida por una isometría de E^d.

12.4.2. Teoremas isoperimétricos:

La discusión de esta sección se centra principalmente alrededor de desigualdades entre volúmenes mixtos. Nuestro punto de partida es el teorema de Brunn-Minkowski, que establece que la raíz del volumen es cóncava. Además, si

$$V^{1/d}((1-\lambda)K_0+\lambda K_1)=(1-\lambda)V^{1/d}(K_0)+\lambda V^{1/d}(K_1),$$

para algún $0<\lambda<1$, entonces K_0 y K_1 son homotéticos ($K_1=\mu K_0+t$, para algún $\mu>0$ y $t\in E^d$), o uno es un punto, o ellos están en hiperplanos paralelos. Se conocen cuatro demostraciones diferentes; ver referencias 1, 11 y 12, Grünbaum [19] tiene información histórica.

Escribamos

$$V(\lambda_0 K_0 + \lambda_1 K_1) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \lambda_0^{d-i} \lambda_1^i V_i.$$

Entonces, considerando la primera derivada de

$$f(\lambda) = V^{1/d}((1-\lambda)K_0 + \lambda K_1) - (1-\lambda)V_0^{1/d} - \lambda V_d^{1/d}$$

en 0 obtenemos la primera desigualdad de Minkowski: $V_1^d \geq V_0^{d-1}.V_d$. Además, si $V_0, V_d > 0$, tenemos la igualdad únicamente si K_0 y K_1 son homotéticos. La segunda derivada de f en 0 nos conduce a la segunda desigualdad de Minkowski: $V_1^2 \geq V_0.V_2$; la igualdad puede ocurrir si K_0 y K_1 no son homotéticos (ver referencia 1).

La segunda desigualdad de Minkowski es el punto de partida para probar las desigualdades de Aleksandrov-Fenchel: si $K_1,\ldots,K_d \in K^d$, entonces

$$V(K_1, K_2, K_3, \ldots, K_d)^2 \geq V(K_1, K_2, K_3, \ldots, K_d)V(K_1, K_2, K_3, \ldots, K_d).$$

(Ver Aleksandrov [89] y Busemann [16]; la última demostración puede acortarse usando Gärding [90] o Schneider [91]). Se deducen a partir de las desigualdades de Aleksandrov y Fenchel muchas otras; Shephard [92] las discute con algún detalle. Ver también Busemann [16] y Hadwiger [12].

El volumen mixto $dV(K,\ldots,K,B^d) = S(K)$ es justamente el *área superficial* de K. Un caso particular de la desigualdad de Minkowski es la desigualdad isoperimétrica clásica: $V(K)^{d-1} \leq (d^{-1}S(K))^d / k_d$, donde $k_d = V(B^d)$. La igualdad ocurre solamente si K es una esfera.

Si invertimos los roles de K y B^d obtenemos análogamente $V(K) \leq W_{d-1}(K)^d / k_d^{d-1}$. Ahora, $W_{d-1}(K) = \frac{1}{2} k_d b(K)$, donde

$$b(K) = (dk_d)^{-1} \int_{S^{d-1}} \{h(K,u) + h(K,-u)\} du$$

es el *ancho medio* de K (comparar la subsección 12.4.5 de más abajo). Como $b(K) \leq D(K)$, el diámetro de K, obtenemos también $V(K) \leq k_d \left(\frac{1}{2} D(K)\right)^d$. La igualdad en ambas relaciones se da solamente para bolas.

Hay muchas generalizaciones y versiones más fuertes de teoremas isoperimétricos. Por ejemplo, tenemos (Hadwiger [12])

$$\left(d^{-1}S(K)\right)^d - k_d V(K)^{d-1} \geq \left[\left(d^{-1}S(K)\right)^{1/(d-1)} - k_d^{1/(d-1)} r(K)\right]^{d(d-1)}$$

donde $r(K)$ es el *radio interior* de K, el radio de la mayor bola contenida en K. (Ver subsección 12.4.4).

Hay también teoremas isoperimétricos para varias clases de cuerpos convexos, especialmente para politopos. Fejes Tóth [22] caracteriza muchos politopos regulares por medio de propiedades extremales. El estudio de los mejores representativos isoperimétricos de un tipo combinatorio dado conduce al teorema de Lindelöf (ver referencia 12); entre todos los d-politopos con volumen dado cuyas caras tienen vectores normales exteriores dados, la menor área superficial ocurre justo cuando las caras tocan alguna esfera. Steinitz (ver referencia 19) demostró que hay algunos tipos combinatorios de 3-politopos que no contienen todas las caras que tocan una esfera; estas no tienen mejores representativos isoperimétricos.

12.4.3. La teoría analítica:

Hasta ahora, no hemos prestado mucha atención a la teoría analítica de conjuntos convexos, aunque en muchos casos tienen precedencia histórica. Hay dos formas para aproximarse a esta teoría. La primera es considerar una superficie convexa, por lo menos localmente, como el gráfico de una función convexa; hemos tocado esto implícitamente en la subsección 12.2.2. La otra es considerar una superficie convexa como la envolvente de sus hiperplanos soportes. Así, observemos primero más estrechamente propiedades soportes y la función soporte.

La función soporte de la cara F(K,u) de $K \in K^d$ en dirección u es la derivada direccional $h'(K,u;.)$ de la función soporte de K. De aquí, si h(K,.) es diferenciable en u, F(K,u) es un único punto $\nabla h(K,u)$. Como remarcamos en la subsección 12.2.2, la función convexa h(k,u) es dos veces diferenciable casi por doquier. Si h(K,.) es dos veces diferenciable en u, entonces un autovalor de una matriz con entradas las segundas derivadas h_{ij} es cero; los otros son los radios principales de curvatura $R_1,..,R_{d-1}$ de bd K y $\nabla h(K,u)$. Así, si $d\omega(u)$ es el elemento de área sobre S^{d-1} en u, el elemento de área correspondiente sobre bd K es $R_1....R_{d-1}d\omega(u) = D_{d-1}hd\omega(u)$, donde escribimos Dr h para la r-ésima función simétrica de $R_1,..,R_{d-1}$, y así la suma de los menores principales de (h_{ij}) (ver referencias 1 y 16).

Supongamos que h(K,.) (o brevemente, K) es analítica. Tenemos entonces dos expresiones para la quermassintegral $W_i(K)$:

$$W_i(K) = \left\{ d\binom{d-1}{d-i} \right\}^{-1} \int_{S^{d-1}} D_{d-i} h d\omega(u)$$

$$= \left\{ d\binom{d-1}{d-i-1} \right\}^{-1} \int_{S^{d-1}} h(K,u) D_{d-i-1} h d\omega(u).$$

Observe que $W_0(K)=V(K)$ y $dW_1(K)=S(K)$. Más generalmente, como

$$h(\lambda_1 K_1 + ... + \lambda_k K_k, u) = \lambda_1 h(K_1, u) + ... + \lambda_k h(K_k, u),$$

podemos construir fácilmente una teoría analítica de volúmenes mixtos. Es posible entonces probar el teorema de Brunn-Minkowski (referencia 1) y las desigualdades de Aleksandrov-Fenchel por métodos analíticos (Aleksandrov [89]; ver también Busemann [16]).

Si h(K,.) no es dos veces diferenciable, podemos adoptar una aproximación diferente. Sea ω un conjunto de Borel sobre la esfera unitaria S^{d-1} y A su imagen inversa esférica sobre bd K. Entonces el área $S(K;\omega)$ de A tiene el desarrollo

$$S(K + \lambda B^d; \omega) = \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d-1}{k} \lambda^{d-k-1} S_k(K;\omega)$$

para $\lambda \geq 0$. La función $S_k(K;.)$ es la k-ésima medida de área (Fenchel y Jessen [93]); $S_k(K;d\omega(u))$ reemplaza $D_{d-k-1}hd\omega(u)$. Para un definición alternativa, ver Schneider [94]. Federer [95] introdujo otra medida diferente para el área, pero estrechamente relacionada.

En razón de la invariancia por traslaciones, la medida superficial de área $S_k(K;.)$ satisface $\int uS_k(K;d\omega(u))=0$. Si S es una medida no negativa sobre S^{d-1}, cuyo soporte no yace en cualquier hemisferio, entonces $S=S_{d-1}(K;.)$ para algún $K\in K^d$, la cual es única a menos de traslaciones (Aleksandrov [89], Fenchel y Jessen [93]; el resultado para politopos, y la unicidad, son debidos a Minkowski [2]; ver también referencia 1).

Este resultado nos permite definir una nueva adición para cuerpos convexos, indicada con #, y denominada suma de Blaschke. Está definida por

$$S_{d-1}(K_1\#K_2;.)=S_{d-1}(K_1;.)+S_{d-1}(K_2;.)$$

(Blaschke [7], Grünbaum [19], Firey y Grünbaum [96]). Firey [97] discutió varias conexiones entre sumas de Blaschke y Minkowski en tres dimensiones; en E^2 ellas coinciden.

No podemos terminar esta sección sin mencionar el tema de rigidez de superficies convexas, que ha recibido mucha atención de los especialistas rusos en convexidad (Aleksandrov [15], [21], Lyusternik [23], Efimov [98], Pogorelov [99]-[101]; ver también Busemann [16]). Una superficie convexa tiene una métrica intrínsica, inducida por sus geodésicas. Las preguntas básicas son cuando una superficie convexa admite dos inmersiones no congruentes, o pueden deformarse, mientras permanece una superficie convexa con la métrica intrínsica. Para las fronteras de 3-politopos, Cauchy (ver Lyusternik [23]) ya conocía la respuesta negativa; el mismo resultado ha sido establecido para muchas otras clases de superficies convexas, algunas no necesariamente cerradas. Una cuestión estrechamente relacionada tiene que ver con la existencia de una superficie convexa que realiza una métrica intrínsica dada.

12.4.4. Geometría integral:

El punto de partida para la discusión de esta sección tiene poco que ver con la convexidad. Es el hecho de que el grupo de rotaciones y el grupo de movimientos rígidos posee medidas invariantes, las medidas de Haar, que son únicas excepto por un factor de normalización. Hay medidas inducidas sobre las familias de r-flats lineales y afines, para cada r. Estas medidas pueden expresarse como las integrales de formas diferenciales en sistemas coordenados convenientes. Para una introducción a esta teoría, donde las aplicaciones de convexidad están presentes, ver Santaló [18].

Escribimos L^r y A^r para r-flats lineales y afines, y dL^r y dA^r para las formas diferenciales correspondientes. Algo para notar primero es que si M es un subconjunto de la Grassmanniana $G^{d,r}$ de todas las r-flats lineales, y

$$\overline{M}=\{L^{d-r}\in G^{d,d-r}\ /\ (L^{d-r})^{\perp}\in M\}$$

es el subconjunto correspondiente de (d-r)-flats ortogonales, entonces

$$\int_M dL^r=\int_{\overline{M}} dL^{d-r}.$$

Escribimos ϕ y para rotaciones típicas y movimientos rígidos, respectivamente.

Primero notemos las definiciones de la geometría integral de las quermassintegrals:

$$W_i(K)=c\int\chi(K\cap A^i)dA^i=c\int V_{d-i}(K/L^{d-i})dL^{d-i},$$

donde χ es la característica de Euler, K/L^{d-i} es la imagen de K bajo proyecciones ortogonales sobre L^{d-i}, V_{d-i} indica el volumen (d-i)-dimensional, y c es una constante de normalización, posiblemente diferente en cada ocurrencia (referencia 12; ver también Matheron [102]). La última definición da lo que a veces se denomina la *quermassintegral exterior*; si $a \in \operatorname{int} K$, la *quermassintegral interior* de K con respecto a $\underline{a}$ es:

$$\widetilde{W}_i(K-a) = c\int V_{d-i}((K-a)\cap L^{d-i})dL^{d-i}.$$

Blaschke [8] da expresiones alternativas para las quermassintegrals interiores.

De interés en esta conexión es el resultado de Larman y Rogers [103]; hay conjuntos convexos, K_1 y K_2 en E^d (a lo sumo para cada $d \geq 12$), centralmente simétricos alrededor de 0, tales que $V_{d-1}(K_1 \cap H) < V_{d-1}(K_2 \cap H)$ para cada hiperplano H a través de 0, pero con $V(K_1) > V(K_2)$. Podemos aún elegir K_2 como una bola. La demostración utiliza argumentos probabilísticos. Los resultados análogos para proyecciones fueron probados antes por Schneider [104]; si K_1 es cualquier cuerpo convexo centralmente simétrico que no es un zonoide, entonces existe un cuerpo convexo centralmente simétrico K_2, tal que $V_{d-1}(K_1/H) < V_{d-1}(K_2/H)$ para cada hiperplano a través de 0, pero con $V(K_1) > V(K_2)$.

De gran importancia teórica son las fórmulas cinemáticas (Blaschke [8], Hadwiger [12], Matheron [102]), que son

$$c\int W_i(K_0 \cap \psi K_1)d\psi = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}W_j(K_0)W_{i-j}(K_1)$$

$$c\int W_i(K_0 + \phi K_1)d\phi = \sum_{j=0}^{d-i}\binom{d-i}{j}W_j(K_0)W_{d-i-j}(K_1).$$

Para aplicaciones de estas y otras fórmulas cinemáticas, ver Hadwiger [12].

El estudio más importante de la geometría integral ha sido realizado en E^2; referencias: Kendall y Moran [105] y Santaló [18]. Aquí hay muchos y hermosos resultados; mencionaremos solamente dos que pueden enunciarse fácilmente, y que son formas más fuertes de la desigualdad isoperimétrica. Sea K un cuerpo convexo plano, con área A y perímetro L. Primero, sea M_k la medida de aquellos movimientos rígidos Ψ de E^2 tales que bd K y bd ΨK se encuentran en k puntos. Entonces

$$L^2 - 4\pi A = M_4 + 2M_6 + 3M_8 + \dots .$$

En particular, si K no es un disco, entonces hay algún Ψ tal que las fronteras de K y ΨK se encuentran en por lo menos cuatro puntos. Por otra parte, si r es el radio interior y R el circunradio de K, entonces, Bonnesen probó que

$$L^2 - 4\pi A \geq \pi^2(R-r)^2.$$

Para estos resultados, ver Santaló [18].

12.4.5. Miscelánea:

Hay en convexidad una variedad considerable de problemas especiales, y no es posible mencionarlos aquí. Sin embargo hay algunos que no podemos evitar mencionar; pueden clasificarse ligeramente como problemas de cubrimientos.

El conocido teorema de Jung establece que un subconjunto de E^d de diámetro D está contenido en alguna bola de radio $D\sqrt{[d/2(d+1)]}$. Si K es un cuerpo convexo, entonces existe un único elipsoide E de volumen mínimo, el elipsoide de Löwner, que contiene K. Si 0 es el centro de E, entonces $d^{-1}E \subseteq K$, mientras que si K es centralmente simétrico, entonces $d^{-1/2}E \subseteq K$ (John [106]). De la misma forma, hay un único elipsoide de volumen máximo contenido en K. Para ambos resultados, ver John [106] o Danzer, Laugwitz y Lenz [107].

La famosa conjetura de Borsuk es que un conjunto de diámetro E en E^d puede ser cubierto a lo sumo por (d+1) conjuntos de diámetro menor que D. Es suficiente probar esto para conjuntos convexos y, ciertamente, para conjuntos $K \in K^d$ de ancho constante. El *ancho* de K en la dirección $u \in S^{d-1}$ es $h(K,u)+h(K,-u)$, la distancia entre los hiperplanos soportes de K que son perpendiculares a u. Se sabe que la conjetura es cierta para $d \leq 3$, y también si K es suave. Ver Grünbaum [108] para una discusión completa de estos problemas y problemas relacionados. Knast [109] notó que es una fácil consecuencia del teorema de Jung que 2^d conjuntos de diámetros menores que D cubren K.

Otro problema famoso fue propuesto por Tarski. Un *plank* es un conjunto convexo cerrado acotado por hiperplanos paralelos. El problema original, resuelto por Bang [110], establece que si un conjunto convexo de ancho mínimo δ es cubierto por planks, entonces la suma de sus anchos es por lo menos δ. Si P es un plank de ancho α, y β es el ancho de K en la misma dirección, entonces α/β es el ancho relativo de P. El problema generalizado de Bang [110], aún no resuelto, afirma que la suma de los anchos relativos de un cubrimiento de K por planks es a lo sumo 1.

REFERENCIAS:

[1] BONNESEN, T. y FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Körper*, Springer, Berlin (1.934); reimpreso Chelsea, New York, 1.948. (A-472)

[2] MINKOWSKI, H., *Gesammelte Abhandlungen*, 2 vols, Teubner, Berlin y Leipzig, 1.911.

[3] STEINER, J., *Gesammelte Werke*, 2 vols, Reimer, Leipzig, 1.881,1.882.

[4] SCHLÄFLI, L., 'Theorie der vielfachen kontinuität' en *Gesammelte Abhandlungen*, Birkhäuser, Basel, 1.950.

[5] EBERHARD, V., *Zur Morphologie der Polyeder*, Teubner, Leipzig, 1.891.

[6] BRÜCKNER, M., *Vielecke und Vielfache*, Teubner, Leipzig, 1.900.

[7] BLASCHKE, W., *Kreis und Kugel*, Verlag von Veit, Leipzig, 1.916; reimpreso Chelsea, New York, 1.949; 2nd edn, Gruyter, Berlin, 1.956. (A-464)

[8] BLASCHKE, W., *Integralgeometrie*, Chelsea, New York, 1.948.

[9] STEINITZ, E., 'Polyeder und Raumeinteilung' en *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*,Vol. 3 (Geometria), Part. 3AB12, Teubner, Leipzig, 1.922.

[10] STEINITZ, E. y RADEMACHER, H., *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer, Berlin, 1.934.

[11] EGGLESTON, H., *Convexity*, Cambridge Universtiy Press, Cambridge, 1.958. (A-4.276)

[12] HADWIGER, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche, und Isoperimetrie*, Springer, Berlin, 1.957.

[13] ROCKAFELLAR, R., *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1.970. (A-3.646)

[14] VALENTINE, F., *Convex sets*, McGraw-Hill, New York, 1.964. (A-3.044)

[15] ALEKSANDROV, A., *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*, Akademie Verlag, Berlin, 1.955; traducido del ruso.

[16] BUSEMANN, H., *Conves surfaces*, Interscience, New York, 1.958. (A-279)

[17] HADWIGER, H., *Altes und Neues über konvexe Körper,* Birkhaüser, Basel, 1.955.

[18] SANTALÓ, L., *Introduction to integral geometry*, Hermann, Paris, 1.953. (A-502)

[19] GRÜNBAUM, B., *Convex polytopes*, Wiley, New York, 1.967.

[20] McMULLEN, P. y SHEPHARD, G., *Convex polytopes and the upper bound conjecture*, London Mathematical Society Lecture Note Series 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1.971.

[21] ALEKSANDROV, A., *Konvexe Polyeder*, Akademie Verlag, Berlin, 1.958; traducido del ruso.

[22] FEJES TÓTH, L., *Regular figures*, Pergamon Press, New York, 1.964.

[23] LYUSTERNIK, L., *Convex figures and polyhedra*, Dover, New York, 1.963; traducido del ruso. (A-2.852)

[24] GRÜNBAUM, B. y SHEPHARD, G., 'Convex polytopes', *London Mathematical Society. Bulletin,* 1, 257-300, 1.969.

[25] GRÜNBAUM, B., 'Polytopes, graphs and complexes', *American Mathematical Society, Bulletin,* 76, 1.131-1.201, 1.970.

[26] *Ameican Mathematical Society. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 7: 1.963.

[27] FENCHEL, W. (ed.), *Proceedings of the colloquium on convexity, Copenhagen, 1.965*, Kobenhavns Universitets Matematiske Institut, Copenhagen, 1.967.

[28] REAY, J., 'Generalizations of a theorem of Carathéodory', *American Mathematical Society. Memoirs*, 54, 1.965. (H-M-54)

[29] TVERBERG, H., 'A generalization of Radon's theorem', *London Mathematical Society. Journal*, 41, 123-138, 1.966.

[30] REAY, J., 'An extension of Radon's theorem', *Illinois Journal of Mathematics,* 12, 184-189, 1.968.

[31] DANZER, L., GRÜNBAUM, B. y KLEE, V., 'Helly's theorem and its relatives', *American Mathematical Society. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 7, 101-180, 1.963.

[32] McMULLEN, P., 'The support functions of compact convex sets', *Elemente der Mathematik*, 31, 117-119, 1.976.

[33] BUSEMANN, H., 'The foundations of Minkowskian geometry', *Commentarii Mathematici Helvetici*, 4, 156-187, 1.950.

[34] HAMMER, P., 'Approximations of convex surfaces by algebraic surfaces', *Mathematika*, 10, 64-71, 1.963.

[35] FIREY, W., 'Approximating convex bodies by algebraic ones', *Archiv der Mathematik*, 25, 424-425, 1.974.

[36] BUSEMANN, H. y FELLER, W., *'Krümmungseigenschaften konvexer Flächen', Acta Mathematica*, 66, 1-47, 1.935.

[37] ALEKSANDROV, A., 'Almost everywhere existence of second differentials of convex functions', *Leningradskii Universitet. Uchenye Zapiski (Mathematics Series)*, 6, 3-35, 1.939. {En ruso}

[38] ALTSHULER, A. y STEINBERG, L., 'Neighborly 4-polytopes with 9 vertices', *Journal of Combinatorial Theory. A,* 15, 270-287, 1.973.

[39] PERLES, M. y SHEPHARD, G., 'Facets and non-facets of convex polytopes', *Acta Mathematica*, 119, 113-145, 1.967.

[40] LARMAN, D. y MANI, P., 'On the existence of certain configurations within graphs and the 1-skeletons of polytopes', *London Mathematical Society. Proceedings,* 20, 144-160, 1.970.

[41] GALLIVAN, S., *Properties of the one-skeleton of a convex body*, Ph.D. thesis, University of London, 1.974.

[42] KLEE, V. y WALKUP, D., 'The d-step conjecture for polyhedra of dimension d<6', *Acta Mathematica*, 117, 53-78, 1.967.

[43] BARNETTE, D., 'An upper bound for the diameter of a polytope', *Discrete Mathematics*, 10, 9-13, 1.974.

[44] LARMAN, D. y ROGERS, C., 'Paths in the one-skeleton of a convex body', *Mathematika*, 17, 293-314, 1.970.

[45] LARMAN, D. y ROGERS, C., 'Increasing paths in the one-skeleton of a convex body and the directions of line segments in the boundary of a convex body', *London Mathematical Society. Proceedings*, 23, 683-698, 1.971.

[46] EWALD, G., LARMAN, D. y ROGERS, C., 'The directions of the line segments and of the r-dimensional balls on the boundary of a convex body in euclidean space', *Mathematika*, 17, 1-20, 1.970.

[47] ANDERSON, R. y KLEE, V., 'Convex functions and upper semicontinuous collections', *Duke Mathematical Journal*, 19, 349-357, 1.952.

[48] WHITNEY, H., 'On the abstract properties of linear dependence', *American Journal of Mathematics*, 57, 509-533, 1.935.

[49] GALE, D., 'Neighboring vertices on a convex polyhedron' en *Linear inequalities and related systems* (ed. H. Kuhn y A. Tucker), Princeton University Press, Princeton, N.J., 1.956.

[50] McMULLEN, P. y SHEPHARD, G., 'Diagrams for centrally symmetric polytopes', *Mathematika*, 15, 123-138, 1.968.

[51] LLOYD, E., 'The number of d-polytopes with d+3 vertices', *Mathematika*, 17, 120-132, 1.970.

[52] ALTSHULER, A. y McMULLEN, P., 'The number of simplicial neighbourly d-polytopes with d+3 vertices', *Mathematika*, 20, 263-266, 1.973.

[53] McMULLEN, P., 'The number of neighbourly d-polytopes with d+3 vertices', *Mathematika*, 21, 26-31, 1.974.

[54] PERLES, M. y SHEPHARD, G., 'A construction for projectively unique polytopes', *Geometriae Dedicata*, 3, 357-363, 1.974.

[55] McMULLEN. P., 'Constructions for projectively unique polytopes', *Discrete Mathematics*, 14, 347-358, 1.976.

[56] EWALD, G. y VOSS, K., 'Konvexe Polytope mit Symmetriegruppe', *Comentarii Mathematici Helvetici*, 48, 137-150, 1.973.

[57] McMULLEN, P., 'Representations of polytopes and polyhedral sets', *Geometriae Dedicata*, 2, 83-99, 1.973.

[58] SHEPHARD, G., 'Polyhedral diagrams for sections of the non-negative orthant', *Mathematika*, 18, 55-263, 1.971.

[59] McMULLEN, P., SCHNEIDER, R. y SHEPHARD, G., 'Monotypic polytopes and their intersection properties', *Geometriae Dedicata*, 3, 99-129, 1.974.

[60] ROGERS, C. y SHEPHARD, G., 'The difference body of a convex body', *London Mathematical Society. Journal*, 33, 270-281, 1.958.

[61] SCHNEIDER, R., 'Über die Durchschnitte translationsgleicher konvexer Körper und eine Klasse konvexer Polyeder', *Hamburg, Universität: Mathematisches Seminar. Abhandlungen*, 30, 118-128, 1.967.

[62] SCHNEIDER, R., 'Neighbourliness of centrally symmetric polytopes in high dimensions', *Mathematika*, 22, 176-181, 1.975.

[63] McMULLEN, P. y SHEPHARD, G., 'Polytopes with an axis of symmetry', *Canadian Journal of Mathematics*, 22, 265-287, 1.970.

[64] McMULLEN, P., 'On zonotopes', *American Mathematical Society. Transactions*, 159, 91-110, 1.971.

[65] SHEPHARD, G., 'Combinatorial properties of associated zonotopes', *Canadian Journals of Mathematics*, 26, 302-321, 1.974.

[66] SHEPHARD, G., 'Space filling zonotopes', *Mathematika*, 21, 261-269, 1.974.

[67] McMULLEN, P., 'Space tiling zonotopes', *Mathematika*, 22, 202-211, 1.975.

[68] SHEPHARD, G., 'Diagrams for positive bases', *London Mathematical Society. Journal*, 4, 165-175, 1.971.

[69] BRUGGESSER, H. y MANI, P., 'Shellable descompositions of cells and spheres', *Mathematica Scandinavica*, 17, 179-184, 1.972.

[70] BARNETTE, D. y REAY, J., 'Projections of f-vector of 4-polytopes', *Journal of Combinatorial Theory. A*, 15, 200-209, 1.973.

[71] McMULLEN, P. y WALKUP, D., 'A generalized lower-bound conjecture for simplicial polytopes', *Mathematika*, 18, 264-273, 1.971.

[72] McMULLEN, P., 'The numbers of faces of a simplicial polytope', *Israel Journal of Mathematics*, 9, 559-570, 1.971.

[73] BARNETTE, D., 'A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes', *Pacific Journal of Mathematics*, 46, 349-354, 1.973.

[74] STANLEY, R., 'The upper bound conjecture and Cohn-Macauley rings', *Studies in Applied Mathematics*, 54, 135-142, 1.975.

[75] McMULLEN. P., 'The minimum number of facets of a convex polytope', *London Mathematical Society. Journal*, 3, 350-354, 1.971.

[76] GRÜNBAUM, B., 'Some analogues of Eberhard's theorem on convex polytopes', *Israel Journal of Mathematics*, 6, 398-411, 1.968.

[77] VOLLAND, W., 'Ein Fortsetzungssatz für additive Eipolyederfunktionale im euklidischen Raum', *Archiv der Mathematik*, 8, 144-149, 1.957.

[78] SALLEE, G., 'Polytopes, valuations and the Euler relation', *Canadian Journal of Mathematics*, 20, 1.412-1.424, 1.968.

[79] HADWIGER, H., 'Translative Zerlegungsgleichheit der Polyeder der gewöhnlichen Raum', *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 233, 200-212, 1.968.

[80] JESSEN, B. y THORUP, A., 'The algebra of polytopes in affine spaces' {por aparecer}

[81] McMULLEN, P., 'Non-linear angle-sum relations for polyhedral cones and polytopes', *Cambridge Philosophical Society. Proceedings*, 78, 247-261, 1.975.

[82] McMULLEN, P., 'Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes', *London Mathematical Society. Proceedings*, 35, 1.977. {por aparecer}

[83] SCHNEIDER, R., 'Additive Transformationen konvexer Körper', *Geometriae Dedicata*, 3, 221-228, 1.974.

[84] HADWIGER, H. y SCHNEIDER, R., 'Vektorielle Integralgeometrie', *Elemente der Mathematik*, 26, 49-57, 1.971.

[85] SHEPHARD, G., 'Euler-type relations for convex polytopes', *London Mathematical Society. Procedings*, 18, 597-606, 1.968.

[86] SCHNEIDER, R., 'Additive Transformationen konvexer Körper', *Geometriae Dedicata*, 3, 221-228, 1.974.

[87] SCHNEIDER, R., 'Equivalent endomorphisms of the space convex bodies', *American Mathematical Society. Transactions*, 194, 53-78, 1.974.

[88] SCHNEIDER, R., 'Isometrien des Raumes der konvexen Körper', *Colloquium Mathematicum*, 33, 219-224, 304, 1.975.

[89] ALEKSANDROV, A., 'On the theory of mixed volumes', *Matematischeskii Sbornik*, 44, (Novaya seriya 2), 947-97, 1.205-1.238, 1.937; 45 (Novaya seriya 3), 27-46, 227-251, 1.938. {en ruso}

[90] GÄRDING, L., 'An inequality for hyperbolic polynomials', *Journal of Mathematics and Mechanics*, 8, 957-965, 1.959.

[91] SCHNEIDER, R., 'On Aleksandrov's inequalities for mixed discriminants', *Journal of Mathematics and Mechanics*, 15, 285-290, 1.966.

[92] SHEPHARD, G., 'Inequalities between mixed volumes of convex sets', *Mathematika*, 7, 125-138, 1.960.

[93] FENCHEL, W. y JESSEN, B., 'Mengenfunktionen und konvexe Körper', *Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-Fysiske Meddelelser*, 16, 1-31, 1.938.

[94] SCHNEIDER, R., 'Kinematische Berührmasse für konvexe Körper und Integralrelationen für Oberflächenmasse', *Mathematische Annalen*, 218, 253-267, 1.975.

[95] FEDERER, H., 'Curvature measures', *American Mathematical Society. Transactions*, 93, 418-491, 1.959.

[96] FIREY, W. y GRÜNBAUM, B., 'Addition and decomposition of convex polytopes', *Israel Journal of Mathematics*, 2, 91-100, 1.964.

[97] FIREY, W., 'Blaschke sums of convex bodies and mixed bodies' en *Proceedings of the colloquium on convexity, Copenhagen, 1.965* (ed. W. Fenchel), Kobenhavns Universitets Matematiske Institut, Copenhagen, 1.967.

[98] EFIMOV, N., *Flächenverbiegung im Grossen*, Akademie Verlag, Berlin, 1.957; traducido del ruso.

[99] POGORELOV, A., *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Translations of Mathematical Monographs 35, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.973; traducido del ruso. (A-5.639)

[100] POGORELOV, A., *Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen*, Akademie Verlag, Berlin, 1.956; traducido del ruso.

[101] POGORELOV, A., *Die Verbiegung konvexer Flächen*, Akademie Verlag, Berlin, 1.957; traducido del ruso.

[102] MATHERON, G., *Integral geometry and geometric probability*, Wiley, New York, 1.975.

[103] LARMAN, D. y ROGERS, C., 'The existence of a centrally symmetric convex body with central sections that are unexpectedly small', *Mathematika*, 22, 164-175, 1.975.

[104] SCHNEIDER, R., 'Zu einem Problem von Shephard über die Projektionen konvexer Körper', *Mathematische Zeitschrift*, 101, 71-82, 1.967.

[105] KENDALL, M. y MORAN, P., *Geometric probability*, Griffin, London, 1.963. (A-3.054)

[106] JOHN, F., 'Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions' en *Studies and essays presented to R. Courant* (ed. K. Friedrichs, O. Neugebauer y J. Stoker), Wiley, New York, 1.948.

[107] DANZER, L., LAUGWITZ, D. y LENZ, H., 'Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogen unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden', *Archiv der Mathematik*, 8, 214-219, 1.957.

[108] GRÜNBAUM, B., 'Borsuk's problem and related questions', *American Mathematical Society. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 7, 271-284, 1.963.

[109] KNAST, R., 'An approximate theorem for Borsuk's conjecture', *Cambridge Philosophical Society. Proceedings*, 75, 75-76, 1.974.

[110] BANG, T., 'A solution of the "Plank Problem"', *American Mathematical Society. Proceedings*, 2, 990-993, 1.951.

CAPITULO 13 : TOPOLOGIA (J.F. ADAMS Y A.R. PEARS)

13.1 INTRODUCCION:

El objeto de esta sección es dar una guía, y ayudar, en el uso de la literatura en dos campos, los cuales pueden describirse como: (1) clásico, topología algebraica homotópica-invariante, y (2) su aplicación al estudio de las variedades. El primero es un tema que tuvo rápido desarrollo, cuya partida podemos fijarla a principios de los años '50; actualmente presenta una teoría bien desarrollada y se mueve mas lentamente. Por el contrario, en 1.975 hay una creciente actividad en la aplicación de la topología algebraica a problemas que ocurren por todas partes, y aquí uno puede incluir todos los problemas relacionados con variedades. Por supuesto, los problemas sobre variedades no acaban con las aplicaciones de la topología algebraica y su solución puede requerir otras técnicas además de ésta. Actualmente, nos parece difícil hacer un trabajo serio en variedades sin un conocimiento de los métodos clásicos de la topología algebraica.

Las fuentes primarias de estas áreas fueron trabajos en revistas competentes; y pueden localizarse a través del *Mathematical Reviews* y bibliografías similares (ver sección 3.4). Aquí se utilizan en particular *"Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological groups and homological algebra"*, editados por N.E. Steenrod, y publicados en dos volúmenes por la American Mathematical Society, Providence, R.I. (1.968). Desgraciadamente, llega solo a 1.967. Se está planificando una nueva edición que llegue a 1.977, bajo el cuidado editorial de A. Clark.

El experto no necesita otra guía; y el lego puede recurrir directamente a la *Enciclopedia Británica*. Las ediciones anteriores a 1.974 tiene un artículo sobre topología escrito por W.S. Massey, el que es básicamente excelente, pero que muestra su edad. Se le pidió un nuevo artículo para la edición de 1.974 y éste cubre el material actualizado, pero al tratar de incluir tanto material, la presentación ha perdido en claridad para el neófito. Eliminando los casos extremos, me dirigiré a aquellos que, supongo, tienen un grado en matemática, pero no son expertos en este área en particular.

13.2 TOPOLOGIA ALGEBRAICA: (J.F. Adams)

Esta guía y ayuda ha sido encarada en J.F. Adams: *"Algebraic topology; a student's guide"*, Cambridge University Press (1.972; London Mathematical Society Lectures Notes Series 4). En este libro comienzo con una reseña de 31 páginas de material para estudiantes que enfrentan la topología algebraica y comentando las fuentes de donde puede ser estudiada con más provecho. La reseña introductoria es más completa que la que puedo dar en este espacio y refiero al lector a ella. Todavía puede usarse bien. Sin embargo, debido a dificultades de publicación, las referencias no fueron del todo logradas; en particular la lista de libros de páginas 1-4 no contienen material posterior a 1.967. Agregamos ahora algunos a la lista. Los siguientes pueden ser considerados los primeros textos, pero tienen diferentes puntos de vista:

ARTIN, E. y BRAUN, H., *Introduction to algebraic topology,* Charles E. Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio, 1.969.(A-3.992)

GODBILLON, C., *Éléments de topologie algébrique,* Hermann, Paris, 1.971.(A-5.306)
GRAMAIN, A., *Topologie des surfaces,* Presses Universitaires de France, Paris, 1.971.
MAUNDER, C.R.F., *Algebraic topology,* Van Nostrand, Reinhold, London, 1.970.
MAYER, J., *Algebraic topology,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1.972.
WALL, C.T.C., *A geometric introduction to topology,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.972.(A-4.515)
WALLACE, A.H., *Algebraic topology: homology and cohomology,* Benjamin, New York, 1.970.(A-3.635)

El libro de Wall puede ser recomendado para una aproximación individual. Por otro lado, el libro de Maunder es el más comprensible, y probablemente haya que recomendarlo. Además, el viejo libro de W. Franz sobre *Algebraic Topology* ha sido traducido por F. Ungar, N. Y., 1.968; pero no aparecen razones particulares para recomendarlo en virtud de los textos que siguen.

De los recientemente publicados, los dos siguientes parecen ser los más indicados como "segundos textos":

DOLD, A., *Lectures on algebraic topology,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 200, Springer-Verlag, Berlin, 1.972. (A-4.973 a-2)
SWITZER, R.M., *Algebraic topology - homotopy and homology,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 212, Springer-Verlag, Berlin, 1.975. (A- 4.992)

Dold tiene un estilo excelente, pero los temas de su libro están un poco restringidos, centrándose en la homología clásica. El libro de Switzer cubre una banda más amplia de material que el libro de Dold y ciertamente es substancial; salvo el precio, que es excesivo, es probablemente la mejor elección para un segundo texto.

Los siguientes libros combinan, en distintas proporciones, intentos expositorios con contenidos para especialistas:

ADAMS, J. F., *Stable homotopy and generalised cohomology,* University of Chicago Press, Chicago, 1.974.
BROWN, R. F., *The Lefschetz fixed point theorem,* Scott, Foresman and Co, Glenview,Ill, 1.971.
COOK, G. y FINNEY, R., *Homology of cell complexes,* Princeton University Press, Princeton, 1.967.
DYER, E., *Cohomology theories,* W.A. Benjamin, New York, 1.969.
HARARY, F., *Graph theory,* Addison-Wesley, Reading, Mass.,1.969. (El libro de Harary es el libro estándar en este tema).(A-5.178)
HILTON, P. J. (ed.), *Studies in modern topology,* MAA Studies in Mathematics 5, Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y., 1.968. (Contiene surveys interesantes).(A-3.364)
HILTON, P., MISLIN, G. y ROITBERG, J., *Localisation of nilpotent groups and spaces,* Mathematics Studies 15, North-Holland, Amsterdan, 1.975. (Es esencialmente una monografía para especialistas).
HU, S.T., *Homology theory,* Holden-Day, San Francisco, 1.966.

HU, S.T., *Cohomology theory,* Markham, Chicago, 1.968. (En general, los libros de Hu no tienen mayores ventajas que los de aquellos de los que derivan).(A-4.013)
HUSSEINI, S. Y., *The topology of the classical groups and related topics,* Gordon and Breach, New York, 1.969.(A-3.959)
LAMOTKE, K., *Semisimpliziale algebraische Topologie,* Grundlehren der Matematischen Wissenschaften 147, Springer-Verlag, Berlin, 1.968.(A-2.965)
LUNDELL, A. y WEINGRAM, S., *The topology of CW-complexes,* Van Nostrand Reinhold, London, 1.969.
MILNOR, J. y STASHEFF, J., *Characteristic classes,* Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press, Princeton, 1.974.(Las notas de Milnor fueron escritas en 1,957; se forma impresa fueron aguardadas durante mucho tiempo y son bienvenidas).(A-5.500)
MOSHER, R. y TANGORA, M., *Cohomology operations and applications in homotopy theory,* Harper and Row, New York, 1.968. (Para obtener un cierto saber es leíble. El problema es que puede entusiasmar a los estudiantes a realizar cálculos no inteligentes en un área en la cual cálculos no inteligentes es lo último que se necesita).
STALLINGS, J., *Group theory and three-dimensional manifolds,* Yale Mathematical Monographs 4, Yale Universtity Press, New Haven, Conn., 1.971.
STONG, R., *Notes on cobordism theory,* Princeton University Press, Princeton, 1.968.(Es la referencia estándar más útil en cobordismo).

13.3 VARIEDADES: (J.F. Adams)

Veamos el tema de variedades. Aquí debemos remarcar que hay muchos temas que pasan rápidamente de un estado en el cual hay pocos libros a otro en el cual hay demasiados.

Es conveniente subdividir el tema de acuerdo con la naturaleza de las hipótesis que se hacen sobre las variedades: variedades topológicas, variedades lineales a trozos y variedades diferenciables (o suaves). Es natural comenzar con variedades diferenciables (suaves), ya que las que ocurren más a menudo en matemática son de este tipo. Las hipótesis que se hacen sobre las variedades son tales que se puede hacer geometría diferencial. Por lo tanto, la justificación básica para las construcciones geométricas que se hacen provienen del análisis; pero se pueden hacer construcciones geométricas "obvias" bastante libremente, siempre que evite cuestiones no diferenciables, lo que puede introducir retorcimientos y esquineros. La teoría de haces provee la herramienta más importante, y que a menudo permite reducir cuestiones geométricas a problemas que pueden resolverse con topología algebraica.

Los siguientes libros están entre los que pueden servir como punto de partida:

LANG, S., *Differential manifolds,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.972. (Es la versión revisada y muy documentada del libro anterior: *Introduction to differential manifolds,* John Wiley, New York, 1.962. Está presentado en la forma como un experto ve los fundamentos, pero hay partes que pueden ser muy abstractas para el principiante).(A-4.084)

MILNOR, J. W., *Topology from the differentiable viewpoint,* University Press of Virginia, Charlottesville, 1.965. (A-2.981)
MUNKRES, J. R., *Elementary differential topology,* Annals of Mathematics Studies 54, Princeton University Press, Princeton, 1.966. (A-5.487)

Un libro más avanzado puede ser útil para muchos estudiantes:

MILNOR, J. W., *Lectures on the h-cobordism theorem,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1.965.(A-2.425)

También están los siguientes artículos:

MILNOR, J.W., 'Differential topology'(pp.165-183 of Saaty (ed.), *Lectures on modern mathematics,* Vol. 2, Wiley, New York, 1.964)
SMALE, S., 'A survey of some recent developments in differential topology', *American Mathematical Society. Bulletin,* 69, 131-145, 1.963.
WALL, C. T. C., 'Topology of smooth manifolds', *London Mathematical Society. Journal,* 40, 1-20, 1.965.

Estos son recomendados calurosamente; por supuesto ellos tienen referencias. Sin embargo, citaré dos trabajos que estimo marcan el nacimiento de la topología diferencial moderna:

MILNOR, J. W., 'On manifolds homeomorphic to the 7-sphere', *Annals of Mathematics,* 64, 399-405, 1.956.
SMALE, S., 'Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four', *Annals of Mathematics,* 74, 391-406, 1.961.

El trabajo de Milnor es uno de los primeros que muestran que la categoría de las variedades suaves es diferente de las otras categorías. El trabajo de Smale es importante, no solamente por su resultado, sino tambien por su método, que puedo resumir como sigue: en topología algebraica se comienza usualmente estudiando complejos simpliciales finitos; estos son espacios que pueden ser subdivididos en puntos, segmentos, triángulos y sus análogos en dimensiones superiores, los cuales son denominados simples; sin embargo es más eficiente el estudio de los CW-complejos, que se construyen a partir de "celdas" en lugar de simples; se necesita sólo un pequeño número de celdas comparadas con un gran número de simples, y ocurre que (bajo hipótesis adecuadas) una descomposición en celdas puede seguir los invariantes topológicos del espacio muy estrechamente. El análogo para una variedad de una descomposición en celdas es una descomposición en "handles". Es importante el estudio de estas descomposiciones para variedades lineales a trozos y suaves, pero fueron introducidas originalmente para las variedades suaves; la idea probablemente nació de modernas interpretaciones, debidas principalmente a R. Bott, de un trabajo de M. Morse. Una descomposición en handles puede ser retocada y manipulada; y para celdas ocurre que, para hipótesis adecuadas, una descomposición en handles puede ser seguida muy estrechamente por invariantes topológicos de una variedad. Este es el método de Smale.

Bastante relacionado con las "handle-descompositions" (descomposición en handles) está el método de "cirugía". En este caso, se toma la variedad y se corta enteramente una buena parte de ella (la que para los propósitos presentes podemos pensar que es un poco más chica que una "mano"). Entonces pegamos una parte nueva, obteniendo una nueva variedad, diferente pero relacionada con la de partida. El concepto de R. Thom de "cobordismo" puede ser interpretado en esta forma; y el método es muy útil. La referencia original es:

MILNOR, J. W., 'A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds', *American Mathematical Society. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* 3, 39-55, 1.961.

Hay dos libros:

BROWDER, W., *Surgery on simply-connected manifolds,* Ergebnisse der Mathematik und iher Grenzgebiete 65, Springer-Verlag, Berlin, 1.972.
WALL, C. T. C., *Surgery on compact manifolds,* London Mathematical Society Monographs 1, Academic Press, London, 1.970.
(El estudiante debe comenzar por el de Browder, el de Wall es más duro)

Veamos ahora la topología de las variedades lineales a trozos. Estas son unas que pueden construirse a partir de puntos, segmentos, triángulos y más generalmente, simples, encajados en forma prescripta. La justificación básica para las construcciones geométricas que se hacen ahora provienen del álgebra lineal elemental. Retorcimientos y esquineros, que son tabú para la teoría suave, están ahora al orden del día. Se pueden hacer libremente construcciones geométricas bastante obvias. Esta teoría, en contraste con la de variedades topológicas (donde uno tiene que construir homeomorfismos bastante patológicos), se está tentando de decir que en el caso linear a trozos las construcciones "obvias" son las únicas posibles; pero el lector que se toma una pausa para considerar, por ejemplo, nudos en 4, 5 y 6 dimensiones, verá que se necesita un introspección geométrica genuina y en ese sentido las construcciones están lejos de ser obvias.

El lector puede leer el survey de un autor que ayudó en la historia:

NEWMAN, M. H. A., 'Geometrical topology', *International Congress of Mathematicians. Proceedings,* 9, 139-146, 1.962.

En el principio del período "moderno", las notas siguientes tuvieron considerable influencia:

ZEEMAN, E. C., *Seminar on combinatorial topology,* notas mimeografeadas, Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1.963; Cap. 7, revisado 1.965; Cap. 8, revisado 1.966.

Desgraciadamente, estas notas no se consiguen fácilmente. Sin embargo, la mayoría del material es obtenible en forma de libro:

GLASER, L. C., *Geometrical combinatorial topology,* Vol. 1, Mathematical Studies 27, Van Nostrand Reinhold, London, 1.970.(A-3.598)
HUDSON, J. F. P., *Piecewise-linear topology,* Benjamin, New York, 1.969.
ROURKE, C. y SANDERSON, B., *Introduction to piecewise-linear topology,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 69, Springer-Verlag, Berlin, 1.972.
STALLINGS, J. R., *Lectures on polyhedral topology,* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1.968.

El primero es más corto que los otros tres y de una tradición ligeramente diferente; los otros tres parecen más influenciados por Zeeman. El cuarto no es fácil de conseguir; tiene un buen material hacia el final, pero hay muchas páginas que leer antes de llegar. Presumiblemente son recomendables el segundo y el tercero.

Debemos mencionar una monografía de investigación:

HIRSCH, M. y MAZUR, B., *Smoothings of piecewise-linear manifolds,* Annals of Mathematics Studies, 80, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1.974.

En ciertas situaciones, la cuestión de que se puede hacer con un número finito de pasos elementales o movimientos, se puede reducir a álgebra pura. Esto nos trae a la teoría de "torsión" o "tipo homotópico-simple". Aquí la palabra simple no se debe tomar en el sentido usual; la teoría no es más simple que la teoría de los "grupos simples". Sin embargo, hay una teoría, y es útil tanto en topología suave como en la lineal a trozos. Recomiendo directamente la excelente exposición del libro:

MILNOR, J. W., 'Whitehead torsion', *American Mathematical Society. Bulletin,* 72, 358-426, 1.966.

Hay también dos libros recomendables:

COHEN, M. M., *A course in simple-homotopy theory,* Graduate Texts in Mathematics series 10, Springer-Verlag, Berlin, 1.973.
DE RHAM, G., MAUMARY, S. y KERVAIRE, M., *Torsion et type simple d'homotopie,* Lecture Notes in Mathematics 48, Springer-Verlag, Berlin, 1.967. (LNM-48).

En las tres categorías, los estudios de la "posición"de un subconjunto en una variedad son fundamentales. El problema alcanza quizá su forma más característica en el estudio de nudos. Hay un libro canónico sobre nudos "ordinarios":

CROWELL, R. y FOX, R., *Introduction to knot theory,* Ginn, Boston, 1.963.(A-2.923)

Sin embargo uno puede tener las mismas ideas leyendo menos palabras en el survey:

FOX, R. H., 'A quick trip through knot theory' (pp. 120-167 of M.K. Fort (ed.), *Topology of 3-manifolds and related topics,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1.962). Esta es quizás la fuente más recomendada.

Por supuesto, desde el punto de vista del resto de la matemática, a los nudos en el espacio de dimensiones mayores se le presta más atención que a los nudos en el espacio 3-dimensional. En este tópico, reduzco las citas (con perdón de los olvidos):

HAEFLIGER, A., 'Knotted ($4k$ - 1)-spheres in $6k$-spaces', *Annals of Mathematics,* 75, 452-466, 1.962.
ZEEMAN, E. C., 'Unknotting combinatorial balls', *Annals of Mathematics*, 78, 501-526, 1.963.
KERVAIRE, M. A., 'Les moeuds de dimension supérieures', *Societé Mathématique de France. Bulletin*, 93, 225-271, 1.965.
LEVINE, J., 'Unknotting spheres in codimension two', *Topology*, 4, 9-16, 1.965.
LEVINE. J., 'A classification of differentiable knots', *Annals of Mathematics,* 82, 15-50, 1.965.

Los expertos sobre el tema le recomendarán a sus estudiantes leer a Levine.

Finalmente llegamos al tema de variedades topológicas. Aquí la justificación básica para las construcciones geométricas que se hacen provienen de la topología general; esto es, topología "analítica" o "conjuntista". Para hacer uso de la diferencia entre la categoría topológica y la categoría suave o lineal a trozos, se pueden construir transformaciones (y, especificamente, homeomorfismos) que no son localmente "buenos" para nada, pero a ojos, suaves o lineales a trozos presentan las singularidades más extremas. Los métodos para tratar estos casos tienen mucho en común con aquellos para construir y manejar "ejemplos patológicos" en topología general; pero también se requiere una comprensión extensiva de topología algebraica y de desarrollos en la teoría de variedades (surgery obstructions etc.).

Podemos considerar que un sesgo distintivo del tema comenzó a aflorar con el trabajo de Moise y, particularmente, Bing; pero la mayoría de los trabajos de estos autores no son fáciles de seguir. Otra elección de un trabajo que marcó el nacimiento del período "moderno"es el siguiente:

BROWN, M., 'A proof of the generalised Schoenflies theorem', *American Mathematical Society. Bulletin,* 66, 74-76, 1.960.

Hay trabajos importantes de Kirby y Siebenmann y probaron, por ejemplo, "The annulus conjecture". Hay exactamente un libro:

RUSHING, T. B., *Topological embeddings,* Academic Press, New York, 1.973.

Esta es una de las fuentes recomendables; tiene referencias útiles.

Finalmente, falta comentar los volúmenes que contienen resúmenes de distintas conferencias especializadas. Aunque se puede decir mucho al respecto, el mejor ejemplo en el área es:

FORT, M. K. (ed.), *Topology of 3-manifolds and related topics,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.962.(A-1.472)

Para el resto, la referencia más reciente es:

McAULEY, L. F. (ed.), *Algebraic and geometrical methods in topology,* Lecture Notes in Mathematics 428, Springer-Verlag, Berlin, 1.974.

13.4 TOPOLOGIA GENERAL: (A.R. Pears)

La topología es un tema variado con distintos orígenes. La topología general consiste principalmente en el estudio de los espacios abstractos y transformaciones entre ellos, pero tambien incluye muchos otros temas, los cuales no pertenecen a las áreas de topología algebraica, topología diferencial y análisis global. Enseguida después de que Cantor iniciara la teoría de conjuntos, Fréchet comenzó, en 1.906, el estudio de los espacios abstractos. El concepto de espacio topológico se desarrolló rápidamente. La topología conjuntista es el estudio de los espacios topológicos generales y transformaciones continuas. Algún conocimiento de topología conjuntista es esencial para todo trabajo en matemática. Las nociones básicas y construcciones generales deben conocerse. Las clases más interesantes de espacios para no especialistas son los compactos y los metrizables. La clase de los espacios paracompactos contiene ambas clases y es la clase apropiada para muchos propósitos (N.T.: por ejemplo, para el tratamiento de la teoría de la dimensión). Los no especialistas conocen quizá el teorema de Nagata-Smirnov que caracteriza los espacios topológicos que son metrizables. Los libros que dan una exposición de este material fundamental son:

DUGUNDJI, J., *Topology,* Allyn and Bacon, Boston, 1.966.(A-2.251)
ENGELKING, R., *Outline of general topology,* North-Holland, Amsterdan, 1.968.
KELLEY, J. L., *General topology,* Van Nostrand, Princeton, N.J., 1.955.(A-528, A-4.998 y A-6.227)

Se han introducido muchas generalizaciones de las clases de paracompactos y metrizables. No es posible decir cuales de ellos serán finalmente significativas. Una aproximación unificadora a los problemas de clasificación de espacios y transformaciones fue desarrollada por

ARKHANGEL'SKII, A. V., 'Mappings and spaces', *Russian Mathematical Surveys,* 21, 115-162, 1.966.

Una descripción detallada del anillo de funciones continuas a valores reales en un espacio topológico está dada por:

GILLMAN, L. y JERISON, M., *Rings of continuous functions,* Van Nostrand, Princeton, N. J., 1.960. (A-1.043)

La estructura algebraica de este anillo da información sobre propiedades topológicas del espacio. Un tema estrechamente relacionado, es el de la compactificacción de Stone-Cech, que también es investigada en detalle por Gillman y Jerison.

El ejemplo de Peano de una curva que llena el espacio forzó cuestiones sobre el significado de la noción de dimensión. El problema de distinguir topológicamente entre diferentes espacios Euclideanos fue el punto de partida de la teoría de la dimensión. La teoría clásica de la teoria de la dimensión de espacios métricos separables está elegantemente expuesta en el libro:

HUREWICZ, W. y WALLMAN, H., *Dimension theory,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1.941.(A-71 y A-1.979)

No hay una extensión satisfactoria de la teoría de la dimensión para espacios topológicos generales. Para una reseña de las distintas teorías de la dimensión para espacios no metrizables, las relaciones entre ellos, y ejemplos que muestran los aspectos patológicos de la teoría, ver:

NAGAMI, K., *Dimension theory,* Academic Press, New York, 1.970.
PEARS, A. R., *Dimension theory of general spaces,* Cambridge Universtiy Press, Cambridge, 1.975.

Aunque los espacios topológicos y transformaciones continuas son los principales componentes de la topología conjuntista, se estudian otros tipos de "estructuras de continuidad". La teoría de los espacios uniformes es análoga a la teoría de espacios métricos pero es más aplicable. Este es el marco en el cual el concepto de continuidad uniforme puede investigarse más naturalmente. Hay dos aproximaciones a la uniformidad: por medio de los cubrimientos uniformes, la teoría fue desarrollada desde este punto de vista en

ISBELL, J. R., *Uniform spaces,* Mathematical Surveys 12, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1.964.

y por medio de ciertas relaciones, denominadas entornos, empleada por

BOURBAKI, N., *Topologie générale,* Cap. 2, 'Structures uniformes', Hermann, Paris, 1.961.(A-2.805 a-4, TP-1-2 a-3, A-524 a-2, A-2.013 a-2)

En un espacio uniforme hay una teoría de "proximidad"de conjuntos y esto puede ser abstraído para dar la definición de espacio de proximidad. Una introducción a la teoría de los espacios de proximidad y sus generalizaciones está dado por

NAIMPALLY, S. y WARRACK, B., *Proximity spaces,* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 59, Cambridge University Press, Cambridge, 1.973.
CECH, E., *Topological spaces,* Publishing House of Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, Interscience, London, 1.966. Es una presentación interesante de topologías, uniformidades y proximidades que está autocontenida, y todos los conceptos matemáticos necesarios, comenzando con clase y conjunto, son introducidos en el texto.
HAGER, A. W., 'Some nearly fine uniform spaces', *London Mathematical Society. Proceedings,* 28, 517-546, 1.974. Contiene bibliografía actualizada de espacios uniformes.

En 1.963 P. J. Cohen probó que la hipótesis del continuo fuera falsa es concistente con los axiomas usuales de la teoría de conjuntos. La idea de la demostración, denominada "forcing", introducida por Cohen, se ha aplicado recientemente en muchas cuestiones de topología general de naturaleza conjuntista. Muchos de estos problemas tienen una traducción a cuestiones de aritmética de cardinal; el texto:

JUHÁSZ, I., 'Cardinal functions in topology', *Mathematical Centre Tracts,* 34, 1.971.

da mucha información sobre este tema. En el presente hay mucho interés en las respuestas a cuestiones topológicas de modelos especiales para la teoría de conjuntos, en particular, en modelos de constraste, (a) satisfaciendo el axioma de Martin junto con la negación de la hipótesis del continuo, y (b) el universo construíble de Gödel (en el cual la hipótesis del continuo generalizada vale). Para una relación de todo el área afectada por la influencia de la teoría de conjuntos y métodos, ver:

RUDIN, M. E., *Lectures on set theoretic topology,* Regional Conference Series in Mathematics 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1.975.

Finalmente, debe hacerse una selección de los numerosos temas que en adición a los de la topología conjuntista pertenecen a la topología general. Muchos resultados topológicos de naturaleza general pueden ser descriptos y analizados en términos de categorías. Las notas

HERRLICH, H., *Topologische Reflexionen und Coreflexionen,* Lecture Notes in Mathematics 78, Springer-Verlag, Berlin, 1.968.(LNM-78)

dan una introducción a la topología de categorías. La forma de un espacio topológico es una modificación de un tipo de homotopía. Los artículos:

MARDESIC, S., 'A survey of the shape theory of compacta', *Prague Topological Symposium. Proceedings,* 3, 291-300, 1.971.
MARDESIC, S., 'Shapes for topological spaces', *General Topology and its Applications,* 3, 265-282, 1.973.

dan las definiciones básicas de este campo de rápido desarrollo. No parece haber una reseña expositoria de topología de dimensión infinita, pero el informe

Symposium on Infinite Dimensional Topology, editado por R. D. Anderson (Annals of Mathematics Studies 69, Princeton Universtity Press, Princeton, N.J., 1.974)

indica la naturaleza de este campo.

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

1. ALEXANDROFF, P., *Elementary concept of topology*, Dover, 1.961. (A-1.152)
2. ALEXANDROFF, P., *Combinatorial topology*, vol. I, Graylock Press, 1.956. (A-6.734)
3. ALEXANDROFF, P., *Combinatorial topology*, vol. II, Graylock Press, 1.957. (A-6.735)
4. ALEXANDROFF, P., *Combinatorial topology*, vol. III, Graylock Press, 1.960. (A-6.736)
5. ARMSTRONG, M., *Basic topology*, Springer, 1.983. (A-6.683)
6. ARNOLD, B., *Intuitive concepts in elementary topology*, Prentice Hall, 1.962. (A-1.693)
7. CHINN, W.y STEENROD, N., *Primeros conceptos de topología*, Alhambra, 1.966. (A-4.391 y A-4.599)
8. ENGELKING, R., *General topology*, Heldermann Verlag, 1.989. (A-6.897)
9. FAVARD, J., *Espace et dimension*, Albin Michel, 1.950. (A-698)
10. FRÉCHET, M. y FAN, K., *Introducción a la topología combinatoria*, EUDEBA, 1.946. (A-375)
11. FRÉCHET, M. y FAN, K., *Introduction a la topologie combinatoire*, L. Vuibert, 1.946. (A-482)
12. GAMELIN, T. y GREENE, R., *Introduction to topology*, The Saunders Series, 1.983. (A-5.711)
13. GRIFFITHS, H., *Surfaces*, Cambridge University Press, 1.976. (A-5.900)
14. JARDINE, N. y SIBSON, R., *Mathematical Taxonomy*, John Wiley, 1.971. (A-4.331)
15. KELLEY, J., *General topology*, Van Nostrand, 1.955. (A-6.227)
16. KURATOWSKI, C., *Topologie*, vol. I, Polska Akademie Nauk, 1.958. (A-535 y A-6.229)
17. KURATOWSKI, C., *Topologie*, vol. II, Polska Akademie Nauk, 1.950. (A-6.228)
18. MILNOR, J., *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton University Press, 1.965. (A-2.425)
19. PATTERSON, E., *Topology*, Oliver and Boyd, 1.956. (A-283)
20. SINGER, I. y THORPE, J., *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott, Foresman & Co., 1.967. (A-3.043)
21. STEEN, L. y SEEBACH, J., *Counterexamples in Topology*, Holt, Rinehart & Winston, 1.970. (A-6.239)
22. WALLACE, A., *Differential Topology. First steps*, Benjamin, 1.968. (A-3.634)

CAPITULO 14: PROGRAMACION MATEMATICA. (J. M. BROWN)

14.1 INTRODUCCION:

La programación matemática es optimización restringida. El problema abstracto es encontrar el mayor o menor valor de una función de varias variables con las variables restringidas a algún subdominio de R_N. Usualmente, ellos son no negativos y satisfacen otras desigualdades, y pueden ser limitadas a tomar valores enteros.

Sin embargo, es mucho más que una rama aplicada de la matemática, reconocida como tal por el otorgamiento en 1.975 del premio Nobel en economía a Kantorovitch [1] y Koopmans [2] por sus estudios precursores en transportación. La existencia, unicidad y caracterización de valores óptimos es importante, pero el mayor énfasis se pone en su cálculo. El tema, se ha desarrollado en forma paralela con las computadoras digitales, y para dejar técnicas bien establecidas, es necesaria la implementación de programas de computación confiables y eficientes. Este énfasis es importante y diferente de la mayoría de los capítulos del presente volumen.

El tema está bien cubierto por libros, por artículos de revistas y los proceedings de conferencias (que publican artículos muy especializados). Estos están esparcidos bajo distintos nombres: investigación de operaciones; dirigenciamiento; economía; estrategia militar; computación; combinatoria; optimización; ingeniería eléctrica, civil y química. Este estudio está lejos de ser completo, pero trata de puntualizar un tratamiento abarcativo, trabajos principales en el tema y artículos realmente importantes en aspectos difíciles.

Las referencias son citadas por autor(es) y agregadas al final del capítulo. Las ediciones inglesas, en caso de poder conseguirse, se prefieren a otras. La programación lineal es la primera en considerarse (ver sección 14.5), y luego generalizaciones a versiones no lineales en variables continuas. Optimización sin restricciones es mencionada brevemente. Se incluyen problemas con variables discretas, aunque el tópico es bastante nuevo e involucra conceptos más próximos a la computación que otros de la matemática tradicional.

14.2. LIBROS ELEMENTALES Y RESEÑAS:

Pocos libros cubren la totalidad de este tema, y muchos lo dan en el contexto de las aplicaciones. Sin embargo, McMillan [3] es bueno a nivel introductorio y tiene un cubrimiento amplio y pocos requisitos. El informe de Wolfe (cap. VI en Abadie [4]) es excelente, y también lo son los comentarios en la introducción de Fletcher [5]. Dorn [6] está un poco desactualizado. Wilde y Beightler [7] pretenden una presentación unificada, aunque un poco larga. Análogamente, Hadley [8], [9], cubre la mayoría del material, aunque desde el punto de vista introductorio.

Las representaciones más avanzadas se deben a Zoutendijk [10], Zangwill [11] y Mangasarian [12]. Zoutendijk [10] y Beale (cap. VII en Abadie [4]) reseña aspectos computacionales, y el capítulo 3 de Saaty y Bram [13] tiene este énfasis, mientras que Goldstein [14] da una presentación avanzada interesante. Geffrion [15], [16] es extensivo y da una bibliografía útil.

Desde el punto de vista de las aplicaciones en investigación operativa, Ackoff y Sasieni [17] es un texto popular para estudiantes, Saaty [18] y Vajda [19] extensivos pero antiguos y Mitchel [20] bueno pero no usual, al ser escrito para practicantes (National Coal Board). Nicholson [21] está también orientado hacia la industria y es bueno en nuevos aspectos combinatorios.

14.3. BIBLIOGRAFIA, SISTEMAS ABSTRACTOS Y DE RECUPERACION:

Para el estrecho campo de la programación matemática, las mejores bibliografías son las de Leon en pp. 599-649 de referencia 22; Geffrion [16] y Riley y Gass [23] en inglés, y Kunzi y Oettli [24] en alemán. Sin embargo, la investigación operativa está mejor cubierta por el trabajo comprensible de Batchelor [25], pero muy pobremente indexado, y el útil de Buckland [26].

Muchas revistas de resúmenes incluyen secciones en este campo, y los mayores son:

International Abstract in Operational Research.
Operations Research / Management Science Abstracts Service.
Computer and Control Abstracts (Institution of Electrical Engineers, Science Abstract C).
Computer Abstracts.
Computing Reviews.
Chemical Abstracts.

Sistemas de recuperación basados en información computarizada son útiles para entrar por autor o tema (tener cuidado de las palabras ambiguas como "programación"). De estos, el sistema INSPEC (*Science Abstract*) parece el mas apropiado, aunque el *Engineering Index* y el *Chemical Abstracts* tienen material relevante. Aunque demasiado caros como para tolerar su uso indebido, tales sistemas son especialmente útiles para la literatura reciente y para artículos vagamente recordados. No son difíciles de usar.

14.4. REVISTAS:

Trabajos sobre programación matemática han aparecido en muchas revistas de modo que solo mencionaremos las más importantes. Hay un que parece toda dedicada al tema: *Mathematical Programming* (North-Holland, 1.971- ; en inglés). Otras se citan más abajo, con comentarios ocasionales.

14.4.1. Matemática:

Institute of Mathematics and its Applications. Journal (1.965-). Ahora incluye los trabajos de computación numérica publicados por el Computer Journal (cf. subsección 14.4.2.)
Journal of Optimization Theory and Applications (Plenum, 1.967-).

Numerische Mathematik (Springer, 1.959-). Hay mucho en inglés o con sumarios en inglés.
SIAM Journal on Control (1.963-).
SIAM Review (1.959-).
Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal, 1-13, (1.953-1.965); continua como *SIAM Journal on Applied Mathematics,* 14- (1.966-).
Society for Industrial and Applied Mathematics, Journal. Series B: numerical analysis 1-2 (1.964-1.965); continua como *SIAM Journal on Numerical Analysis,* 3- (1.966-).

14.4.2. Computación:

Association for Computing Machinery. Communications (1.958-).
Association for Computing Machinery. Journal (1.954-). La primera es de lectura más popular y la segunda más detallada.
Computer Journal (British Computer Society, 1.958-). Ahora pone énfasis en la computación no-numérica.
Computing (Springer, 1.966-). Parte en inglés.

14.4.3. Investigación operativa, economía, administración, etc.:

Econometrica (Econometrica Society, 1.933-).
Journal of Aerospace Sciences (American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1.960-1.962); continuada como *A.I.A.A. Journal* (1.963-).
Management Science (Institute of Management Sciences, 1.954-).
Naval Research Logistics Quarterly (United States: Navy Departament. Office of Naval Research, 1.954-).
Operational Research Quarterly (Operational Research Society, 1.950-).
Operations Research Society of America. Journal (1.952-1.955); continuada como *Operations Research* (1.956-).
Revistas de algunas grandes organizaciones como IBM, Bell Telephones, Rand Corporation, National Coal Board y British Steel Corporation.

14.5 PROGRAMACION LINEAL:

Esta es la optimización de una función lineal sujeta a una igualdad lineal o restricciones de desigualdades. La teoría es completa, bien documentada, y desde la programación básica hasta casi toda la programación no lineal. La solución es vía una versión del "algoritmo simplex" de Dantzig y se pueden conseguir programas de computación que los implementan en todos los centros respetables de computación.

A nivel más elemental, los textos más modernos de álgebra lineal incluyen el tema. El libro de Kemeny *et al* [27] es típico para matemáticos y estadísticos orientados hacia los negocios. Los estudiantes de ciencias encontrarán el capítulo 6 de Noble [28] particularmente leíble. Trustrum [29] es conciso y barato. Tratamientos más comprensivos están dados en Hadley [8], Gass [30] y Charnes, Cooper y Henderson [31], aunque hay numerosos libros a este nivel. Dantzig [32] es bueno y Gale [33] inusualmente elegante y ameno, a pesar de su contexto económico. Kuhn y Tucker [34] hacen un survey de aspectos matemáticos puros con politopos convexos y dualidad desde el principio. Dualidad- tal que a cada problema de minimización le corresponde el problema de maximización dual - es de interés teórico.

Los "problemas de Asignación y Transporte" son programas lineales de forma especial que permiten simplificaciones. Están relacionados y explicados en el contexto de la mayoría de los libros (por ejemplo Gale [33]). La solución puede ser vía circuitos, que son cubiertos posteriormente (c.f. sección 14.11), o el método húngaro de Kuhn [35], que está explicado simplemente por Flood [36]. Aquí los modelos tienen lazos con la teoría de matroides y transversal abstracta (ver Gale [37]).

El tema proviene de Leontief (1.941), de su modelo lineal económico [38] para el cual von Neumann y Morgenstren [39] desarrollaron modelos competitivos en su "Teoría de juegos". Aplicaciones a programación lineal están dadas en la mayoría de los libros, y provee estrategias optimales.

14.6. PROGRAMACION GENERAL NO LINEAL:

En este caso la función, o las restricciones, o ambas , son no lineales. El óptimo puede estar sobre alguna de las restricciones con las desigualdades alcanzando la igualdad, o pueden estar muy alejadas de todas las desigualdades restriccionales. Kuhn y Tucker extendieron la teoría de los multiplicadores de Lagrange para abarcar estas situaciones. Esto está explicado en su forma más simple en Mcmillan [3], y tratado más rigurosamente en Hadley [9].

En general es más difícil tratar el caso de unicidad del óptimo, y solamente en el caso de dominios y funciones convexas está estudiado y comprendido. Mucha de la teoría de la programación lineal se generaliza rápidamente a este caso de "programación convexa". La mayoría de los textos de programación no lineal incluye alguna versión de esto, y un tratamiento particularmente elegante está dado en la primera media parte de Berge y Ghouila-Houri [40].

El tema es visto por Wolfe (Capítulo VI de Abadie [4]), y otras contribuciones se deben a Rosen *et al* [41] y Abadie [42]. Saaty y Bram [13] trata esto conjuntamente con optimización sin restricciones y fue el principal propósito unificador de la conferencia editada por Fletcher [5].

La programación cuadrática es el caso especial de minimizar una función cuadrática definida positiva (y por lo tanto convexa) sujeta a restricciones lineales. El algoritmo más efectivo es el de Beale (ver capítulo VII de Abadie [4]), y un survey de algoritmos aparece en Boot [43].

Han sido propuestos una multitud de algoritmos y sus méritos relativos aún no están comprobados. Comparaciones limitadas son ofrecidas por Colville [44] y Leon en referencia 22 (pág. 28-46). Mención especial para Rosen [45], [46], así como para Goldfarb y Lapidus [47], quienes han resuelto problemas reales particularmente difíciles. Sin embargo, con el desarrollo de nuevas técnicas como las que describiremos más adelante, el enfásis en la eficiencia global puede cambiar.

14.7. PROGRAMACION GEOMETRICA:

El nombre de esta técnica deriva de la inecuación media aritmética geométrica (Cauchy) para términos positivos. En la igualdad, la media aritmética minimizada es igual a la media geométrica maximizada. A partir de estos principios, notados por Zener, Duffin y Peterson generalizaron esto a técnicas de programación, descriptas por Duffin, Zener y Peterson [48]. Otras limitaciones fueron superadas por Wilde y Passy (ver Wilde y Beightler [7]). Esto está bien escrito en Peterson [49], donde es enfatizada la extraordinaria versatilidad de esta técnica.

Para explicar la amplia gama de problemas que abarca esta técnica, deben definirse primero los *"posinomiales"*. Estos son sumas con pasos de términos formados por productos de las variables, elevados a potencias dadas, no necesariamente enteras. La programación geométrica minimiza tales posinomiales sujetos a restricciones dadas por desigualdades de forma posinomial.

Hay algunas pocas limitaciones: se necesita convexidad para asegurar un mínimo global, y "grados de dificultad" explicados en las referencias. Sin embargo, el método parece ideal para las aplicaciones, especialmente para el estudio de costos de plantas industriales que están dados usualmente en forma posinomial (los términos se encuentran a partir de gráficos logarítmicos). Las implicaciones totales de esta técnica no han sido alcanzadas aún (1.977).

14.8. OPTIMIZACION SIN RESTRICCIONES:

Se incluye esta sección para que el matemático puro no piense que aquí no hay ningún problema!. Problemas de programación matemática (con restricciones) también pueden traducirse a esta forma.

Cuando una función no tiene restricciones, su mínimo está caracterizado por un gradiente cero y matriz Hessiana definida positiva. La convexidad asegura un mínimo global. Todo parece fácil, excepto para las funciones muy complicadas que aparecen en las aplicaciones actuales. Con funciones no cuadráticas, las ecuaciones gradientes son no lineales y su solución ha sido recientemente sistematizada (Ortega y Rheinbolt [50], quienes también tratan optimización y dan referencias completas).

En efecto, usualmente se prefiere minimización directa, y los desarrollos considerables más allá de pendientes máximas están dados por Powell [51]. El libro de Jacobi, Kowalik y Pizzo [52] lo sumariza y da una buena bibliografía incluyendo programas de computación. Box, Davies y Swann [53] cubren el material desde el punto de vista industrial.

Restricciones de desigualdades simples pueden eliminarse a menudo por un cambio de variable, por ejemplo, con x en (-1,1) hacer x = tanh z, entonces z (real) no está acotado. Esto es útil tanto en teoría como en aplicaciones, y son mencionados por Box [54]. Otra aproximación utiliza una sucesión de valores de multiplicadores de Lagrange teniendo restricciones con igualdades y desigualdades. La técnica resultante "Minimización secuencial sin restricciones" está descripta en Fiacco y McCormick [55], y ha resuelto algunos problemas de ingeniería muy complicados.

14.9. PROGRAMACION DINAMICA:

Esta es una aproximación a la optimización más que una técnica particular y se debe su forma unificada a Bellman [56]. Básicamente, descompone un problema de optimización en una sucesión de subproblemas satisfaciendo un "principio de optimalidad". Esto está relacionado con el cálculo de variaciones (Dreyfus [57] y Bellman [56]), y con el principio de optimilidad de Pontryagin más conveniente para la formulación en términos de ecuaciones diferenciales (Pontryagin *et al* [58]). En programación matemática, la programación dinámica tiene la ventaja de aplicarse a problemas combinatorios *discretos* que son comunes en investigación operativa, y que será enfatizado en lo que resta de este capítulo.

Por ejemplo, el algoritmo obvio para expresar la cantidad de dinero con menos monedas puede derivarse en esta forma. Esta aproximación se explica mejor a través de ejemplos, y los libros de Hadley [9], Nemhauser [59], Bellman y Dreyfus [60] y Kaufmann y Cruon [61] tienen muchos. Sistemas de muchos pasos, representados por cajas unidas por flechas son particularmente manejables, y son mencionadas en el capítulo 8 de Wilde y Beightler [7].

Para otros problemas, es difícil formular una aproximación, y pueden conducir a algoritmos que requieran excesivo tiempo de cómputo y memoria. Usualmente el algoritmo no provee soluciones aproximadas, solamente la solución exacta en completo (si es posible). Bellman [62] indica donde la aproximación es másfácil para ser tratada en problemas combinatorios.

14.10. PROGRAMACION ENTERA Y CERO-UNO:

Cuando los problemas de programación se restringen a variables que toman únicamente esos valores, se definen problemas de programación muy difíciles. Aunque la formulación del problema es concisa, otras formulaciones "en contexto" son preferibles como muestran las referencias.

A un nivel elemental, McMillan [3] resume la teoría lineal entera debida a Gomory. Balinski [63] y Greenberg [64] dan tratamientos completos. Hadley [9], Hu [65], Abadie [42], Taha [66] y Garfinkel y Nemhauser [67] trataron de unificar la teoría, aunque el último parece más popular. Nuevamente McMillan [3] da un buen tratamiento de los problemas de programación cero-uno de Balas, aunque los resultados prácticos no son buenos. Este tema parece tan difícil como el análisis diofántico y no es práctico (las fracciones continuas ayudan poco). Aproximaciones alternativas de tipo combinatorio parecen preferibles y son mencionadas en los textos de más arriba y discutidos en lo que sigue.

14.11. FLUJOS EN CIRCUITOS Y TRANSPORTE:

Muchos problemas en investigación operativa están en este tema, que tiene una teoría extensa y buenos algoritmos de computación. Las disciplinas de ingeniería tienen circuitos naturales y con nuevos materiales no lineales y las potenciales aplicaciones son numerosas. Aún cuando no hay una conexión obvia con circuitos, una formulación así permite un mejor tratamiento.

Los circuitos son grafos abstractos cuyos flujos o diferencias de potencial están asociados con sus arcos. Mientras satisfagan la ley de Kirchhoff apropiada, a menudo están limitados a un intervalo finito cuando el circuito es denominado "capacitable". La "función energía", aquí generalmente el costo, debe minimizarse y solamente para funciones convexas está terminada la teoría. Esto implica una "ley de resistencia" no decreciente y resulta en una teoría de "circuitos capacitarios monótonos".

Minty [68] dio un teorema clave y un algoritmo, pero esta presentación abstracta impide la popularización de esta aproximación. En Minty [69] una analogía hace obvio al teorema de coloración de grafos y se dan más detalles sobre los aspectos formulativos. Habiendo comprendido esto, la segunda parte del libro de Berge y Ghouila-Houri [40] despliega la potencia de las ideas, muchas aplicaciones, y fundamentos de espacios vectoriales. Se tratan problemas de camino más corto, mínimo árbol generado, flujo máximo y el flujo del costo máximo (y varios problemas de transporte).

El libro de Ford y Fulkerson [70] cubre material similar desde el punto de vista de la programación lineal, y a pesar de esta restricción es rico en teoría y aplicaciones. Dennis [71] presenta una vista aún anterior usando analogías con circuitos eléctricos. Prager [72] da un luminoso panorama del teorema del flujo máximo-mínimo corte y su analogía con estructuras plásticas.

Los problemas no convexos y circuitos de flujo de múltiple asignación no están completos teóricamente y son estudiados por Fulkerson [73] y Hu [74]. Iri [75] da un estudio comprensivo compacto y Kaufmann [76] un material poco común.

A nivel introductorio, Busacker y Saaty [77] exponen parte de la teoría en una manera vivida pero no rigurosa. Christofides [78] incluye muchos algoritmos en un marco mucho más abstracto.

14.12. PROGRAMACION COMBINATORIA:

Este tema está floreciendo tanto que tiene un departamento dedicado al tema en la Universidad de Waterloo, Canadá. Los problemas van desde el abstracto de la coloración de grafos hasta el práctico de inventarios. La optimización se hace sobre entidades combinatorias tales como combinaciones, permutaciones, particiones, grafos finitos y estructuras algebraicas parcialmente ordenadas. Una revitalización del interés en combinatoria pura ha llevado a la publicación de textos excelentes como el de Berge [79].

Aunque el tema parece ideal para computación digital (ver las esperanzas y reflexiones de Beckenbach [80]), el problema debe ser apreciado en toda su magnitud. Con las computadoras digitales más rápidas, la enumeración completa de todos los inventarios para las máquinas comerciales comunes puede llevar 10^{10} años- la edad actual del universo!-. La teoría matemática es aquí esencial para entrever nuevas aproximaciones; de aquí el amplio interés en su investigación. La situación actual esta tipificada en una gran colección de trabajos citados por Roy [81]. Para matemáticos, el punto de vista algorítmico poco común, necesita un tiempo de aclimatamiento.

Ciertos problemas han llegado a ser importantes. De estos, es típico el problema del viajante ha recibido mucha atención (ver survey de Bellmore y Nemhauser [82]). "Un viajante desea visitar n ciudades y retornar a su punto de partida por la ruta más barata posible. Dados los costos de viaje entre ciudades, no necesariamente iguales en direcciones opuestas, determinar la ruta más barata". Para estas (n+1) ciudades hay n! rutas posibles, una o más de las cuales es la más barata. Una enumeración completa esta limitada aproximadamente a 10 ciudades, y en su formulación general hay poca teoría matemática para ayudar. Para más de 18 ciudades la programación dinámica es efectiva, pero requiere demasiado almacenamiento de información para problemas más grandes. El procedimiento de "Branch-and-Bound" de Little *et al* [83] es sorprendentemente efectivo y provee soluciones aproximadas si se lo termina prematuramente. Unicamente desde el punto de vista algorítmico puede ser comprendida la elegancia de esta versátil aproximación. Problemas mayores (n>100) han sido también atacados con el algoritmo "k-optimal" de Lin [84], que nuevamente adapta a otros problemas difíciles grandes (ver Kernighan y Lin [85]). Esto es ahora el dominio de la "heurística", utilizando las "reglas del pulgar" que son las únicas técnicas comunes para problemas de grandes inventarios.

Hay una avalancha de resultados en este campo, la mayoría en el *Journal of Combinatorial Theory* (cf. sección 7.1). Los libros de Even [86], Wells [87] y Welsh [88] indican la dirección en la cual se desarrolla la teoría y la práctica. Sin embargo, hay poca unidad, aunque parece que la optimización sobre reticulados abstractos, grupos y otras estructuras algebraicas puede proveerla, y es de interés para matemáticos. Areas nuevas, como la "complejidad computacional" utilizan estos temas (ver números recientes del *Communications* y *Journal of the Association for Computing Machinery*; N.T.: recordar que esto es de 1.977).

REFERENCIAS:

[1] KANTOROVITCH, L., 'On the translocation of masses', *Akademiya Nauk SSSR. Doklady,* 37, 199-201, 1.942.
[2] KOOPMANS, T. C. (ed.), *Activity analysis of production and allocation,* Wiley, New York, 1.951.
[3] McMILLAN, C., *Mathematical programming,* Wiley, New York, 1.970.
[4] ABADIE, J. (ed.), *Nonlinear programming,* North-Holland, Amsterdam, 1.967.
[5] FLETCHER, R. (ed.), *Optimisation,* Academic Press, New York, 1.969.
[6] DORN, W., 'Non-linear programming- a survey', *Management Science,* 9, 171-208, 1.963.
[7] WILDE, D. y BEIGHTLER, C., *Foundations of optimisation,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.967.
[8] HADLEY, G., *Linear programming,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1.963. (A-1.478)
[9] HADLEY, G., *Nonlinear and dynamic programming,* Addison-Wesley, Reading, Mass, 1.964. (A-1.484)
[10] ZOUTENDIJK, B., 'Non-linear porgramming: a numerical survey', *SIAM Journal on Control,* 4, 194-210, 1.966.
[11] ZANGWILL, W., *Nonlinear programming: a unified approach,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.969.
[12] MANGASARIAN, O., *Nonlinear programming,* McGraw-Hill, New Yrok, 1.969.

[13] SAATY, T. y BRAM, J., *Nonlinear mathematics,* McGraw-Hill, New York, 1.964.
[14] GOLDSTEIN, A., *Constructive real analysis,* Harper and Row, New York, 1.967.
[15] GEFFRION, A., 'Elements of large scale mathematical programming, Part I: Concepts', *Management Science,* 16, 652-675, 1.970.
[16] GEFFRION, A., 'Elements of large scale mathematical programming, Part II: Synthesis of algorithms and bibliography', *Management Science,* 16, 676-691, 1.970.
[17] ACKOFF, R. y SASIENI, M., *Fundamentals of operations research,* Wiley, New York, 1.968. (A-3.868)
[18] SAATY, T. L., *Mathematical methods of operations research,* McGraw-Hill, New York, 1.959. (A-3.048)
[19] VAJDA, S., *Readings in mathematical programming,* 2nd edn, Pitman, London, 1.962.
[20] MITCHEL, C. H., *Operational research,* English Universities Press, London, 1.972.
[21] NICHOLSON, T., *Optimisation in industry,* 2 vols, Longman, London, 1.971.
[22] LAVI, A. y VOGL, T. (eds.), *Recent advances in optimisation techniques,* Wiley, New York, 1.966.
[23] RILEY, V. y GASS, S., *Linear programming and associated techniques,* John Hopkins Press, Baltimore, 1.958. (A-3.929)
[24] KUNZI, H. y OETTLI, W., *Nichtlineare Optimierung: neuere verfahren Bibliographie,* Springer-Verlag, Berlin, 1.969.
[25] BATCHELOR, J., *Operations research: an annotated bibliography,* St. Louis University Press, Missouri, 1.959.
[26] BUCKLAND, M., 'Sources of information for operational research studies', *Operational Research Quarterly,* 18, 297-313, 1.967.
[27] KEMENY, J., SNELL, J. y THOMPSON, G., *Introduction to finite mathematics,* Prentice-Hall, 1.956-1.957. (A-665)
[28] NOBLE, B., *Applied linear algebra,* Prentice-Hall, 1.989. (A-6.862)
[29] TRUSTRUM, K., *Linear programming,* Routledge and Kegan Paul, London, 1.971.
[30] GASS, S., *Linear programming: methods and applications,* McGraw-Hill, New York, 1.969. (A-3.597)
[31] CHARNES, A., COOPER, W. y HENDERSON, A., *An introduction to linear programming,* Chapman and Hall, London, 1.953. (A-292)
[32] DANTZIG, G. B., *Linear programming and extensions,* Princeton University Press, Princeton, 1.963. (A-2.891)
[33] GALE, D., *The theory of linear economic models,* McGraw-Hill, New York, 1.960.
[34] KUHN, H. y TUCKER, A. (eds.), *Linear inequalities and related systems,* Annals of Mathematics Studies 38, Princeton Universtiy Press, Princeton, 1.956. (A-601)
[35] KUHN, H. W., 'The Hungarian method for the assignment problem', *Naval Research Logistics Quarterly,* 2, 83-97, 1.955.
[36] FLOOD, M. M., 'The traveling salesman problem', *Operations Research,* 4, 61-75, 1.956.
[37] GALE, D., 'Optimal assignments in an ordered set: an application of matroid theory', *Journal of Combinatorial Theory,* 4, 176-180, 1.968.
[38] LEONTIEF, W. W., *The structure of the American economy 1.919-1.929,* Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1.941.

[39] Von NEUMANN, J. y MORGENSTERN, O., *Theory of games and economic behaviour,* Princeton University Press, Princeton, 1.953. (A-365)

[40] BERGE, C. y GHOUILA-HOURI, A., *Programming, games and transportation networks,* Methuen, London, 1.965.

[41] ROSEN, J. *et al.* (eds.), *Nonlinear programming,* Academic Press, New York, 1.970.

[42] ABADIE, J. (ed.), *Integer and nonlinear programming,* American Elsevier, 1.970. (A-3.685)

[43] BOOT, C. G., *Quadratic programming algorithms,* North-Holland, Amsterdam, 1.964.

[44] COLVILLE, A., *A comparative study on nonlinear programming codes,* Report No. 320-2949, IBM Scientific Centre, New York, 1.968.

[45] ROSEN, J. B., 'The gradient projection method for nonlinear programming, Part I: Linear constraints', *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal,* 8, 181-217, 1.960.

[46] ROSEN, J. B., 'The gradient projection method for nonlinear programming, Part II: Nonlinear constraints', *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal,* 9, 514-532, 1.961.

[47] GOLDFARB, D. y LAPIDUS, L., 'Conjugate gradient method for nonlinear programming problems with linear constraints', *Industrial and Engineering Chemistry. Fundamentals,* 7, 142-151, 1.968.

[48] DUFFIN, R., ZENER, C. y PETERSON, E., *Geometric programming,* John Wiley, 1.967. (A-2.830)

[49] PETERSON, E., 'Geometric programming', *SIAM Review,* 18, 1-51, 1.976.

[50] ORTEGA, J. y RHEINBOLT, W., *Iterative solutions of nonlinear equations in several variables,* Academic Press, New York, 1.970. (A-6.588)

[51] POWELL, M., 'A survey of numerical methods for unconstrained optimisation', *SIAM Review,* 12, 79-97, 1.970.

[52] JACOBI, S., KOWALIK, J. y PIZZO, J., *Iterative methods for nonlinear optimisation problems,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1.972.

[53] BOX, M., DAVIES, D. y SWANN, W., *Nonlinear optimisation techniques,* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1.969.

[54] BOX, M., 'A comparison of several current optimization methods, and the use of transformations in constrained problems', *Computer Journal,* 9, 67-77, 1.966.

[55] FIACCO, A. y McCORMICK, G., *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimisation techniques,* John Wiley, New York, 1.968. (A-4.521)

[56] BELLMAN, R., *Dynamic Programming,* Princeton University Press, Princeton, 1.957. (A-1.069)

[57] DREYFUS, S., *Dynamic programming and the calculus of variations,* Academic Press, New York, 1.965. (A-2.285)

[58] PONTRYAGIN, L. *et al, The mathematical theory of optimal processes,* Wiley, 1.962. (A-1.095)

[59] NEMHAUSER, G., *Introduction to dynamic programming,* Wiley, New York, 1.966.

[60] BELLMAN, R. y DREYFUS, S., *Applied dynamic programming,* Princeton University Press, Princeton, 1.962. (A-1.044)

[61] KAUFMANN, A. y CRUON, R., *Dynamic programming,* Academic Press, New York, 1.967. (A-2.778)

[62] BELLMAN, R., 'Combinatorial processes and dynamic programming', *American Mathematical Society. Proceedings of symposia in applied mathematics,* 10, 217-249, 1.960.

[63] BALINSKI, M., *Approaches to integer programming,* North-Holland, Amsterdam, 1.975.

[64] GREENBERG, H., *Integer programming,* Academic Press, New Yrok, 1.971.

[65] HU,T., *Integer programming and network flows,* Addison-Wesley, 1.969. (A-3.802)

[66] TAHA, H., *Integer programming: theory, applications and computations,* Academic Press, New York, 1.975.

[67] GARFINKEL, R. y NEMHAUSER, G., *Integer programming,* Wiley, New York, 1.972.

[68] MINTY, G., 'Monotone networks', *Royal Society of London. Proceedings, A,* 257, 194-212, 1.960.

[69] MINTY, G., 'Solving steady-state nonlinear networks of "monotone" elements', *IRE Transactions on Circuit Theory,* CT-8, 99-104, 1.961.

[70] FORD, L. y FULKERSON, D., *Flows in networks,* Princeton University Press, Princeton, 1.962.

[71] DENNIS, J., *Mathematical programming and electrical networks,* Wiley, New York,1.959.

[72] PRAGER, W., 'Mathematical programming and theory of structures', *Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal,* 13, 312-332, 1.965.

[73] FULKERSON, D., 'Flow networks and combinatorial operations research', *American Mathematical Monthly,* 73, 115-138, 1.966.

[74] HU, T. C., 'Recent advances in network flows', *SIAM Review,* 10, 354-359, 1.968.

[75] IRI, M., *Network flow, transportation and scheduling; theory and algorithms,* Academic Press, New York, 1.969. (A-3.737)

[76] KAUFMANN, A.,*Graphs, dynamic programming and finite games,* Academic Press, New York, 1.967. (A-2.581)

[77] BUSACKER, R. y SAATY, T., *Finite graphs and networks; an introduction with applications,* McGraw-Hill, New York, 1.965. (A-2.940)

[78] CHRISTOFIDES, N., *Gprah theory- an algorithmic approach,* Academic Press, New York, 1.975.

[79] BERGE, C., *Principles of Combinatorics,* Academic Press, New York, 1.971.(A-4.142)

[80] BECKENBACH, E., *Applied combinatorial mathematics,* Wiley, New York, 1.964. (A-3.754)

[81] ROY, B. (ed.), *Combinatorial programming: methods and applications,* Reidel, Dordecht, 1.974.

[82] BELLMORE, M. y NEMHAUSER, G., 'The traveling salesman problem: a survey', *Operations Research,* 16, 538-558, 1.968.

[83] LITTLE, J. *et al*, 'An algorithm for the traveling salesman problem', *Operations Research,* 11, 972-989, 1.963.

[84] LIN, S., 'Computer solutions of the traveling salesman problem', *Bell System Technical Journal,* 44, 2245-2269, 1.965.

[85] KERNIGHAN, B. y LIN, S., 'An efficient heuristic procedure for partitioning graphs', *Bell System Technical Journal,* 49, 291- 307, 1.970.
[86] EVEN, S., *Algorithmic combinatorics,* Macmillan, New York, 1.973.
[87] WELLS, M., *Elements of combinatorial computing,* Pergamon Press, Oxford, 1.971.
[88] WELSH, D. (ed.), *Combinatorial mathematics and its applications,* Academic Press, 1.971. (A-4.503)

Las siguientes referencias son textos estándar, pero no fueron discutidos en este capítulo:

BEALE, E., *Mathematical programming in practice,* Pitman, London, 1.968.
COLLATZ, L., *Optimization problems,* Springer-Verlag, 1.975. (A-4.710)
GRAVES, R. y WOLFE, O. (eds.), *Recent advances in mathematical programming,* McGraw-Hill, New York, 1.963.
ZOUTENDIJK, G., *Methods of feasible directions,* American Elsevier, New York, 1.960.

MATERIAL EXISTENTE SOBRE ESTE TEMA EN LA BIBLIOTECA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA:

OTPIMIZACION:

1. BEALE, E., *Introduction to optimization*, Wiley, 1.988. (A-6.348)
2. DANTZIG, G. y EAVES, B. (eds.), *Studies in Optimization*, MAA Studies in Mathematics, vol. 10, Mathematical Association of America, 1.974. (A-5.463)
3. LENSTRA, J. *et al* (ed.), *Combinatorial Optimization*, Wiley, 1.985. (A-6.137)
4. NEMHAUSER, G. y WOLSEY, L., *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, 1.988. (A-6.350)
5. SAKAROVITCH, M., *Optimisation Combinatoire. Programmation Discrete*, Hermann, 1.984. (A-6.703)
6. SAKAROVITCH, M., *Optimisation Combinatoire. Graphes et Programmation Lineaire*, Hermann, 1.984. (A-6.704)

APENDICE IV
BIBLIOTECA BASICA
Bibliografía selecta de Matemática Pura
Jean Dieudonné (1.984)

I. REVISTAS PERIODICAS:

a) Lecture Notes in Mathematics (Springer).
Proceedings of Symposia in pure mathematics (American Mathematical Society).
Astérisque (Soc. Math. de France).

b) Memoirs of the American Mathematical Society.
Mémoires de la Société mathématique de France.
Annals of Mathematics.
Transactions of the American Mathematical Society.
American Journal of Mathematics.
Inventiones Mathematicae.
Annales de l'Ecole Normale Supérieure.
Mathematische Annalen.
Proceedings of the London Mathematical Society.
Annali della Scuola normale superiore di Pisa.

II. OBRAS GENERALES Y OBRAS COMPLETAS:

a) Encyclopedic Dictonnary of Mathematics (ed. S. Iyanaga y Y. Kawada), Cambridge-London M.I.T. Press, 1.977.
H. Griffiths y P. Hilton, A comprehensive textbook of Classical Mathematics, London, Van Nostrand-Reinhold, 1.970. (A-5.190)

b) Obras completas de:
E. Artin (Addison-Wesley). (A-2.594)
G. Cantor (Springer).
E. Cartan, 6 vols. (Gauthier-Villars). (T I: v1: A-652 y v2: A-653; T II: v1: A-1.009 y v2: A-1.010; T III: v1: A-1.899 y v2: A-1.901)
H. Cartan, 3vols. (Springer). (v1: A-4.986, v2: A-4.987 y v3: A-4.988)
R. Dedekind, 3 vols. (Vieweg).
D. Hilbert, 3 vols. (Springer). (v1: A-2.421, v2: A-2.422 y v3: A-2.423)
R. Riemann (Dover).
F. Riesz, 2 vols. (Gauthier-Villars). (v1: A-1.434 y v2: A-1.435)
C. L . Siegel, 4 vols. (Springer).
J. von Neumann, 6vols. (Pergamon).
A. Weil, 3 vols. (Springer). (v1: A-5.112, v2: A-5.113 y v3: A-5.114)
H. Weyl, 4 vols. (Springer). (v1: A-3.349, v2: A-3.350, v3: A-3.351 y v4: A-3.352)

III. LIBROS DIDACTICOS:

1. Lógica matemática y teoría de conjuntos:

a) Manin, Ju., A course in mathematical logic (Springer, 1.977). (A-5.103)
Rotman, G. y Kneebone, G., The theory of sets and transfinite numbers (London, Oldbourne, 1.966).
Bourbaki, N., Eléments de Mathématique, Livre I: Théorie des ensembles (Hermann, 1.954-56). (A-2.816, A-322, A-323, A-2.818, A-2.820, A-324, A-3.061, A-325a)

b) Rogers, C., Analytic sets (Academic Press, 1.980). (A-6.354)
Eilenberg, S. y Elgott, S., Recursiveness (Academic Press, 1.970).
Johnstone, P., Topos theory (Academic Press, 1.977). (A-5.154)
Kleene, S., Introduction to metamathematics (North-Holland, 1.952). (A-199, en castellano: A-4.028)
Robinson, A., Non standard analysis (North-Holland, 1.966). (A-2.798)
Rosser, J., Simplified independence proofs (Academic Press, 1.969). (A-3.683)
Studies in model theory (ed. M. Morley) (Mathematical Association of America, 1.973). (A-5.461)
van Heijenoort, J., From Frege to Gödel (Harvard University Press, 1.967).

2. Categorías y funtores:

a) MacLane, S., Categories for the working mathematician (Springer, 1.971). (A-4.553)

b) Freyd, P., Abelian categories (Harper and Row, 1.964). (A-1.764)
Mitchell, B., Theory of categories (Academic Press, 1.965). (A-2.350)
Pareigis, B., Categories and functors (Academic Press, 1.970).

3. Algebra general:

a) Birkhoff, G. y MacLane, S., Algebra (MacMillan, 1.967).
Halmos, P., Finite dimensional vector spaces (Van Nostrand, 1.958). (A-1.361)
Jacobson, N., Lectures in abstract algebra, 3 vols. (Van Nostrand, 1.953). (v1: A-177 y A-2.921; v2: A-72 y A-2.337 y v3: A-1.421)
Lang, S., Algebra (Addison-Wesley, 1.965). (A-2.364)

b) Albert, A., Structure of algebras (AMS Coll. Publ. XXIV, American Mathematical Society, 1.939). (A-403)
Bourbaki, N., Eléments de mathématique, Livre II: Algébre (Hermann, 1.962). (A-2.861, A-326, A-2.807, A-330, A-2.803, A-3.348, A-2.810, A-738, A-2.278, A-2.813, A-328, A-2.021, A-329, A-3.100 y A-2.862)
Deuring, M., Algebren (Springer, 1.968).
Jacobson, N., Structure of rings (AMS Coll. Publ. XXXVII, American Mathematical Society, 1.956). (A-408)

Kurosh, A., Lectures on general algebra, Chelsea, 1.967.
Pierce, R., Associative algebras (Springer, 1.982). (A-5.997)
van der Waerden, B., Modern algebra (Ungar, 1.950). (v1:A-1.039 y A-2.054 y v2: A-700 y A-2.053)

4. Algebra conmutativa:

a) Bourbaki, N., Eléments de mathématique: Algébre conmutative (Hermann, 1.961-1.965). (A-2.821, A-2.822, A-2.824 y A-2.825)
Kaplansky, I., Commutative rings (Allyn-Bacon, 1.970). (A-5.044)
Matsumura, H., Commutative algebra (Benjamin, 1.981). (A-3.897)
Samuel, P. y Zariski, O., Commutative algebra, 2 vols. (Van Nostrand, 1.958). (v1: A-656 y v2: A-4.751)

b) Krull, W., Idealtheorie (Springer, 1.935). (A-4.322)
Nagata, M., Local rings (Interscience, 1.962). (A-1.068)
Northcott, D., Ideal theory (Cambridge University Press, 1.953)

5. Algebra homológica:

a) Hilton, P. y Stammbach, U., A course in homological algebra (Springer, 1.971). (A-6.002)
Hu, S., Introduction to homological algebra (Holden-Day, 1.968).
Northcott, D., An introduction to homological algebra (Cambridge University Press, 1.960).

b) Atiyah, M., K-theory (Benjamin, 1.967). (A-3.892)
Bass, H., Algebraic K-theory (Benjamin, 1.968). (A-3.893)
Cartan, H. y Eilenberg, S., Homological algebra (Princeton University Press, 1.956). (A-367)
Jans, J., Rings and homology (Holt, Rinehart and Winston, 1.964).
Karoubi, M., K-theory (Springer, 1.978). (A-3.479 y A-4.445)
MacLane, S., Homology (Springer, 1.963). (A-1.165)
Silvester, J., Introduction to algebraic K-theory (Chapman and Hall, 1.981).

6. Teoría de grupos:

a) Magnus, W., Karrass, A. y Solitar, D., Combinatorial Group theory (Interscience, 1.966).
Serre, J., Linear representations of finite groups (Springer, 1.977). (En francés: A-3.902)
Speiser, A., Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Birkhäuser, Basel, 1.955). (A-493)
Zassenhaus, H., The theory of groups (Chelsea, 1.949). (A-545)

b) Carter, R., Simple groups of Lie type (Wiley, 1.972). (A-4.937)

Chevalley, C., The algebraic theory of spinors (Columbia University Press, 1.954). (A-41)
Coxeter, H. y Moser, W., Generators and relations for discrete groups (Springer, 1.965). (A-2.311)
Feit, W., Representation theory of finite groups (North Holland, 1.982). (A-5.816)
Fuchs, L., Abelian groups (Pergamon Press, 1.960). (A-434)
Gorenstein, D., Finite groups (Harper and Row, 1.968).
Huppert, B. y Blackburn, N., Finite groups, 3 vols. (Springer, 1.967-1.982).
Lang, S., Rapport sur la cohomologie des groupes (Benjamin, 1.966). (A-2.552)
Suzuki, M., Group theory I (Springer, 1.982).

7. Análisis clásico:

a) Ahlfors, L., Complex Analysis (McGraw Hill, 1.963). (A-6.212)
Bourbaki, N., Fonctions d'une variable réelle (Hermann, 1.9). (A-2.019, A-333a2, A-2.808a2, A-2.811, A-334, A-2.020)
Cartan, H., Théorie élémentaire des fonctions analytiques (Hermann, 1.961). (En inglés: A-1.418 y A-1.437)
Polya, G. y Szegö, G., Problems and theorems in Analysis (Springer, 1.972-1.976)

b) Garnett, J., Bounded analytic functions (Academic Press, 1.981). (A-5.968)
Gelbaum, B. y Olmsted, J., Counterexamples in Analysis (Holden-Day, 1.964). (A-2.302)
Hardy, G., Divergent series (Clanderon Press, 1.949). (A-1.975)
Hervé, M., Les fonctions analytiques (Presses Univ. de France, 1.982).
Landau, E., Foundations of Analysis (Chelsea, 1.951). (A-1.998)
Segal, S., Nine introductions to complex analysis (North Holland, 1.981). (A-5.614)
Whittaker, E. y Watson, G., A course of modern Analysis (Cambridge University Press, 1.935). (A-2.126)

8. Topología general:

a) Kelley, J., General topology (Van Nostrand, 1.955). (A-6.227)
Bourbaki, N., Topologie générale, (Hermann, 1.971-1.974). (A-2.805, A-524a2, A-2.013, A-2.014, A-920, A-3.062, A-2.806, A-331, A-2.015, A-443, A-2.804, A-2.016, A-2.017, A-921, A-2.809, A-332, A-2.012, A-2.815)

b) Alexandroff, P. y Hopf, H., Topologie I (Springer, 1.935). (A-2420)
Choquet, G., Topology (Academic Press, 1.966). (A-2.284)
Kuratowski, K., Topologie, 2 vols. (Varsovie, 1.958-1.961). (v1: A-6.229 y v2: A-6.228)

9. Espacios vectoriales topológicos en análisis funcional:

a) Bourbaki, N., Eléments de mathématique: Livre V, Espaces vectoriels topologiques (Masson, 1.981). (A-2.814, A-335, A-2.817, A-336, A-3.099, A-337)

Horvath, J., Topological vector spaces and distributions I (Addison-Wesley, 1.966). (A-2.225)
Kelley, J. *et al*, Linear topological spaces (Van Nostrand, 1.963). (A-1.587)

b) Asimow, L. y Ellis, A., Convexity theory and its application to functional analysis (London Mathematical Society Monographs N° 16, Academic Press, 1.980). (A-5.083)
Day, M., Normed linear spaces (Springer, 1.973).
Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires (Memoirs of the AMS N° 16, American Mathematical Society, 1.953). (M-16)
Halmos, P., A Hilbert space problem book (Springer, 1.982). (A-4.431)
Hogbe-Nlend, H. y Moscatelli, V., Nuclear and conuclear spaces (North Holland, 1.981).
Kaczmarz, S. y Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen (N. Y., 1.951). (A-77)
Köthe, G., Topological vector spaces,2 vols. (Springer, 1.969-1.979). (v1: A-4.955 y v2: A-4.956)
Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L., Classical Banach spaces I, II (Springer, 1.977-1.979). (v1: A-5.779)
Pietsch, A., Nuclear locally convex spaces (Springer, 1.972). (En alemán: A-3.156)
Trevés, F., Topological vector spaces, distributions and kernels (Academic Press, 1.967). (A-2.584)
Valdivia, M., Topics in locally convex spaces (North Holland, 1.982).
Young, R., An introduction to nonharmonic Fourier series (Academic Press, 1.980). (A-5.084)

10.<u>Integración:</u>

a) Bourbaki, N., Eléments de mathématique, Livre VI: Intégration (Hermann, 1.963-67). (A-2.812, A-338, A-2.018, A-339, A-2472, A-2.819, A-325, A-2.863, A-2.823 y A-4.038)
Halmos, P., Measure theory (Van Nostrand, 1.950). (A-63)

b) Cesari, L., Surface area (Princeton, 1.954). (A-363)
Garsia, A., Topics on almost everywhere convergence (Markham, Chicago, 1.970).
Ionesco Tulcea, C. y Ionescu Tulcea, I., Tipics in the theory of lifting (Springer, 1.969). (A-3.033)
Saks, S., Theory of the integral (Stechert, 1.937).

11.<u>Probabilidades:</u>

a) Dynkin, E., Markov processes, 2 vols. (Springer, 1.965). (v1: A-3575 y A-6.572 y v2: A-3576
y A-6.573)
Feller, W., An introduction to probability theory and its applications (Wiley, 1.950-1.966). (v1: A-295, v2: A-2783, A-2784 y A-3.758)
Loéve, M., Probability theory, 2 vols. (Van Nostrand, 1.963). (v1: A-2858 y v2: A-3.934)

b) Billingsley, P., Convergence of probability measures (Wiley, 1.968). (A-3.755)
Cramer, H. y Leadbetter, M., Stationary and related stochastic processes (Wiley, 1.967). (A-4.219)
Doob, J., Stochastic processes (Wiley, 1.953). (A-2.650)
Gikhman, I. y Skorohod, A., The theory of stochastic processes, 3 vols. (Springer, 1.974-1.976). (v1: A-4.713, v2: A-4.714 y v3: A-5.105).
Gnedenko, B. y Kolmogoroff, A., Limit distributions for sums of independent random variables (Addison-Wesley, 1.968). (A-2.969)
Grenander, U., Probabilities on algebraic structures (Wiley, 1.963).
Furstenberg, H., Stationary processes and prediction theory (Princeton University Press, 1.960). (A-1.046 y A-1.570)
Ikede, N. y Watanabe, S., Stochastic differential equations and diffusion processes (North Holland, 1.981).
Ito, K. y Mc Kean, H., Diffusion processes and their sample path (Springer, 1.965). (A-3.280)
Kahane, J., Some random series of functions (Heath, Lexington, 1.968).
Kawata, T., Fourier analysis in probability theory (Academic Press, 1.972).
Knight, F., Essentials of Brownian motion and diffusion (Mathematical Surveys N° 18, American Mathematical Society, 1.981). (A-5.410)
Kolmogoroff, A., Foundations of the theory of probability (Chelsea, 1.956). (A-468)
Linnik, Ju., Décomposition des lois de probabilité (Gauthier-Villars, 1.962)
Meyer, P., Probabilités et potentiel (Hermann. 1.966). (A-3.070)
Petrov, V., Sums of independent random variables (Springer, 1.975). (A-4.550)
Spitzer, F., Principles of random walk (Van Nostrtand, 1.964). (A-4524)

12. <u>Teoría espectral de operadores:</u>

a) Courant, R. y Hilbert, D., Methods of mathematical physics, 2 vols. (Interscience, 1.962). (v1: A-1.100 y v2: A-1.101)
Naimark, M., Normand rings (Nordhoff, 1.959). (A-641)
Reed, M. y Simon, B., Methods of modern mathematical physics, 4 vols. (Academic Press, 1.972-1.979). (v1: A-5.061, v2: A-5.062, v3: A-5.063 y v4: A-5.064)
Yosida, K., Functional analysis (Springer, 1.965). (A-6.160 a-6)

b) Benedetto, J., Spectral synthesis (Academic Press, 1.975). (A-4.522)
Dunford, N. y Schwartz, J., Linear operators, 3 vols. (Interscience, 1.958-1.971). (v1: A-288 y A-4.696, v2: A-4.697 y v3: A-4.698).
Gamelin, T., Uniform algebras (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1.969). (A-3.367)
Hille, E. y Phillips, R., Functional analysis and semigroups (AMS Coll. Publ. XXXI, American Mathematical Society, 1.957). (A-405)
Hoffman, K., Banach spaces of analytic functions (Prentice Hall, 1.962). (A-998)
Kato, T., Perturbation theory for linear operators (Springer, 1.966). (A-2.733)
Leibowitz, G., Lectures on complex function algebras (Glenview, Scott and Foresman, 1.970).

Pietsch, A., Operator ideals (Deutsch. Verl. der Wiss, 1.978).
Rickart, C., General theory of Banach algebras (Van Nostrand, 1.960). (A-885)

13. C^*-álgebras y álgebras de von Neumann:

a) Dixmier, J., Les algébres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Gauthier-Villars, 1.957). (A-670 y A-1.944)
Dixmier, J., Les C^*-algébres et leurs représentations (Gauthier-Villars, 1.964).

b) Douglas, R., C^*-algebras and K-homology (Princeton University Press, 1.980).
Pedersen, C., C^*-algebras and their automorphism groups (London Mathematical Society Monographs N° 14, Academic Press, 1.979).
Takesaki, M., Theory of operator algebras I (Springer, 1.979).

14. Teoría de Fourier y análisis armónico conmutativo:

a) Edwards, R., Fourier series, 2 vols. (Holt, Rinehart and Winston, 1.967). (v1: A-3.361y A-3.362)
Katznelson, Y., An introduction to harmonic analysis (Wiley, 1.968). (A-3.135)
Titchmarsh, E., Introduction to the theory of Fourier integrals (Clarendon Press, 1.948).

b) Bary, N., A treatise on trigonometric series, 2 vols. (Pergamon, 1.964).
Kahane, J., Series de Fourier absolument convergentes (Springer, 1.970). (A-3.273)
Rudin, W., Fourier analysis on groups (Interscience, 1.968). (A-1.093)
Stein, E. y Weiss, G., Introduction to Fourier analysis in euclidean spaces (Princeton University Press, 1.971). (A-3.818)
Taibleson, M., Fourier analysis on local fields (Princeton University Press, 1.975).
Watson, E., Laplace transforms and applications (Van Nostrand, 1.981).
Weil, A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications (Hermann, 1.940). (A-358)
Zygmund, A., Trigonometric series, 2 vols. (Cambridge University Press, 1.968). (A-2.292)

15. Grupos de Lie y espacios simétricos:

a) Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces (Academic Press, 1.978). (A-1.104)
Serre, J., Lie algebras and Lie groups (Benjamin, 1.965). (A-2.359)

b) Bourbaki, N., Groupes et algébres de Lie chap. I-VIII (Hermann et Masson, 1.960-1.980). (A-739, A-4.845 y A-4.846)
Hausner, M. y Schwartz, J., Lie groups, Lie algebras (Gordon Breach, 1.968). (A-3.165)
Jacobson, N., Lie algebras (Interscience, 1.962). (A-3.697)
Miller, W., Lie theory and special functions (Academic Press, 1.968). (A-2.945)

Montgomery, D. y Zippin, L., Topological transformation groups (Interscience, 1.955). (A-280)
Symmetric spaces (ed. W. Boothby and G. Weiss) (Dekker, 1.972).

16.Análisis armónico no conmutativo y funciones automorfas:

a) Lang, S., $SL_2(R)$ (Adisson-Wesley, 1.975).
Wallach, N., Harmonic analysis on homogeneous spaces (Dekker, 1.973).

b) Baily, W., Introductory lectures on automorphic forms (Princeton University Press, 1.963).
Bernat, P. *et al*, Représentations des groupes de Lie résolubles (Dunod, 1.972).
Gelfand, I. y Neumark, M., Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen (Akad. Verlag, 1.957).
Gelfand, I., Graev, M. y Pyatetskii-Shapiro, I., Representation theory and automorphic functions (Saunders, 1.969). (A-3.831)
Gunning, R., Lectures on modular forms (Princeton University Press, 1.952). (A-1.049)
Kra, I., Automorphic forms and kleinian groups (Benjamin, 1.972).
Kubota, T., Elementary theory of Eisenstein series (Wiley, 1.973).
Pukansky, L., Leçons sur la représentation des groupes (Dunod, 1.967). (A-2.454)
Pyatetskii-Shapiro, I., Automorphic functions and the geometry of classical domains (Gordon Breach, 1.969).
Shimura, G., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions (Princeton University Press, 1.971).
Vilenkin, N., Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes (Dunod, 1.969).
Vogan, D., Representations of real reductive Lie groups (Birkhäuser, 1.981).
Wallach, N., Symplectic geometry and Fourier analysis (MIT Press, 1.977).
Warner, G., Harmonic analysis on semi-simple groups, 2 vols, (Springer, 1.977).

17.Ecuaciones diferenciales (ordinarias) y sistemas dinámicos:

a) Coddington, E. y Levinson, N., Theory of ordinary differential equations (McGraw-Hill, 1.955).
Hartman, P., Ordinary differential equations (Wiley, 1.964). (A-4.543)
Ince, E., Ordinary differential equations (Dover, 1.949). (A-1.990)
Lefschetz, S., Differential equations: geometric theory (Interscience, 1.957). (A-88)

b) Abraham, R. y Mardsen, J., Foundations of mechanics (Benjamin, 1.967). (A-4.913)
Abraham, R. y Robbins, J., Transversal mappings and flows (Benjamin, 1.967). (A-4.061)
Bhatia, N. y Szego, G., Stability theory of dynamical systems (Springer, 1.970)
Cesari, L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations (Erg. der Math. N° 16, Springer, 1.963). (A-1.904)
Ellis, R., Lectures on topological dynamics (Benjamin, 1.963). (A-4.806)

El'sgol'c, L. y Norkin, S., Introduction to the theory and applications of differential equations with deviating arguments (Academic Press, 1.973).
Hassard, B., Kazarinoff, N. y Wan, Y., Theory and applications of Hopf bifurcations (Cambridge University Press, 1.981)
Hille, E., Ordinary differential equations in the complex domain (Wiley, 1.976). (A-4.753)
Kolchin, E., Differential algebra and algebraic groups (Academic Press, 1.973). (A-5.089)
Liapounov, A., Probléme général de la stabilité du mouvement (Princeton University Press, 1.949). (A-90)
McLachlan, N., Theory and applications of Mathieu functions (Dover, 1.964). (A-2.630)
Niemytski, V. y Stepanov, V., Qualitative theory of differential equations (Princeton University Press, 1.960).
Siegel, C. y Moser, J., Lectures on celestial mechanics (Springer, 1.971). (A-5.072)
Sternberg, S., Celestial mechanics, 2 vols. (Benjamin, 1.969).
Wasow, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations (Interscience, 1.965). (A-4.574)
Watson, G., A treatise on the theory of Bessel functions (N.Y., 1.944). (A-5.687)
Woodhouse, N., Geometric quantization (Clarendon Press, 1.980).

18.<u>Teoría ergódica:</u>

a) Arnold, V. y Avez, A., Théorie ergodique des systémes dynamiques (Gauthier-Villars, 1.967).
Halmos, P., Lectures on ergodic theory (Mathematical Society of Japan). (A-994 y A-1.768)

b) Billingsley, P., Ergodic theory and information (Wiley, 1.965). (A-1.954)
Furstenberg, H., Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory (Princeton University Press, 1.981).
Jacobs, K., Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie (Erg. der Math. N°29, Springer, 1.960).
Linnik, Ju., Ergodic properties of algebraic fields (Erg. der Math. N°45, Springer, 1.968). (A-3.277)
Parry, W., Topics in ergodic theory (Camb. Tracts N°75, Cambridge University Press, 1.981).
Parry, W. y Tuncel, S., Classification problems in ergodic theory (London Mathematical Society Monographs N°67, Cambridge University Press, 1.982).
Shields, P., The theory of Bernoulli shifts (Chicago University Press, 1.973)

19.<u>Ecuaciones en derivadas parciales y cálculo de variaciones:</u>

a) Bateman, H., Partial differential equations of mathematical physics (Cambridge University Press, 1.952).
Duff, G. y Naylor, D., Differential equations of applied mathematics (Wiley, 1.966).

Garabedian, P., Partial differential equations (Wiley, 1.964). (A-1.769)
Gelfand, I. y Fomin, S., Calculus of variations (Prentice-Hall, 1.963).
Nirenberg, L., Lectures on linear partial differential equations (CBMS Regional Conf. Series in Math. N° 17, American Mathematical Society, 1.973). (A-5.346)
Tréves, F., Basic linear partial differential equations (Academic Press, 1.975). (A-4.605)

b) Agmon, S., Lectures on elliptic boundary value problems (Van Nostrand, 1.966). (A-2.223)
Bers, L. John, F. y Schechter, M., Partial differential equations (Interscience, 1.964). (A-1.668)
Bitsadze, A., Equations of the mixed type (Pergamon, 1.954).
Brelot, M., Lectures on potential theory (Tata Institute of Fundamental research Bombay, 1.967).
Caratheodory, C., Calculus of variations and partial differential equations of the first order, 2 vols., (Holden Day, 1.965). (v1: A-4.042 y v2: A-6.699)
Eidellman, S., Parabolic equations (North-Holland, 1.969).
Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type (Prentice-Hall, 1.964). (A-2.941)
Hörmander, L., Linear partial differential equations (Springer, 1.964).
John, F., Plane waves and spherical means (Interscience, 1.955).
Lax, P. y Phillips, R., Scattering theory (Academic Press, 1.967). (A-2.579)
Leitmann, G., The calculus of variations and optimal control (Plenum Press, 1.981). (A-5.689).
Maslov, V., Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques (Dunod, 1.972).
Morawetz, C., Time decay and scattering (CMBS Regional Conf. Series in Math, N° 19, American Mathematical Society, 1.974).
Morrey, C., Multiple integrale in the Calculus of variations (Springer, 1.966). (A-2.924).
Protter, M. y Weiherger, H., Maximum principles in defferential equations. (A-2.958)
Taylor, M., Pseudi-differential operators (Princeton University Press, 1.981). (A-6.148)
Tréves, A., Introduction to pseudo-differential operators and Fourier integral operators (Plenum Press, 1.980).
Wendland, W., Elliptic systems in the plane (Pitman, 1.979).

20.Topología algebraica y topología diferencial:

a) Adams, J., Algebraic topology: A student's guide (London Mathematical Society Monogr. N° 4, Cambridge University Press, 1.972).
Greenberg, M. y Harper, J., Algebraic topology, a first course (Benjamin,
Hilton, P., An introduction to homotopy theory (Cambridge tracts N° 43, Cambridge University Press, 1.953). (A-2.598)
Hu, S., Homology theory: a first course in algebraic topology (Holden-Day, 1.966).
Lefschetz, S., Applications of algebraic topology (Springer, 1.975). (A-4.709)
Massey, W., Algebraic topology: an introduction (Harcourt, Brace and World, 1.967). (A-2.599)
Porteous, I., Topological geometry (Van Nostrand, 1.966). (A-3.723)

Seifert, H. y Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie (Chelsea). (En castellano: A-135)

b) Baues, H., Commutator calculus and groups of homotopy classes (London Mathematical Society monogr. N° 50, 1.981).
Crowell, R. y Fox, R., Introduction to knot theory (Ginn, Boston, 1.963). (A-2.923)
Eilenberg, S. y Steenrod, N., Foundations of algebraic topology (Princeton University Press, 1.952). (A-2.666)
Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux (Hermann, 1.958). (A-348)
Griffiths, P. y Morgan, J., Rational homotopy theory and differential forms (Birkhäuser, 1.981).
Hilton, P. y Wylie, S., Homology theory (Cambridge University Press, 1.960). (A-3.319)
Hirsch, M., Differential topology (Springer, 1.976). (A-4.849)
Hocking, J. y Young, G., Topology (Addison-Wesley, 1.961). (En castellano: A-4.400 y A-4.401)
Hu, S., Cohomology theory (Markham, 1.968). (A-4.013)
Hudson, J., Piecewise linear topology (Benjamin, 1.969).
Hurewicz, W. y Wallman, H., Dimension theory (Princeton University Press, 1.941). (A-71 y A-1.979)
Husemoller, D., Fibre bundles (Mc Graw-Hill, 1.966). (A-6.112)
Madsen, I. y Milgram, R., The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds (Princeton University Press, 1.979). (A-5.513)
Mardesic, S. y Segal, J., Shape theory (North Holland. 1.982).
May, P., Simplicial objects in algebraic topology (Van Nostrand, 1.967). (A-2.602)
Milnor, J., Morse theory (Princeton University Press, 1.963). (A-1.051)
Milnor, J. y Stasheff, J., Characteristic classes (Princeton University Press, 1.974). (A-5.500)
Kirby, R. y Siebenmann, L., Foundational essays on topological manifolds smoothings and triangulations (Princeton University Press, 1.977). (A-5.036)
Segal, G., New developments in topology (London Mathematical Society Monogr. N° 11, Cambridge University Press, 1.974).
Spanier, E., Algebraic topology (McGraw-Hill, 1.966). (A-2.368)
Steenrod, N., The topology of fibre bundles (Princeton University Press, 1.951). (A-142)
Stong, R., Notes on cobordism theory (Princeton University Press, 1.968).
Switzer, R., Algebraic topology, homotopy and homology (Springer, 1.975). (A-4.992)
Wall, C., Surgery on compact manifolds (Academic Press, 1.970). (A-4.836)
Whitehead, C., Elements of homotopy theory (Springer, 1.978).

21. Variedades diferenciales y geometría diferencial:

a) Guggenheimer, H., Differential geometry (McGraw-Hill, 1.963). (A-1.685)
Kobayashi, S. y Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 2 vols. (Interscience, 1.963-1.969). (v1: A-1.760 y v2: A-4.936)
Lang, S., Introduction to differentiable manifolds (Interscience, 1.962). (A-1.076)

b) Arnold, V., Singularity theory (London Mathematical Society Monogr. N° 52,

Cambridge University Press, 1.981).
Eells, J., Singularities of smooth maps (Gordon Breach, 1.967).
Golubitsky, M. y Guillemin, V., Stable mappings and their singularities (Springer, 1.973). (A-6.036).
Hermann, R., Differential geometry and the calculus of variations (Academic Press, 1.968). (A-5.432)
Klingenterg, W., Lectures on closed geodesics (Springer, 1.978). (A-4.647)
Nitsche, J., Vorlesungen über Minimalflächen (Springer, 1.976).
Pitts, J., Existence and regularity of minimal surfaces in Riemannian manifolds (Princeton University Press, 1.981).
Wolf, J., Spaces of constant curvature (Mc Graw-Hill, 1.967).

22. Geometría analítica:

a) Behnke, H. y Thullen, P., Theorie der funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen (Erg. der Math. N°51, Springer, 1.970). (A-3.345)
Gunning, R. y Rossi, H., Analytic functions of several complex variables (Prentice-Hall, 1.968). (A- 3.368 y A-6.222)
Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several complex variables (North Holland, 1.973). (A-6.226)
Narasimhan, R., Analysis on real and complex manifolds (North Holland, 1.968).
Narasimhan, R., Several complex variables (University of Chicago Press, 1.971).

b) Bochner, S. y Martin, W., Several complex variables (Princeton University Press, 1.948). (A-18)
Forster, O., Lectures on Riemann surfaces (Springer, 1.981). (A-6.006)
Gunning, R., Lectures on Riemann surfaces (Princeton University Press, 1.966). (A-4.908)
Lelong, P., Plurisubharmonic functions and positive differential forms (Gordon Breach, 1.969).
Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces (Princeton University Press, 1.968). (A-5.488)
Nevanlinna, R., Uniformisierung (Springer, 1.953). (A-4.292)
Rudin, W., Function theory in polydiscs (Benjamin, 1.969). (A-4.060)
Rudin ,W., Function theory in the unit ball of C^n (Springer, 1.980). (A-5.078)
Siu, Y., Techniques of extensions of analytic objects (Dekker, 1.974).
Wells, H., Differential analysis on complex manifolds (Prentice-Hall, 1.973).
Weil, A., Introduction á l'étude des varietés kähleriennes (Hermann, 1.958). (A-357)

23. Geometría algebraica:

a) Griffiths, P. y Harris, J., Algebraic geometry (Wiley, 1.978).
Hartshorne, R., Algebraic geometry (Springer, 1.977). (A-4.703)
Lang, S., Introduction to algebraic and abelian functions (Addison-Wesley, 1.972). (A-4.530)

Semple, J. y Roth, L., Introduction to algebraic geometry (Oxford, Clarendon Press, 1.949). (A-723)

b) Demazure, M. y Gabriel, P., Groupes algébriques I (Masson, 1.970). (A-4.313)
Fogarty, J., Invariant theory (Benjamin, 1.969). (A-4.307)
Gunning, R., Lectures on vector bundles over Riemann surfaces (Princeton University Press, 1.967). (A-4.283)
Hazewinkel, M., Formal groups (Academic Press, 1.978).
Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry (Erg. der Math. N°9, Springer, 1.966). (A-2.308)
Humphreys, J., Linear algebraic groups (Springer, 1.975). (A-4.702)
Iitaka, S., Algebraic geometry (Springer, 1.981). (A-6.001)
Manin, Ju., Cubic forms (North Holland, 1.974).
Milne, J., Etale cohomology (Princeton University Press, 1.980).
Mumford, D., Geometric invariant theory (Erg. der Math. N°34, Springer, 1.965). (A-2.624 y A-6.797)
Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface (Princeton University Press, 1.966).
Mumford, D., Abelian varieties (Oxford University Press, 1.970).
Oda, T., Periods of Hilbert modular surfaces (Birkhäuser, 1.982).
Shafarevich, I., Basic algebraic geometry (Srpinger, 1.974). (A-4.701, A- 7.146 y A-7.147)
Waterhouse, W., Introduction to affine group schemes (Springer, 1.979).
Zariski, O., Algebraic surfaces (Springer, 1.971). (A-7.159)

24.<u>Teoría de números:</u>

a) Borevich, Z. y Shafarevich, I., Number theory (Academic Press, 1.966). (A-2.260)
Ellison, W. y Mendés-France, P., Les nombres premiers (Hermann, 1.975).
Hecke, E., Lectures on the theory of algebraic numbers (Springer, 1.981). (A-6.003)
Narkiewicz, W., Elementary and analytic theory of algebraic numbers (Varsovie, 1.974).
Serre, J., A course in arithmetic (springer, 1.973). (En francés: A-3.962)

b) Algebraic number theory (ed. J. Cassels and A. Fröhlich). (Academic Press, 1.967).
Baker, A., Trascendental number theory (Cambridge University Press, 1.975). (A-5.052)
Borel, A., Groupes arithmétiques (Hermann, 1.969).
Cassels, J., An introduction to diophantine approximation (Cambridge Tracts N°45, Cambridge University Press, 1.957)
Cassels, J., Rational quadratic forms (London Mathematical Society Monogr. N°13, Academic Press, 1.978). (A-4.912 y A-5.090)
Davenport, H., Analytic methods for diophantine equations and diophantine inequalities (Campus Publishers, Ann Arbor, 1.962). (A-2.782)
Davenport, H., Multiplicative number theory (Springer, 1.980).
Fricker, F., Einführung in die Gitterpunktlehre (Birkhäuser, 1.982).

Gelfond, A. y Linnik, Ju., Elementary methods in the analytic theory of numbers (Pergamon, 1.966).
Halberstam, H. y Richert, H., Sieve methods (Academic Press, 1.974).
Lang, S., Diophantine geometry (Interscience, 1.962). (A-1.059)
Lang, S., Cyclotomic fields, 2 vols. (Springer, 1.980). (A-4.970)
Lekkerkerker, C., Geometry of numbers (Wolters-Nordhoff, 1.969).
Mordell, L., Diophantine equations (Academic Press, 1.967).
O'Meara, O., Introduction to quadratic forms (Springer, 1.963). (A-1.168)
Petersson, H., Modulfunktionen und quadratische form (Springer, 1.982).
Serre, J., Groupes algébriques et corps de classes (Hermann, 1.959). (A-4.699)
Serre, J., Corps locaux (Hermann, 1.962).
Milnor, J. y Husemoller, D., Symmetric bilinear forms (Springer, 1.973). (A-4.323)
Washington, L., Introduction to cyclotomic fields (Springer, 1.982). (A-5.774)
Watson, G., Integral quadratic forms (Cambridge Tracts N°51, Cambridge University Press, 1.960).
Weil, A., Basic number theory (Springer, 1.967).
Weil, A., Adeles and algebraic groups (Birkhäuser, 1.982).

APENDICE V
SOBRE LA POPULARIZACION DE LA MATEMATICA
Edgardo L. Fernández Stacco

En nuestros días es difícil encontrar alguna persona que niegue la necesidad de una popularización amplia del conocimiento matemático. La matemática básica debe proveerse desde las etapas más tempranas del proceso de educación e instrucción. Podemos esperar el éxito únicamente si utilizamos situaciones de la vida diaria y temas familiares como llaves para entrar al territorio de la matemática con la ayuda de problemas que sean, al mismo tiempo, estimulantes y llenos de ingenio.

Esto lo escribía en 1.908 el matemático y educador húngaro J. I. Ignatyev. Pensamos que está en perfecta armonía con lo que se plantea en la actualidad.

Si era necesario popularizar la matemática hace 90 años, es más urgente ahora, ya que existe una divergencia creciente entre el avance de la ciencia en general, y de la matemática en particular, y la comprensión que de ella tienen la vasta mayoría de los seres humanos.

La ciencia está en la base de toda tecnología y, como resultado, influye en la vida diaria y en el trabajo de la mayoría de la gente. La ciencia debe estar presente en la toma de decisiones importantes de una nación, instituciones y cuerpos locales, y un ciudadano informado, cualquiera sea su ocupación, debe tener algún conocimiento de los puntos cruciales sobre los cuales basar sus opiniones.

Podemos afirmar entonces que la popularización de la ciencia es una necesidad económica y democrática y la provisión de ella es uno de los desafíos sociales más importantes en un futuro cercano.

¿Y qué podemos decir de la matemática? La matemática se enseña hoy desde el jardín de infantes y es decisiva en todos los niveles de la educación superior. Su interacción con las otras ciencias es creciente, así como con las tecnologías y las industrias. Sin embargo, la matemática como ciencia es poco considerada; ciertamente es la más ignorada por la mayoría de la gente frente a cualquier otra ciencia.

Existe una imagen específica de la matemática, con dificultades especiales para su popularización y por lo tanto hay una necesidad para su estudio.

Entendemos por popularización, en sentido amplio, cualquier esfuerzo tendiente a cubrir la brecha existente entre una ciencia y la comprensión pública de ella. Ciertamente la misma deberá tener relación con las instituciones educacionales.

Sin embargo, hay una necesidad urgente de considerar una amplia franja situada fuera del sistema educativo, en parte por el fracaso del sistema educativo mismo y en parte debido a otros propósitos a tener en cuenta.

Comparada con la enseñanza formal, la popularización es una actividad matemática en la que sus agentes son libres de elegir sus temas y métodos. Comparada con el aprendizaje institucionalizado, debe ser considerada como una actividad matemática libre, no compulsiva.

RAZONES DE SU ESTUDIO

En la mayoría de los países y sobre todo en los más desarrollados, la imagen pública de la matemática es bastante pobre. Abundan los chistes y puntos de vista incorrectos sobre la matemática y sus cultores. Mencionemos algunos de ellos: "Todos los problemas han sido formulados", "La matemática no es creativa", "La matemática no es parte de la cultura humana", "El único propósito es expulsar a los estudiantes de colegios y universidades", "La matemática puede ser importante para otras personas, pero no para mí", etc. Aún cuando parece positiva, la imagen es usualmente equivocada. "La matemática es siempre correcta, y provee verdades absolutas, sólidas y estáticas".

La imagen de los matemáticos es aún peor: arrogantes, elitistas, clase media, excéntricos y machistas. Les falta "antena social", sentido común y sentido del humor.

Esto no es nuevo. Roger Ascham, educador del siglo XVI y tutor de la reina Elisabeth I de Inglaterra se refería así a los matemáticos: "Observe a todos los mejores matemáticos, los cuales están volcados totalmente y solamente a esa ciencia, cuán solos están consigo mismos, cuán inadaptados para vivir en sociedad, cuán ineptos para servir al mundo". Estos puntos de vista fueron utilizados por escritores populares durante mucho tiempo. Blas Pascal, considerado como un gran matemático, oponía al "espíritu de la geometría" (el pensamiento matemático) el "espíritu de la fineza" (un pensamiento exacto). Este último era atributo de "gentes honestas" (nobleza y alta burguesía), mientras que el anterior tenía poca consideración. Este contraste u oposición ha sido un tema favorito en las escuelas superiores francesas, y ha contribuido allí a abonar esta visión de los matemáticos como seres extraños, divorciados del mundo real.

Los matemáticos a menudo refuerzan estos puntos de vista por su comportamiento o en sus escritos. No se carece de ejemplos, muchos de ellos famosos.

La mayoría de las personas creen que es necesaria una habilidad especial para dedicarse a la matemática, y aún para su estudio a nivel elemental. Son interesantes los datos obtenidos en una encuesta realizada en Francia. Consultados los estudiantes de 50 liceos de distintos puntos del país, alrededor del 35% de ellos consideraron que la habilidad matemática era un don natural, más que el resultado de un entrenamiento y el trabajo. Entre estos, el 70% de los varones se consideraban dotados, pero solamente el 40% de las mujeres pensaba así.

Sin embargo, estas observaciones no se aplican de la misma forma en todos los países. M. L. Sturgeon, un matemático aplicado norteamericano, describiendo los problemas y percepciones alrededor de la matemática y de los matemáticos en su lugar de trabajo relata: "Un obvio problema de imagen es la ausencia de relación con el éxito, en alguna de las formas aceptadas públicamente: aclamación, bienestar, reconocimiento público, medallas, etc." de la matemática y de los matemáticos.

En China, debido seguramente al trabajo de popularización realizado por más de 50 años por el legendario Hua-Loo-Keng, a través de todo el país, principalmente en la industria y en el campo, ha contribuido a que la matemática sea considerada como el símbolo de la inteligencia. La mayoría de los rectores de las mejores universidades chinas son matemáticos y algunos también figuras políticas. En la ex-Unión Soviética el trabajo matemático era considerado importante, habiendo recibido muchos matemáticos destacados premios estatales. Recordemos que I. Petrovsky, conocido por sus contribuciones a las ecuaciones diferenciales, fue rector de la Universidad Lomonosov de Moscú durante muchos años.

Debe prestarse especial atención a los jóvenes cuyas edades oscilan entre 16 y 18 años. En esos momentos de su vida deben decidir sobre la carrera universitaria a seguir y es aquí donde influye preponderantemente la imagen que se hayan formado de la matemática en su paso por la escuela. Citando nuevamente a Sturgeon: "Para la mayoría de los estudiantes de secundaria, la matemática es una asignatura, no una ocupación (o trabajo). Además, sus relaciones con la matemática pueden disuadirlos de emprender cualquier clase de estudios científicos". Mientras que todos los países necesitan más estudiantes de matemática y más estudiantes de ciencias, la mala imagen de la matemática puede resultar en una pérdida nacional enorme en un futuro cercano. En cambio, una buena o por lo menos mejorada imagen de la matemática puede ser muy beneficiosa para todos los países del mundo.

QUE ES LA POPULARIZACION

Tratemos de encontrar los hechos principales que caracterizan esta actividad, que denominaremos POPULARIZACION DE LA MATEMATICA.

En primer lugar, se trata de COMPARTIR LA MATEMATICA CON UN PUBLICO MUY VARIADO.

Cada una de las palabras que utilizamos deben entenderse en un sentido amplio. La MATEMATICA puede significar todo tema de interés a la comunidad matemática, su contenido, historia, evolución, impacto y aplicaciones.

El público muy variado, sujeto de la popularización, puede ser tanto el investigador matemático como el recipiente de información útil e interesante fuera de su campo de experiencia. Ningún sector de la población debe ser excluido: niños de todas las edades, trabajadores, ciudadanos comunes, todo tipo de profesionales, otros científicos. Todas las motivaciones deben ser consideradas: interés profesional, curiosidad, mejoramiento cultural, y también prejuicios y temores. Esta descripción no abarca toda la dinámica de la popularización. Porque también incluye el tratar de ENTUSIASMAR a la gente para que sean matemáticamente activos.

La matemática no es interesante como una colección de resultados y sí lo es considerada como una forma de pensamiento: cómo formular un problema, cómo buscar una solución, cómo demostrar algo. G. Polya tuvo éxito en popularizar ampliamente su aproximación a la investigación y al descubrimiento matemático. Christopher Zeeman en cambio, insiste en la elección de teoremas para sus charlas populares: deben ser <u>nobles</u> (captar la quintaesencia de alguna rama importante de la matemática) y la demostración debe ser elegante, rigurosa y expresada en pocas líneas. La pregunta surge naturalmente: NO ES LA POPULARIZACION EL PROPOSITO DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA? La principal característica de la popularización es proveer una actividad matemática en libertad, no compulsiva, como ya lo hemos dicho. No implica trabajo duro y esfuerzos, sino libertad y placer.

Desde un punto de vista más general, la popularización de la matemática consiste en devolver la matemática a la cultura humana, o más bien, culturas. Porque, hay que recalcar que no estamos escribiendo para una cultura clase media, europeos occidentales, blancos o americanos del norte. Ya hay alguna bibliografía sobre la matemática en las diferentes culturas. Estas necesitan de una comprensión científica de su medio y sus tecnologías, con sus cambios de escala, programas, controles, datos numéricos, estadísticas, pronósticos, modelos, etc. Ninguno debe apesadumbrarse por las pocas nociones matemáticas involucradas en ellas. Por el contrario, la matemática, junto con su historia y aplicaciones actuales presenta un eslabón natural entre las humanidades y la tecnología.

Puede ser que sea posible avanzar más y encontrar otros aspectos de la popularización. Pero es importante observar a esta altura que tenemos una contradicción. El incorporar la matemática a la cultura de la humanidad significa MATEMATICA PARA TODOS.

Actividad libre significa matemática para aquellos a los que les gusta. Más actividad significa matemática para aquellos que sean aptos para ser activos. COMPARTIR con el público, significa matemática para aquellos que desean escuchar.

Para tratar con esta contradicción, tenemos que considerar a la gente a quien va dirigida y estas cuestiones con más detalle: A QUIEN, QUE, POR QUIEN, COMO CUANDO Y POR QUE.

MATEMATICOS Y MATEMATICAS

En [1], libro que seguiremos en estas reflexiones, se da cuenta de diversas actividades que fueron presentadas especialmente en un seminario organizado por el ICMI (International Congress of Mathematical Instruction) realizado en Leeds, Inglaterra, del 17 al 22 de septiembre de 1.989. Como disparadores naturales para la discusión , sus formas y contenidos, se programaron tres conferencias.

La primera a cargo de C. Zeeman, quien relató sus experiencias en las clases de la Royal Institution, trabajo que realiza junto a la BBC, y una serie de "mañanas matemáticas" algunos sábados con estudiantes. Pese a la oposición de expertos televisivos, impuso su concepción de que la matemática se hace a través de teoremas y que es necesario hacérselos conocer al público. Hay que dar demostraciones, aún en televisión. Por hermosos y nobles teoremas, entiende por ejemplo, probar que $\sqrt{2}$ es irracional o que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Los temas que trató fueron: geometría esférica, perspectiva, giróscopos, engranajes, nudos, curvas con diámetro constante, etc. La conferencia fue un hermoso ejemplo de popularización en acción.

Lynn Steen consideró las relaciones que habían comenzado en fecha reciente en los Estados Unidos entre matemáticos y periodistas. Los matemáticos están interesados en nuevos resultados (por ejemplo:. De Branges) (esto está escrito en 1.990), nuevas direcciones (por ejemplo:. sistemas dinámicos, fractales), nuevos puntos de vista (p. ej. numéricos, algorítmicos). En cambio los periodistas están interesados por las "novedades", que son por las que el público paga. Describió cómo algo nuevo puede convertirse en noticia. Se ha constituido un comité en USA de matemáticos (que representan 15 asociaciones), encargado de las relaciones entre la comunidad matemática y los periodistas, el cual se esperaba produciría una mejor y más profunda comprensión por ambas partes. Por el tema quizá, fue la que se siguió con más atención (y por su dificultad, agrego yo, N. T.).

La de Alain Connes fue una presentación, de sus puntos de vista muy personales sobre algunas direcciones recientes de la matemática. Eligió hablar sobre la relación entre la matemática pura y la física cuántica y las limitaciones impuestas por la teoría clásica de conjuntos. Fue una charla ambiciosa y fue recibida de dos formas muy distintas. Parte de la audiencia, matemáticos y no matemáticos estaban fascinados y muy felices por lo que habían escuchado, mientras que muchos reaccionaron negativamente. La recepción fue muy diferente a la que tuvo la charla un tiempo antes en Palaiseau ante una audiencia más numerosa. ¿Qué ocurrió? ¿En parte la audiencia no estaba demasiado interesada en comprender nuevas ideas en matemáticas y sí en cambio en discutir formas de popularizar las matemáticas con las cuales ellos mismos ya estaban familiarizados? Hasta cierto punto la respuesta a esta última pregunta debe ser SI. La clase además puso en evidencia otras cuestiones vitales concernientes a la popularización.

La noción de "contrato didáctico" entre alumnos y profesores ha sido bastante discutida y refinada en los últimos años. En ésta, como en otra clase de la exhibición (Pop Maths Roadshow), se probó que es útil este contrato para charlas sobre popularización.

La audiencia tiene expectativas y limitaciones y es esencial que estas sean apreciadas por el conferenciante. La clase de A. Connes fue especialmente valiosa, no solamente por lo se expuso, sino también porque ella planteó cuestiones, por ejemplo, no discutidas y desarrolladas en su totalidad sobre los problemas de la popularización a todos los niveles.

Estas consideraciones nos conducen a dos temas fundamentales:

1. La necesidad y las formas de popularización de las matemáticas entre matemáticos y profesores de matemática; y
2. El rol de los investigadores en matemática en el proceso de popularización.

Pasemos a resumir algunos de estos aspectos:

a) <u>El problema de imagen:</u> En la mayoría de los países, parece que la popularidad de la matemática disminuye durante el tiempo en que los estudiantes están expuestos a la matemática en la escuela. Otros temas que se abordan en la escuela no tienen un problema de imagen tan severo. La matemática parece ser más esotérica y menos obviamente útil que otros temas -aún a los matemáticos mismos-, los cuales se encuentran en la necesidad de dar explicaciones populares del trabajo que hay que realizar en las fronteras de su especialidad. Esto puede aparecer como una paradoja al tratar de popularizar una disciplina cuyos propios cultores son a menudo ignorantes de los desarrollos corrientes de su campo.

b) <u>Una evolución positiva:</u> La relación entre los investigadores y los profesores de matemática se está incrementando en muchos países. Hay muy buenos y estimulantes trabajos de investigadores importantes sobre desarrollos actuales de la matemática en revistas especializadas. Los trabajos de "puesta al día" son cada vez más apreciados y algunas revistas tienen una buena política al publicar estos trabajos por invitación. En los Congresos de Matemática el estilo de las charlas generales ha cambiado para mejor en los últimos 20 años: ser comprendido por la audiencia parece ser ahora un principio generalmente aceptado. (La UMA tiene desde hace años incorporada la conferencia J. Rey Pastor).

c) <u>Aunque creciente es aún insuficiente el interés de los matemáticos:</u> La popularización puede ser necesaria aún desde el punto de vista desde la investigación. Citemos a J. Ekeland: "Para poder popularizar, es necesario que uno sea capaz de explicar lo que hace o investiga, y por qué lo hace. Esto contrasta con una cierta práctica de los matemáticos, la mayoría de los cuales no trata de ver los problemas con una visión totalizadora y se contenta con resolver los problemas que pasan frente a su puerta.

Un error común es creer que un resultado difícil es necesariamente importante. Para ser partícipe de la popularización es necesario saber discernir lo que es fundamental, lo que no es moneda corriente en la investigación.

d) El punto de vista histórico: Los matemáticos tienen una relación mucho más fuerte con el pasado de su ciencia que otros científicos. Grandes trabajos del pasado retienen su valor en matemática, frente a, digamos, la química o la física. La historia de la matemática nos da una forma de popularizar la matemática del pasado. La popularización de trabajos recientes o nuevas direcciones en matemática puede ser considerada como piezas de historia reciente.

e) El punto de vista filosófico: Los matemáticos pueden interesar a otra gente cuando ellos se preguntan a sí mismos el significado de lo que están haciendo. Están ellos explorando y descubriendo nuevos continentes? Están inventando y construyendo nuevas máquinas? Los objetos matemáticos están dados en la naturaleza o son ellos una construcción del cerebro humano? Cambian con el tiempo? Cómo? Son definiciones, un punto de partida o un logro histórico? Cómo piensan los matemáticos? Con imágenes, palabras o cualquier otra cosa? Cómo los inspira el mundo exterior, por las necesidades sociales, por las aplicaciones? Qué es lo que llaman modelos y qué teorías? Hay alguna forma de explicar lo que el físico Wigner llama "la irrazonable eficiencia de las matemáticas en las ciencias naturales"? Es de esperar que estas cuestiones fundamentales sean discutidas en los lugares pertinentes, en especial en los congresos internacionales. La popularización estará necesariamente incompleta si los matemáticos activos no forman parte de ella.

COMO, POR QUE SE DEBE HACER, CUANDO

Hay opiniones diversas sobre el rango de la popularización. A qué cantidad de gente se puede llegar con la popularización? Cuál es la proporción de la matemática que puede ser popularizada a una gran audiencia? Respuestas a ambas cuestiones varían entre el 10 y el 100%. En lo que sigue suponemos que no excluimos a ninguna parte de la población y ninguna parte de la matemática en el proceso de popularización.

Una buena forma de comenzar, sugerida por H. Pollak, es construir una grilla, con cuatro columnas: la clase de gente, su motivación, la clase de temas y sus características a tener en cuenta. En la primera grilla usted puede tener dos grandes grupos: adultos y niños. Entre los adultos se pueden definir numerosos subgrupos: colegas, ciudadanos informados, trabajadores, padres, jubilados. Entre los niños, aquellos que les gusta la matemática y, lamentablemente, aquellos que la detestan. Entre los más jóvenes, aquellos que aún son indiferentes o no están decididos. Cada uno puede tratar de llenar las otras casillas.

Ya que recién nos referimos a los "colegas", miremos hacia los ciudadanos informados. Cuál es su motivación? Ellos leen los diarios, quieren participar en cosas importantes. Cuáles pueden ser los temas convocantes para este segmento de la población? Qué conocimientos y en qué profundidad los pueden ayudar a tomar decisiones ponderadas? Cómo pueden ser ayudados para que comprendan mejor la contribución que la matemática hace al bienestar general? Como se verá, el espectro es muy amplio y los contactos con estas personas pueden hacerse en muy variados lugares, incluido un centro de compras.

Otro subgrupo interesante y en rápida expansión es el de los retirados (no necesariamente jubilados). Quieren enriquecer sus vidas, aumentar sus conocimientos, ser capaces de hablar con sus nietos. Pueden estar interesados también en historia, cultura y, en general, en "cosas nuevas". Sus características son que tienen tiempo, les gusta viajar, pueden atender clases y exposiciones.

Agreguemos una nueva entrada: maestros de escuela elemental. Probablemente sus motivaciones y características difieran de país en país, lo que es seguramente válido también para los ciudadanos informados y los retirados. El hecho común es que tienen que dar respuestas a los niños. Les gustaría tener ejemplos buenos y simples a mano sobre nuevos términos y cosas nuevas. Desgraciadamente, una de las características es que ellos están gradualmente más informados y tienen más conocimiento y experiencia en otros temas, que en matemática, y eso los puede llevar a pasar por alto la necesidad de la matemática como parte de la cultura humana.

Observemos la tercera columna: la clase de los temas apropiados para la popularización. Ya hemos dicho que ningún tema debe ser excluido. Hacer una lista es irrelevante. La selección depende de los recipientes, de acuerdo con principios simples:

- La relevancia del tema respecto de problemas actuales de la sociedad o de grupos dentro de ella. Ejemplo: la necesidad de apreciar la información estadística y la seriedad de las encuestas en una campaña electoral. Otro: la de evaluar la magnitud real del interés para préstamos (común hoy en los países ex-socialistas, N. T.).
- Hasta qué punto un tópico introduce e ilustra métodos que tienen valor para la resolución de problemas, como algoritmos, árboles de decisión, heurística o aproximaciones.
- La potencialidad de un tema para causar actitudes emocionales positivas hacia la matemática (su belleza, su universalidad, su credibilidad, la efectividad de una fórmula, etc.). En cierto sentido, las consideraciones planteadas aquí son como "instintos primarios", algo análogo a aquello que genera un interés universal en cuestiones cosmológicas o astronómicas.
- La potencialidad de un tema para ayudar a otros a comprender a aquellos que tienen que tratar con la matemática (a diversos niveles).

Ejemplo: los legisladores deben estar capacitados para entender los análisis de los estadísticos, las solicitudes de los que diseñan políticas, los informes de productividad de los investigadores; los padres deben entender los problemas de sus hijos en la educación matemática.

Una idea importante es la relación entre la matemática y el arte. La presencia de la matemática en varios dominios artísticos, como la pintura y la escultura, han sido tratados en numerosos lugares. Es interesante notar que esta cuestión aún despierta interés, como lo testifica, por ejemplo, la exhibición de John Robinson, en Leeds, así como el proyecto, actualmente en su culminación en el Museo de Bellas Artes de Montreal, de preparar una serie de actividades para los niños de la escuela primaria (edad:11-12), basados en varias piezas pertenecientes al museo. Los propósitos subyacentes de tal iniciativa de un museo pueden ser múltiples: hacer más y mejor conocida la colección del museo, alertar a aquellas personas interesadas principalmente en las artes del papel que puede jugar la matemática ayudando a estructurar el espacio o proveyéndolo con formas interesantes con qué trabajar, proveer un campo inusual de aplicación a las personas con inclinaciones matemáticas, etc.

Como tema específico, el caleidoscopio es un ejemplo particularmente útil exitoso de popularización, pero solamente en el sentido de que la atracción causada por la belleza intrínseca de la imagen es utilizada para inducir a la gente en la construcción de un modelo geométrico apropiado.

Podemos mencionar otros temas, los cuales pueden presentarse a la mayoría de las posibles audiencias en forma apropiada: criptografía, nudos, cuadrados mágicos, dinámica no lineal (catástrofes, fractales), lógica, probabilidades, estadística, optimización, etc.

Hay muchos otros temas para elegir, y algunos pueden tener considerable atractivo. Pensemos en la música: nos se espera que todo el mundo aprecie lo que uno considera habitualmente como "música". Además se acepta que, para ciertos tipos de música (la dodecafónica, por ejemplo) se debe tener una preparación especial para apreciarla en toda su magnitud.

Hay algunos rasgos distintivos que caracterizan a aquellos que toman parte del proceso de popularización.

1) Su propósito no es dar información completa sobre cada tema. Más bien, su papel es el de invitar a la gente a dar un paso más adelante. Por ejemplo, cuando se realiza una exhibición bibliográfica, se debe prestar considerable atención a la selección del material que pueda interesar a los participantes de la misma.

No se puede decir toda la verdad, pero lo que expresen debe ser parte de ella. Los potenciales oyentes deben confiar en el mensaje y no presentir que en un futuro cercano deberán "desaprender" algo antes de poder avanzar en el tema.

2) Deben tener en cuenta una ley general : el nivel de la charla debe variar en forma inversamente proporcional con el tamaño de la audiencia.

3) Sin embargo, hay diferentes puntos de vista y, lógicamente, estilos diferentes. Por ejemplo: Debe ser el escucha mentalmente activo? Para algunos colegas esto es obvio. Tratan de llevar a su audiencia a que participen activamente y tratan también de compartir el pensamiento matemático. Para otros la respuesta no es tan simple. Piensan que su deber es proveer la ayuda necesaria a aquellos que quieren aprender algo sobre la matemática, ya sea porque son débiles o demasiado perezosos para hacer algo por ellos mismos.

Henry Pollak, sin embargo, argumenta a favor de cierta forma de "pereza", en el sentido de que uno de los propósitos de la matemática es encontrar formas más simples de hacer cosas que previamente eran mucho más complicadas.

Como hemos dicho antes, la popularización debe incluir e involucrar a todo tipo de matemáticos, incluyendo los investigadores más reputados. Hay que convencer a todos: matemáticos profesionales, profesores, maestros y también a los estudiantes. Sin embargo no se puede avanzar mucho sin la ayuda y activa participación de toda clase de profesionales de los medios entre los que se encuentran periodistas de radio y televisión, directores de museos y en particular periodistas científicos que juegan un papel muy importante y la calidad de su información es uno de los obvios desafíos de la popularización.

La popularización debe incluir a otros científicos, no matemáticos. Hoy en día, biólogos, físicos (desde siempre), químicos, economistas, geólogos, médicos están interesados en que sus estudiantes se familiaricen con el pensamiento matemático. Hay que aceptar invitaciones de ellos para dar charlas en cursos comunes, o tratar de que interesen a sus alumnos a través de problemas que se hayan discutido en conjunto. Esto es particularmente cierto en algunos temas, por ejemplo en Estadística.

Se pueden también utilizar hermosos escritos, desde Galileo a Richard Feymann, de filósofos, desde Platón a Gastón Bachelard o Michel Serres, que hizo posible que el público francés tuviera a su alcance nuevas ediciones de los clásicos, como por ejemplo las del padre Mersenne (conocido por los números que llevan su nombre, N. T.).

En la popularización de la matemática hay lugar para diferentes acciones y muchos actores.

LA POPULARIZACION Y LAS ESCUELAS

Hemos puntualizado algunas diferencias importantes entre la popularización y la enseñanza. La popularización tiene amplio espectro (de audiencia y temática), muchas más formas y libertad. Lynn Steen puntualiza una diferencia esencial en los propósitos: el de la popularización es aumentar los conocimientos, no educar, y el criterio de éxito está en lograr un cambio de actitudes.

Ejemplos de "blancos particulares" de la popularización debemos considerar a los estudiantes de la escuela primaria y sus maestros.

Podemos afirmar que a ningún niño que entra en la escuela primaria le disgusta la matemática. La popularización a este nivel apunta a prevenir el disgusto generado a través de la matemática escolar.

A esta altura debemos cuestionar nuestro punto de partida. Si consideramos la popularización en sentido amplio -cualquier esfuerzo para llenar el vacío entre la ciencia y su comprensión pública-, ésta debe incluir la educación. Hasta ahora hemos considerado la popularización como complemento, en algunos casos una conexión para el sistema educativo, y hemos descripto algunos rasgos. Sin embargo, ¿no es cierto que parte de la popularización debe ser realizada en la escuela?

La matemática escolar no debe ser necesariamente aburrida. Se pueden organizar exposiciones y diversos proyectos. Tratar de que los trabajos sean en equipo, y de ser posible hacer competir equipos de diferentes escuelas. No en forma de exámenes resolviendo problemas -para eso están las Olimpíadas, y además se predica a los conversos-. Pueden ser problemas planteados y dar, por ejemplo, dos meses para resolverlos y luego en "competencia" evaluar las mejores soluciones, las más ingeniosas, etc. En general, cualquier medio de popularización que tenga éxito debe ser examinado cuidadosamente y tratar de trasladarlo a la educación regular.

Esta idea, si se aplica, puede traer aires renovadores en la enseñanza de la matemática. Primero, (y esto es cierto para otras especialidades) es bueno introducir actividades abiertas y temas no clásicos. Segundo, y esto es lo más importante para la enseñanza, contribuirá a que la matemática aparezca como una ciencia viva y no simplemente como una colección de técnicas o un lenguaje universal.

La aproximación japonesa a la alfabetización matemática es considerar el curriculum como un todo, donde los alumnos tienen que estudiar algo sobre matemática sin aprender matemática en el sentido usual; es una parte del espíritu de la popularización dentro del mismo curriculum. La necesidad de hacer comentarios históricos y relacionarlos con otras ciencias y tecnologías van en la misma dirección.

Por lo tanto, debemos pensar en la popularización antes, durante y después de la educación regular y tratar de reducir la oposición entre ambas actividades. Como lo expresa Víctor Firsov, un rasgo común de una buena popularización y de una buena educación es promover la autoestima.

Si los profesores de matemática se involucran en la popularización, tanto en la escuela como fuera de ella, se puede esperar que la eficacia educativa crecerá significativamente. Necesitan información y material, y deben contar con el apoyo de sus Asociaciones. El entrenamiento profesional debe incluir consideraciones en este aspecto y los educadores deben tener presente la cuestión de cómo familiarizar a los futuros profesores con la matemática como una ciencia viva.

Para llenar el vacío existente entre la matemática y su comprensión pública, los profesores de matemática deben jugar un papel fundamental, quizá afuera, pero ciertamente también dentro de la escuela.

LOS MEDIOS Y EL MENSAJE

Hemos mencionado ya varios medios a través de los cuales puede popularizarse la matemática. Tradicionalmente, estos han sido el escrito y el oral. La historia de la popularización es muy larga. En el "Contador de Arena", Arquímedes comienza diciendo: "Hay algunos, Rey Gelón, que piensan que el número de granos de arena es infinito...". Fue escrito hace más de 2.000 años e intenta revelar más claramente los conceptos de número y magnitudes comparativas. Aquí tenemos un ejemplo de un autor tratando de demostrar a su patrón y a otros altos funcionarios del gobierno el poder de la matemática y, sin duda, la necesidad de hacer adecuadas previsiones para el matemático profesional.

Que la popularización de la matemática puede tomar otras formas y servir a varios propósitos está bien ilustrada en dos intentos de popularización en el siglo 18 de los trabajos de Isaac Newton: El Narrador, de MacLaurin y los Elementos, de Voltaire. Ambos tratan de poner en conocimiento de vastas audiencias los trabajos de Newton, pero por distintas motivaciones: MacLaurin creía que este conocimiento era "el más firme baluarte contra el ateísmo", debemos admitir que este no era ciertamente el propósito principal de Voltaire.

En 1.590. Thomas Gresham inició una serie de clases públicas en Londres, intentando poner al tanto a los ciudadanos ingleses de los nuevos desarrollos en campos que incluían a la geometría y la astronomía. El primer profesor de geometría fue Briggs (quien debe su fama a los logaritmos). Daba sus clases en latín y, posteriormente, en el mismo día, en inglés. Estas clases populares fueron mantenidas hasta nuestros días, y el actual profesor de "geometría" es Christopher Zeeman. Los propósitos en el caso de Gresham eran el generar conocimientos y, en cuanto a la matemática, tratar de demostrar cómo puede ella ayudar a incrementar el poder a comerciantes, navegantes y otras personas.

Estos pocos ejemplos ilustran, no solamente una larga y vieja tradición histórica de popularización, sino también nos ayudan a ver que la popularización puede servir a diversos propósitos.

Actualmente disponemos también de los poderosos medios audiovisuales.

LIBROS Y REVISTAS

A pesar de la creciente competencia de otros medios, los libros y revistas juegan todavía un rol esencial en la popularización de la matemática. Desgraciadamente, no está bien considerado el escribir para el público en general. Se privilegia el paper, solamente para entendidos y cuanto más complicado y hermético, mejor.

Se piensa que, en general, una persona matemáticamente culta debe poseer:

a) Un buen conocimiento de métodos y cuestiones elementales;

b) Haber desarrollado una cierta forma de pensamiento y una aproximación a los problemas;

c) Algún conocimiento de las teorías y conceptos matemáticos;

d) Algún conocimiento de los desarrollos recientes.

La escuela elemental trata solamente de asegurar a). En los demás puntos, libros y revistas pueden ser de mucha ayuda. En particular, el objetivo b) puede ser enseñado desde una edad muy temprana. Los buenos libros pueden enfocar adecuadamente los puntos desde a) hasta d) y las revistas, si no son demasiado específicas b), c) y d). Serias dudas se plantea con aquellas revistas solamente de problemas y entretenimientos.

Las situaciones geométricas, configuraciones numéricas y problemas pueden jugar un papel significativo en el material para niños de escuela primaria, entre 7 y 12 años.

En cambio para los de secundaria es más interesante la introducción al álgebra, la manipulación de expresiones simbólicas y la traducción de problemas en palabras.

En general es difícil alcanzar a los estudiantes secundarios, ya que a esta altura el profesor debe hacer frente a preconceptos y a la hostilidad de los jóvenes hacia la matemática. Es dudoso que libros y revistas puedan hacer algo por sí mismas. Aquí el rol que debe jugar la escuela es esencial, si queremos ganar esta batalla.

Para alumnos mayores (17 ó más) hay que tratar de presentar a la matemática como algo vivo y como parte activa de la ciencia. En particular, para aquellos que serán profesores, hay un lugar muy importante para la historia de la matemática.

Hay buenos libros para aquellos que no serán matemáticos, pero quieren conocer y explorar sus cercanías. Uno de ellos, que está traducido al castellano es: "Gödel, Escher y Bach", de D. Hofstader; otro "The mathematical experience", de P. J. Davis y R. Hersch. Hay una creciente necesidad de libros para adultos. Pero la pregunta es quién los escribe? En la ex-Unión Soviética este menester era muy bien considerado, y hoy tenemos excelentes libros traducidos para universitarios y secundarios avanzados. La traducción al inglés de la revista KVANT (Quantum) es muy recomendable.

PERIODICOS

Hay muy pocas personas que han pasado por la experiencia de haber sido entrevistados por un periodista y no tener luego que desmentir alguna inexactitud.

Pese a todo, los diarios son un medio muy importante, que no puede ser ignorado. No existen periódicos que estén preparados para dar cabida en sus columnas a artículos escritos por "periodistas científicos", que en nuestro país tampoco abundan. Michel Emmer ha publicado artículos sobre como componer tal columna. Aunque los diarios publican noticias y actualidad, la matemática presenta problemas de comunicación particulares de una disciplina que no se caracteriza por logros espectaculares. Aún en esos casos, pensemos en la solución bastante reciente del problema de Fermat. Estos logros no son mencionados por la dificultad de presentar una descripción comprensible del tema. Pero cuál puede ser el matemático a entrevistar en una nota? En general los aspectos extra-matemáticos son los más promisorios para un periodista. Un matemático excéntrico sin duda llama la atención. En una brillante nota de periodismo, que fue reeditada en varios países se describía así a un matemático importante de nuestros días: "no tiene hogar, no tiene familia, no tiene dinero, no tiene más distracción que su "obsesiva búsqueda de "soluciones elegantes"". Otro definía a un matemático como una máquina que transforma café en teoremas. Obviamente son estereotipos. Pese a ello, es posible hacer algo para tratar que en el futuro nuestros jóvenes piensen en llegar a ser matemáticos profesionales.

TV Y PELICULAS

Es difícil subestimar la influencia de la televisión como medio y tratar que la imagen de la matemática aparezca proyectada en la pantalla es crucial en cualquier programa sobre popularización. Hay muchos programas de TV de carácter educativo, pero estos están dirigidos usualmente a un sector específico de la población.

Podemos estimar que son cuatro los tipos o categorías de audiencias particulares para los cuales la TV prepara programas:

a) Niños de escuela primaria (5 a 12 años) cuando están en casa: Como ejemplo de estos programas se puede citar Square One (Children Television Workshop, New York). La moraleja de este programa es que mirar TV es entretenido y hay personajes divertidos que gozan evidentemente de la matemática y, por lo tanto, el tema es útil.

b) Audiencia familiar: Como ejemplo, se puede dar Fun and Games (Yorkshire T.V., Inglaterra). Resolver problemas de ingenio es divertido. Como no hay imposiciones sobre los televidentes (premios por llamar con el resultado acertado, etc.), no hay desaliento en la platea y puede ser considerado un verdadero entretenimiento. Los programas de preguntas y respuestas mantienen su popularidad, pero ahora se pone más énfasis en el problema que en el éxito. El presentador pone su cuota de humor para mantener el interés y siempre existe la posibilidad cierta de que los espectadores continúen reflexionando después del programa sobre los problemas y soluciones posibles

c) Legos: Para no profesionales, interesados en las aplicaciones de la ciencia y de la técnica y, posiblemente, interesados en los conceptos científicos en sí mismos. Como ejemplo tenemos Horizon (BBC, Inglaterra), Equinox (Channel 4, Inglaterra).

Las aplicaciones científicas son importantes, ya sea por razones socioeconómicas o como parte de los avances de la comprensión científica. Muchos temas matemáticos, caos, por ejemplo, pueden ser mostrados a través de películas extremadamente hermosas.

d) Padres interesados en la educación de sus hijos. Ejemplo: Help your children with Maths (BBC, Inglaterra). Muchos padres desean comprender más sobre lo que deben estudiar sus hijos para poder ayudarlos o simplemente para asegurarse de que aún mantienen vínculos con ellos.

Se recomienda que estos programas no se centren únicamente en los aspectos de la llamada matemática pura, sino que en cambio se trate de enfatizar el trabajo de los matemáticos aplicados y las ideas matemáticas que ellos emplean.

La clasificación por la audiencia es una de las posibilidades. Otra clasificación puede hacerse en base al tipo de respuesta que se espera. Se invita al espectador a participar en la resolución de problemas o el propósito es mejorar su apreciación de la matemática dando información sobre su historia, cultura o nuevas tendencias en forma interesante?

No hay duda de que vender la idea de realizar programas de matemática no es fácil. Sin embargo, es esencial la cooperación entre los matemáticos profesionales y los "comunicadores", en particular, los directores profesionales de películas, para armonizar finalmente todo como uno lo desea.

En estos aspectos se puede ganar sustancialmente con los intercambios internacionales de información y experiencias. En estos momentos hay muchas muestras matemáticas en televisión dando vueltas por todo el mundo. Dada la importancia del medio y la influencia que puede tener sobre los niños y adultos, es necesario prestar más atención al tipo de matemática que pueda ser proyectada más eficazmente. Es aconsejable que se realice un estudio especial por parte del ICMI sobre la televisión como vehículo para la popularización de la matemática.

EXPOSICIONES

Es muy difícil que alguien haya visto en nuestro país una exhibición o muestra de matemática, ya sea itinerante o permanente.

Sin embargo, en muchos países las hay en las dos modalidades. En el seminario realizado en Leeds (1.990) fue presentada la muestra matemática más grande exhibida hasta ese momento.

Los franceses fueron pioneros en estas cuestiones.En "La Villette" está la Ciudad de las Ciencias y de la Industria, en la cual hay una sala enteramente dedicada a la matemática. También hay una sala dedicada a la informática, entre las 18 que se encuentran en el nivel 1. En el paseo "De Pitágoras a los fractales", hay geometría, números y movimiento, estadística, modelización y caos.

Hay otro museo interesante, denominado Horizontes Matemáticos.

Diversos museos nacionales, algunos muy importantes, no tienen aún colecciones dirigidas a la matemática. Es posible que una de las principales razones para ello es que muy pocos matemáticos ocupan cargos de relevancia en los museos y que su mediación pueda ser útil para convencer a sus pares de que los temas de matemática pueden ser presentados en forma atractiva y entretenida.

Una cuestión que tiene sus interrogantes es cómo llenar el vacío entre lo que los niños y adultos encuentran interesante y atractivo de las matemáticas y los matemáticos y, por otro lado, lo que se encuentra en las clases, aulas y libros de texto. No hay que buscar la solución fácil de que la última se parezca bastante a la anterior. Ciertamente la matemática institucional tiene mucho que aprender en su presentación, pero, la adquisición de técnicas esenciales que deben ser enfatizadas en el aprendizaje institucional de la matemática es distinto, aunque hay que darle siempre algún peso en una exhibición.

Es necesario entonces que las sociedades de matemática se acerquen a los directores de los museos con el propósito de que las matemáticas estén mejor representadas en sus instituciones.

Hay también otro tipo de exhibiciones: temporales e itinerantes. Horizons Mathématiques ha viajado ya a varios países de Europa, Asia, Africa y América. Tales exhibiciones pueden actuar como centro de atracción para otras actividades matemáticas.

No es necesario que estas exhibiciones se armen en instituciones educativas tradicionales. La Pop Maths Roadshow visitará dos catedrales de Inglaterra; la exhibición "Sciences et Contes", montada por la Universidad de Laval, Quebec, ha visitado centros de compras en varias ciudades pequeñas de provincia. Esta última incluye ejemplos matemáticos de teoría de bifurcación, dinámica de los fluídos y fractales.

El hecho de visitar pequeñas ciudades, donde no hay tanta competencia de entretenimientos, convierte a estas muestras en gran atracción. Hay otra exposición itinerante interesante sobre nudos.

Al igual que en otros casos, es necesario dar información y también proveer de actividades a través de las cuales se gane en comprensión matemática.

Al igual que en el caso de la televisión, hay mucha discusión sobre los roles del matemático profesional y del profesional que diseña la muestra. Debe haber color, belleza, pero nunca debe permitirse que se suplante el contenido matemático serio.

JUEGOS Y ADIVINANZAS

Los juegos y los puzzles juegan un rol importante dentro de la matemática y su popularización. Las colecciones y libros publicados de recreaciones y puzzles matemáticos tienen una vieja data de Ozanam a Martin Gardner. Los puzzles individuales pueden relacionarse con la exponenciación (por ejemplo: granos de arroz sobre el tablero de ajedrez), nos retrotraen varios siglos. Claramente, excitan el interés y tienen capacidad para promover e inculcar el pensamiento matemático. Siempre hay una puja entre que son los juegos y que significa un puzzle. Hay alguna distinción entre ellos en base a la "competición" y al número de gente involucrada. Tony Gardiner dice que los puzzles (por ejemplo el ta-te-ti) tienen una solución matemática la cual, una vez encontrada, hace que el juego no tenga mucho interés. Los juegos presentan muchas más posibilidades de ser interpretados matemáticamente (ajedrez) o introducen elementos aleatorios (bridge, backgammon), lo que agrega alguna pimienta.

Es, por supuesto, muy difícil decir exactamente que influencia pueden tener ciertas clases de juegos en el desarrollo de una persona. En muchos casos, la influencia puede ser vista rápidamente y no hay duda que sirve para fomentar el pensamiento matemático. En otras instancias parece que el bridge nunca ha permitido a los jugadores transferir a la "matemática" su habilidad para apreciar problemas y estructuras lógicas y desarrollar estrategias.

El juego permite desarrollar ciertos atributos que necesitan los "matemáticos" pero deben hacerse ciertas conexiones para que estos atributos conduzcan al éxito en matemática o por los menos a interesarse por ella. Para tomar un ejemplo en particular, los juegos en la computadora pueden desarrollar el sentido espacial. Sin embargo, estos atributos (por ejemplo: la habilidad de apreciar ciertas estructuras y configuraciones lógicas, no son privativas de los matemáticos, porque los arquitectos, digamos, la deben también poseer). La geometría no es, bajo ningún aspecto, sinónimo de conocimiento espacial. A menos que se hagan esfuerzos especiales para matematicar situaciones o promover relaciones, es decir, identificar y capitalizar posibilidades, se perderá la mayoría del valor potencial matemático de estos juegos.

Es necesario preguntarse si demasiada introspección matemática no conducirá a la pérdida de diversión de los juegos. Encontrar el balance no es fácil y se necesita mucho cuidado y paciencia, aunque pueden darse muchos ejemplos de juegos que proveen un contexto para la consolidación del contenido matemático, quizá son más útiles para apuntalar el proceso de hacer matemática. Por ejemplo, el ajedrez da experiencia en el sistema axiomático. En algunos de los juegos por computadora, las funciones exactas de ciertas claves, aunque bien definidas, no se descubren a priori. Sólo pueden ser descubiertas a través de tanteos, conjeturas y pruebas. La utilización de juegos y acertijos, por lo tanto, no está exenta de problemas. Por una parte, el valor de los juegos puede ser desestimado por aquellos cuyo punto de vista es que jugando "no se hace matemática". Por otra parte, el juego puede llegar a ser un fin en si mismo, o creer que cualquier aprendizaje matemático ocurre naturalmente por ósmosis.

COMPETENCIAS

Las olimpíadas matemáticas tienen una larga historia en muchos países y de la Olimpíada Matemática Internacional participan actualmente más de 50 países. La OMI tiene el efecto de llamar la atención hacia la matemática y en ese sentido, así como otros, tiene un papel que cumplir en la popularización de la matemática.

Sin embargo en la OMI y, en la mayoría de los casos, las Olimpíadas Nacionales, predican entre los "conversos", en lo que se refiere a participantes actuales, sus efectos en ciertas circunstancias pueden ser negativos. Uno de los resultados es que se ha prestado bastante atención en los últimos años a competiciones "para las masas". Algunas, como la Olimpíada Matemática Australiana, han tenido un éxito fenomenal: en menos de 10 años la ANC (Australian National Competition) incluyó a más de 400.000 estudiantes.

Por lo tanto, la atención en Leeds no se centró en competencias tipo Olimpíadas, sino en intercambiar opiniones y puntos de vista sobre las diferentes formas que éstas pueden operar.

Hay bastante literatura donde se explican algunos tipos de competencias, sobre todo en Hungría, precursores de estos métodos. Se agregará al final un apéndice sobre el tema por considerarlo de interés. De las diferentes formas de concursos (no olimpíadas) que se realizan en muchos países, y que incluye el uso de la radio y la televisión (en muy pocos casos), los problemas son del tipo "para la casa" y se pone énfasis en organizar ceremonias para dar los premios y en las cuales se invita a los ganadores a describir su trabajo y en general se trata de promover el trabajo en equipo. A veces, como en algunos programas de televisión de preguntas y respuestas, se requiere que el equipo este formado por los padres y hermanos.

Otros paneles de discusión estuvieron dedicados a la naturaleza de los problemas a plantear en las competencias, las categorías de las personas involucradas y los peligros creados por las competencias.

Se piensa que los problemas no deben ser de los dados habitualmente en las escuelas y colegios, sino que reflejen alguna experiencia matemática. Mientras que el formato multiple-choice puede ser adecuado para grupos grandes, hay cuestiones que requieren trabajo intenso. Se pueden asignar tareas o proyectos. En cualquier caso, hay que tener mucho cuidado para ver si las cuestiones planteadas son apropiadas para el grupo a quien van dirigidas y si incorpora variedad e imaginación. Los concursos para la casa evitan las presiones y permiten la reflexión y la búsqueda sin comprometer, de acuerdo a la experiencia de aquellos que lo han intentado, los objetivos de la competencia.

Los grupos a considerar en tales actividades son lógicamente los niños y jóvenes, sus padres y maestros, matemáticos académicos, patrocinadores y el público. Una edad adecuada parece ser la que va entre 11 y 14 años. Tienen un entusiasmo natural y sus intereses aún no son estrechos; por otra parte, ya han evolucionado los suficiente como para participar de una competencia. Debe haber oportunidad para la interacción social, ciertamente en la ceremonia del otorgamiento de premios, y debe haber tantos de modo de premiar a casi todos. Debe alentarse a los chicos a que hablen, aunque sea brevemente, sobre su trabajo. En la escuela, los concursos pueden actuar como disparador para actividades matemáticas extracurriculares.

Los padres deben estar enterados y apoyar el interés matemático de sus hijos, sobre todo asistiendo a las entregas de premios. Los maestros están comprometidos con la preparación de sus alumnos, así como también formando parte de los comités que preparan los problemas, en organización e investigación. Los concursos pueden agrupar y alentar a maestros de similares intereses a ampliar sus percepciones y experiencias matemáticas. Para los matemáticos académicos, hay contacto con maestros y profesores a través de la cooperación y de las visitas a los colegios.

Más allá de la comunidad matemática, los patrocinadores son un vehículo para ampliar el interés del público. Ellos están involucrados directamente y si son lo suficientemente diestros pueden generar publicidad suficiente y atención en el medio.

El peligro principal que debe ser evitado es el desaliento, producido por las preguntas inadecuadas y la falta de preparación. Los candidatos deben saber de antemano como se conducirá el examen y que clase de preguntas hay que contestar. Deben tener los conocimientos necesarios, alguna preparación en dar exámenes y adecuada preparación psicológica.

Las competencias escritas no son el único vehículo para promover el interés de los jóvenes por la matemática. Hay eventos con participación activa, como ligas matemáticas, las que involucran equipos y la actividad cooperativa. Otros eventos pueden incluir competiciones para exhibiciones o exposiciones, premios para maestros que contribuyan con ideas innovadoras y actividades como las Pruebas Matemáticas, en las que participa toda la familia.

Los premios, como se dijo antes, deben ser numerosos y elegidos de manera tal que ellos también contribuyan a la popularización de la matemática. Para este fin, la entrega de libros como los que ya se han mencionado y otros clásicos son particularmente apropiados.

RADIOS

La influencia de la televisión es hoy en día tan grande que considerar a la radio como uno de los medios importantes ha sido subestimada. Aún en muchos países y, sobre todo en varios lugares, la radio es el mayor medio de comunicación. En otros las particularidades de la radio son reconocidas y explotadas, a la par de las de la televisión. Una de las cualidades de la radio es que obliga al escucha a visualizar, no impone una imagen visual particular. Es claro que ello puede dificultar la exposición, pero manejada con imaginación hace que se pueda aprender más efectiva y creativamente.

En particular, se hizo referencia en el seminario de Leeds a la experiencia realizada en Francia a través de "France-Culture", el canal cultural oficial. (Recíprocamente, los escuchas de France-Culture pudieron oír un programa de una hora de duración el 31 de octubre de 1.989 sobre el encuentro de Leeds). Entre los trabajos presentados dos fueron los más exitosos: la historia de Bourbaki y los efectos de ese movimiento, y un programa en cuatro capítulos "Las delicias de las matemáticas". La idea de este programa fue: nada de lecciones, nada de clase, únicamente testimonios. El programa tardó casi un año en prepararse y fue presentado y proyectado por matemáticos. El principal objetivo fue el trabajo de investigación en matemática pura, el impacto en la vida diaria y los aspectos humanos, y orígenes histórico-filosóficos. Entre los entrevistados estaban los matemáticos más famosos del mundo como Cartan, Schwartz, Connes, Serre, etc., y también se incluyó a jóvenes estudiantes y científicos de distintas disciplinas, un filósofo, historiadores, un psicoanalista, un músico y secretarios de departamentos de matemática. No había temas predefinidos pero las entrevistas variaban ampliamente en su propósito de permitir a los escuchas comprender quienes son los matemáticos, que hacen, los porqués, cuáles son los efectos,....

Es claro que el número de escuchas de estas series debe haber sido insignificante frente a aquellos que vieron, por ejemplo, los programas de TV sobre caos o sobre Ramanujan.

Debemos decir que el programa "las delicias..." parece que logró sus objetiva de colocar a la matemática en su contexto epistemológico, filosófico, científico y social: de mostrar a la matemática como parte de la cultura contemporánea.

OTROS MEDIOS

Los medios que hemos mencionado son los que habitualmente se utilizan y son conocidos por educadores y administradores culturales. Otras no son difundidas: formación de grupos de trabajo, "colonias" (al igual que las de vacaciones), en Estados Unidos se han realizado con relativo éxito grupos de trabajo con la participación activa de los padres de una comunidad dada. Hay algunos intentos de extender esta acción grupal para popularizar las matemáticas entre las ahora denominadas "de la tercera edad", dado que para ellos no sólo sirve para los propósitos culturales sino más a uno más amplio, como lo es el social.

El propósito general de involucrar a los padres en las actividades matemáticas a través de grupos, exhibiciones, competiciones, resolución de problemas, etc., fue enfatizada por distintos conferencistas.

Otra cuestión a tener en cuenta que para la popularización muchas veces no es necesario hacer distinción de edades. Esto particularmente visible en la visita a museos (activos!) donde puede encontrarse a veces abuelos, padres y nietos. Cada cual verá y se interesará en las cosas a su modo y desde su óptica particular y el consecuente intercambio de ideas y experiencias será verdaderamente enriquecedor.