INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 61

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1998 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 61

ÁLGEBRAS DE LUKASIEWICZ TRIVALENTES CON UN NÚMERO FINITO DE GENERADORES LIBRES

ÁLGEBRAS DE MOISIL TRIVALENTES CON UN NÚMERO FINITO DE GENERADORES LIBRES

A. MONTEIRO

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1998

El primer trabajo fue realizado por el Dr. Antonio Monteiro y expuesto, en 1966, en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Sur.

Los resultados aquí expuestos fueron utilizados posteriormente por diversos autores. Los mismos se encontraban redactados muy sintéticamente en unas notas tomadas por la Lic. Olga Rueda quien asistió a la exposición de A. Monteiro.

Para facilitar la lectura de este trabajo, hemos incluído las demostraciones de otros resultados inéditos de A. Monteiro obtenidos en 1966, que redactamos y publicamos en: *Unpublished papers I*, Notas de Lógica Matemática 40, INMABB-CONICET-UNS, (1996).

En segundo trabajo fue realizado antes de 1997, pero no encontramos los manuscritos.

Agradecemos al Lic. Ignacio D. Viglizzo la colaboración en la redacción y dactilografiado.

Dr. Luiz F. Monteiro
Marzo 1998

Algebras de Łukasiewicz trivalentes con un número finito de generadores libres

António Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur - 1966
Bahía Blanca - Argentina [1]

1 Introducción

Nos proponemos en esta nota determinar el álgebra de Łukasiewicz trivalente L_n con un número finito n de generadores libres y mostrar que el número de elementos de este álgebra está dado por la fórmula:

$$N(L_n) = 2^{2^n}.3^{3^n-2^n}.$$

La noción de álgebra de Łukasiewicz (trivalente) introducida por Gr. Moisil [5], [6], [7] (Ver A. Monteiro, [8], [10]) desempeña en el cálculo proposicional trivalente de Łukasiewicz un papel análogo al de las álgebras de Boole en el cálculo proposicional clásico. Si L_n es el conjunto de las fórmulas (bien formadas) del cálculo proposicional trivalente de Łukasiewicz, cuyo alfabeto contiene n variables proposicionales $g_1, g_2, \ldots, g_n$, entonces se puede mostrar que el álgebra de Lindenbaum de L_n es el álgebra de Łukasiewicz L_n con un número n de generadores libres.

2 Algebras de Łukasiewicz trivalentes

La noción de álgebra de Łukasiewicz trivalente introducida por Gr. Moisil, puede definirse del siguiente modo: ([10], [14])

Definición 2.1 *Un sistema* $(A, 1, \nabla, \sim, \wedge, \vee)$ *formado por* :1^o) *un conjunto no vacío* A; 2^o) *un elemento* $1 \in A$; 3^o) *dos operaciones unarias* ∇ *y* $\sim$ *y dos operaciones binarias* $\wedge, \vee$, *se dirá un álgebra de Łukasiewicz trivalente si se verifican los siguientes axiomas:*

L1) $x \wedge (x \vee y) = x$

L2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y)$

L3) $\sim\sim x = x$

L4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

[1] Hemos incluído en la bibliografía algunos trabajos publicados después de 1966

L5) $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \nabla x$

L6) $x \vee \nabla \sim x = 1$

L7) $\nabla(x \wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

Usaremos muchas veces las expresiones álgebra o álgebra de Łukasiewicz en vez de álgebra de Łukasiewicz trivalente. Supondremos conocidas las reglas de cálculo válidas en estas álgebras (ver [5], [6], [9]).

Como la noción de álgebra de Łukasiewicz está definida por medio de igualdades , sabemos por un resultado de Garret Birkhoff [3], que existe y es única (a menos de isomorfismos) el álgebra de Łukasiewicz L_α con un conjunto de generadores libres $G = \{g_i\}_{i \in I}$ de cardinal dado α.

Vamos a estudiar las álgebras L_n, donde n es un número natural ≥ 1, esto es $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$.

Si L es un álgebra de Lukasiewicz es bien conocido que el conjunto $B(L) = \{x \in L : \nabla x = x\}$ es una subálgebra de L y mas precisamente $B(L)$ es un álgebra de Boole.

Consideremos el álgebra de Łukasiewicz formada por el conjunto **T**$= \{0, c, 1\}$ y las operaciones $\sim, \nabla, \wedge, \vee$, indicadas en las tablas siguientes:

$\wedge$	0	c	1
0	0	0	0
c	0	c	c
1	0	c	1

$\vee$	0	c	1
0	0	c	1
c	c	c	1
1	1	1	1

x	$\sim x$	∇x
0	1	0
c	c	1
1	0	1

Luego el subconjunto $B(\mathbf{T}) = \mathbf{B} = \{0, 1\}$ de $\mathbf{T}$ es un álgebra de Boole. Pongamos por definición: $\Delta x = \sim \nabla \sim x$.

3 Homomorfismos

Para estudiar un álgebra es importante saber determinar sus imágenes homomórficas.

Definición 3.1 *Si A y A' son dos álgebras de Łukasiewicz, un homomorfismo de A en A' es una aplicación h de A en A' que verifica las siguientes condiciones:*

H1) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$

H2) $h(\sim x) = \sim h(x)$

H3) $h(\nabla x) = \nabla h(x)$

De la fórmula $x \vee y = \sim (\sim x \wedge \sim y)$ se deduce, utilizando H1 y H2 que: H4) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$.
De L6 se deduce: H5) $h(1) = 1' \in A'$. Si ponemos $0 = \sim 1$, entonces de H2 y H5 deducimos que: H6) $h(0) = 0' \in A'$.

Si $h : A \to A'$ es un homomorfismo suryectivo, entonces se dice que A' es una imagen homomórfica de A. De las fórmulas anteriores resulta inmediatamente que el conjunto $h(A)$ es una subálgebra de A', que es una imagen homomórfica de A.

Definición 3.2 *Si A y A' son dos álgebras y h es un homomorfismo de A en A', llamaremos* núcleo *de h al conjunto $Nuc\ (h)$ de todos los elementos $a \in A$, tales que $h(a) = 1' \in A'$, esto es:*

$$Nuc\ (h) = \{x \in A : h(x) = 1'\} = h^{-1}(1').$$

Es fácil ver que $Nuc\ (h)$ tiene las siguientes propiedades:

N1) $Nuc\ (h)$ es un filtro.

N2) Si $x \in Nuc\ (h)$, entonces $\Delta x \in Nuc\ (h)$.

Definición 3.3 *Un filtro F de A que verifica la propiedad N2 se denomina un* Δ-filtro. *Un Δ-filtro F es* propio *si $F \neq A$.*

Recordemos ahora ciertos resultados que necesitaremos para resolver el problema planteado (ver [9], [12]).

Teorema 3.1 *Si h es un homomorfismo de A en A', para que $h(x) = h(y)$ es necesario y suficiente que exista un elemento $n \in Nuc\ (h)$, tal que $n \wedge x = n \wedge y$.*

Teorema 3.2 *Si N es un Δ-filtro de A y ponemos $x \equiv y$* (mód. N) *para indicar que existe un elemento $n \in N$, tal que $n \wedge x = n \wedge y$, entonces "$\equiv$" es una relación de equivalencia definida sobre A, compatible con las operaciones $\wedge, \vee, \sim, \nabla$. Si $|x|$ es la clase de equivalencia que contiene al elemento $x \in A$ y si ponemos:*

$$(1)\ |x| \vee |y| = |x \vee y|; \qquad (2)\ |x| \wedge |y| = |x \wedge y|$$

$$(3) \sim |x| = | \sim x|; \qquad (4)\ \nabla|x| = |\nabla x|; \qquad (5)\ 1' = |1|$$

entonces el sistema $(A' = A/_{\equiv}, 1', \nabla, \sim, \vee, \wedge)$ donde $A' = A/_{\equiv}$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia (mód. N) y por las operaciones $\nabla, \sim, \vee, \wedge$ definidas sobre A' del modo indicado anteriormente, es un álgebra de Łukasiewicz que recibe el nombre de álgebra cociente de A por N *y que representaremos por la notación A/N. La transformación $h(a) = |a|$ es un homomorfismo (natural) de A sobre A', que tiene por núcleo a N. Recíprocamente, toda imagen homomórfica de A puede obtenerse de este modo* ([9]).

Si X es un subconjunto de un álgebra de Łukasiewicz L representaremos por $SL(X)$ la subálgebra (de Łukasiewicz) de L generada por X.

Lema 3.1 *Si G es un conjunto de generadores del álgebra de Łukasiewicz L, esto es $SL(G) = L$ y si h es un homomorfismo de A en un álgebra de Łukasiewcz A', entonces $h(G)$ es un conjunto de generadores del álgebra de Łukasiewcz $h(A)$, esto es $SL(h(G)) = h(A)$.*

4 Filtros primos y Δ-filtros

A continuación vamos a indicar, a fin de facilitar la lectura y comprensión de estas notas, algunos resultados de la teoría de reticulados y otros de A. Monteiro que fueron expuestos en un Seminario de 1966 [11] y publicados en 1996, [12].
Vamos a representar con $\mathbf{D}(L)$ el conjunto de todos los Δ-filtros propios de un álgebra de Łukasiewicz L.

Proposición 4.1 *El conjunto ordenado $(\mathbf{D}(L), \subseteq)$ de los Δ-filtros propios de un álgebra de Łukasiewicz es inductivo superiormente.*

A todo elemento máximo del conjunto ordenado $(\mathbf{D}(L), \subseteq)$ lo denominaremos Δ-filtro maximal. Representaremos con $\mathbf{M}(L)$ el conjunto de todos los Δ-filtros maximales de L.

Teorema 4.1 *Todo Δ-filtro propio es intersección de Δ-filtros maximales.*

Definición 4.1 *Diremos que un filtro P de L es* primo *si $P \neq L$ y si la condición $a \vee b \in P$ implica que $a \in P$ ó $b \in P$.*

Si A es un reticulado distributivo con primer y último elemento, con $\mathbf{F}(A)$ representaremos el conjunto de todos los filtros propios de A. Entonces el conjunto ordenado $(\mathbf{F}(A), \subseteq)$ es inductivo superiormente. A los elementos maximales de este conjunto ordenado se los denomina ultrafiltros. Representaremos con $\mathbf{U}(A)$ al conjunto de todos los ultrafiltros de A. Sabemos que todo ultrafiltro es un filtro primo. Representemos por $\mathbf{P}(A)$ el conjunto de todos los filtros primos de A y por $\mathbf{p}(A)$ el conjunto de todos los filtros primos minimales de A, esto es el conjunto de los elementos minimales del conjunto ordenado $(\mathbf{P}(A), \subseteq)$. Por lo tanto P es un filtro primo minimal, si P es primo y si no existe ningún filtro primo que sea una parte propia de P.

Sea L un álgebra de Łukasiewicz. Si $X \subseteq L$ sea $\sim X = \{x \in L : \sim x \in X\}$ y $\complement X = L \setminus X$. Si $P \in \mathbf{P}(L)$ es bien conocido que $\varphi(P) = \complement \sim P \in \mathbf{P}(L)$. La función φ se denomina transformación de Birula-Rasiowa, [1], [2], y verifica $\varphi(\varphi(P)) = P$ cualquiera que sea $P \in \mathbf{P}(L)$ y si $P, Q \in \mathbf{P}(L)$ entonces $P \subseteq Q \iff \varphi(Q) \subseteq \varphi(P)$.

Si X es un subconjunto de L, notaremos con $F(X)$ el filtro generado por X en el reticulado distributivo L.

Lema 4.1 *Si R es un reticulado distributivo con primer (0) y último elemento (1) y $X \subseteq R$ entonces el filtro generado por X en R es el conjunto:*

$$F(X) = \{y \in R : \text{existen elementos } x_1, x_2, \cdots, x_n \in X \text{ tales que } \bigwedge_{k=1}^{n} x_k \leq y\}.$$

Lema 4.2 *Si X es un subconjunto de R que verifica: $\underline{\text{Si } x, y \in X \text{ entonces } x \wedge y \in X}$, entonces $\overline{F(X) = \{y \in R : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } x \leq y\}}$. Si $0 \notin X$ entonces $F(X)$ es un filtro propio , esto es $F(X) \neq R$.*

Observación 4.1 *Si L es un álgebra de Łukasiewicz, $X \subseteq B(L)$, notaremos por $F_B(X)$ el filtro de $B(L)$ generado por el conjunto X. Es fácil ver que $F_B(X) = F(X) \cap B(L)$.*

Vamos a estudiar las relaciones entre los filtros primos de un álgebra de Łukasiewicz L y los Δ-filtros maximales de L.

Si $X \subseteq L$, sea $\nabla X = \{\nabla x : x \in X\}$ y $\Delta X = \{\Delta x : x \in X\}$.

Lema 4.3 *Si X es un subconjunto de $B(L)$ que verifica: (1) "Si $x, y \in X \Rightarrow x \wedge y \in X$", entonces $F(X)$ es un Δ-filtro.*

Dem. Sea $y \in F(X)$, entonces por la hipótesis (1) y el Lema 4.2, existe $x \in X$ tal que $x \leq y$, luego $x = \Delta x \leq \Delta y$. Entonces por el Lema 4.2, $\Delta y \in F(X)$. ■

Corolario 4.1 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ entonces $F(\Delta P)$, $F(\nabla P)$ son Δ-filtros de L.*

Dem. Sean $x, y \in \Delta P$, luego $x = \Delta p$, $y = \Delta q$, donde $p, q \in P$, luego $x \wedge y = \Delta(p \wedge q)$ y como $p \wedge q \in P$, tenemos que $x \wedge y \in \Delta P$. Luego por el Lema 4.3 $F(\Delta P)$ es un Δ-filtro de L. Análogamente se prueba que $F(\nabla P)$ es un Δ-filtro de L. ■

Lema 4.4 *La transformación $\alpha : \mathbf{D}(L) \to \mathbf{F}(B(L))$, cualquiera que sea $D \in \mathbf{D}(L)$, definida por $\alpha(D) = D \cap B(L)$, es un isomorfismo de orden del conjunto ordenado $(\mathbf{D}(L), \subseteq)$ en el conjunto ordenado $(\mathbf{F}(B(L)), \subseteq)$, y $\alpha^{-1}(Q) = F(Q)$, $Q \in \mathbf{F}(B(L))$.*

Dem. Si $D \in \mathbf{D}(L)$, es fácil probar que $\alpha(D) \in \mathbf{F}(B(L))$. Sean $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(L)$ tales que $D_1 \subseteq D_2$, entonces es claro que $\alpha(D_1) \subseteq \alpha(D_2)$.
Si $D \in \mathbf{D}(L)$, entonces $\alpha(D) = D \cap B(L) \subseteq D$ y en consecuencia $F(D \cap B(L)) \subseteq F(D) = D$. Si $d \in D$ entonces $\Delta d \in D \cap B(L) \subseteq F(D \cap B(L))$ y como $\Delta d \leq d$ tenemos que $d \in F(D \cap B(L))$. Acabamos así de demostrar que : (1) $F(D \cap B(L)) = D$.
Sea $Q \in \mathbf{F}(B(L))$, entonces como Q verifica las condiciones del Lema 4.3 tenemos que $F(Q) \in \mathbf{D}(L)$, y por lo tanto $\alpha(F(Q)) = F(Q) \cap B(L)$. Como $Q \subseteq B(L)$, entonces $Q = Q \cap B(L) \subseteq F(Q) \cap B(L)$. Si $y \in F(Q) \cap B(L)$, entonces (1) $y \in F(Q)$ y (2) $y \in B(L)$. De (1) resulta que existe $x \in Q$ tal que $x \leq y$. Luego teniendo en cuenta (2) tenemos (3) $\nabla x \leq \nabla y = y$. De $x \in Q$, $x \leq \nabla x$ y $\nabla x \in B(L)$ deducimos que (4) $\nabla x \in Q$. De (3) y (4) resulta $y \in Q$. Acabamos de probar que $\alpha(F(Q)) = Q$. Esto muestra que α es una función suryectiva.
Sean $D_1, D_2 \in \mathbf{D}(L)$ tales que $\alpha(D_1) \subseteq \alpha(D_2)$, esto es $D_1 \cap B(L) \subseteq D_2 \cap B(L)$, luego $D_1 = F(D_1 \cap B(L)) \subseteq F(D_2 \cap B(L)) = D_2$. Esto muestra que α es una función biyectiva y que $\alpha^{-1}(Q) = F(Q)$, $Q \in \mathbf{F}(B(L))$. ■

Lema 4.5 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ y $b \in B(L) \cap P$ entonces $b \in F(\nabla P)$.*

Dem. Como $b \in B(L) \cap P$ entonces $b = \nabla b \in \nabla P \subseteq F(\nabla P)$. ■

Es fácil probar que:

Lema 4.6 *(a) Si $b \notin P \in \mathbf{P}(L)$ y $b \in B(L)$ entonces $\sim b \in P$.*

(b) Si F es un filtro propio de L y $b \in F \cap B(L)$ entonces $\sim b \notin F$.

Lema 4.7 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ entonces $F(\nabla P) \in \mathbf{M}(L)$ y $F(\nabla P) \subseteq P$.*

Dem.

1) $F(\nabla P) \subseteq P$.
   Probemos que (i) :$\nabla P \subseteq P$. Sea $t \in \nabla P$, entonces $t = \nabla p$, donde $p \in P$. Como $p \leq \nabla p = t$ y P es un filtro entonces $t \in P$. Como (ii) P es un filtro, entonces de (i) y (ii) deducimos 1).

2) Por el Corolario 4.1, $F(\nabla P)$ es un Δ-filtro. Probemos que es un Δ-filtro maximal. Supongamos que existe $M \in \mathbf{M}(L)$ tal que: (1) $F(\nabla P) \subset M$. Probemos que (2) $M \not\subseteq P$. De (1) resulta que existe un elemento $m \in L$ tal que (3) $m \in M \setminus F(\nabla P)$, entonces como M es un Δ-filtro de (3) deducimos que (4) $\Delta m \in M$. Como $\Delta m \leq m$, teniendo en cuenta (3) resulta (5) $\Delta m \notin F(\nabla P)$.
   Si (6) $M \subseteq P$, entonces de (4) resulta, $\Delta m \in P$ y entonces $\Delta m = \nabla \Delta m \in \nabla P$, luego $\Delta m \in F(\nabla P)$, lo que contradice (5).
   De (2) resulta que existe $z \in L$, tal que (7) $z \in M \setminus P$, entonces (8) $\Delta z \in M$, (9) $\Delta z \notin P$.
   De (8) resulta teniendo en cuenta el Lema 4.6,(b) que (10) $\sim \Delta z \notin M$. De (9) y el Lema 4.6, (a) $\sim \Delta z \in P$, luego $\sim \Delta z = \nabla \sim \Delta z \in \nabla P$, y entonces $\sim \Delta z \in F(\nabla P) \subseteq M$, lo que contradice (10).

■

Si X es un subconjunto de un álgebra L designaremos con $D(X)$ al Δ-filtro generado por X y si D' es un Δ-filtro de L y $x \in L$, designaremos con $D(D', x)$ al Δ-filtro generado por el conjunto $D' \cup \{x\}$. Es bien conocido que:

$$D(D', x) = \{y \in L : \nabla \sim x \vee y \in D'\}.$$

Lema 4.8 *Todo filtro primo P de un álgebra de Łukasiewicz L contiene un y sólo un Δ-filtro maximal.*

Dem. Por el Lema 4.7 sabemos que existe un Δ-filtro maximal contenido en P, a saber $F(\nabla P)$. Sean M, $M' \in \mathbf{M}(L)$ tales que $M \subseteq P$, $M' \subseteq P$ y $M \neq M'$. Entonces existe $x \in M \setminus M'$ o existe $x \in M' \setminus M$. Si $x \in M \setminus M'$ entonces $\Delta x \in M$ y $\Delta x \notin M'$. Como M' es un Δ-filtro maximal entonces $L = D(M', \Delta x) = \{y \in L :\sim \Delta x \vee y \in M'\}$, luego $\sim \Delta x \in L = D(M', \Delta x)$, esto es $\sim \Delta x = \sim \Delta x \vee \sim \Delta x \in M'$, y como $M' \subseteq P$ tenemos $\sim \Delta x \in P$. Como $\Delta x \in M \subseteq P$, entonces $\Delta x \in P$ y por el Lema 4.6(b), $\sim \Delta x \notin P$. Contradicción. Si $x \in M' \setminus M$, tambien llegamos a una contradicción. ■

Lema 4.9 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ entonces $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$.*

Dem. Supongamos que (1) $F(\nabla P) \not\subseteq \varphi(P) = \complement \sim P$, entonces existe (2) $m \in F(\nabla P)$, (3) $m \notin \varphi(P)$.
De (2) deducimos (4) $\Delta m \in F(\nabla P)$ y como $\Delta m \leq m$ de (3) y (4) resulta (5) $\Delta m \notin \varphi(P)$.
Como L es un álgebra de Kleene sabemos que todo filtro primo P de L, es comparable con $\varphi(P)$.
Si $P \subseteq \varphi(P)$, entonces como $F(\nabla P) \subseteq P$, tenemos $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$, lo que contradice (1). Entonces (6) $\varphi(P) \subset P$.

Como $\Delta m \vee \sim \Delta m = 1 \in \varphi(P)$ y $\varphi(P)$ es un filtro primo, entonces teniendo en cuenta (5), tenemos $\sim \Delta m \in \varphi(P)$, y por (6) tenemos $\sim \Delta m \in P$, luego por (4) $0 = \Delta m \wedge \sim \Delta m \in P$.
Demostración de L. Monteiro. Sea $m \in \nabla P$, entonces $m = \nabla p$, donde $p \in P$. Como $\sim p \vee \nabla p = 1 \in \varphi(P)$ y $\varphi(P)$ es un filtro primo entonces $\sim p \in \varphi(P)$ o $\nabla p \in \varphi(P)$. Si $\sim p \in \varphi(P) = \complement \sim P$, entonces $\sim p \notin \sim P$. Esta contradicción muestra que $m = \nabla p \in \varphi(P)$. Acabamos así de probar que $\nabla P \subseteq \varphi(P)$, luego $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$. ∎

Lema 4.10 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$, $P \subseteq \varphi(P)$, y $\nabla a \in P$, entonces $a \in \varphi(P)$.*

Dem. Por hipótesis (1) $P \subseteq \varphi(P)$, y (2) $\nabla a \in P$. Supongamos que (3) $a \notin \varphi(P)$, luego $a \in \sim P$, esto es, (4) $\sim a \in P$. De (2) y (4), tenemos: $a \wedge \sim a = \nabla a \wedge \sim a \in P$, luego $a \in P$, y entonces por (1), $a \in \varphi(P)$, contradicción. ∎

Lema 4.11 *Si $P \in \mathbf{P}(L)$ entonces $P \in \mathbf{M}(L)$ ó $\varphi(P) \in \mathbf{M}(L)$, esto es si P es un filtro primo de L entonces P ó $\varphi(P)$ es un Δ-filtro maximal.*

Dem. Sabemos que (i) $\varphi(P) \subseteq P$ o (ii) $P \subseteq \varphi(P)$. Supongamos que (i) $\varphi(P) \subseteq P$. Por el Lema 4.9, (1) $F(\nabla P) \subseteq \varphi(P)$. Supongamos que $F(\nabla P) \subset \varphi(P)$, entonces existe (2) $a \in \varphi(P)$ tal que (3) $a \notin F(\nabla P)$. Si $\sim \Delta a = \nabla \sim a \in P$ entonces por el Lema 4.5,(4) $\nabla \sim a \in F(\nabla P)$. De (1) y (4) deducimos que $\nabla \sim a \in \varphi(P)$. De (i) $\varphi(P) \subseteq \varphi(\varphi(P))$, entonces por el Lema 4.10 tenemos $\sim a \in \varphi(P) \subseteq P$, lo que contradice (2). Como $\Delta a \vee \sim \Delta a = 1 \in P \in \mathbf{P}(L)$ y $\sim \Delta a \notin P$, deducimos que $\Delta a \in P$, y entonces $\Delta a = \nabla \Delta a \in F(\nabla P)$, luego como $\Delta a \leq a$, tenemos $a \in F(\nabla P)$, lo que contradice (3). Entonces $F(\nabla P) = \varphi(P)$. Vimos asi que si $\varphi(P) \subseteq P$ entonces $F(\nabla P) = \varphi(P)$ es el único Δ-filtro maximal contenido en P. Análogamente si $P \subseteq \varphi(P) = Q$, entonces $\varphi(Q) \subseteq \varphi(P) = Q$, luego por lo visto precedentemente $P = \varphi(Q) = F(\nabla Q) \in \mathbf{M}(L)$. ∎

Corolario 4.2 $\mathbf{M}(L) \subseteq \mathbf{P}(L)$, *esto es todo Δ-filtro máximo de L es un filtro primo de L.*

Dem. Sea M un Δ-filtro maximal, entonces existe $U \in \mathbf{U}(L)$ tal que (1) $M \subseteq U$. Como $\mathbf{U}(L) \subseteq \mathbf{P}(L)$, entonces U es un filtro primo y como $\varphi(U)$ es comparable con U, tenemos necesariamente (2) $\varphi(U) \subseteq U$. Luego por el Lema 4.11 $\varphi(U)$ es un Δ-filtro maximal, y como por el Lema 4.8 existe un único Δ-filtro maximal contenido en U, tenemos que $M = \varphi(U) \in \mathbf{P}(L)$. ∎
Los siguientes resultados son bien conocidos:

Lema 4.12 *Si R es un reticulado distributivo con primer y último elemento (0 y 1 respectivamente), entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) U es un filtro maximal de R.

b) Dado $x \notin U$ existe $u \in U$ tal que $x \wedge u = 0$.

Lema 4.13 *Si R es un reticulado distributivo con primer y último elemento (0 y 1 respectivamente), entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) P es un filtro primo minimal de R.

b) $P = R \setminus I$, donde I es un ideal maximal de R.

y las condiciones siguientes son equivalentes:
c) I es un ideal maximal de R. d) Dado $p \notin I$ existe $q \in I$ tal que $p \vee q = 1$.

Lema 4.14 *(I) $\mathbf{p}(L) \subseteq \mathbf{D}(L)$; (II) $\mathbf{p}(L) = \mathbf{M}(L)$. Esto es todo filtro primo minimal de L es un Δ-filtro de L y el conjunto de los filtros primos minimales de L coincide con el conjunto de todos Δ-filtros maximales de L.*

Dem.

(I) Sea $P \in \mathbf{p}(L)$. Si $0 \in \Delta P$, esto es $0 = \Delta p$ donde $p \in P$, luego $p \notin L \setminus P = I$. Entonces por el Lema 4.13 existe $q \notin P$ tal que $1 = p \vee q$, luego $1 = \Delta(p \vee q) = \Delta p \vee \Delta q = 0 \vee \Delta q = \Delta q \leq q$, y por lo tanto $q = 1 \in P$. Absurdo. Tenemos así que $0 \notin \Delta P$ luego teniendo en cuenta el Corolario 4.1 y el Lema 4.2, tenemos que: (*) $F(\Delta P)$ es un Δ-filtro propio de L. Probemos que $P = F(\Delta P)$. Sea $p \in P$, como $\Delta p \leq p$ y $\Delta p \in F(\Delta P)$ entonces $p \in F(\Delta P)$, luego $P \subseteq F(\Delta P)$. Supongamos que $P \subset F(\Delta P)$, entonces existe un filtro P que verifica (1) $x \in F(\Delta P)$, tal que (2) $x \notin P$. De (1) resulta que existe $p \in P$ tal que (3) $\Delta p \leq x$. De (2) y (3) deducimos (4) $\Delta p \notin P$, y como $\Delta p \vee \sim \Delta p = 1 \in P$, tenemos que (5) $\sim \Delta p \in P$. Como $\Delta p \in F(\Delta P)$ y $P \subset F(\Delta P)$, de (5) deducimos $\sim \Delta p \in F(\Delta P)$, y entonces $0 = \Delta p \wedge \sim \Delta p \in F(\Delta P)$, lo que contradice (*).

(II) a) Sea $P \in \mathbf{p}(L)$ entonces por (I) P es un Δ-filtro. Supongamos que existe $M \in \mathbf{M}(L)$ tal que $P \subset M$, entonces existe (1) $x \in M$ tal que (2) $x \notin P$. Entonces (3) $\Delta x \in M$ y (4) $\Delta x \notin P$. Como $\Delta x \vee \sim \Delta x = 1 \in P$, de (4) tenemos que $\sim \Delta x \in P$, y entonces (5) $\sim \Delta x \in M$.
De (3) y (5): $0 = \Delta x \wedge \sim \Delta x \in M$. Contradicción.
b) Sea $M \in \mathbf{M}(L)$ entonces por el Corolario 4.2, $M \in \mathbf{P}(L)$. Si $M \notin \mathbf{p}(L)$, entonces existe (1) $P \in \mathbf{p}(L)$ tal que (2) $P \subset M$. De (1) resulta por (II) a) que $P \in \mathbf{M}(L)$, lo que contradice (2).

■

Corolario 4.3 *Todo filtro primo de un álgebra de Lukasiewicz L contiene un único filtro primo minimal de L.*

Dem. Por el Lema 4.8 cada filtro primo contiene un y sólo un Δ-filtro maximal, y por el Lema 4.14,(II) el conjunto de los Δ-filtros maximales de L coincide con el conjunto de los filtros primos minimales de L. ■

Lema 4.15 *Si $P \in \mathbf{p}(L)$ y $P \notin \mathbf{U}(L)$ entonces existe un y sólo un $P' \in \mathbf{P}(L)$ tal que $P \subset P'$, y más precisamente $P' = \varphi(P)$.*

Dem. Sea $P \in \mathbf{p}(L)$, sabemos que (1) $\varphi(P) \subset P$ ó (2) $P \subseteq \varphi(P)$. Como $\varphi(P) \in \mathbf{P}(L)$ y P es un filtro primo minimal la condición (1) no se puede verificar. Sea $U \in \mathbf{U}(L)$, tal que $\varphi(P) \subseteq U$, entonces $\varphi(U) \subseteq \varphi(\varphi(P)) = P$, luego como P es un filtro primo minimal debemos tener que $\varphi(U) = P$, luego $U = \varphi(P)$.

Entonces $\varphi(P)$ es un ultrafiltro que contiene P. No puede ocurrir que $\varphi(P) = P$, pues por hipótesis $P \notin \mathbf{U}(L)$, entonces :

$$P \subset \varphi(P) \text{ y } \varphi(P) \text{ ultrafiltro.}$$

Sea $P' \in \mathbf{P}(L)$ tal que (3) $P \subset P'$. Vamos a demostrar que (4) $P' \subseteq U = \varphi(P)$. En efecto si $P' \not\subseteq U$ existe (5) $p' \in P'$ tal que (6) $p' \notin U$. De (6) , ver Lema 4.12 , deducimos que existe (7) $u \in U$ tal que (8) $u \wedge p' = 0$. Si $u \in P'$ entonces $0 = u \wedge p' \in P'$, y por lo tanto $P' = L$, contradicción. Como $P' \in \mathbf{P}(L)$ entonces por el Lema 4.7:

$$(9)\ F(\nabla P') \in \mathbf{M}(L) \text{ y } (10)\ F(\nabla P') \subseteq P'.$$

Por el Lema 4.14, (II), $\mathbf{p}(L) = \mathbf{M}(L)$, entonces (11) $P \in \mathbf{M}(L)$. Por el Lema 4.8 sabemos que cada filtro primo de un álgebra de Łukasiewicz contiene un y sólo un Δ-filtro maximal, entonces de (9), (10), (11) y (3), tenemos que: (12) $F(\nabla P') = P$.
De (5) resulta (13) $\nabla p' \in \nabla P' \subseteq F(\nabla P') = P$. Como $P \subseteq \varphi(P) = U$ y $P \in \mathbf{M}(L)$, por el Lema 4.8 tenemos que $P = F(\nabla U) \subseteq U$.
De (7) resulta (14) $\nabla u \in F(\nabla U) = P$, y de (8), (13) y (14): $0 = \nabla 0 = \nabla(u \wedge p') = \nabla u \wedge \nabla p' \in P$, contradicción. Entonces $P' \subseteq U = \varphi(P)$.
Supongamos que $P' \subset U = \varphi(P)$, entonces tenemos $P \subset P' \subset U$, luego

$$P = \varphi(U) \subset \varphi(P') \subset \varphi(P) = U.$$

De $\varphi(P') \subset U$, deducimos que existe $u \in U$ tal que $u \notin \varphi(P')$. Sabemos que P' y $\varphi(P')$ son comparables. Supongamos que $P' \subseteq \varphi(P')$. Como $u \wedge \sim u \leq u$ entonces: (i) $\sim u \wedge \nabla u = u \wedge \sim u \notin \varphi(P')$. De $u \notin \varphi(P')$ deducimos $\sim u \in P'$ y como $\nabla u \in F(\nabla U) = P \subset P'$, entonces $\sim u \wedge \nabla u \in P' \subseteq \varphi(P')$ lo que contradice (i).
Si $\varphi(P') \subseteq P'$, tambien llegamos a una contradicción.
Entonces $U = \varphi(P)$ es el único filtro primo que contiene a P como parte propia. ■

Corolario 4.4 *Si $P \in \mathbf{p}(L)$ y $P \notin \mathbf{U}(L)$ entonces el único filtro propio F que contiene a P como parte propia es $F = \varphi(P)$.*

Dem. Sea F un filtro propio tal que: (1) $P \subset F$, y supongamos que $F \notin \mathbf{U}(L)$, entonces existe (2) $U \in \mathbf{U}(L)$ tal que (3) $F \subset U$. De (1) y (3) tenemos: $P \subset U$, de donde deducimos por el Lema 4.15 que $U = \varphi(P)$. Sea (4) $x \in U \setminus F$.
Como $F = \bigcap\{P' : P' \in \mathbf{P}(L), F \subseteq P'\}$ y $x \notin F$, entonces existe $P' \in \mathbf{P}(L)$ tal que (5) $F \subseteq P'$ y (6) $x \notin P'$. De (4) y (6) tenemos $P' \neq U = \varphi(P)$. De (1) y (2): (7) $P \subset P'$. Entonces existe un filtro primo P', diferente de $\varphi(P)$ que contiene P como parte propia, lo que es imposible por el Lema 4.15. ■

El siguiente resultado es bien conocido ([9])

Teorema 4.2 *Si M es un Δ-filtro maximal de A, entonces A/M es isomorfa a $\mathbf{B}$ o a $\mathbf{T}$.*

5 Determinación del álgebra de Lukasiewicz L_n con n generadores libres

Es bien conocido que si L es un álgebra de Lukasiewicz, no trivial, entonces L es isomorfa a una subálgebra de

$$\prod_{M\in\mathbf{M}(L)} L/M$$

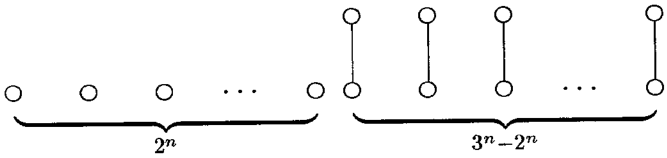
y que si el conjunto $\mathbf{M}(L)$ es finito entonces $L \cong \prod_{M\in\mathbf{M}(L)} L/M$. Vamos a demostrar que el conjunto $\mathbf{M}(L_n)$ es finito de donde resultará que el conjunto de sus filtros primos es finito, y sabemos que este conjunto determina L_n. Por el Teorema 4.2 si $M \in \mathbf{M}(L_n)$ entonces $L_n/M \cong \mathbf{B}$ ó $L_n/M \cong \mathbf{T}$. Identificando álgebras isomorfas entonces $L_n/M = \mathbf{B}$ ó $L_n/M = \mathbf{T}$.

Sea M un Δ-filtro maximal de L_n y m el homomorfismo natural de L_n sobre el álgebra cociente L_n/M. Como $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ es el conjunto de generadores libres de L_n, entonces por el Lema 3.1, $m(G)$ es un conjunto de generadores de L_n/M. El homomorfismo m determina una aplicación f de G en $\mathbf{T}$, precisamente la restricción, $m_{|G}$ de m al conjunto G, esto es $f(g) = m_{|G}(g) = m(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Luego como $L_n/M = \mathbf{T}$ ó $L_n/M = \mathbf{B}$, entonces $f : G \to \mathbf{T}$. Pongamos por definición: $\psi(M) = m_{|G}$, luego $\psi : \mathbf{M}(L_n) \to \mathbf{T}^G$. Recíprocamente, si f es una aplicación de G en $\mathbf{T}$, entonces existe uno y sólo un homomorfismo h_f de L_n en $\mathbf{T}$ que prolonga f. Sea $M = Nuc\ (h_f)$. Es claro que h_f y f coinciden sobre G y por lo tanto la restricción de h_f al conjunto G es una función de G en $\mathbf{T}$ que coincide con f, luego $\psi(Nuc\ (h_f)) = f$, lo que prueba que la función ψ es suryectiva. Esto ya muestra que el conjunto $\mathbf{M}(L_n)$ es finito, pero vamos a probar que existe una correspondencia biunívoca entre los Δ-filtros maximales de L_n y las aplicaciones de G en $\mathbf{T}$. En efecto, sean M_1 y M_2 dos Δ-filtros maximales de L_n y $m_1 : L_n \to L_n/M_1$ y $m_2 : L_n \to L_n/M_2$ los respectivos homomorfismos naturales. Sean f_1 y f_2 las restricciones de m_1 y m_2 ,respectivamente, al conjunto G, luego $f_1 : G \to \mathbf{T}$, $f_2 : G \to \mathbf{T}$.
Supongamos que $\psi(M_1) = \psi(M_2)$ esto es que $f_1(g) = f_2(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Luego, $m_1(g) = f_1(g) = f_2(g) = m_2(g)$. La función $f_1 = f_2$ admite una única extensión a L_n y como m_1 y m_2 son extensiones de f, entonces $m_1(x) = m_2(x)$, cualquiera que sea $x \in L_n$. Por lo tanto $M_1 = M_2$.
Acabamos así de probar que existen tantos Δ-filtros maximales como aplicaciones de G en $\mathbf{T}$. El número de aplicaciones de G en $\mathbf{T}$ es 3^n y por lo tanto existen 3^n Δ-filtros maximales distintos en L_n, esto es 3^n filtros primos mínimos distintos.
Determinemos el número de Δ-filtros maximales M, tales que $L_n/M = \mathbf{B}$. En este caso, el homomorfismo natural m aplica L_n sobre $\mathbf{B}$ y por lo tanto la restricción f de m a G es una aplicación de G en $\mathbf{B}= \{0, 1\}$.
El número de tales aplicaciones es, evidentemente, 2^n: Veamos que el conjunto de estos Δ-filtros maximales de L_n coincide con el conjunto de los ultrafiltros de L_n.
En efecto, sea M un Δ-filtro maximal de L_n tal que (1) $L_n/M = \mathbf{B}$ y $m : L_n \to \mathbf{B}$ el homomorfismo natural. Sea U un ultrafiltro tal que (2) $M \subseteq U$. En el Corolario 4.2 probamos que $M = \varphi\ (U)$ luego $\sim\ M = \complement U$.
Sea $S = M \cup \sim\ M = M \cup \complement U$. Vamos a demostrar que S es una subálgebra de L_n que contiene a G. En efecto:

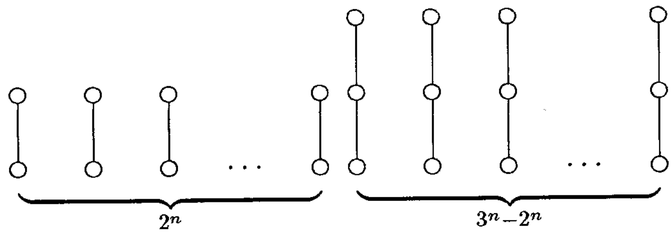
(I) $G \subseteq S$. Sea $g \in G$, si $g \in M$ entonces $g \in S$. Si $g \notin M$ entonces por (1) $m(g) = 0$ y por lo tanto $m(\sim g) = \sim m(g) = 1$ luego $\sim g \in M$ y en consecuencia $g \in \sim M \subseteq S$.
(II) S es una subálgebra. Sea $s \in S$ luego $s \in M$ ó $s \in \sim M$. En el primer caso $\sim s \in \sim M \subseteq S$. En el segundo $s = \sim m$ donde $m \in M$ luego $\sim s = m \in M \subseteq S$.
Sean $s, t \in S$, luego podemos tener los siguientes casos (a) $s, t \in M$, (b) $s, t \in \sim M$ y (c) $s \in M$, $t \in \sim M$.
(a) En este caso como M es un filtro, $s \wedge t \in M \subseteq S$
(b) $s = \sim m_1$ con $m_1 \in M$ y $t = \sim m_2$ con $m_2 \in M$, luego $s \wedge t = \sim (m_1 \vee m_2)$ y como M es un filtro, $m_1 \in M$ y $m_1 \leq m_1 \vee m_2$ tenemos que $m_1 \vee m_2 \in M$ y por lo tanto $s \wedge t \in \sim M$.
(c) $t = \sim m$ con $m \in M$, luego $s \wedge t = s \wedge \sim m = \sim (\sim s \vee m)$. Como $m \in M$, $m \leq \sim s \vee m$ y M es un filtro tenemos que $\sim s \vee m \in M$ y en consecuencia $s \wedge t \in \sim M$.
Para demostrar que S es una subálgebra sólo nos falta demostrar que
(III) S verifica "Si $s \in S$ entonces $\nabla s \in S$."
Para ello vamos a demostrar en primer lugar que $B(L_n) \cap (U \setminus M) = \emptyset$. En efecto si existiera $b \in B(L_n) \cap (U \setminus M)$ entonces (d) $b \in B(L)$, (e) $b \in U$ y (f) $b \notin M$. Sabemos que si b es un elemento booleano de un álgebra de Łukasiewicz, su complemento booleano es precisamente $\sim b$ (ver [4], [15]), luego de (d) resulta que (g) $b \vee \sim b = 1 \in M$. Por el Corolario 4.2, M es un filtro primo de L_n, luego de (g) y (f) resulta que $\sim b \in M$, luego (h) $b \in \sim M = \complement U$. De (e) y (h) se concluye que $0 = \sim b \wedge b \in U$, absurdo.
De $B(L_n) \cap (U \setminus M) = \emptyset$ resulta que $B(L_n) \subseteq \complement(U \setminus M) = \complement U \cup M = S$, y en consecuencia se verifica (III).
Por lo tanto como S es una subálgebra de L_n que contiene a los generadores de L_n tenemos que $S = L_n$, esto es $M \cup \complement U = M \cup (U \setminus M) \cup \complement U$ y por lo tanto $U \setminus M \subseteq M \cup \complement U$, luego

$$U \setminus M = (U \setminus M) \cap \complement(M \cup \complement U) \subseteq (M \cup \complement U) \cap \complement(M \cup \complement U) = \emptyset$$

De $U \setminus M = \emptyset$ resulta que $U \subseteq M$ y como $M \subseteq U$ tenemos finalmente que $M = U$ y en consecuencia M es un ultrafiltro.
Recíprocamente, si un ultrafiltro M es un Δ-filtro, entonces M es un un Δ-filtro maximal. En efecto si M' es un Δ-filtro tal que $M \subset M' \subset L_n$ entonces M' sería un filtro propio que contiene a M como parte propia lo que contradice que M es un ultrafiltro. Probemos en este caso que $L_n/M = \mathbf{B}$. Si $L_n/M = \mathbf{T}$, y m es el epimorfismo natural de $L_n \to \mathbf{T}$, entonces $m^{-1}(1) = M$, y existe $a \in L_n$ tal que $m(a) = c$. Ademas $U = m^{-1}(c)$ es un ultrafiltro de L_n tal que $U \neq M$, luego $M = m^{-1}(1) \subset m^{-1}(c) = U$, absurdo. Por lo tanto $L_n/M = \mathbf{B}$.
Luego existen 2^n, Δ-filtros maximales que son ultrafiltros y por lo tanto $3^n - 2^n$ Δ-filtros maximales que no son ultrafiltros.
Para cada Δ-filtro maximal M que no es ultrafiltro, $L_n/M = T$. Además hemos demostrado que cada Δ-filtro maximal M está contenido propiamente en uno y sólo un ultrafiltro U. Por lo tanto, el diagrama de Hasse del conjunto de todos los filtros primos de L_n es el siguiente:



Y en consecuencia, L_n es el producto cartesiano de las cadenas indicadas en el siguiente diagrama de Hasse:



De donde resulta finalmente

$$L_n = \mathbf{B}^{2^n} \times \mathbf{T}^{3^n-2^n}$$

y

$$\boxed{N(L_n) = 2^{2^n}.3^{3^n-2^n}}$$

Referencias

[1] Bialynicki-Birula A., *Remarks on quasi-Boolean algebras*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 615-619.

[2] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-Boolean algebras*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences. Classe III, 5 (1957), 259-261.

[3] Birkhoff G., *Lattice Theory.* Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, 3rd ed., Providence (1967).

[4] Cignoli, R., *Boolean elements in Łukasiewicz algebras I*, Proc. Japan Acad., 41, 8 (1965), 670-675. Notas de Lógica Matemática 23, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.

[5] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes.* Annales Sc. de l'Université de Jassy, 26 (1940), 431- 466.

[6] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysippiennes.* Annales Sc. de l'Université de Jassy, 27 (1941), 86-98.

[7] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algébres de Łukasiewicz trivalentes.* Analele Universitatii C. I. Parhon, Serie Acta Logica, 3 (1960), 83-95.

[8] A. Monteiro, *Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays.* Revista del Unión Matemática Argentina 20 (1960), 308- 309.

[9] Monteiro A., *Curso sobre Algebras de Lukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[10] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*. Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R. P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Notas de Lógica Matemática 21, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[11] Monteiro A., *Seminario sobre Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1966.

[12] Monteiro A., *Représentation d'une algèbre de Łukasiewicz trivalente, par une algèbre de Łukasiewicz trivalente d'ensembles. Caractère universel de la construction £ des algèbres de Łukasiewicz trivalentes*. Publicado en *Unpublished Papers, I*, Notas de Lógica Matemática 40, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1996.

[13] Monteiro A. y Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Nelson, de Łukasiewicz trivalentes, de De Morgan et de Kleene* . Publicado en *Unpublished Papers, I*, Notas de Lógica Matemática 40, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1996.

[14] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes*. Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R. P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Notas de Lógica Matemática 22, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[15] Monteiro L., *Les algèbres de Heyting et de Łukasiewicz trivalentes*. Notre Dame Journal of Formal Logic, XI, 4 (1970), 453-466.

Algebras de Moisil trivalentes con un número finito de generadores libres

António Monteiro

Instituto de Matemática - Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca - Argentina [2]

1 Introducción

La noción de álgebra de Łukasiewicz trivalente introducida por Gr. C. Moisil [2], [3], [5], puede definirse del modo indicado en el trabajo anterior (Ver A. Monteiro, [6], [7], [8] y [9]).

Las álgebras de Łukasiewicz trivalentes con eje fueron introducidas por Gr. M. Moisil [4]. De acuerdo con resultados indicados por L. Monteiro [10], un álgebra de Łukasiewicz L tiene eje si existe un elemento $e \in L$, denominado eje de L, tal que (1) $\Delta\ e = 0$, (2) $x = (\Delta\ x \vee e) \wedge \nabla\ x$, cualquiera que sea $x \in L$. Si un álgebra de Łukasiewicz tiene eje, el es único [10]. A estas álgebras las denominaremos álgebras de Moisil trivalentes o álgebras de Moisil.

Un álgebra de Łukasiewicz L se dice centrada si existe un elemento $c \in L$ tal que $\sim c = c$, y c se denomina centro del álgebra. Sabemos que si un álgebra tiene centro el es único y que toda álgebra de Łukasiewicz con centro c es un álgebra con eje y que el eje es precisamente c. La noción de álgebra de Łukasiewicz centrada coincide con la noción de álgebra de Post trivalente. Es claro que si A, A' son álgebras de Moisil, e es eje de A y $h : A \to A'$ es un homomorfismo entonces $h(e)$ es un eje de $h(A)$. Para mas detalles sobre la teoría de homomorfismos ver [7].

Consideremos el álgebra de Łukasiewicz centrada formada por el conjunto $\mathbf{T} = \{0, c, 1\}$ indicada en el trabajo anterior. Vimos que el subconjunto $B(\mathbf{T}) = \mathbf{B} = \{0, 1\}$ de $\mathbf{T}$ es un álgebra de Boole.

Si X es un subconjunto de un álgebra de Łukasiewicz A, representaremos por $SL(X)$ la subálgebra de Łukasiewicz de A generada por X, y si A es un álgebra con eje notaremos con $SM(X)$ la subálgebra de Moisil de A generada por X. Claramente si A es un álgebra de Moisil y e su eje entonces, $SM(X) = SL(X \cup \{e\})$.

Representemos con $\mathbf{M}(A)$ el conjunto de todos los Δ-filtros maximales de un álgebra de Łukasiewicz A. El siguiente resultado es bien conocido ([7])

Teorema 1.1 *Si D es un Δ-filtro maximal del álgebra de Łukasiewicz A, entonces A/M es isomorfo a $\mathbf{B}$ o a $\mathbf{T}$.*

Como la noción de álgebra de Moisil se puede definir por medio de igualdades, sabemos por un resultado de Garret Birkhoff [1], que existe y es única (a menos de isomorfismos) el álgebra de Moisil M_α con un conjunto de generadores libres $G = \{g_i\}_{i \in I}$ de cardinal

[2] Trabajo realizado antes de 1977

dado α.

Representemos con M_n el álgebra de Moisil con un conjunto $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ de generadores libres.

2 Determinación del álgebra M_n

Es bien conocido que si A es un álgebra de Lukasiewicz, no trivial, entonces A es isomorfa a una subálgebra de

$$\prod_{D \in \mathbf{M}(L)} L/D$$

y que si el conjunto $\mathbf{M}(L)$ es finito entonces $L \cong \prod_{D \in \mathbf{M}(L)} L/D$.

Por el Teorema 1.1 si $D \in \mathbf{M}(M_n)$ entonces $M_n/D \cong \mathbf{B}$ ó $M_n/D \cong \mathbf{T}$. Identificando álgebras isomorfas entonces $M_n/D = \mathbf{B}$ ó $M_n/D = \mathbf{T}$.

Sea $\mathbf{M}_1(M_n) = \{D \in \mathbf{M}(M_n) : M_n/D = \mathbf{B}\}$ y $\mathbf{M}_2(M_n) = \{D \in \mathbf{M}(M_n) : M_n/D = \mathbf{T}\}$.

Si $D \in \mathbf{M}_1(M_n)$ sea m el homomorfismo natural de M_n sobre el álgebra cociente M_n/D. El homomorfismo m determina una aplicación f de G en $\mathbf{B}$, precisamente la restricción, $m_{|G}$ de m al conjunto G, esto es $f(g) = m_{|G}(g) = m(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Pongamos por definición: $\psi_1(D) = m_{|G}$, luego $\psi_1 : \mathbf{M}(M_n) \to \mathbf{B}^G$. Recíprocamente, si f es una aplicación de G en $\mathbf{B}$, entonces existe uno y sólo un homomorfismo h_f de M_n en $\mathbf{B}$ que prolonga f. Como $h_f(M_n) = SL(h_f(G))$ y la única subálgebra de $\mathbf{B}$ es la propia $\mathbf{B}$ entonces $h_f(M_n) = \mathbf{B}$, esto es h_f es un epimorfismo. Sea $M = Nuc\ (h_f)$. Es claro que h_f y f coinciden sobre G y por lo tanto la restricción de h_f al conjunto G es una función de G en $\mathbf{B}$ que coincide con f, luego $\psi_1(Nuc\ (h_f)) = f$, lo que prueba que la función ψ_1 es suryectiva. Vamos a probar que ψ_1 es biunívoca. En efecto, sean $D_1, D_2 \in \mathbf{M}_1(M_n)$, $m_1 : M_n \to M_n/D_1$ y $m_2 : M_n \to M_n/D_2$ los respectivos homomorfismos naturales. Sean f_1 y f_2 las restricciones de m_1 y m_2 respectivamente, al conjunto G, luego $f_1 : G \to \mathbf{B}$, $f_2 : G \to \mathbf{B}$.

Supongamos que $\psi_1(D_1) = \psi_1(D_2)$ esto es que $f_1(g) = f_2(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Luego, $m_1(g) = f_1(g) = f_2(g) = m_2(g)$. La función $f_1 = f_2$ admite una única extensión a M_n y como m_1 y m_2 son extensiones de f, entonces $m_1(x) = m_2(x)$, cualquiera que sea $x \in M_n$. Por lo tanto $D_1 = D_2$.

Acabamos así de probar que el número de elementos de $\mathbf{M_1}(M_n)$ es igual al número de funciones de G en $\mathbf{B}$, y sabemos que este número es igual a 2^n.

En forma análoga si $D \in \mathbf{M}_2(M_n)$ y m es el homomorfismo natural de M_n sobre el álgebra cociente $M_n/D = \mathbf{T}$, entonces el homomorfismo m determina en este caso una aplicación f de G en $\mathbf{T}$, precisamente la restricción, $m_{|G}$ de m al conjunto G, esto es $f(g) = m_{|G}(g) = m(g)$, cualquiera que sea $g \in G$. Poniendo por definición: $\psi_2(D) = m_{|G}$,entonces $\psi_2 : \mathbf{M}_2(M_n) \to \mathbf{T}^G$. Recíprocamente, si f es una aplicación de G en $\mathbf{T}$, entonces existe uno y sólo un homomorfismo h_f de M_n en $\mathbf{T}$ que prolonga f. Como $h_f(M_n) = SM(h_f(G)) = SL(h_f(G) \cup \{c\})$ y la única subálgebra de $\mathbf{T}$ que contiene al centro de $\mathbf{T}$ es la propia $\mathbf{T}$ entonces $h_f(M_n) = \mathbf{T}$. Del mismo modo que el anterior se concluye que ψ_2 establece una biyección entre $\mathbf{M}_2(M_n)$ y el conjunto de todas las funciones de G en $\mathbf{T}$ y sabemos que este conjunto tiene 3^n elementos.

Acabamos así de probar que:

$$M_n = \mathbf{B}^{2^n} \times \mathbf{T}^{3^n}.$$

por lo tanto el número, $N(M_n)$ de elementos de M_n es:

$$\boxed{N(M_n) = 2^{2^n}.3^{3^n}}$$

Referencias

[1] Birkhoff G., *Lattice Theory.* Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 25, 3rd ed., Providence (1967).

[2] Moisil Gr. C., *Recherches sur les logiques non-chrysippiennes.* Annales Sc. de l'Université de Jassy, 26 (1940), 431- 466.

[3] Moisil Gr. C., *Notes sur les logiques non-chrysippiennes.* Annales Sc. de l'Université de Jassy, 27 (1941), 86-98.

[4] Moisil Gr. C., *Sur les lanneaux de carctéristique 2 ou 3 et leurs applications.* Bull. de l'Ecole Polytechnique de Bucarest 12 (1941), 66-95.

[5] Moisil Gr. C., *Sur les idéaux des algébres de Łukasiewicz trivalentes.* Analele Universitatii C. I. Parhon, Serie Acta Logica, 3 (1960), 83-95.

[6] A. Monteiro, *Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays.* Revista del Unión Matemática Argentina 20 (1960),.308- 309.

[7] Monteiro A., *Curso sobre Algebras de Łukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[8] Monteiro A., *Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes.* Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R. P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Notas de Lógica Matemática 21, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[9] Monteiro L., *Axiomes indépendants pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes.* Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R. P. Roumaine, nouvelle série 7 (55), (1963), 1-12. Notas de Lógica Matemática 22, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1964.

[10] Monteiro L., *Algebras de Łukasiewicz trivalentes monádicas.* Notas de Lógica Matemática 32, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1974.