INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 62

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1998 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 62

EL PROBLEMA LINEAL CUADRATICO

M. FUSTER

Departamento de Mat emática
Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1998

EL PROBLEMA LINEAL CUADRATICO

por

Lic. Monica Alejandra Fuster

Preliminares de una tesis de Magister

bajo la supervision del

Dr. Ariel Fernandez

Este informe apunta a un análisis del problema, considerando dos enfoques, uno tradicional, basado en el calculo de variaciones, y otro más actual que usa técnicas diferentes.

INDICE

INTRODUCCIÓN

1 Descripción del problema

El problema lineal cuadrático está formado por un sistema de control lineal con condiciones iniciales, al cuál se adjunta una integral de una función cuadrática a minimizar.

Una investigación de este problema conduce a:

- El costo óptimo está dado por la norma del estado inicial del sistema respecto de una matriz, que es solución de una ecuación diferencial del tipo Riccati.
- La ley de control óptima es una ley feedback, que también depende de la matriz solución de la anterior ecuación tipo Riccati. Este resultado se debe esencialmente a Kalman.
- El enfoque tradicional resuelve el problema a partir del cálculo de variaciones, haciendo uso de la ecuación de Hamilton-Jacobi o bien mediante el principio del máximo.

Conviene hacer un breve detalle de lo que es la teoría de control de sistemas dinámicos, que es una extensión del cálculo de variaciones.

La teoría de control es el área de la matemática aplicada que permite construir sistemas de control. Controlar un objeto significa afectar su comportamiento para alcanzar un objetivo.

Para lograr esto, los ingenieros construyen distintos dispositivos que necesitan de técnicas matemáticas.

La elección de un modelo matemático en algunos casos puede estar condicionada por la tecnología a usar.

Existen dos líneas principales en la teoría de control.

Una se basa en un buen modelo del objeto a controlarse y en el que uno desea optimizar su comportamiento.

La otra línea esta basada en restricciones impuestas en torno al modelo o al medio en el cuál el objeto opera.

La herramienta principal es el uso del feedback con el fin de corregir desviaciones, a partir del comportamiento deseado. Matemáticamente, la teoría de estabilidad, en sistemas dinámicos y especialmente la teoría de funciones de variables complejas, han tenido una fuerte influencia sobre el control feedback.

2 Precursores - Proyección histórica

El primero que trató el problema lineal cuadrático desde el punto de vista variacional fue R. Kalman en 1960, el llamado problema del regulador lineal.

Considerando un sistema lineal con coeficientes dependientes del tiempo se obtiene la solución óptima del problema a partir de la solución de la ecuación diferencial de Riccati; usando técnicas clásicas del cálculo de variaciones. Considera el problema de horizonte finito. Además analiza el problema del horizonte infinito, que es el más tratado en la literatura posterior, el cuál depende de la solución de una ecuación algebraica de tipo Riccati en el caso que el sistema lineal sea a coeficientes constantes.

Wohnam considerando un problema de horizonte infinito y un sistema a coeficientes constantes reafirma lo probado por Kalman para este caso (1968), precisando que la solución de esta ecuación algebraica es definida positiva.

Kucera considerando lo planteado por Wohnam encuentra una condición necesaria y suficiente para probar el resultado anterior (1972).

Todos estos resultados corresponden a un problema con costo no negativo, donde la matriz de peso de la función de control es definida positiva.

Por esta última condición se los llama problemas regulares. Si esta matriz de peso fuera definida no negativa se los llama problemas singulares. En la década del 70, los investigadores centran su atención sobre el problema lineal cuadrático singular, requiriendo de técnicas matemáticas más delicadas que las usadas para el problema regular con el fin de obtener respuestas a algunos interrogantes. Este punto no va a ser desarrollado.

Velimir Jurdjevic considera un costo no necesariamente cuadrático llamado costo indefinido. Formula criterios para obtener la solución óptima que no dependen de la ecuación diferencial del tipo Riccati, como es usual en la literatura clásica. Se aparta del cálculo de variaciones para inferir resultados (1990).

Si bien algunos autores en este último tiempo se han dedicado al problema lineal cuadrático singular, el problema lineal cuadrático parece tener interés en la actualidad por su aplicación a la teoría de los juegos, además de otras aplicaciones de importancia.

Asimismo existen muchos interrogantes sobre problemas con costo indefinido.

3 Significancia - Importancia

Fue estudiado por primera vez para resolver el llamado problema del regulador lineal, es decir un problema donde la idea es mantener el estado del sistema en un valor deseado.

ANALISIS DEL TEMA POR R. KALMAN

El objetivo del paper R. E. Kalman es el diseño de sistemas de control lineal de modo de minimizar la integral de una función cuadrática evaluada a lo largo de los movimientos del sistema.

Analizaremos sólo el caso más simple, el llamado problema del regulador, usando la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y herramientas clásicas del cálculo de variaciones, en particular la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Dentro de la contribución principal del paper sólo vamos a tomar la introducción y explotación del concepto de controlabilidad. En particular probamos teoremas de existencia para el problema del regulador. Dicho problema está muy ligado a la ecuación matricial de Riccati, la cual aparece como caso especial de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

1 Notación y Terminología

Usamos la notación vectorial - matricial con las siguientes convenciones:

Las letras qriegas minúsculas son escalares.
Las letras minúsculas son vectores.
Las letras mayúsculas son matrices.
La matriz unidad es I.
Excepciones i, j, m, p son enteros ; t, E, L,V son escalares; ϕ, ψ, ξ son vectores.

El producto interno [x, y]. La transpuesta de la matriz se nota por prima. La norma $\|x\| = [x, x]^{\frac{1}{2}}$. La norma $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Una convención especial $\|x\|_P^2 = [x, \mathrm{Px}]$ donde P es simétrica, definida positiva. Si A, B son simétricas $A > B$ $(\mathrm{A} \geq \mathrm{B})$ significa A-B definida positiva (no negativa). Las letras t, σ, τ son números reales arbitrarios que siempre indican tiempo.

A traves del paper todos los escalares, vectores y matrices son reales. Para una función escalar L(u) del vector u, L_u es el vector gradiente y L_{uu} es la matriz jacobiana.

2 Formulación del problema

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + B(t)\,u \tag{2.1}$$

$$y(t) = H(t).x \tag{2.2}$$

donde H(t) es una función continua de t.

Las ecuaciones **(2.1-2)** constituyen la planta e y = y (t) es la salida de la planta.

La planta es constante si A, B y H son constantes. Si u(t)=0 o B(t)=0, la planta es libre.

El comportamiento de la planta se describe mediante la solución de la ecuación diferencial **(1.1)** que existe para todo t y es única si, u(t) es integrable Lebesgue.

Como se sabe ([1]), la solución general tiene la forma :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\ x(t_0)\ +\ \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\ B(\tau)\ u(\tau)\ d\tau \tag{2.3}$$

donde $\Phi(t,\tau)$ es la matriz fundamental del sistema libre **(2.1)** que satisface la condición

$$\Phi(t,t)=I \qquad \forall t \tag{2.4}$$

La solución **(2.3)** se nota $x(t)=\Phi_u(t,x^0,t_0)$ **(2.5)** y se interpreta como el movimiento de una partícula que parte de un estado inicial x^0 en un tiempo t_0 y es observado en un tiempo t, e influenciado por la función de control u(t), definida en el intervalo $[t_0, t]$.

Esta función se elige de modo que el $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi_u(t,x^0,t_0)=0$.

La función de control u(t) se construye de la siguiente manera: el número $u(t_1)$ se obtiene a partir de $y(t)$: $t \le t_1$. Esto usualmente se refiere como principio *feedback.*

Suponiendo que x(t) se conoce exactamente entonces el problema de generar u(t) se reduce a encontrar la ley de control

$$u(t)=K(x(t),\ t) \tag{2.6}$$

Para asegurar que **(2.1)** con **(2.6)** tenga solución única es suficiente que $K \in C^1$.

Nos interesa una ley de control **(2.6)** para la cual

$$V^0(x,t_0,t_1)=\inf_u \left\{ \upsilon\ (\Phi_u\ (t,x^0,t_0)+\int_{t_0}^{t_1} L\ (\Phi_u\ (t,x^0,t_0),u(t),t)\,dt \right\} \tag{2.7}$$

es alcanzado para todo x, t_0, t_1, donde υ y L son funciones escalares no negativas de clase C^2 en todos los argumentos. La clase de funciones u(t) que se admiten al tomar el ínfimo en **(3.3)** son de clase D^0 (es decir, continuas excepto en puntos aislados en los que u(t) tiene límites a izquierda y a derecha).

Es bien conocido del cálculo de variaciones ([2], p.196) que la condición $L_{uu} \geq 0$ o $L_{uu} \leq 0$ es necesaria para la existencia de extremos locales. Para evitar complicaciones debido al signo de la igualdad, asumiremos que

$$L_{uu}(x, u, t) > 0 \qquad \forall (x, u, t)$$

lo cuál es equivalente a decir que L es estrictamente convexa en u.

La integral es el índice de perfomance. La función ν es agregada para mayor generalidad.

Veamos la notacón $V(x, t_0, t_1; u)$ para el valor fijo, específico u(t). El superindice o se identifica como "óptimo".

3 Relaciones con el cálculo de variaciones

Resolvemos primero **(2.7)** en un caso muy especial, adaptando el problema local del cálculo de variaciones ([2], Ch. 12) a nuestra necesidad :

3.1 <u>Lema</u> (Carathéodory)

Sea K(x, t) una función de m-dimensional de clase C^1 en x, t. Llamamos

$$u^0 = K(x,t) \ .$$

Suponemos $\nu = 0$ y la función L en **(2.7)** satisface para cada x, para cada $t_0 \leq t \leq t_1$.

(a) $L(x, u^0, t) = 0$

(b) $L(x, u, t) > 0 \qquad \forall \; u \neq u^0$

Entonces V^0 es idénticamente nulo para todo x y es alcanzado por

$$u^0 = K\ (x(t), t) \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

Demostración

Sea Φ_{u^0} el movimiento de la planta bajo la ley de control **(3.1.1)**. Sea Φ_u el movimiento correspondiente a alguna función de control $u^1(t)$.

Por (*b*) y teniendo en cuenta el tipo de función de control admisible sigue que $V^0(x^0, t_0, t_1, u^1) > 0$ a menos que $u^1(t) = u^0(t)$ en cada punto de continuidad de u^1 en el intervalo (t_0, t_1).

Por otro lado por (*a*) vemos que $V^0(x, t_0, t_1)$ es idénticamente nulo en x c.q.d.

Para formular un teorema fundamental del cálculo de variaciones que nos va a permitir encontrar la solución del problema del regulador óptimo necesitamos definir el hamiltoniano $H(x, \varsigma,, t)$ como la siguiente expresión:

$$H(x, \varsigma, t) = L(x, \psi, t) + [\varsigma, A(t)x + B(t)\psi]$$

3.2 Teorema

Si existe una solución $V^0(x, t, t_1)$ de clase C^2 de la ecuación de *Hamilton-Jacobi*

$$V_t^0 + H\left(x, V_x^0, t\right) = 0$$

o

$$\text{equivalentemente} \begin{cases} B'(t).\ V_x^0 = -L_u(x, u^0, t) & (3.2.1) \\ \\ -V_t^0 = L(x, u^0, t) + \left[V_x^0, A(t)x + B(t).u^0\right] & (3.2.2) \end{cases}$$

que satisface $\quad V^0(x, t_1, t_1) = \nu\ (x)$

y si $\quad L_{uu}(x, u\ , t) > 0 \qquad \forall\ (x, u, t).$

entonces V^0 es el óptimo para el problema del regulador y la ley de control óptimo está dada por

$$u^0 = \Psi\,(x, B'(t)\ .V_x^{\ 0}(x, t, t_1), t) = K(x, t, t_1) \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

Demostración

Sea $V^0(x, t, t_1)$ una función escalar de clase $C^{\,2}$ en x, t (siendo t_1 un número fijo) y sujeto a $V^0(x, t, t_1) = V\,(x)$

- Reemplacemos L por L^*.

Esto es

$$L^*(x,u,t) = L(x,u,t) + V_t^{\,0}(x,t,t_1) + \left[V_x^{\,0}(x,t,t_1), A(t)x + B(t)u\right]$$

$$\int_{t_0}^{t_1} V_t^{\,0}(x,t,t_1) + \left[V_x^{\,0}(x,t,t_1), A(t)x + B(t)u\right] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} V_t^{\,0}(x,t,t_1) + \left[V_x^{\,0}(x,t,t_1), \frac{dx}{dt}\right] dt = \int_{t_0}^{t_1} dV^0 =$$

$$= V^1(x',t_1,t_1) - V^0(x^0,t_0,t_1) = V^0\left(\Phi_u(t_1,x^0,t_0)\right) - V^0(x^0,t_0,t_1)$$

Obviamente no depende de la función de control $u(t)$, luego ambos problemas variacionales $\inf\limits_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} L^*(\Phi_u(t,x,t_0),u(t),t)dt$ son equivalentes y tienen la misma función minimizante $u(t)$ (si tal función existe).

Tratamos ahora de encontrar funciones $V^0(x,t,t_1)$ y $K(x,t,t_1)$ para las cuales las hipótesis del lema se satisfacen cuando L se reemplaza por L^*.

$L^*(x, u, t)$ tiene un mínimo con respecto a u en $u = u^0 = K(x,t,t_1)$, es necesario que todas las primeras derivadas de L^* con respecto a u desaparezcan en u^0.

Esto y la condición $L^*(x, u^0, t) = 0$:

$$\begin{cases} L^*(x,u^0,t) = 0 \\ \dfrac{\partial L^*}{\partial u}(x,u^0,t) = 0 \end{cases}$$

$$0 = L(x,u^0,t) + V_t^{\,0}(x,t,t_1) + \left[V_x^{\,0}(x,t,t_1), A(t)x + B(t)u^0\right] =$$

$$= L(x,u^0,t) + \left[V_x^{\,0}(x,t,t_1), A(t)x + B(t)u^0\right] - V^0{}_t(x,t,t_1) =$$

$$= L(x,u^0,t) + \left[V_x^{\,0}(x,t,t_1), A(t)x + B(t)u^0\right]$$

Para la segunda condición de

$$L^*(x,u,t) = L(x,u,t) + V_t^{\,0}(x,t,t_1) + \left[V_x^{\,0}(x,t,t_1), A(t)x + B(t)u\right]$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial u}(x,u,t) = L_u(x,u,t) + B'(t).V_x^{\,0}(x,t,t_1)$$

$$-L_u(x,u^0,t) = B'(t)\ V_x^{\,0}(x,t,t_1)$$

las ecuaciones
$$\begin{cases} -V_t^{\,0} = L(x,u^0,t) + \left[V_x^{\,0}(x,t,t_1), A(t)x + B(t)u^0\right] & \textbf{(3.3.1)} \\ \\ -L_u(x,u^0,t) = B'(t).V_x^{\,0}(x,t,t_1) & \textbf{(3.3.2)} \end{cases}$$

se llaman ecuaciones fundamentales del problema variacional.

De la hipótesis $L_{uu}(x,u^0,t) > 0 \quad \forall(x,t,t_1)$, vía el teorema de la función implícita, sigue que $B'(t).V_x^{\,0} = -L_u(x,u^0,t)$, puede ser resuelta para u^0.

Más precisamente existe una función ψ de clase C^1 talque

$$u^0 = \psi(x, B'(t).V_x^{\,0}(x,t,t_1)) = K(x,t,t_1) \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

que es la ley de control óptima deseada.

Para verificar la condición (b) del lema, escribimos usando **(3.3.1-2)**.

$$L^*(x,u,t) = L(x,u,t) - L(x,u^0,t) - \left[u - u^0, L_u(x,u^0,t\ )\right]$$

En efecto por definición

$$L^*(x,u,t) = L(x,u,t) + V_t^0(x,t,t_1) + \left[V_x^0(x,t,t_1), A(t)x + B(t)u\ \right]$$

De (3.3.1)

$$L^*(x,u,t) = L(x,u,t) - L(x,u^0,t) - \left[V_x^0, A(t)x + B(t)u^0\right] + \left[V_x^0(x,t,t_1), A(t)x + B(t)u\right]$$

$$L^*(x,u,t) = L(x,u,t) - L(x,u^0,t) - \left[B'(t).\ V_x^0, u^0 - u\right]$$

De (2.3.2)

$$L^*(x,u,t) = L(x,u,t) - L(x,u^0,t) - \left[u-, u^0, L_u(x,u^0t)\right]$$

$$L(x,u,t) - L(x,u^0,t) - \left[u - u^0, L_u(x,u^0,t)\right] = E(x,u,u^0t)$$

es la conocida E *-función de Weierstrass.*

La función $E(x,u,u^0,t)$ es el resto cuadrático en la serie de *Taylor* de L en $u = u^0$.

Esto es:

$$E(x,u,u^0,t) = \left\| u - u^0 \right\|^2_{L_{uu}(x,u+\theta(u^0-u),t)} \qquad 0 \le \theta \le 1$$

como $L_{uu} > 0$ $\qquad E(x,u,u^0,t) = 0$ si y solo si $u = u^0$

Por lo tanto si existe una función V^0 que satisface
$V^0(x,t_1,t_1) = \nu\ (x)$, y **(3.3.1−2)** y $L_{uu} > 0$
aplicamos el lema de *Carátheodory* y encontramos que V^0 es la que resuelve **(2.7)** para la ley de control **(3.3.3)**.

Ahora definimos en la expresión del hamiltoniano

$$\varsigma = V_x^{\ 0} \qquad\qquad \psi = \psi(x, B'\varsigma, t)$$

Luego si $V^0(x,t,t_1)$ es una solución de clase C^2 de **(3.3.1-2)** sigue trivialmente que V^0 satisface la ecuación de *Hamilton-Jacobi*

$$V_t + H(x,\ V_x^{\ 0}, t) = 0 \tag{3.3.4}$$

Recíprocamente sea $V^0(x,t,t_1)$ $(t_1 = \text{parámetro})$ es una solución de clase C^2 de la ecuación $V_t^{\ 0} + H(x, V_x^{\ 0}, t) = 0$. Definiendo $u^0 = \psi(x,\ B'V_x^{\ 0}, t)$ sigue que V^0 satisface las ecuaciones variacionales.

En efecto de **(3.3.4)** sigue que

$$-V_t^{\ 0} = L(x, u^0, t) + \left[V_x^{\ 0}, Ax + Bu^0\right]$$

Derivando **(3.3.4)** respecto a u resulta que

$$0 = L_u(x, u^0, t) + B'(t)\ V_x^{\ 0}$$

$$B'(t)\ V_x^{\ 0} = -L_u(x, u^0, t)$$

c.q.d.

En particular este resultado fundamental del cálculo de variaciones permite obtener la solución del problema lineal cuadrático, llamado por *Kalman* problema del regulador lineal.

4 Solución del problema del regulador lineal.

Se llama caso lineal del problema del regulador si las funciones L y ν son de la forma

$$L(x,u,t)=\frac{1}{2}\left\{\| H(t)x \|^2_{Q(t)}+\| u\|^2_{R(t)}\right\} \qquad \textbf{(A1)}$$

$$\nu(x)=\frac{1}{2}\| x\|^2_C$$

donde C es simétrica, definida no negativa, en tanto que Q(t) y R(t) son simétricas, definidas positivas de clase C^2 en t.

4.1 <u>El índice o costo óptimo en términos de la ecuación de *Riccati*</u>

Como consecuencia de las definiciones de L y ν:

$$H(x,\varsigma,t)=\frac{1}{2}\left\{\|H(t)x\|^2_{Q(t)}+2\left[A(t)x,\varsigma\right]-\|B'(t)\|^2_{R^{-1}(t)}\right\}$$

En efecto

$$H(x,\varsigma,t)=L(x,\psi,t)+[\varsigma, A(t)x+B(t)\psi]$$

$$H(x,\varsigma,t)=\frac{1}{2}\left\{\|H(t)x\|^2_{Q(t)}+\|\psi\|^2_{R(t)}\right\}+[\varsigma, A(t)x+B(t)\psi]$$

$$H(x,\varsigma,t)=\frac{1}{2}\{<Hx,QH>+<\psi,R\psi>\}+[\varsigma, Ax+B\psi]$$

De las ecuaciones variacionales

$$\begin{cases} B'\varsigma=-Ru^0 \\ V_t^0=L(x,u^0,t)+[\varsigma, Ax+Bu^0]V_t^0=L(x,u^0,t)+[\varsigma, Ax+Bu^0] \end{cases}$$

ó $$\begin{cases} B'\varsigma=-R\psi \\ V_t^0=L(x,\psi,t)+[\varsigma, Ax+B\psi] \end{cases}$$

$$H(x,\varsigma,t)=\frac{1}{2}\{<Hx,QHx>+<R^{-1}B'\varsigma,B'\varsigma>\}+[\varsigma,Ax]-[\varsigma,BR^{-1}B'\varsigma]$$

$$H(x,\varsigma,t)=\frac{1}{2}\{<Hx,QHx>+<R^{-1}B'\varsigma,B'\varsigma>\}+[\varsigma,Ax]-[B'\varsigma,R^{-1}B'\varsigma]$$

$$H(x,\varsigma,t)=\frac{1}{2}\{<Hx,QHx>-<B'\varsigma,R^{-1}B'\varsigma>+2[Ax,\varsigma]\} \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

Con esta elección de *H*, la función

$$V^0(x,t,t_1)=\frac{1}{2}\|x\|^2_{P(t,t_1)} \qquad t_1 = \text{parámetro} \qquad \textbf{(4.1.2)}$$

es una solución de la ecuación $V_t^0 + H(x, V_x^0, t) = 0$ si y solo si P(t, t_1) es una solución de la ecuación diferencial no lineal del tipo *Riccati* .

$$\frac{-dP}{dt} = A'(t)P + PA(t) - PB(t)R^{-1}(t)B'(t)P + H'(t)QH(t) \qquad \textbf{(4.1.3)}$$

En efecto, vemos primero que si $V^0(x,t,t_1) = \frac{1}{2}\| x\|^2_{P(t,t_1)}$ cuales son las expresiones de $V_t^0(x,t,t_1)$ y $V_x^0(x,t,t_1)$

Obviamente $V_t^0(x,t,t_1) = \frac{1}{2}\left\langle x, \frac{dP}{dt}x\right\rangle$.

Para calcular $V_x^0(x,t,t_1)$

Sea $\Phi(x) = \frac{1}{2}\langle x, Px\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j} p_{ij}\, x_i\, x_j$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}p_{kk}\, x_k^{\;2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i\neq x} p_{ik}\, x_i\, x_k\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j\neq k} p_{kj}\, x_j\, x_k\right)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_K} = p_{kk} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i\neq k} p_{ik}\, x_i\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j\neq k} p_{kj}\, x_j\right)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_K} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i} p_{ik}\, x_i\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j} p_{kj}\, x_j\right)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_K}\right)_{K=1,..,n} = \frac{1}{2}(P + P')(x)$$

Como asumimos que P es simétrica

$$V_x^0(x,t,t_1) = P\,x$$

Luego si $V^0(x,t,t_1) = \frac{1}{2} < x, P(t,t_1)x >$ satisface la ecuación de *Hamilton-Jacobi*

$$V_t^0 + H(x, V_x^0, t) = 0$$

Resulta que

$$< x, \frac{dP}{dt}x > + \frac{1}{2} < Hx, QHx > + < Ax, Px > - \frac{1}{2} < B'Px, R^{-1}B'Px >= 0$$

$$\frac{1}{2} < x, H'QHx > + < x, A'Px > - \frac{1}{2} < x, PBR^{-1}B'Px >= \frac{1}{2} < x, \frac{dP}{dt}x >$$

$$\frac{1}{2} < x, H'QHx > + \frac{1}{2} < x, A'P > + \frac{1}{2} < x, PAx > - \frac{1}{2} < x, PBR^{-1}B'Px >= -\frac{1}{2} < x, \frac{dP}{dt}x >$$

$$\frac{1}{2} < x, \left(H'QH + A'P + PA - PBR^{-1}B'P\right)x >= -\frac{1}{2} < x, \frac{dP}{dt}x >$$

$$< x, \left(H'QH + A'P + PA - PBR^{-1}B'P - \frac{dP}{dt}\right)x >= 0 \quad \forall x$$

Llamando $T = H'QH + A'P + PA - PBR^{-1}B'P - \dfrac{dP}{dt}$

$$T = (t_{ij})_{i,j}$$

$$< x, Tx > = \sum t_{ij}\, x_i\, x_j \qquad \forall x$$

Sea $x = (0, \ldots, x_k \ldots, x_l, \ldots, 0)$ donde $x_k = x_l = 1$

$$< x, Tx > = t_{kl} + t_{lk} = 0 \Rightarrow t_{kl} = -t_{lk} \qquad \forall l, k$$

Luego $T = H'QH + A'P + PA - PBR^{-1}B'P - \dfrac{dP}{dt}$ es asimétrica.

Sabemos que P es simétrica, por lo tanto T también lo es.

De ambas condiciones T debe ser nula.

Esto es $\dfrac{dP}{dt} = H'(t)QH(t) + A'(t)P + PA(t) - PB(t)R^{-1}(t)B'(t)P$ c.q.d.

Dada una matriz simétrica, definida no negativa C la ecuación **(4.1.3)** tiene una solución única $\pi = \pi(t, C, t_1)$ que toma el valor C en $t = t_1$.

Esta solución se conoce que existe en una vecindad de t_1. Sin embargo existe para todo $t \leq t_1$

4.2 <u>Teorema</u> (de existencia)

i) Para todo t_1 y para toda matriz simétrica, definida no negativa, **(4.1.3)** tiene una única solución definida $\forall \quad t \leq t_1$

ii) Bajo la suposición **(A1)**, el óptimo para **(2.7)** esta dado por

$$V^0(x^0, t_0, t_1) = \frac{1}{2}\| x(t_0) \|^2_{\pi(t_0, C, t_1)}$$

Mas aún, el índice óptimo es alcanzado si y solo si la ley de control es

$$u^0(t) = R^{-1}(t)B'(t)\pi(t, C, t_1)x(t) \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

Si asumimos *(i)* entonces V^0satisface la ecuación de *Hamilton-Jacobi*, luego por **(3.2)** V^0 es el índice óptimo.

Además la ecuación **(3.3.1)**

$$B'(t)V_x^{\,0} = -L_u(x, u^0, t)$$

Resulta que

$$B'(t)\pi(t, C, t_1)x(t) = -R(t)u^0(t)$$

de donde

$$u^0(t) = -R^{-1}(t)B'(t)\pi(t, C, t_1)x(t) \qquad \text{c.q.d.}$$

Para probar *(i)* procedemos de la siguiente forma:

Supongamos que $\pi = \pi(t, C, t_1)$ existe, luego debe satisfacer la relación

$$\left\| x^0 \right\|^2_{\pi(t_0, c, t_1)} \leq \int_{t_0}^{t_1} \left\| H(t)\,\Phi(t, t_0)x^0 \right\|^2_{Q(t)} dt + \left\| \Phi(t, t_0)x^0 \right\|^2_C$$

En efecto

$$\frac{1}{2}\left\| x^0 \right\|^2_{\pi\,(t_0,c,t_1)} \le \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left\{ \left\| H(t)x \right\|^2_{Q(t)} + \left\| u \right\|^2_{R(t)} \right\} dt + \frac{1}{2}\left\| x^1 \right\|^2_C$$

para cada función $u = u\,(t)$

Si $u \equiv 0$

$$\frac{1}{2}\left\| x^0 \right\|^2_{\pi\,(t_0,c,t_1)} \le \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left\| H(t)x(t) \right\|^2_{Q(t)} dt + \frac{1}{2}\left\| x(t) \right\|^2_C$$

$$\left\| x^0 \right\|^2_{\pi(t_0,c,t_1)} \le \int_{t_0}^{t_1} \left\| H(t)\,\Phi(t,t_0)x^0 \right\|^2_{Q(t)} dt + \left\| \Phi(t_1,t_0)x^0 \right\|^2_C$$

Usando la desigualdad de *Schwarz.*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| H(t)\,\Phi(t,t_0)x^0 \right\|^2_{Q(t)} dt + \left\| \Phi(t_1,t_0)x^0 \right\|^2_C =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} < H(t)\,\Phi(t,t_0)x^0, Q(t)H(t)\,\Phi(t,t_0)x^0 > dt + < \Phi(t_1,t_0)x^0, C\Phi(t_1,t_0)x^0 > \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t_1} \left\| H(t)\,\Phi(t,t_0)x^0 \right\| . \left\| Q(t)H(t)\,\Phi(t,t_0)x^0 \right\| dt + \left\| \Phi(t_1,t_0)x^0 \right\| . \left\| C\Phi(t_1,t_0)x^0 \right\| \le$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_1} \left\| H(t)\,\Phi(t,t_0)x^0 \right\|^2 . \|Q\| dt + \|C\| \left\| \Phi(t_1,t_0)x^0 \right\|^2 \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_1} \left\| H(t)\,\Phi(t,t_0) \right\|^2 . \|Q\| \left\| x^0 \right\|^2 dt + \|C\| \left\| \Phi(t_1,t_0) \right\|^2 . \left\| x^0 \right\|^2$$

Notando

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| H(t)\,\Phi(t,t_0) \right\|^2 \|Q(t)\| dt + \|C\| \left\| \Phi(t,t_0) \right\|^2 = \alpha\,(t_0,t_1)$$

resulta que

$$\left\| x^0 \right\|^2_{\pi(t_0,C,t_1)} \leq \alpha\;(t,t_0) \left\| x^0 \right\|^2$$

luego

$$\| x(t) \|^2_{\pi(t,C,t_1)} \leq \alpha\,(t,t_1) \, \| x(t) \|^2 \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

pero

$$\alpha\,(t,t_1) = \int_{t}^{t_1} \|Q(t)\| \left\| H(t).\Phi(t,t_0) \right\|^2 dt + \|C\| \left\| \Phi(t_1,t) \right\|^2$$

es una función continua p. c. $t \in [t_0,t_1]$, por lo tanto acotada en $[t_0,t_1]$.

La cota es $K = \alpha\,(t_0,t_1)$ pues $\alpha\,(t,t_1) \leq \alpha\,(t_0,t_1)$ p.c. $t \in [t_0,t_1]$

En consecuencia **(4.2.2)** se puede escribir

$$\|x(t)\|^2_{\pi(t,C,t_1)} \leq \alpha\,(t_0,t_1).\|x(t)\|^2$$

$$< x, \pi(t,C,t_1)x > \leq \alpha(t_0,t_1). < x,x >$$

$$\sup_{\|x\|=1} \quad < x, \pi(t,C,t_1)x > \leq \alpha(t_0,t_1)$$

$$\|\pi\,(t,c,t_1)\| \leq \alpha(t_0,t_1)$$

Si $\pi = \pi(t,C,t_1)$ (si existe) esta contenida en una región compacta p.c. $t \in [t_0,t_1]$ (1)

Además $\quad \|\pi\,(t,C,t_1)\| \to \infty \quad$ si $t \to t_0 \quad$ (2)

pues $\quad \|\pi(t,C,t_1)\| \to \|\pi(t_0,C,t_1)\| \leq \alpha\,(t_0,t_1)$

Luego de (1) y (2) por el teorema de extensión de *Peano* , resulta que $\pi = \pi(t,C,t_1)$ está definida $\forall t \leq t_1$ c.q.d.

Con el propósito de estudiar el caso $t_1 \to \infty$, introducimos la siguiente definición y posterior caracterización :

Definición

Un estado x se dice controlable en un tiempo t_0, si existe una función de control $u^1(t)$, que depende de x y t_0 y está definida sobre un intervalo $[t_0, t_1]$ tal que $\Phi_{u^1}(t_1,x;t_0)=0$. Si esto vale para cada estado x, diremos que la planta es completamente controlable en t_0; si se cumple para cada t_0, diremos simplemente que la planta es completamente controlable. La siguiente caracterización de controlabilidad es útil, la cual no demostraremos.

Proposición

Una planta es completamente controlable en un tiempo t si y solo si la matriz simétrica

$$w(t_o,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\cdot B(t)\cdot B'(t)\cdot\Phi'(t_0,t)\cdot dt$$

es definida positiva para algún $t_1 > t_0$

Corolario

Una planta constante es completamente controlable si y solo si rango $[B, AB, ..., ,A^{(n-1)}B] = n$ donde $[B, AB, ..., A^{n-1}B]$ es una matriz compuesta de n filas por mn columnas. Si puede elegir t_1-t_0 tan pequeño como se desea.

Definimos primero una solución particular de **(4.1.3)** que es de importancia para el siguiente resultado:

4.3 Proposición

Si la planta es completamente controlable entonces $\lim\limits_{t\to\infty} \pi(t;0,t_1)=\overline{P}(t)$

i) existe para todo t
ii) es solución de **(4.1.3)**

Prueba

Supóngase que la planta es completamente controlable en $t = t_0$. Entonces para cada x existe una función de control $u^1(t)$, donde $u^1(t) = -B'(t).\Phi'(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)x$ siendo W la matriz de la proposición relativa a la noción de controlabilidad.

Esta función $u^1(t)$ transfiere x a 0 en o antes de $t=t_2(x, t_0)$.

Sea $u^1(t) = 0 \quad t > t_2$. Entonces

$$\|x\|_{\pi(t_0;0,t_1)} = V^{\circ}(x,t_0,t_1) \leq V(x,t_0,t_2;u') \equiv V(x,t_0,\infty;u') \leq \alpha(t_0).\|x\|^2$$

lo que muestra que $\|\pi(t_0;0,t_1)\|$ es acotada $\forall\ t_1 \geq t_0$.

Por lo tanto **(3.4)** muestra que $\|\pi(t_0;0,t_1)\|$ es no decreciente cuando $t_1 \to \infty$. De aquí el límite existe para $t = t_0$ arbitrario c.q.p.

Usando la continuidad de soluciones de **(4.1.3)** con respecto a las condiciones iniciales, tenemos

$$\overline{P}(t) = \lim_{t_2\to\infty} \pi(t;0,t_2) = \lim_{t_2\to\infty} \pi(t;\pi(t_1;0,t_2),t_1) =$$

$$= \pi\left(t;\lim_{t_2\to\infty} \pi(t_1;0,t_2),t_1\right) = \pi(t;\overline{P}(t_1),t_1)$$

que muestra que $\overline{P}(t)$ es una solución de **(4.1.3)** que esta definida para todo t c.q.d.

4.4 <u>Teorema de existencia</u>

Asumimos **(A1)**, $\gamma(x) = 0$ y $t_1 = \infty$, el índice de perfomance óptimo para el problema **(2.7)** es $\|x\|^2_{\overline{P}(t)}$ y la ley de control óptimo es

$$u^{\circ}(t) = R^{-1}(t).B'(t).\overline{P}(t).x(t) \qquad \textbf{(4.4.1)}$$

Prueba

Asumiremos que $\gamma(x) = 0$. Primero mostramos que si u(t) está determinado por la ley de control **(4.4.1)** el índice perfomance correspondiente es:

$$V(x, t_0, \infty; u^0) = \lim_{t_2 \to \infty} V(x, t_0, t_1; u^0) = \|x\|^2_{P(t_0)}$$

Vemos de **(4.2)** y **(4.3)** que

$$V(x, t_0, t_1; u^0) = \|x\|^2_{P(t_0)} - \|\Phi_{u^0}(t_1; x, t_0)\|^2_{P(t_1)} \leq \|x\|^2_{P(t_0)}$$

Por otro lado

$$V(x, t_0, t_1; u^0) \geq V^0(x, t_0, t_1) = \|x\|^2_{\pi(t_0;0,t_1)} \geq \|x\|^2_{P(t_0)-\varepsilon}$$

donde $\varepsilon \to 0$ si $t_1 \to \infty$ lo que prueba **(4.4)**

De aquí

$$V^0(x, t_0, \infty) \leq V(x, t_0, \infty; u^0)$$

No puede darse el signo de la desigualdad.

Porque si $V(x, t_0, \infty; u^0) - V^0(x, t_0, \infty) \geq \eta > 0$.

Existe alguna función de control u' tal que $V(x, t_0, \infty; u^0) - V^0(x, t_0, \infty; u') \geq \frac{\eta}{2}$.
Para t_1 suficientemente grande, entonces tenemos

$$V(x, t_0, \infty; u^0) = V^0(x, t_0, t_1) + \frac{\eta}{2} \geq V(x, t_0, t_1; u') + \frac{\eta}{2}$$

que es una contradicción.

Un enfoque del problema lineal cuadrático, desde el punto de vista clásico, pero haciendo uso del principio del máximo lo da George Leitmann.

Deduce la ley de control óptima a partir de este principio. Suponemos ahora H=H(t)=I y C=0 en **(A1)** (pag. 18).

Invocamos a las condiciones necesarias del principio del máximo.

La función H esta dada por

$$H(\lambda, x, u) = \frac{1}{2} \cdot \lambda_0 \left[x^T \cdot Q(t) \cdot x + u^T \cdot R(t) \cdot u\right] + \hat{\lambda}^T \left[F(t) \cdot x + G(t) \cdot u\right]$$

donde $\hat{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^T$.

por lo tanto las ecuaciones adjuntas

$$\dot{\hat{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{esto es} \quad \dot{\hat{\lambda}}_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \lambda_0 \cdot \left[q_{j1} x_1 + q_{j2} x_2 + \ldots + q_{jn} x_n\right] + \lambda_1 f_{1j} + \ldots + \lambda_n f_{nj} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \lambda_0 \cdot \left[q_{j1} x_1 + q_{j2} x_2 + \ldots + q_{jn} x_n\right] + f_{1j} \lambda_1 + \ldots + f_{nj} \lambda_n \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_0 \cdot Q(t) \cdot x(t) - F^T(t) \cdot \hat{\lambda}(t) \qquad \textbf{(4.1)}$$

La función de control no es acotada, esto es $U = R^m$. Luego implica que la función de control que satisface el principio del máximo que genera la solución $\overline{x}(\cdot)$ debe satisfacer

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(\lambda(t), x(t), u(t)) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_j}=\frac{1}{2}\cdot\lambda_0\cdot\left[2r_{j1}u_1+r_{j2}u_2+\ldots+r_{jm}u_m+r_{2j}u_2+\ldots+r_{mj}u_m\right]+g_{1j}\lambda_1+\ldots+g_{nj}\lambda_n \quad j=1, 2, \ldots, m.$$

Como R=R(t) es definida positiva.

$$\frac{\partial H}{\partial u_j}=\frac{1}{2}\cdot\lambda_0\cdot\left[2r_{j1}u_1+2r_{j2}u_2+\ldots+2r_{jm}u_m\right]+g_{1j}\lambda_1+\ldots+g_{nj}\lambda_n$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_j}=\lambda_0\cdot\left[r_{j1}u_1+r_{j2}u_2+\ldots+r_{jm}u_m\right]+g_{1j}\lambda_1+\ldots+g_{nj}\lambda_n \qquad j=1, \ldots, m.$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\lambda_0\cdot R(t)\cdot u(t)+G^T(t)\cdot\hat{\lambda}(t)=0$$

Para obtener la función de control u=u(t) necesitamos que $\lambda_0(t)\neq 0$, podemos tomar $\lambda_0(t)\equiv -1$. R=R(t) es definida positiva, luego es inversible.

En consecuencia $\quad u=u(t)=R^{-1}(t)\cdot G^T(t)\cdot\hat{\lambda}(t)$ **(4.2)**

Sustituyendo **(4.2)** en **(1.1)** y **(4.1)** resulta

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \cdots \\ \dot{\hat{\lambda}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F(t) & \cdots & G(t)\cdot R^{-1}(t)\cdot G^T(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ G(t) & \cdots & -F^T(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x(t)\\ \cdots \\ \hat{\lambda}(t)\end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Este es un sistema de orden 2n, con lo cual exigimos 2n condiciones de contorno. Estas son $x(t_0)=x^0$ y la consecuente condición de transversalidad

$$\hat{\lambda}(t_1)=0 \tag{4.4}$$

Sea la matriz fundamental del sistema **(4.3)**, esto es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \cdots \\ \hat{\lambda}(t) \end{pmatrix} = S(t, t_0) \cdot \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \cdots \\ \hat{\lambda}(t_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t_1) \\ \hat{\lambda}(t_1) \end{pmatrix} = S(t_1, t) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{\lambda}(t) \end{pmatrix}$$

Si particionamos $S(t_1, t)$

$$S(t_1, t) = \begin{pmatrix} S_{11}(t_1, t) & \cdots & S_{12}(t_1, t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{21}(t_1, t) & \cdots & S_{22}(t_1, t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(t_1) &= S_{11}(t_1, t) \cdot x(t) + S_{12}(t_1, t) \cdot \hat{\lambda}(t) \\ 0 &= S_{21}(t_1, t) \cdot x(t) + S_{22}(t_1, t) \cdot \hat{\lambda}(t) \end{aligned}$$

Siempre que $S_{22}^{-1}(t_1, t)$ exista tenemos

$$\hat{\lambda}(t) = -S_{22}^{-1}(t_1, t) \cdot S_{21}(t_1, t) \cdot x(t) \qquad \textbf{(4.6)}$$

$S(t_1, t_1) = I_{2n}$

$S_{11}(t_1, t_1) = S_{22}(t_1, t_1) = I_n$ **(4.7)**

$S_{12}(t_1, t_1) = S_{21}(t_1, t_1) = 0$

donde I_{2n} denota la matriz unitaria de orden 2n.
I_n denota la matriz unitaria de orden n.

En realidad, puede mostrarse que $S_{22}(t_1, t)$ es no singular para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Sea $P(t) = S_{22}^{-1}(t_1, t)\, S_{21}(t_1, t)$

Como una consecuencia de **(4.6)** $P(t_1) = 0$.

Ahora reescribimos **(4.6)** como

$$\hat{\lambda}(t) = -P(t) \cdot x(t)$$

$$-\dot{\hat{\lambda}}(t) = \left(\dot{P}(t) + P(t) \cdot F(t) - P(t) \cdot G(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot G^T(t)\right) \cdot x(t)$$

y de **(4.1)**

$$\dot{\hat{\lambda}}(t) = \left(Q(t) - F^T(t) \cdot P(t)\right) \cdot x(t)$$
$$\left(\dot{P}(t) + P(t) \cdot F(t) + F^T \cdot P(t) - P(t) \cdot G(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot G^T(t) \cdot R(t) + Q(t)\right) \cdot x(t) = 0$$

Esta ecuación debe valer para x^0, cualquier $t_0 < t_1$, consecuentemente debemos tener

$$\dot{P}(t) = -P(t) \cdot F(t) - F^T(t) \cdot P(t) + P(t) \cdot G(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot G^T(t) \cdot P(t) - Q(t)$$
$$\left[\dot{P}(t)\right]^T = -P^T(t) \cdot F(t) - F^T(t) \cdot P(t) + P^T(t) \cdot G(t) \cdot R^{-1}(t) \cdot G^T(t) \cdot P^T(t) - Q(t)$$

Sin embargo, puesto $\left[\dot{P}(t)\right]^T = \dot{P}^T(t_1)$ y $P(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad P^T(t_1) = 0$

sigue que $P(.)$ y $P^T(.)$ son soluciones de la misma ecuación diferencial para la misma condición final. Luego por el teorema de unicidad para ecuaciones diferenciales que $P(t) = P^T(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

La matriz $P(t)$ es simétrica. De aquí las n^2 ecuaciones diferenciales de primer orden para los elementos de $P(t)$ se reducen a $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ ecuaciones.

Con el propósito de mostrar que el control extremal $u(\cdot) : [t_0, t_1] \to R^m$ está dado por

$$u(t) = -R^{-1}(t) \cdot G^T(t) \cdot P(t) \cdot x(t) \qquad \textbf{(4.8)}$$

es en realidad óptimo en x^0.

Para esto enumeraremos el siguiente teorema de suficiencia adaptado al problema que estamos tratando:

La función de control $u^*(\cdot):[t_0,t_1]\to R^m$ que genera la solución $x(\cdot):[t_0,t_1]\to R^n$ $x^0(t_0)=x^0$ es óptimo en x^0 con respecto a X (abierto) R^n si existe una función $\mathscr{T}(.):X\to R$ de clase C^1 tal que

(i) Si u(.) genera la solución $x(.):[t_0, t_1]\to R^n$ $x(t_0)=x^o$ y $x(t)\in X$ $\forall t\in[t_0,t_1]$, entonces

$$\lim_{t\to t_1} \mathscr{T}(x(t)) \le \lim_{t\to t_1} \mathscr{T}(x^*(t)) = 0$$

(ii) $$\frac{1}{2}\cdot\left(x^{*T}\cdot Q(t)\cdot x^* + u^{*T}\cdot R(t)\cdot u^*\right)+\mathrm{grad}^T\mathscr{V}\left(x^*(t),u^*(t)\right)\cdot\left(F^T\cdot x^*+G^T\cdot u^*\right)=0 \quad \forall t\in[t_0,t_1)$$

(iii) $$\frac{1}{2}\cdot\left(x^{T}\cdot Q(t)\cdot x + u^{T}\cdot R(t)\cdot u\right)+\mathrm{grad}^T\mathscr{V}\left(x(t),u(t)\right)\cdot\left(F^T\cdot x+G^T\cdot u\right)\ge 0 \quad \forall x\in X \quad \forall u\in\mathscr{U}$$

donde $\mathscr{U}$ es el conjunto de controles admisibles.

Volviendo al problema, la función test $\mathscr{T}$ (.) la podemos tomar como la función costo óptimo $V^*(.)$. La función costo para el control extremal es un candidato para $V^*(.)$.

Consideremos

$$\frac{d\left[x^T(t)\cdot\hat{\lambda}(t)\right]}{dt}=\frac{d\left[x^T(t)\cdot P(t)\cdot x(t)\right]}{dt}=$$

$$=x_1\cdot\left(\sum p_{1j}\cdot x_j\right)+x_2\cdot\left(\sum p_{2j}\cdot x_j\right)+\ldots+x_n\cdot\left(\sum p_{nj}\cdot x_j\right)$$

$$\frac{d\left[-x^{T}(t)\cdot P(t)\cdot x(t)\right]}{dt}=\frac{d-\left[x_1\cdot\left(\sum p_{1j}\cdot x_j\right)+x_2\cdot\left(\sum p_{2j}\cdot x_j\right)+\ldots+x_n\cdot\left(\sum p_{nj}\cdot x_j\right)\right]}{dt}=$$

$$\begin{aligned}
&=\dot{x}_1\cdot\left(\sum p_{1j}\cdot x_j\right)+\dot{x}_2\cdot\left(\sum p_{2j}\cdot x_j\right)+\ldots+\dot{x}_n\cdot\left(\sum p_{nj}\cdot x_j\right)+\\
&+x_1\cdot\left(\sum \dot{p}_{1j}\cdot x_j\right)+x_2\cdot\left(\sum \dot{p}_{2j}\cdot x_j\right)+\ldots+x_n\cdot\left(\sum \dot{p}_{nj}\cdot x_j\right)+\\
&+x_1\cdot\left(\sum p_{1j}\cdot \dot{x}_j\right)+x_2\cdot\left(\sum p_{2j}\cdot \dot{x}_j\right)+\ldots+x_n\cdot\left(\sum p_{nj}\cdot \dot{x}_j\right)=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=x_1\cdot\left(p_{11}\cdot\dot{x}_1+p_{21}\cdot\dot{x}_2+\ldots+p_{n1}\cdot\dot{x}_n+\sum_j p_{1j}\cdot\dot{x}_j\right)+\\
&+x_2\cdot\left(p_{12}\cdot\dot{x}_1+p_{22}\cdot\dot{x}_2+\ldots+p_{n2}\cdot\dot{x}_n+\sum_j p_{2j}\cdot\dot{x}_j\right)+\\
&+\ldots+x_n\cdot\left(p_{1n}\cdot\dot{x}_1+p_{2n}\cdot\dot{x}_2+\ldots+p_{nn}\cdot\dot{x}_n+\sum_j p_{nj}\cdot\dot{x}_j\right)+\\
&+x_1\cdot\left(\sum_j \dot{p}_{1j}\cdot x_j\right)+x_2\cdot\left(\sum_j \dot{p}_{2j}\cdot x_j\right)+\ldots+x_n\cdot\left(\sum_j \dot{p}_{nj}\cdot x_j\right)=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=x_1\cdot\left(\sum_j p_{j1}\cdot\dot{x}_j+\sum_j p_{1j}\cdot\dot{x}_j\right)+\\
&+x_2\cdot\left(\sum_j p_{j2}\cdot\dot{x}_j+\sum_j p_{2j}\cdot\dot{x}_j\right)+\\
&+\ldots+x_n\cdot\left(\sum_j p_{jn}\cdot\dot{x}_j+\sum_j p_{nj}\cdot\dot{x}_j\right)+\\
&+x_1\cdot\left(\sum_j \dot{p}_{1j}\cdot x_j\right)+x_2\cdot\left(\sum_j \dot{p}_{2j}\cdot x_j\right)+\ldots+x_n\cdot\left(\sum_j \dot{p}_{nj}\cdot x_j\right)=
\end{aligned}$$

$$= 2\cdot x_1\cdot\left(\sum_j p_{1j}\cdot \dot{x}_j\right)+2\cdot x_2\cdot\left(\sum_j p_{2j}\cdot \dot{x}_j\right)+\ldots+2\cdot x_n\cdot\left(\sum_j p_{nj}\cdot \dot{x}_j\right)+$$

$$+x_1\cdot\left(\sum_j \dot{p}_{1j}\cdot x_j\right)+x_2\cdot\left(\sum_j \dot{p}_{2j}\cdot x_j\right)+\ldots+x_n\cdot\left(\sum_j \dot{p}_{nj}\cdot x_j\right)=$$

$$\begin{aligned}
&=-2\cdot x^T\cdot P\cdot \dot{x}-x^T\cdot \dot{P}\cdot x=\\
&=-2\cdot x^T\cdot P\cdot\left(F-G\cdot R^{-1}\cdot G^T\cdot P\right)\cdot x-x^T\cdot\left(-PF-P\cdot F^T+P\cdot G\cdot R^{-1}\cdot G^T\cdot P-Q\right)\cdot x=\\
&=-2\cdot x^T\cdot P\cdot F\cdot x+2\cdot x^T\cdot P\cdot G\cdot R^{-1}\cdot G^T\cdot x+x^T\left(P\cdot F+F^T\cdot P\right)\cdot x-\\
&-x^T\cdot P\cdot G\cdot R^{-1}\cdot G^T\cdot P\cdot x+x^T\cdot Q\cdot x=\\
&=x^T\cdot P\cdot G\cdot R^{-1}\cdot G^T\cdot P\cdot x+x^T\cdot Q\cdot x=\\
&=x^T\cdot P\cdot F\cdot x+x^T\cdot F^T\cdot P\cdot x-2\cdot x^T\cdot P\cdot F\cdot x-x^T\cdot P\cdot G\cdot R^{-1}\cdot G^T\cdot P\cdot x+x^T\cdot Q\cdot x=
\end{aligned}$$

Como $x^T.F^T.P.x=\langle x,F^T.P.x\rangle=\langle P.F.x,x\rangle=\langle x,P.F.x\rangle=x^T.P.F.x$

Resulta que

$$\frac{d\left[x^T(t)\cdot\lambda(t)\right]}{dt}=x^T(t).Q(t).x(t)+x^T(t).P(t).G(t).R^{-1}(t).G^T(t).P(t).x(t) \qquad \textbf{(4.9)}$$

De **(4.8)** resulta que

$$u^T(t)=-x^T(t).P(t).G(t).R^{-1}(t)$$

de modo que **(4.9)** se convierte en

$$\frac{d\left[x^T(t).P(t).x\right]}{dt}=x^T.Q(t).x+u^T.R(t).u$$

que es el integrando del costo. Al integrar y teniendo en cuenta la condición $P(t_1)=0$ resulta

$$\frac{1}{2}\cdot x^{oT}.P(t_0).x^o = \frac{1}{2}\cdot\int_{t_0}^{t_1}\left[x^T.Q(t).x + u^T.R(t).u\right]\cdot dt$$

En consecuencia hemos construido la función test.

$$\mathscr{V}(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\cdot x^T.P(t).x$$

Donde el estado aumentado $\tilde{x} = [x \quad t]^T$, pues el problema lineal cuadrático puede ser un problema no autónomo.

La función $\mathscr{V}(.)$ es de clase C^1 sobre $X = \{\tilde{x} \in R^{n+1} / t \in [t_0, t_1]\}$

La condición **(i)** del teorema se satisface puesto que $P(t_1)=0$.

Para verificar la condición **(ii)**, **(iii)** necesitamos la expresión de $\operatorname{grad}\mathscr{V}(\tilde{x})$.

$$\mathscr{V}(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\cdot x^T.P(t).x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot x_1\cdot\left(\sum_j p_{1j}.x_j\right) + \frac{1}{2}\cdot x_2\cdot\left(\sum_j p_{2j}.x_j\right) + \ldots + \frac{1}{2}\cdot x_n\cdot\left(\sum_j p_{nj}.x_j\right)$$

$$\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial x_1} = p_{11}.x_1 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j\neq 1} p_{1j}.x_j + \frac{1}{2}\cdot p_{21}.x_2 + \ldots + \frac{1}{2}\cdot p_{n1}.x_n$$

$$\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\cdot p_{12}.x_1 + p_{22}.x_2 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j\neq 2} p_{2j}.x_j + \ldots + \frac{1}{2}\cdot p_{n2}.x_n$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial x_n} = \frac{1}{2}\cdot p_{1n}.x_1 + \frac{1}{2}\cdot p_{2n}.x_2 + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{j\neq n} p_{nj}.x_j\right) + p_{nn}.x_n$$

$$\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x_1} = \sum_j p_{1j}.x_j$$

$$\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x_2} = \sum_j p_{2j}.x_j$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x_n} = \sum_j p_{nj}.x_j$$

En consecuencia

$$\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x} = P \cdot x$$

$$\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot \left(\sum_j \dot{p}_{1j}.x_j \right) + \frac{1}{2} \cdot x_2 \cdot \left(\sum_j \dot{p}_{2j}.x_j \right) + \ldots + \frac{1}{2} \cdot x_n \cdot \left(\sum_j \dot{p}_{nj}.x_j \right)$$

$$\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \dot{P}(t) \cdot x$$

$$\hat{f}_0(x, t, u) + \mathrm{grad}^T \mathscr{V}(\tilde{x}) \cdot f(x, t, u) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ x^T.Q(t)x + u^T.R(t).u + x^T.\dot{P}(t)x + 2.x^T.P(t)\left[F(t)x + G(t).u\right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{ x^T.Q(t)x + u^T.R(t).u + x^T.\left(-P(t).F(t) - F^T(t).P(t) + P(t).G(t).R^{-1}(t).G^T(t).P(t) - Q(t)\right)x +$$

$$+ 2.x^T.P(t)\left[F(t)x + G(t).u\right] \} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{ x^T.Q(t)x + u^T.R(t).u - x^T.P(t).F(t).x - x^T.F^T(t).P(t).x + x^T.P(t).G(t).R^{-1}(t).G^T(t).P(t).x -$$

$$- x^T.Q(t)x + 2.x^T.P(t).F(t).x + 2.x^T.P(t).G(t).u \} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{ u^T.R(t).u + x^T.P(t).G(t).R^{-1}(t).G^T(t).P(t).x + 2.x^T.P(t).G(t).u \} \qquad \mathbf{(4.10)}$$

De **(4.8)** recordamos que

$$u(t) = -R^{-1}(t) \cdot G^T(t) \cdot P(t) \cdot x(t)$$

$$u^T(t) = -x^T(t) \cdot P(t) \cdot G(t) \cdot R^{-1}(t)$$

de modo que la relación anterior se convierte en

$$\frac{1}{2} \cdot \{\ u^T.R(t).u + x^T.P(t).G(t).R^{-1}(t).R(t).R^{-1}(t).G^T(t).P(t).x + 2.x^T.P(t).G(t).R^{-1}(t).R(t).u\ \} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{\ u^T.R(t).u + u^T.R(t).u - 2.u^T.R(t).u\ \} = 0$$

y la condición **(ii)** se satisface.

Para verificar **(iii)** notemos que $u^T(t) = -x^T(t) \cdot P(t) \cdot G(t) \cdot R^{-1}(t)$ resulta en el único valor estacionario de **(4.10)**. Puesto que R(t) es definida positiva, este valor estacionario es un mínimo global.

La función de control **(4.8)** resulta en el valor nulo de **(4.10)**. Por lo tanto la condición **(iii)** también se satisface y consecuentemente la función de control extremal de **(4.8)** es en realidad óptimo en x^0. Luego hay una función de control feedback óptima.

$$K : \alpha^{n+1} \rightarrow R^m$$
$$K(\tilde{x}) = -R^{-1}(t) \cdot G^T(t) \cdot P(t) \cdot x$$

El análisis de Kalman puede adaptarse a esta forma, que hace uso del principio del máximo, pues la forma de la funcional a minimizar en el análisis anterior puede pensarse bajo el signo integral de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (\|H(t)x\|_Q^2 + \|u\|_R^2)dt + \frac{1}{2}\|x(t_1)\|_C^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\|H(t)x\|_Q^2 + \|u\|_R^2)dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\nabla^T \|x(t)\|_C^2 (Ax + Bu)dt + \|x^0\|_C^2$$

como $\|x^0\|_C^2$ no depende de la función control u que:

$$\min_u \frac{1}{2}\left\{\int_{t_0}^{t_1}(\|H(t)x\|_Q^2 + \|x\|_R^2)dt\right\} + \frac{1}{2}\|x(t_1)\|_C^2 =$$
$$= \min_u \frac{1}{2}\left\{\int_{t_0}^{t_1}(\|H(t)x\|_Q^2 + \|u\|_R^2 + \nabla^T \|x(t)\|_C^2 (Ax + Bu))dt\right\}$$

y por lo tanto se puede aplicar el principio del máximo en la forma usual.

ANALISIS DEL TEMA POR VELIMIR JURDJEVIC

Un análisis más actual de sistemas lineales con costos cuadráticos es realizado por Velimir Jurdjevic.

Aparte de unos papers aislados ([7], [8]), la teoría clásica de sistemas lineales con costos cuadráticos esta desarrollada para sistemas con costos positivos. Las suposiciones usuales son que el término costo (que es cuadrático) en el control es definido positivo y la optimización se lleva cabo con respecto a un punto inicial fijo, el punto final es libre.

Este estudio basado sobre distintos artículos sobre sistemas lineales con costo cuadrático indefinido nos lleva a conocer varios aspectos de la teoría de optimización.

Aunque gran parte de esta teoría es una extensión natural de las ideas clásicas heredadas del cálculo de variaciones, la teoría también desarrolla nuevos e interesantes fenómenos no encontrados en los estudios clásicos.

Consignaremos las siguientes preguntas:

Las condiciones necesarias y suficientes para optimalidad.

Propiedades de optimalidad de extremales.

Problema de extremos fijos versus el problema de extremo final variable.

El problema singular y su síntesis óptima.

Pasaje al intervalo de tiempo infinito.

Al discutir estos puntos, nos concentraremos sobre los aspectos más conceptuales de la teoría, dejando los argumentos más elaborados en las fuentes originales ([4], [5], [9] y [10]). Las herramientas teóricas básicas son el Principio del Máximo, el flujo hamiltoniano que este genera y los correspondientes extremales.

Como se espera, la teoría es mucho más simple para sistemas que satisfagan la condición fuerte de Clebsch - Legendre (el caso regular). Una característica importante de esta teoría caracteriza el intervalo máximo de optimalidad para los extremales del sistema. Contrariamente a lo que sucede con el problema con extremo final variable, este intervalo de optimalidad para el problema con condición de contorno fijas no está en general regido por las propiedades de la ecuación asociada de Riccati. Una aplicación particularmente linda de esta teoría da una nueva prueba para la famosa desigualdad de Wirtinger que aparece en el estudio de problemas isoperimétricos.

1 Definiciones Básicas y Planteo de los Problemas

Consideraremos un sistema de control en R^n;

$$\frac{dx}{dt} = A.x + B.u \qquad \textbf{(1)}$$

donde A es una matriz de orden n x n, y B es una matriz de orden n x m y donde el control u toma valores en R^m. La clase de controles admisibles consiste de todas las funciones valuadas sobre R^m medibles y acotadas en el intervalo en consideración. Si los elementos de A y B varían con el tiempo entonces asumiremos que también son medibles y acotadas como funciones del tiempo.

Agregamos al sistema de control una funcional costo cuadrático (asumiremos su existencia), la que escribimos como:

$$c(x,u) = \frac{1}{2}\cdot\langle u, Pu\rangle + \langle u, Qx\rangle + \frac{1}{2}\cdot\langle x, Rx\rangle$$

Dicha expresión está en términos de un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ y matrices P, Q y R de dimensiones adecuadas. Puesto que estaremos interesados en minimizar $\int c(x,u)\,dt$ asumiremos sin ninguna pérdida de generalidad que P y R son autoadjuntas.

En efecto, sean P y R matrices arbitrarias:

$$c(x,u) = \frac{1}{2}\cdot\langle u, Pu\rangle + \langle u, Qu\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Rx\rangle$$

$$c(x,u) = \frac{1}{2}\cdot\langle P^T u, u\rangle + \langle u, Qu\rangle + \frac{1}{2}\langle R^T x, x\rangle$$

$$2c(x,u) = \left\langle u, \left(\frac{P+P^T}{2}\right)\cdot u\right\rangle + 2\cdot\langle u, Qx\rangle + \left\langle x, \left(\frac{R+R^T}{2}\right)\cdot x\right\rangle$$

Notamos $\widetilde{P} = \dfrac{P + P^T}{2}$ $\widetilde{R} = \dfrac{R + R^T}{2}$

$$2c(x,u) = \langle u, \widetilde{P}u \rangle + 2\langle u, Qx \rangle + \langle x, \widetilde{R}x \rangle$$

donde $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ son autoadjuntas.

Si los elementos de estas matrices son funciones del tiempo asumiremos que son medibles y acotadas en cada intervalo de tiempo en consideración.

(PB1) Problema de extremos fijos

Si a, b son puntos de R^n y $T > 0$ es un número fijo estamos interesados en un par trayectoria $(\overline{x}, \overline{u})$ donde $\overline{x}$ es una curva integral de **(1)** generada por el control $\overline{u}$, que satisface $\overline{x}(0) = a$, $\overline{x}(T) = b$ y que además cumple que

$\int_0^T c(\overline{x}, \overline{u})\, dt \leq \int_0^T c(x,u)\, dt$ para cualquier par trayectoria (x, u) con x(0) = a y x(T) = b. Si tal trayectoria existe la llamaremos óptima.

(PB2) Problema de extremo final variable

Dado a en R^n y $T > 0$ encontrar una trayectoria $(\overline{x}, \overline{u})$ de **(1)** definida sobre el intervalo [0, T] que satisface $\overline{x}(0) = a$ y

$\int_0^T c(\overline{x}, \overline{u})\, dt \leq \int_0^T c(x,u)\, dt$ para cualquier par trayectoria (x, u) definida sobre [0, T] con x(0) = a.

Usaremos v(a, b, T) para denotar el valor ínfimo de $\int_0^T c(x,u)\, dt$ en **(PB1)** cuando (x, u) varía sobre todos los pares de trayectoria de **(1)**.

v(a, T) denotará el valor ínfimo de $\int_0^T c(x,u)\, dt$ dado por **(PB2)**.

A lo largo de este desarrollo supondremos que **(1)** es controlable en cualquier tiempo $T > 0$. Como haremos repetidamente uso del Principio del Máximo, será conveniente descartar los extremales excepcionales.

Un extremal $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u})$ es excepcional sobre el intervalo [0, T] si $(\bar{x}, \bar{u})$ es una trayectoria de **(1)**, $\bar{p}$ es una curva absolutamente continua sobre [0, T] no idénticamente nula que satisface $\frac{d\bar{p}}{dt} = -A^T.\bar{p}$ para cada $t \in [0, T]$, para cualquier control admisible u.

Estos extremales corresponden a los extremales que son independientes del costo c.

En efecto sea: $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u})$ independiente del costo c (x, u)

Luego $$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = A.\bar{x} + B.\bar{u}$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T.\bar{p} \quad \text{pues} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = p_0 \cdot \left(Q^T.\bar{u} + R.\bar{x}\right) + A^T.\bar{p}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_0 \cdot \left(P.\bar{u} + Q.\bar{x}\right) + B^T.\bar{p} = 0 \qquad \text{luego} \quad B^T.\bar{p} = 0$$

en consecuencia $$\left\langle B^T.\bar{p},\ u\right\rangle = 0 \quad \forall u$$
$$\left\langle \bar{p},\ B.u\right\rangle = 0 \quad \forall u$$

por lo tanto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u})$ cumple las condiciones para ser un extremal excepcional y recíprocamente todo extremal excepcional es independiente del costo c.

Sea $\phi(t)$ la matriz fundamental de $\frac{dx}{dt} = A.x$ con $\phi(0) = I$.

Si $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u})$ es un extremal excepcional entonces $p(t) = \left(\phi^T\right)^{-1}.p_0$

$$\left\langle \left(\phi^T\right)^{-1}.p_0, B.u(t)\right\rangle = 0$$

$$\left\langle p_0, \phi^{-1}(t).B.u(t)\right\rangle = 0 \quad \text{para cada } t \in [0, T] \text{ para cada control u}$$

$$\left\langle p_0, \int_0^T \phi^{-1}(t).B.u(t) \right\rangle = 0$$

Esto significa que p_o anula cada punto en R^n que puede alcanzarse desde el origen en T unidades de tiempo.

En vista de nuestra suposición de controlabilidad $p_o = 0$ y por lo tanto $p(t) = 0$ para cada $t \in [0, T]$, que no es lo permitido.

Habiendo descartado la existencia de extremales excepcionales, consideraremos aquellos extremales que corresponden al multiplicador del costo igual a -1.

2 *Problema de extremos fijos*

El problema está basado en la suposición que el intervalo [0, T] en consideración, $v(a, b, T) > -\infty \quad \forall a, b \in R^n$.

La primera consecuencia de esta suposición es que $v(0, 0, t) \geq 0 \quad 0 \leq t \leq T$.

En efecto si $v(0, 0, t) < 0$ es decir $\inf \int_0^t c(x, u)\ dt < 0$.

$\exists (x, u) \quad x(0) = x(t) = 0 \quad \int_0^t c(x, u).dt < 0$

(x, u) se podría extender a $(\tilde{x}, \tilde{u}) \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}(T) = 0$

$$\tilde{x} = \begin{cases} x & 0 \leq \mu \leq t \\ 0 & t \leq \mu \leq T \end{cases} \qquad \tilde{u} = \begin{cases} u & 0 \leq \mu \leq t \\ 0 & t \leq \mu \leq T \end{cases}$$

Todas las trayectorias que se originan en 0 y terminan en 0 T unidades de tiempo resultan de la multiplicación por escalares

$(\rho.\tilde{x}, \rho.\tilde{u})$ satisface $\dfrac{d\rho.\tilde{x}}{dt} = \rho.\dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \rho.(A.\tilde{x} + B.\tilde{u})$

$$\frac{d\rho.\tilde{x}}{dt} = A.\rho.\tilde{x} + B.\rho.\tilde{u}$$

$$\rho.\tilde{x}(0) = \rho.\tilde{x}(T) = 0$$

$$\int_0^T c(\rho.\tilde{x}, \rho.\tilde{u})dt = \rho^2.\int_0^T c(\tilde{x}, \tilde{u})dt < 0$$

$$\lim_{\rho \to \pm\infty} \int_0^T c(\rho\tilde{x}, \rho\tilde{u})\,dt = -\infty \quad \Rightarrow \quad \upsilon(0,0,T) = -\infty$$

Por lo tanto la trayectoria nula correspondiente al control nulo es óptima. Al aplicar el Principio del Máximo a este par óptimo resulta $P \geq 0$:

Usando la condición (a) del Principio del Máximo

$$H(\overline{x}, \overline{p}, u) = -\frac{1}{2}\cdot\langle u, P.u\rangle - \langle u, Q.x\rangle - \frac{1}{2}\cdot\langle \overline{x}, R.\overline{x}\rangle + \langle \overline{p}, A.\overline{x} + B.u\rangle \leq 0$$

$$H(0,0,u) = -\frac{1}{2}\cdot\langle u, P.u\rangle + \langle B^T.\overline{p}, u\rangle \leq 0$$

Además por ser el par nulo un par extremal satisface

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \iff -P.\overline{u} - Q.\overline{x} + B^T.\overline{p} = 0 \Rightarrow B^T.\overline{p} = 0$$

Usando esta última condición resulta

$$H(0,0,u) = -\frac{1}{2}\cdot\langle u, P.u\rangle \leq 0 \ \therefore \ \langle u, P.u\rangle \geq 0 \qquad \forall u \Rightarrow P \geq 0$$

luego P es definida positiva.

En el caso que varíe con el tiempo $P(t) \geq 0$ p.c. $0 \leq t \leq T$.

El sistema Hamiltoniano $H(x,p,u) = -c(x,u) + \langle p, A.x + B.u\rangle$ es cóncavo en u para cada x y p, y por lo tanto su máximo está dado por $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ a.e. $[0,T]$.

En efecto

$$H(x,p,u_1)+\mu.(H(x,p,u_2)-H(x,p,u_1))\le H(x,p,u_1+\mu(u_2-u_1)) \qquad 0<\mu<1$$

q.p.q.

$$-c(x,u_1)+\langle p,A.x+B.u_1\rangle+\mu(-c(x,u_2)+\langle p,A.x+B.u_2\rangle+c(x,u_1)-\langle p,A.x+B.u_1\rangle)\le$$
$$\le -c(x,u_1+\mu(u_2-u_1))+\langle p,A.x+B.(u_1+\mu(u_2-u_1))\rangle$$

$$-c(x,u_1)+\mu.(c(x,u_1)-c(x,u_2))+\langle p,A.x+B.(u_1+\mu(u_2-u_1))\rangle\le$$
$$\le -c(x,u_1+\mu(u_2-u_1))+\langle p,A.x+B.(u_1+\mu(u_2-u_1))\rangle$$

$$-c(x,u_1)+\mu.(c(x,u_1)-c(x,u_2))\le -c(x,u_1+\mu(u_2-u_1)) \qquad 0<\mu<1$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\langle u_1,P.u_1\rangle+\langle u_1,Q.x\rangle-\frac{1}{2}\cdot\langle x,R.x\rangle+\frac{\mu}{2}\cdot\langle u,P.u_1\rangle+\mu\cdot\langle u_1,Q.x\rangle+\frac{\mu}{2}\cdot\langle x,R.x\rangle-$$
$$-\frac{\mu}{2}\cdot\langle u_2,P.u_2\rangle-\mu\cdot\langle u_2,Q.x\rangle-\frac{\mu}{2}\cdot\langle x,R.x\rangle\le$$
$$\le-\frac{1}{2}\cdot\langle u_1+\mu(u_2-u_1),P.(u_1+\mu(u_2-u_1))\rangle-\langle u_1+\mu(u_2-u_1),Q.x\rangle-\frac{1}{2}\cdot\langle x,R.x\rangle$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\langle u_1,P.u_1\rangle-\langle u_1,Q.x\rangle+\frac{\mu}{2}\cdot\langle u_1,P.u_1\rangle+\mu\cdot\langle u_1,Q.x\rangle+\frac{\mu}{2}\cdot\langle x,R.x\rangle-$$
$$-\frac{\mu}{2}\cdot\langle u_2,P.u_2\rangle-\mu\cdot\langle u_2,Q.x\rangle-\frac{\mu}{2}\cdot\langle x,R.x\rangle \;\le\; -\frac{1}{2}\cdot\langle u_1,P.u_1\rangle-\frac{1}{2}\cdot\mu.\langle u_1,P.u_2\rangle+$$
$$+\frac{\mu}{2}\cdot\langle u_1,P.u_1\rangle-\frac{1}{2}\cdot\mu\langle u_2,Pu_1\rangle-\frac{\mu^2}{2}\langle u_2,Pu_2\rangle+\frac{\mu^2}{2}\langle u_2,Pu_1\rangle+\frac{1}{2}\cdot\mu\langle u_1,Pu_1\rangle+$$
$$+\frac{\mu^2}{2}\langle u_1,Pu_2\rangle-\frac{\mu^2}{2}\langle u_1,Pu_1\rangle-\langle u_1,Q.x\rangle-\mu\langle u_2,Q.x\rangle+\mu\langle u_1,Q.x\rangle$$

d.p.q.

$$-\frac{\mu}{2}\cdot\langle u_2,P.u_2\rangle+\frac{\mu}{2}\cdot\langle u_1,P.u_2\rangle+\frac{\mu}{2}\cdot\langle u_2,P.u_1\rangle+\frac{\mu^2}{2}\cdot\langle u_2,P.u_2\rangle-$$
$$-\frac{\mu^2}{2}\langle u_2,Pu_1\rangle-\frac{\mu}{2}\langle u_1,Pu_1\rangle-\frac{\mu^2}{2}\langle u_1,Pu_2\rangle+\frac{\mu^2}{2}\langle u_1,Pu_1\rangle < 0$$

d.p.q.

$$\frac{\mu^2}{2}\cdot\left(\langle u_2,P.u_2\rangle-2\cdot\langle u_1,P.u_2\rangle+\langle u_1,P.u_1\rangle\right)-\frac{\mu}{2}\cdot\left(\langle u_2,Pu_2\rangle-2\cdot\langle u_1,Pu_2\rangle+\langle u_1,Pu_1\rangle\right)\leq 0$$

d.p.q. $\left(\langle u_2,P.u_2\rangle-2\cdot\langle u_1,P.u_2\rangle+\langle u_1,P.u_1\rangle\right)\cdot\left(\mu^2-\mu\right)\leq 0$

d.p.q. $\left(\langle u_2,P.u_2\rangle-2\cdot\langle u_1,P.u_2\rangle+\langle u_1,P.u_1\rangle\right)\cdot\mu\cdot(\mu-1)\leq 0$

d.p.q. $\langle u_2,P.u_2\rangle-2\cdot\langle u_1,P.u_2\rangle+\langle u_1,P.u_1\rangle\geq 0$

$$\begin{aligned}
&\langle u_2,P.u_2\rangle-2\cdot\langle u_1,P.u_2\rangle+\langle u_1,P.u_1\rangle=\\
&=\langle u_2,P.u_2\rangle+\langle u_1,P.u_1\rangle-\langle u_1,P.u_2\rangle-\langle u_1,P.u_2\rangle=\\
&=\langle u_1,P(u_1-u_2)\rangle+\langle u_2-u_1,P.u_2\rangle=\\
&=\langle u_1,P(u_1-u_2)\rangle+\langle P.(u_2-u_1),u_2\rangle=\\
&=\langle u_1,P(u_1-u_2)\rangle+\langle P.(u_1-u_2),-u_2\rangle=\\
&=\langle u_1-u_2,P(u_1-u_2)\rangle\geq 0
\end{aligned}$$
pues P es semidefinida positiva

luego resulta que el sistema hamiltoniano es cóncavo en u para cada x y p, y por lo tanto su máximo está dado por $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ a.e. en $[0,T]$.

Nos referimos a ternas de curvas (x, p, u) sobre el intervalo [0, T] como ternas extremales si:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}(x,p,u) \qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}(x,p,u) \qquad \frac{\partial H}{\partial u}(x,p,u)=0$$

en casi todo punto del intervalo [0, T].

Una curva x sobre [0, T] se dice un extremal si es una proyección de una terna extremal.

Proposición 1

Un par trayectoria $(\bar{x},\bar{u})$ es óptimo si y solo si $(\bar{x},\bar{u})$ es una proyección de una terna extremal $(\bar{x},\bar{p},\bar{u})$ en c.t.p. del intervalo [0, T].

Prueba

Sea $\quad H(x,p,u)=-c\,(x,u)+\langle p,\ A.x+B.u\rangle=$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\langle u,P.u\rangle-\langle u,Q.x\rangle-\frac{1}{2}\cdot\langle x,R.x\rangle+\langle p,A.x+B.u\rangle.$$

Si $(\bar{x},\bar{u})$ es un par óptimo, satisface el Principio del Máximo, luego $\exists\,\bar{p}\neq 0$ tal que $\dfrac{dp}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,p,u)$.

$H(\bar{x},\bar{p},\bar{u})=0$

$H(\bar{x},\bar{p},u)\leq 0 \qquad \forall u$ (u es función de control admisible)

De i) y ii) resulta que $\dfrac{\partial H}{\partial u}(\bar{x},\bar{p},\bar{u})=0$.

Como obviamente vale que $\bar{x}$ satisface $\dfrac{d\bar{x}}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p}$ resulta que $(\bar{x},\bar{u})$ es una proyección de una terna extremal.

H es un polinomio homogéneo de grado dos, luego se puede escribir.

$$H(y+\Delta y)=H(y)+\sum \frac{\partial H}{\partial y_i}\cdot \Delta y_i + H(\Delta y)$$
$$H(y+\Delta y)=H(y)+\langle \nabla H, \Delta y\rangle + H(\Delta y)$$

en efecto

$$H(y)=\sum_{i,j} c_{ij}.y_i.y_j=(y, Cy)$$

luego

$$H(y+\Delta y)=(y+\Delta y, C(y+\Delta y))=(y+\Delta y, Cy+C\Delta y)$$
$$H(y+\Delta y)=(y, Cy)+(\Delta y, Cy)+(y, C\Delta y)+(\Delta y, C\Delta y)$$
$$H(y+\Delta y)=(y, Cy)+\left(\left(C+C^T\right)y, \Delta y\right)+(\Delta y, C\Delta y)$$

veamos que $\nabla H=\left(C+C^T\right)(y)$

$$\nabla H\Big|_i=\frac{\partial H}{\partial y_i}=\frac{\partial}{\partial y_i}(y, Cy)=\left(\frac{\partial y}{\partial y_i}, Cy\right)+\left(y, C\left(\frac{\partial y}{\partial y_i}\right)\right)$$
$$\nabla H\Big|_i=(e_i, Cy)+(y, Ce_i)=\left(e_i, \left(C+C^T\right)(y)\right)$$
$$\nabla H(y)=\left(C+C^T\right)(y)$$

luego

$$H(x+\Delta x, p+\Delta p, u+\Delta u)=H(x,p,u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_i}\cdot \Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot \Delta p_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial u_i}\cdot \Delta u_i + $$
$$+H(\Delta x, \Delta p, \Delta u)$$

A lo largo de la terna extremal $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{u})$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\overline{x}, \overline{p}, \overline{u})=0 \qquad \frac{d\overline{p}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \qquad \frac{d\overline{x}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

en consecuencia

$$H(x+\Delta x, p+\Delta p, u+\Delta u) = H(x,p,u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{p}_i}{\partial t} \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{x}_i}{\partial p_i} \cdot \Delta p_i + H(\Delta x, \Delta p, \Delta u)$$

Si consideramos cualquier trayectoria del sistema que satisface $x(0) = \overline{x}(0)$ y $x(T) = \overline{x}(T)$ entonces $\Delta x = x - \overline{x}$, $\Delta u = u - \overline{u}$.

Puesto que
$$H(x, \overline{p}, u) = -c(x,u) + \langle \overline{p}, A.x + B.u \rangle$$
$$H(\Delta x, 0, \Delta \overline{u}) = -c(\Delta x, \Delta u)$$

sigue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T c(x,u)\cdot dt - \int_0^T c(\overline{x},\overline{u})\cdot dt = \\
&= \int_0^T \left(-H(x,\overline{p},u) + \langle \overline{p}, A.\Delta x + B.\Delta u\rangle + H(\overline{x},\overline{p},\overline{u}) - \langle \overline{p}, A.\overline{x} + B.\overline{u}\rangle\right)\cdot dt = \\
&= \int_0^T \left(-H(x,\overline{p},u) + H(\overline{x},\overline{p},\overline{u}) + \langle \overline{p}, A.\Delta x + B.\Delta u\rangle\right)\cdot dt = \\
&= \int_0^T \left(\left\langle \frac{d\overline{p}}{dt}, \Delta u\right\rangle - H(\Delta x, 0, \Delta u) + \left\langle \overline{p}, \frac{d\overline{x}}{dt}\right\rangle\right)\cdot dt = \\
&= \int_0^T c(\Delta x, \ \Delta u)\cdot dt + \int_0^T \left(\left\langle \frac{d\overline{p}}{dt}, \Delta x\right\rangle + \left\langle \overline{p}, \frac{d\Delta x}{dt}\right\rangle\right)\cdot dt = \\
&= \int_0^T c(\Delta x, \ \Delta u)\cdot dt + \int_0^T \frac{d}{dt}\langle \overline{p}, \Delta x\rangle \cdot dt = \\
&= \int_0^T c(\Delta x, \ \Delta u)\cdot dt \ + \langle \overline{p}(T), x(T) - \overline{x}(T)\rangle - \langle \overline{p}(0), x(0) - \overline{x}(0)\rangle = \\
&= \int_0^T c(\Delta x, \ \Delta u)\cdot dt \ + \langle \overline{p}(T), 0\rangle - \langle \overline{p}(0), 0\rangle = \\
&= \int_0^T c(\Delta x, \ \Delta u)\cdot dt \ \geq 0 \quad \text{pues} \quad (\Delta x, \ \Delta u)
\end{aligned}$$

$$\Delta x(0) = \Delta x(T) = 0$$

y $\quad \upsilon(0,0,T) \geq 0$

sigue que

$$\int_0^T c(x,\ u)\cdot dt \geq \int_0^T c(\bar{x},\ \bar{u})\cdot dt \qquad \therefore \qquad (\bar{x}, \bar{u}) \text{ es óptima}$$

Proposición 2

Supóngase que (x, p, u) es una terna extremal.

Entonces $\int_0^T c(x, u)\cdot dt = \frac{1}{2}\cdot\langle p(t), x(t)\rangle - \frac{1}{2}\cdot\langle p(0), x(0)\rangle$

Prueba

H es un polinomio homogeneo de grado dos

$$H(x+\Delta x, p+\Delta p, u+\Delta u) = H(x,p,u) + \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, \Delta x\right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, \Delta p\right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial u}, \Delta u\right\rangle + H(\Delta x, \Delta p, \Delta u)$$

Si $\Delta x = x,\ \Delta p = p,\ \Delta u = u$

$$H(2x, 2p, 2u) = 2.H(x, p, u) + \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, x\right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, p\right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial u}, u\right\rangle$$

Como $H(2x, 2p, 2u) = 4.H(x, p, u)$ resulta:

$$2H(x, p, u) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, x\right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, p\right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial u}, u\right\rangle.$$

En particular a lo largo de las ternas extremales

$$2H\left(x(t), p(t), u(t)\right) = -\left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, x(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, p(t) \right\rangle$$

De aquí

$$2.\int_0^T c\left(x,\ u\right)\cdot dt \ = \ \int_0^T -2.H\left(x(t), p(t), u(t)\right) + 2\left\langle p(t), Ax + Bu \right\rangle \cdot dt \ =$$
$$= \int_0^T \left\langle \frac{dp}{dt}, x \right\rangle + \left\langle p, \frac{dx}{dt} \right\rangle \ = \ \int_0^T \frac{d}{dt}\left\langle p, x \right\rangle \cdot dt = \left\langle p(t), x(t) \right\rangle - \left\langle p(0), x(0) \right\rangle \text{ c.q.p.}$$

El estudio de optimales se reduce al estudio de extremales y el subsecuente análisis se divide en dos casos que dependen de la estructura de P. Llamamos al problema regular si Nu P = 0 y singular si $\mathrm{Nu}\,P \neq 0$. Cuando los elementos de P varíen con el tiempo exigiremos que $P^{-1}(t)$ es acotada p.c. $t \in [0, T]$, para el caso regular. Esto es, exigimos que $P(t) > \delta > 0$ para alguna matriz constante $\delta \quad \forall t \in [0, T]$.

Si $P(t) > \delta > 0$ p.a. matriz constante δ p.c. $\forall t \in [0, T]$ entonces $P^{-1}(t) < \delta$ p.c. $t \in [0, T]$.

En efecto, sea L una transformación lineal tal que:

(i) $L'.\ \delta .L = Id.$
(ii) $L'.P(t).L = D$

donde D es la siguiente matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_n \end{pmatrix}$$

$$L'\left(P(t) - \delta\right)\cdot L = \left(L_1\ L_2 \ldots\ L_n\right)'.\left(P(t) - \delta\right)\left(L_1\ L_2 \ldots\ L_n\right) =$$
$$= L_1'\left(P(t) - \delta\right)\cdot L_1 + L_2'\left(P(t) - \delta\right)\cdot L_2 + \ldots + L_n'\left(P(t) - \delta\right)\cdot L_n$$

Como $L_i'(P(t)-\delta)\cdot L_i > 0 \quad \forall i=1,\ldots,n$ pues $P(t)-\delta>0$ resulta $L'(P(t)-\delta)L > 0$

$$L_1'(P(t)-\delta)L > 0 \Rightarrow L'.P(t).L - L'.\delta.L > 0 \Rightarrow D - Id > 0$$

Entonces $\rho_i \geq 1 \qquad 1 \leq i \leq n$

Además de (i) (ii) sigue que

$$L^{-1}.P^{-1}(t).(L')^{-1} = \tilde{D}$$
$$L^{-1}.P^{-1}(t).(L')^{-1} = \tilde{D}$$

$$\text{donde } \tilde{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\rho_n} \end{pmatrix}$$

De (i) (ii) y del hecho de que $\frac{1}{\rho_i} \leq 1 \qquad 1 \leq i \leq n$ sigue que

$$Id - \tilde{D} = \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\rho_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\rho_n}\cdot(Id - D) > 0$$

entonces de (iii) (iv)

$$Id - \tilde{D} = L^{-1}.\delta^{-1}.(L')^{-1} - L^{-1}.P^{-1}(t).(L')^{-1} = L'.(\delta^{-1} - P^{-1}(t))(L')^{-1}$$

$$Id - \tilde{D} > 0 \quad \Rightarrow \quad L^{-1}(\delta^{-1} - P^{-1}(t))(L')^{-1} > 0$$

$$L.L^{-1}(\delta^{-1} - P^{-1}(t).(L')^{-1}) > 0$$

$$\delta^{-1} - P^{-1}(t) > 0 \Rightarrow P^{-1}(t) < \delta^{-1} \quad \forall t \in [0,T]$$

En el caso regular $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ tiene una única solución dada por $u(x,p) = P^{-1}(B^T p - Qx)$:

$$H(x,p,u) = -c(x,u) + \langle p, Ax + Bu \rangle$$

$$H(x,p,u) = -\frac{1}{2}\langle u, Pu \rangle - \langle u, Qx \rangle - \frac{1}{2}\langle x, Rx \rangle + \langle p, Ax + Bu \rangle$$

$$H(x,p,u) = -\frac{1}{2}\langle u, Pu \rangle - \langle u, Qx \rangle - \frac{1}{2}\langle x, Rx \rangle + \langle p, Ax \rangle + \langle B^T p, u \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{1}{2}\langle u, Pu \rangle\right) = -p_{kk} - \sum_{i \neq k} p_{ik}.u_k = [Pu]_k$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\langle u, Qx \rangle = [Qx]_k$$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\langle B^T p, u \rangle = [B^T p]_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -Pu - Qx + B^T p$$

Si Nu P = 0, P admite inversa, $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ tiene una única solución dada por $u = P^{-1}(B^T p - Qx)$ c.q.p.

Por lo tanto nos referimos a u como la ley feedback óptima. Luego las trayectorias óptimas están dadas por el hamiltoniano $H_0(x,p) = H(x,p,u(x,p))$.

Vamos a analizar este caso, donde P^{-1} es acotada p.c. $t \in [0,T]$ e inferir algunos resultados sobre unicidad de soluciones óptimas, intervalos de optimalidad y propiedades sobre la dimensión del espacio formado por los estados alcanzables.

Proposición 3 [5]

Supongamos que el único extremal que se origina en 0 y termina en 0 T unidades de tiempo más tarde es el extremal nulo. Entonces para cada a y b en R^n existe una única trayectoria óptima $\overline{x}(t)$ que satisface $\overline{x}(0) = a$ y $\overline{x}(T) = b$.

Prueba

H_0 es una función cuadrática, el correspondiente campo simpléctico $C_{H_0} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial p}, -\frac{\partial H_0}{\partial x} \right)$ es lineal, cualquier curva integral (x, p) es una proyección de la terna extremal (x, p, u) con u dada por la ley feedback óptima.

Denotemos por $(x(x_0, p_0, t), p(x_0, p_0, t))$ la curva integral de H_0, definida por $x(x_0, p_0, 0) = x_0$

$p(x_0, p_0, 0) = p_0$

El correspondiente extremal x satisface

$$x(x_0, p_0, t) = x(x_0, 0, t) + x(0, p_0, t) \qquad \forall (x_0, p_0) \in R^n \times (R^n)^*$$

La aplicación

$$p_0 \rightarrow x(0, p_0, t) \quad \text{es lineal} \quad \text{p.c. } t > 0.$$

En particular, el conjunto de puntos alcanzables a partir de a por los extremales en T unidades de tiempo es $x(a, 0, T) + \{x(0, p_0, T) : p_0 \in (R^n)^*\}$

El núcleo de la aplicación $p_0 \rightarrow x(0, p_0, t)$ consiste de todos los extremales que se originan en 0 y terminan en 0, T unidades de tiempo más tarde.

Es fácil ver que si $p_0 \rightarrow x(0, p_0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ entonces $p_0 = 0$:

si $x(0, p_0, t) = 0 \quad \forall t$ entonces $\frac{dp}{dt} = -A^T p$

$Bu(t) = 0$ donde $u = P^{-1}(B^T p - Qx)$

$u = 0$ y por lo tanto $B^T.p = 0$

$$\langle B^T p, u \rangle = 0 \quad \forall u$$
$$\langle p, Bu \rangle = 0 \quad \forall u$$
$$\langle p_0, \phi^{-1}(t).B.u(t) \rangle = 0 \quad \forall u$$
$$\left\langle p_0, \int_0^T \phi^{-1}(t).B.u(t) \right\rangle = 0 \quad \forall u$$

Como el sistema es completamente controlable $p_0 = 0$.

Supongamos que existen dos trayectorias óptimas $x = x(a, p_0, t)$ $x = x(a, p_1, t)$ con la condición $x(a, p_0, T) = x(a, p_1, T) = b$.

$$x(t) = x(a, p_0, t) = x(a, 0, t) + x(0, p_0, t)$$
$$x(t) = x(a, p_1, t) = x(a, 0, t) + x(0, p_1, t)$$
$$x(a, p_0, t) - x(a, p_1, t) = x(0, p_0, t) - x(0, p_1, t)$$
$$x(a, p_0, t) - x(a, p_1, t) = x(0, p_0 - p_1, t)$$

pero $x(0, p_0 - p_1, t)$ es tal que $x(0, p_0 - p_1, T) = 0$
por hipótesis $x(0, p_0 - p_1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$.
Luego por lo anteriormente demostrado debe ser $p_0 = p_1$.

Entonces existe una única trayectoria óptima $x = x(a, p_0, t)$ que satisface $x(0) = a$, $x(T) = b$.

Proposición 4 [5]

Supóngase que $x(0, p_0, t)$ es un extremal no nulo que satisface $x(0, p_0, t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, T]$, $t_1 < T$.

Supóngase que $R(t, T) = \left\{ \int_0^T \phi^{-1}(t) Bu(t) \cdot dt \ : \ u \in R^n \right\}$.

Entonces la dimensión de R(t, T) no puede ser constante cuando t varía en [0, T].

Prueba

Sea $L_0(t)$ la aplicación:

$p_0 \rightarrow x(0, p_0, t)$, entonces es interesante examinar el núcleo de esta aplicación.

$v(0,0,T) \geq 0 \Rightarrow v(0,0,t) \geq 0$ p.c. $t \in (0,T]$. De aquí los extremales son óptimos en cada subintervalo $(0,T]$ $t \leq T$ (proposición 1). (Esta observación también sigue del Principio de Optimalidad: segmentos de trayectorias óptimas son también optimas)

Supóngase que existe un extremal no nulo $x(0,p_0,t)$ tal que $x(0,\ p_0,\ t_1)=0$ p.a. t_1, $0<t_1<T$. Puesto que x es óptimo sobre $[0,t_1]$, $\int_0^{t_1} c(x,u)\cdot dt = 0$ donde u es el control obtenido por la ley feedback óptima.

Sea

$$y(t) = \begin{cases} x(0,p_0,t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq T \end{cases}$$

y(t) es la trayectoria quebrada de x. Es una trayectoria del sistema generada por la función de control

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq T \end{cases}$$

sigue que $y(0)=y(T)=0$ y que $\int_0^T c(y,v)\cdot dt = 0$. Por lo tanto (y, v) es óptimo y de aquí y es extremal.

Sea $p(0, p_0, t_1)$ su ecuación adjunta.

Si $p_1 = p(0, q_0, t_1)$, entonces p_1 no es igual a cero puesto que H_0 es un campo lineal.

Sobre el intervalo $[t_1,T]$, $\frac{dp}{dt} = -A^T p$ y $B^T p=0$, de aquí $p = p(0, q_0, t) = (\phi^{-1}(t))^T p_1$ donde $\phi(t)$ es la matriz fundamental de $\frac{dx}{dt} = Ax$ que satisface $\phi(t_1, t_1) = I$.

Por lo tanto $\langle p_1, \phi^{-1}(t)Bu \rangle = 0$ cualquier control admisible u y por lo tanto

$$\left\langle p_1, \int_{t_1}^{T} \phi^{-1}(t)Bu(t) \right\rangle = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Luego p_1 anula a $R(t_1, T)$.

Veamos que la dimensión de $R(t, T)$ no puede ser constante cuando t varía en $(0, T]$:

$$\exists\ t_2 < t_1 \ \text{ y } \ u = \overline{u} \quad \left\langle p_1, \int_{t_2}^{T} \phi^{-1}(t)B\overline{u}(t) \cdot dt \right\rangle \neq 0 \qquad \textbf{(4)}$$

pues si para todo $t < t_1$ y para todo u $\left\langle p_1, \int_{t}^{T} \phi^{-1}(t)Bu(t) \right\rangle = 0$ tomando $\overline{u}$ que genera $\overline{x} = \overline{x}(0, p_0, t)$

$$\left\langle p_1, \int_{0}^{T} \phi^{-1}(t)B\overline{u}(t) \cdot dt \right\rangle = \left\langle p_1, \int_{0}^{t} \phi^{-1}(t)B\overline{u}(t) \cdot dt + \int_{t}^{T} \phi^{-1}(t)B\overline{u}(t) \cdot dt \right\rangle$$
$$\langle p_1, x(T) \rangle = \langle p_1, x(t) \rangle \Rightarrow \langle p_1, x(t) \rangle = 0 \quad \text{p.c. } t < t_1 \ \Rightarrow \ x(t) = q \quad q \in R$$

como $x(t_1) = 0$ resulta $x(t) = 0 \ \forall t < t_1$ absurdo. Además $R(t_1, T) \subset R(t_2, T)$. De **(3)** y **(4)** resulta que $\dim R(t_1, T) < \dim R(t_2, T)$. De donde $\dim R(t, T)$ no puede ser constante cuando $t \in (0, T]$.

Es bien conocido que si los elementos de las matrices A y B dependen analíticamente de la variable tiempo, los conjuntos R(t, T) son de dimensión constante como funciones de la variable tiempo. En particular es el caso para los sistemas autónomos.

En efecto :

Sea $$R_1(t,T)=\left\{\int_t^T \phi^{-1}(t)Bu(t)\cdot dt \ : \ u=u(t) \text{ es analítica}\right\}$$

$R_1 \subset R$, veamos que $\overline{R}_1 = R$

$$y \in R \Rightarrow \exists u = u(t) \qquad y=\int_t^T \phi^{-1}Bu(t)\cdot dt$$

$$\|y-y_1\|<\varepsilon \quad \text{p.a.} \quad y_1=\int_0^T \phi^{-1}Bu_1(t)\cdot dt \quad \text{donde} \quad u_1=u_1(t)=\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)$$

$$\|y-y_1\|=\left\|\int_t^T \phi^{-1}(t)Bu(t)\cdot dt-\int_t^T \phi^{-1}(t)B\left(\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\right)\cdot dt\right\|=$$

$$=\left\|\int_t^T \phi^{-1}(t)B\left(u(t)-\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\right)\cdot dt\right\| \leq \int_t^T \left\|\phi^{-1}(t)B\left(u(t)-\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\right)\right\|\cdot dt \leq$$

$$\leq \int_t^T \left\|\phi^{-1}(t)\right\|.\left\|B\right\|.\left\|u(t)-\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\right\|\cdot dt \ \leq \ \int_t^T \left\|\phi^{-1}(t)\right\|.\left\|B\right\|.\left\|u-\sum_{j=1}^{\infty}u_j\right\|\cdot dt$$

Tomando $\left\|u-\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)\right\|<\dfrac{\varepsilon}{\left\|\phi^{-1}\right\|.\left\|B\right\|.(T-t)}$ resulta que $\|y-y_1\|<\varepsilon$.

$R_1(t, T)$ es denso en $R(t, T)$.

Veamos que la dim $R_1(t, T)$ es constante.

Sea $u_1, u_2, \ldots, u_m$ funciones de control analíticas tal que la correspondiente solución $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ forman una base para $R_1(t, T)$.

$$x_1(t,T)=\int_t^T \phi^{-1}Bu_i(t)\cdot dt$$

Cada x_i es una curva analítica de cada variable t y T.

$D = \det(\, x_1(t_1, T) \;\; x_2(t_1, T) \;\ldots\; x_m(t_1, T)\,)$ es una función analítica de t_1.

En consecuencia $D = \det(\, x_1(t_1, T) \;\; x_2(t_1, T) \;\ldots\; x_m(t_1, T)\,)$ no puede ser cero sobre un intervalo sin cero sobre el intervalo completo.

Sea $m = \dim R_1(t_1, T)$. Si la $\dim R_1(t, T)$ no es constante como función del tiempo $\exists\, t_2$ tal que

$$R(t_1, T) \supset R(t_2, T) \qquad t_1 \leq t_2 \qquad \dim R(t_2, T) < m$$

El menor de orden m de $R(t_2, T)$ es nulo y también lo es sobre el intervalo $[t_2, T]$. Como D es una función analítica resulta nulo sobre $[0, T]$, en particular sobre t. $D=D(t)=0$ absurdo pues $\dim R_1(t_1, T) = m$.

Luego la $\dim R_1(t_1, T)$ es constante p.c. $t \in (0, T]$.

Proposición 5

Supóngase que los elementos A y B son funciones analíticas del tiempo en el intervalo $(0, T)$. Si existe un extremal no nulo $x(0, p_0, .)$ que satisface $x(0,p_0, t_1)=0$ para algún t_1 en el intervalo $(0, T)$, entonces $t_1=T$. Mas aún, en ese caso ningún extremal es óptimo sobre cualquier intervalo más grande $[0, T+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Equivalentemente no hay trayectorias óptimas en $[0, T+\varepsilon]$.

Prueba

Sea $x(0, p_0, .)$ que satisface que $x(0, p_0, t_1)=0$ para algún t_1 en el intervalo $(0, T)$. Supongamos que $t_1 < T$. Luego por la proposición 4 la dimensión $R(t, T)$ no puede ser constante $t \in (0, T]$, absurdo pues A y B tienen por elementos funciones analíticas. Luego $t_1=T$.

Veamos que ningún extremal es óptimo sobre cualquier intervalo más grande $[0, T+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Sea x(0, p_0, T)=0 un extremal no nulo que satisface x(0, p_0, T)=0. Para cualquier $\varepsilon > 0$ la trayectoria quebrada

$$y(t) = \begin{cases} x(0, p_0, t) & 0 \le t \le T \\ 0 & T \le t \le T+\varepsilon \end{cases}$$

es una trayectoria del sistema cuyo costo es cero. Tal curva no es un extremal y por lo tanto no es óptima. Esto significa que existe una trayectoria $(\hat{x}, \hat{u})$ tal que $\hat{x}(0) = 0 \quad \hat{x}(T+\varepsilon) = 0 \quad y \quad \int_0^{T+\varepsilon} c(\hat{x}, \hat{u}) \cdot dt < 0$. De aquí $v(0, 0, T+\varepsilon) = -\infty$.

En general hay dos instantes de tiempo T_R y T_0, significativos, que son importantes para la síntesis óptima [4].

El tiempo de Riccati T_R es el primer instante que un extremal no nulo que se origina en 0 vuelve a 0, y el tiempo óptimo T_0 es el primer instante que ningún extremal es óptimo más allá de T_0.

Sigue que $0 < T_R \le T_0 \le \infty$ y que para cualquier tiempo T en el intervalo [T_R, T_0] existe un extremal no nulo x(0, p_0, t) tal que x(0, p_0, T)=0.

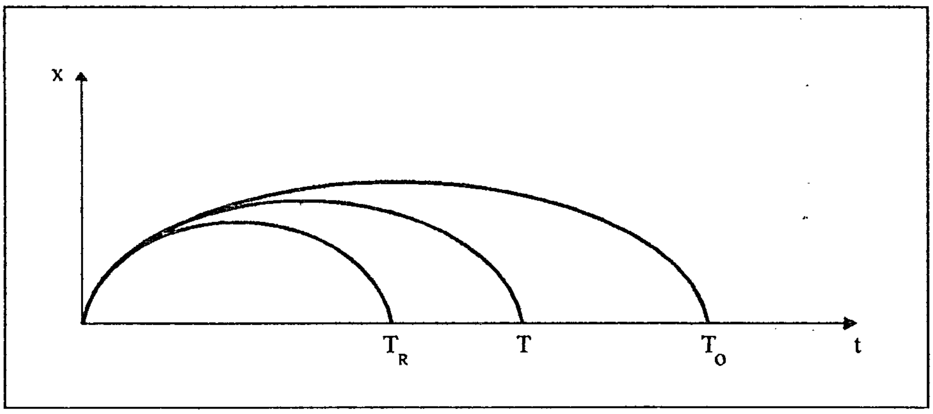

Fig. 1 Optimalidad de extremales.

Ejemplos y la desigualdad de Wirtinger

El siguiente problema de optimización es elemental en cálculo de variaciones.

Ejemplo 1

Minimizar $\frac{1}{2}\cdot\int_0^T\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\right)\cdot dt$ sobre las curvas absolutamente continuas x que satisfacen $x(0) = a,\ x(T) = b$.

Si hacemos $\frac{dx}{dt} = u$ entonces el problema se convierte en un problema de control con una dinámica particularmente simple.

Esto es, cualquier trayectoria absolutamente continua que une a y b es una trayectoria del sistema. El sistema hamiltoniano $H(x, p) = \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot p^2$ en efecto

$$H(x, p, u) = -c(x, u) + \left\langle p, \frac{dx}{dt}\right\rangle$$

$$H(x, p, u) = -\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\right) + \left\langle p, \frac{dx}{dt}\right\rangle$$

$$H(x, p, u) = \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot u^2 + pu$$

como $\frac{\partial H}{\partial u} = -u + p = 0$ entonces $p = u$.

de donde $H(x, p) = \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot p^2$

el sistema diferencial correspondiente es

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}=p \qquad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-x$$

de donde

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-x$$

de aquí los extremales son

$$x=x(t)=A.\text{sen}\,t+B.\cos t$$

en particular, los extremales que se originan en cero son x(0)=B=0 son $x(t)=A.\text{sen}\,t$. En $t=\pi$ es el primer instante en que un extremal no nulo vuelve a cero.

La fig. 2 es bastante familiar

a) Para $t<\pi$ cualquier punto que pasa por $t=T$ es alcanzado por un único extremal que parte de cero.

b) En $t=\pi$ sólo el origen es alcanzado por un extremal que parte de cero.
Un punto b puede alcanzarse por un extremal que pasa por a si y solo si b = -a.
En efecto: sea $x=x(t)=A.\text{sen}\,t+B.\cos t$

$$x(0)=a \qquad x(\pi)=b$$

$$x=x(t)=A.\text{sen}\,t+B.\cos t$$

Como $x(0)=B$ y $x(\pi)=-B$ resulta que b = - a.

c) En $\pi+\varepsilon$ cada punto es alcanzado por un extremal que parte de cero pero ningún extremal es óptimo sobre el intervalo $[0,\pi+\varepsilon]$, en vista de la proposición 5.

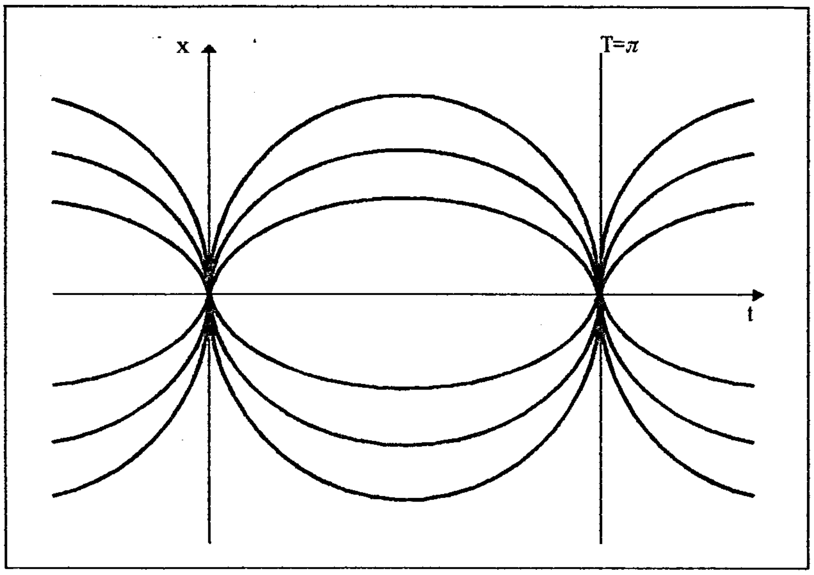

Fig. 2 Punto Conjugado.

Ejemplo 2

Minimizar $\frac{1}{2}\cdot\int_0^T\left(u^2-x_2^2\right)dt$ sobre la trayectorias $\frac{dx_1}{dt}=x_2$

$$\frac{dx_2}{dt}=u$$

(Asumimos que a y b son puntos fijos de R^2).

El sistema hamiltoniano H está dado por

$$H(x_1,x_2,p_1,p_2,u)=-\frac{1}{2}\cdot u^2+\frac{1}{2}\cdot x_2^2+p_1.x_2+p_2.u$$

De $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ resulta $-u+p_2=0$, en consecuencia $u=p_2$. En consecuencia el correspondiente hamiltoniano H_0.

$$H_0(x_1,x_2,p_1,p_2,u)=\frac{1}{2}\cdot p_2^2+p_1.x_2+\frac{1}{2}\cdot x_2^2$$

El sistema diferencial asociado

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial H_0}{\partial p_1}=x_2 \qquad \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H_0}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial H_0}{\partial p_2}=p_2 \qquad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H_0}{\partial x_2}=-(p_1+x_2)=-p_1-x_2$$

$p_1(t)=-\alpha$ donde α es una constante arbitraria.

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{dp_2}{dt}=-x_2+\alpha$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+x_2=\alpha$$

$x_2(t)=\beta.\operatorname{sen} t+\gamma.\cos t+\alpha$ con β y γ constantes arbitrarias

Como $\dfrac{dx_1}{dt}=x_2$

$x_1(t)=-\beta.\cos t+\gamma.\operatorname{sen} t+\alpha\, t+\delta$ con una constante arbitraria δ

$x_1(0)=x_2(0)=0$ implica que $\gamma=-\alpha$

$\beta=\delta$

Luego las ecuaciones quedan de la forma

$$x_1(t)=\alpha.(t-\operatorname{sen} t)+\beta.(1-\cos t)$$
$$x_2(t)=\alpha.(1-\cos t)+\beta.\operatorname{sen} t$$

Para tales extremales, $x_1(t)=x_2(t)=0$ si solo si

$$\begin{pmatrix}1-\cos t & \operatorname{sen} t\\ t-\operatorname{sen} t & 1-\cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$ p.a. números α y β

Este sistema de ecuaciones tiene una solución no nula si

$$(1 - \cos t)^2 - \operatorname{sen} t\,(t - \operatorname{sen} t) = 0$$

$$(1 - \cos t)^2 - \operatorname{sen} t\,(t - \operatorname{sen} t) = 2 - 2\cos t - t \operatorname{sen} t =$$

$$= 4 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} - 2 \cdot t \cdot \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2} = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{t}{2}\left(2 \cdot \operatorname{sen} \frac{t}{2} - t \cdot \cos \frac{t}{2}\right)$$

sigue que el determinante precedente es cero si

$$\operatorname{sen} \frac{t}{2} = 0 \qquad \text{o} \qquad 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} - t \cdot \cos \frac{t}{2} = 0$$

La segunda condición significa que $\tan \frac{t}{2} = \frac{t}{2}$ tiene solo la solución nula en el intervalo $[0, 2\pi]$.

En $t = 2\pi$ es el primer instante en que un extremal no nulo vuelve a cero.

En relación a la proposición 5 $\int_0^T \left(u^2 - x_2^2\right)dt$ no admite trayectorias óptimas cuando $T > 2\pi$.

Cuando $T < 2\pi$ cualquier par de puntos a y b de R^2 pueden unirse por un único extremal.

Para el caso $T = 2\pi$.

$$x_1(2\pi) = -\beta + 2\pi\alpha + \delta \qquad x_1(0) = -\beta + \delta$$
$$x_2(2\pi) = \gamma + \alpha \qquad x_2(0) = -\gamma + \alpha$$

Sigue que

$$x_1(2\pi) = x_1(0) + 2\pi\alpha$$
$$x_2(2\pi) = x_2(0)$$

donde α es una constante arbitraria

En consecuencia a puede unirse con b por una trayectoria óptima en $t = 2\pi$ unidades de tiempo si y solo si:

$$a_1 + 2\pi\alpha = b_1$$
$$a_2 = b_2$$

Usando la proposición 2, el costo óptimo es

$$\frac{1}{2}\langle p(\pi), x(\pi)\rangle - \frac{1}{2}\langle p(0), x(0)\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left[x_1(2\pi).p_1(2\pi) + x_2(2\pi).p_2(2\pi) - x_1(0).p_1(0) - x_2(0).p_2(0)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(-\beta + 2\pi\alpha + \delta)(-\alpha) + (\gamma + \alpha).\beta - (-\beta + \delta)(-\alpha) - (\gamma + \alpha).\beta\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\alpha\beta - 2\pi\alpha^2 - \alpha\delta + \gamma\beta - \alpha\beta - \beta\alpha + \alpha\delta - \beta\gamma - \alpha\beta\right] = \pi\alpha^2$$

En particular cuando $\alpha = 0$ ambas x_1 y x_2 por periódicas y el costo óptimo es cero.

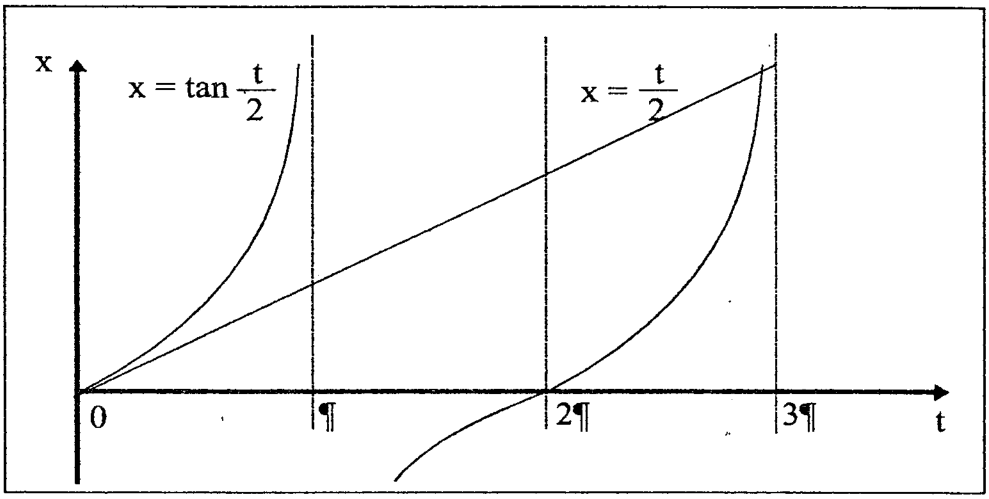

Fig. 3 Intersección de $x = \frac{t}{2}$ con $x = \tan\frac{t}{2}$

Hemos mostrado la siguiente desigualdad:

Supóngase que f es una función periódica absolutamente continua con periodo 2π tal que $\int_0^{2\pi} f.dt = 0$.

Si $f' \in L^2[0, 2\pi]$ entonces $\int_0^{2\pi} (f')^2.dt \leq \int_0^{2\pi} f.dt$.

La igualdad vale en el caso que $f(t) = \gamma.\cos t$ para un número arbitrario γ.

Esta desigualdad se debe a Wirtinger [**6**] y juega un papel importante en los problemas isoperimétricos del cálculo de variaciones. Para relacionar esta desigualdad al problema anterior sea u=f' entonces x_2=f y $x_1(t) = \int_0^t f.dt$. x_1 es periódica cuando $\int_0^{2\pi} f.dt = 0$.

De aquí

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \left(u^2 - x_2^2\right)dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \left((f')^2 - f^2\right)dt > 0$$

a menos que $x_2(t) = \gamma.\cos t$.

3 *El problema de extremo final variable*

Es natural asumir que T>0 y que v(a, T) = $\inf_b$. v(a, b, T) es finito para cada $a \in R^n$.

Sea R(T) el conjunto de puntos alcanzables a partir del origen por las trayectorias de (1) en T unidades de tiempo.

Para cualquier número ρ, $\rho R(t) = R(\rho T)$ de aquí

$$\int_0^T c(x, u).\,dt \geq 0 \qquad \forall (x, u) \qquad x(0) = 0.$$

En particular la trayectoria nula es óptima y por lo tanto $P \geq 0$.

La condición necesaria para optimalidad es el Principio del Máximo con las condiciones de transversalidad. Esto es, si $(\bar{x}, \bar{u})$ es óptimo entonces existe una curva absolutamente continua $\bar{p}(t)$ definida sobre $[0, T]$ que satisface:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) \qquad\qquad \frac{\partial H}{\partial u}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) = 0$$

donde H es el sistema hamiltoniano de la forma

$$H(x, p, u) = -c + \langle p, Ax + Bu \rangle \quad \text{con la condición}$$
$$\langle \bar{p}(T), y \rangle = 0 \quad \forall y \in R(T)$$

Como suponemos que el sistema es controlable, la última condición se reduce a $\bar{p}(T) = 0$.

Una adaptación a la proposición 1 muestra que los extremales son óptimos. Como en el problema con condiciones de contorno fijas (el caso regular) el sistema hamiltoniano H_0 está definido pensando la ley feedback óptima $u = P^{-1}(B^T p - Qx)$ siempre que P>0.

Por lo tanto el problema de optimalidad se reduce a encontrar curvas integrales $(x(a, p_0, \cdot), p(a, p_0, \cdot))$ de H_0 tales que $p(a, p_o, T) = 0$.

Similar al caso previo hay dos instantes de tiempo significativos T_1 y T_2 definidos de la siguiente manera:

$$T_1 = \sup \ \{ \ T : \int_0^T c(x, u).\,dt \geq 0 \qquad \forall (x, u) : x(0) = 0 \ \}$$
$$T_2 = \sup \ \{ \ T : T \leq T_1 \text{ tal que la única trayectoria } (x, u) \ \ x(0) = 0$$
$$\text{y} \int_0^T c(x, u).\,dt = 0 \ \text{ es la trayectoria nula } \}$$

Proposición 6

(a) Si $T>T_1$ ningún extremal es óptimo sobre $[0, T]$ y por lo tanto no hay trayectorias óptimas.

(b) Los extremales son óptimos sobre cualquier intervalo [0, T] con $T \le T_1$.

(c) Si $T<T_2$ entonces para cada $a \in R^n$; existe una única trayectoria óptima x sobre [0, T] con x(0)=a.

(a) y (b) son resultados obvios.

Para probar (c) notar que cualquier par extremal ($x(a, p_o, t)$, $p(a, p_o, t)$) la aplicación $p_0 \to p(a, p_0, T)$ es afin y $p(a, p_o, T) = p(a, 0, T) + p(0, p_o, T)$.

Si $p(0, p_o, T) = 0$ para algún $p_0 \in (R^n)^*$ el costo a lo largo de $x(0,p_o,t)=0$ en t=T.

De aquí $x(0, p_0, t) \equiv 0$ lo que implica que $p_o = 0$.

Por lo tanto la aplicación $p_0 \to p(a, p_0, T)$ es inversible y de aquí para cualquier $a \in R^n$, existe un único p_o tal que $p(0, p_o, T) = 0$. El correspondiente extremal $x(0, p_o, t)$ se toma como óptimo.

Es interesante notar que el tiempo T_1 es siempre menor que el tiempo de Riccati T_R definido por el problema de extremos fijos.

En efecto: supóngase que algún extremal x(0, q, .) es tal que x(0, q, T) = 0 para algún T con $T \le T_1$. Puesto que los extremales son óptimos sobre [0, T] (para el problema de extremos fijos) sigue que el correspondiente costo $\int_0^T c(x, u).\,dt = 0$.

De aquí x(t) = x(0, q, t) y $u(t) = P^{-1}(B^T p(0, q, t) - Qx(t))$. Por lo tanto (x, u) es óptimo para el problema de extremo final variable y por lo tanto p(0, q, T) = 0. Esto implica que q = 0 y por lo tanto x(t)=0 en [0, T].

Ejemplo 3

Minimizar $\frac{1}{2}\int_0^T (u^2 - x^2).\,dt$ sobre las trayectorias de $\frac{dx}{dt} = u$ con x(0)=a. Sigue del ejemplo 1 que los extremales que pasan por cero están dados por $x(t) = A.\operatorname{sen} t$, $p(t) = A.\cos t$. De aquí el costo a lo largo de esto extremales es iguales a $\frac{1}{2}.x(t).p(t) = \frac{1}{2}.A^2.\operatorname{sen} t.\cos t = \frac{1}{4}.A^2.\operatorname{sen} 2t$. El costo es un negativo para $t \leq \frac{\pi}{2}$. De aquí el intervalo más grande para el cuál los extremales son óptimos para este problema es $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de modo que el intervalo de optimalidad es menor que el correspondiente para el problema de contornos fijos.

APENDICE

Las nociones siguientes se dan relativas al problema.

$$\frac{dx}{dt} = A(t).x + B(t).u$$

$$x(t_0) = x^0$$

$$V\left(x^0, u(\cdot), x(\cdot)\right) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x^T.Q(t).x + u^T.R(t).u\right)dt$$

Definición Una función de control $\bar{u}(\cdot):[t_0, t_1] \to R^m$ que genera la solución $\bar{x}(\cdot):[t_0, t_1] \to R^m \quad x(t_0) = x^0$.

$$V\left(x^0, \bar{u}(\cdot), \bar{x}(\cdot)\right) \leq V\left(x^0, u(\cdot), x(\cdot)\right)$$

$\forall u(\cdot) \in \mathscr{U}(x^0)$, esto es, para cada función de control admisible $\bar{u}(\cdot):[t_0, t_1] \to R^m$ que genera la solución $\bar{x}(\cdot):[t_0, t_1] \to R^m \quad x(t_0) = x^0$.

Principio del Máximo

Sea $\quad H(\cdot): R^n \times R^n \times R^m \to R^1$

$$H(x, p, u) = \frac{1}{2}p_0\left(x^T.Q(t)x + u^T R(t).u\right) + p^T\left(A(t).x + B(t).u\right)$$

Si la función $\bar{u}$ es una ley de control óptima correspondiente a la función de estado $\bar{x}$ entonces existe una solución no nula $p(\cdot): R^n \to R^1$ de las ecuaciones adjuntas $\dot{p}(t) = -p_0.Q(t).x - B^T(t).p$ tal que:

(i) $\max\limits_{u} \; H(x, p, u) = H(x, \bar{p}, \bar{u})$

(ii) $H(x, \bar{p}, \bar{u}) = 0$

(iii) $p_0(t) = \text{constante} \leq 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1]$

donde $\bar{u}(\cdot)$ es continua. Si $\bar{u}(\cdot)$ es discontinua en $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ (i) y (ii) valen en $u(\bar{t}-0)$ y $u(\bar{t}+0)$.

Teorema de suficiencia de optimalidad

La función de control $\bar{u}(\cdot): [t_0, t_1] \to R^m$ que genera la solución $\bar{x}(\cdot): [t_0, t_1] \to R^m \quad x(t_0) = x^0$ es óptima en x^0 con respecto a $X(\text{abierto}) \subset R^n$ si existe una función $\mathscr{V}(\cdot): X \to R^1$ de clase C^1 tal que:

(i) Si $u(\cdot)$ genera la solución $x(\cdot): [t_0, t_1] \to R^m \quad x(t_0) = x^0$ y $x(t) \in X \quad \forall t \in [t_0, t_1)$, entonces

$$\lim_{t \to t_1} \mathscr{V}(x(t)) \leq \lim_{t \to t_1} \mathscr{V}(\bar{x}(t)) = 0$$

(ii) $$\frac{1}{2}\left(\bar{x}^T.Q(t).\bar{x} + \bar{u}^T.R(t).\bar{u}\right) + \text{grad}^T \mathscr{V}(\bar{x}(t))\left(A^T\bar{x} + B^T u\right) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1)$$

$$\text{(iii)} \qquad \frac{1}{2}\left(x^T.\dot{Q}(t).x + u^T.R(t).u\right) + \operatorname{grad}^T \mathscr{V}\left(x(t)\right)\left(A^T x + B^T u\right) \geq 0 \qquad \begin{array}{l} \forall x \in X \\ \forall u \in \mathscr{U} \end{array}$$

donde $\mathscr{U}$ es el conjunto de controles admisibles.

REFERENCIAS

Kalman, R. E. "Contribution to the theory of optimal control", Boletín Sociedad Matemática Mexicana, 2. Ser. vol. 5 (1960) pad. 102-109.

[1] E.A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Mc-Graww-Hill, New York, N. Y., 1995.

[2] C. Carathéodory, Variations vechnung und Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung, Teubner, Leipzig, 1935.

[3] G. Leitmann, The Calculus of Variations and Optimal Control, An Introducction, Plenum Press, New York, 1981.

Jurdjevic "Linear System with Quadratic Costs", pag. 279-293 en "Nolinear Controllability and Optimal Control". H.J. Sussmann. New York and Basel, Dekker, Inc., 1990.

[4] V. Jurdjevic and J. Kogan, Optimality of Extremals for Linear Systems with Quadratic Costs, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 143 (1) (1989), 86-108.

[5] J. Kogan, Bifurcation of Extremals in Optimal Control, Lecture Notes in Mathematics number 1216, Springer Verlag (1986).

[6] G. H. Harby, J. E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press (1934).

[7] M. R. Hestenes, "On Quadratic Control Problems", Calculus of Variations and Control Theory 36 (1978), 289-304 Mathematics Reserch Center of the University of Wisconsin and Academic Press.

[8] H. G. Moyer and H. J. Kelley "Conjugate Points on Extremal Rocket Paths", Lecture Notes in Mothematics, 223-224, Springer-Verlag (1970).

[9] V. Jurdjevic and I. Kupka "Polynomial Control System", Math. ann. 272 (1986), 361-368.

[10] V. Jurdjevic and I. Kupka "Linear System with Singular Quadratic Costs": to appear.