

**ITI-63**



# **INFORME TECNICO INTERNO**

**Nº. 63**

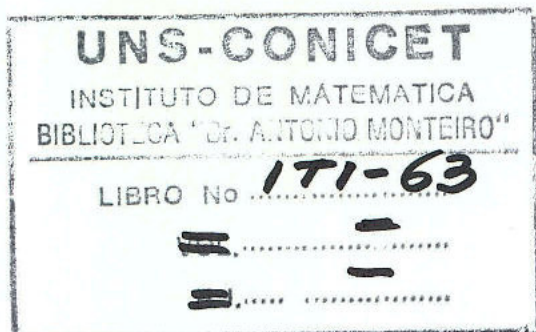
**INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA  
INMABB (UNS - CONICET)**



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

**Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA**

**República Argentina**



## INFORME TÉCNICO INTERNO N° 63

### TEMAS COMPLEMENTARIOS DE ANÁLISIS

A. BENEDEK, P. A. PANZONE, R. PANZONE

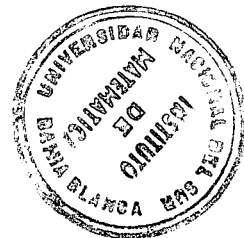
Departamento de Matemática  
Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1998





## TEMAS COMPLEMENTARIOS DE ANALISIS

A. BENEDEK, P.A. PANZONE Y R. PANZONE

### PRÓLOGO

El Área III del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur tiene a su cargo el dictado, entre otras, de las siguientes asignaturas propias de la Licenciatura en Matemática: Variable Compleja y Funciones Especiales, Espacios Métricos y Topológicos, Funciones Reales, Análisis Superior, Ecuaciones Diferenciales Parciales y un Seminario de Análisis. Éste se creó en 1971, con la intención de hacerlo permanente, en una reunión en la que participaron la Dra. Agnes Benedek, el difunto Dr. Evelio Oklander y el que firma. Hasta el momento se ha cumplido el objetivo propuesto.

Estas notas constituyen una recopilación de exposiciones extraídas de este Seminario de Análisis o de cursos especiales.

Algunos temas que se presentan en las tres primeras asignaturas mencionadas y cuyos desarrollos se ven restringidos por los límites naturales de las mismas, son discutidos aquí con mayor profundidad. El tratamiento de cada asunto es prácticamente independiente de los restantes pero todos asumen los conocimientos básicos de Variable Compleja, Topología, Análisis Funcional y Análisis Real. El denominador común de los diez primeros capítulos es el concepto de curva.

Los temas surgidos de la teoría de Ecuaciones Diferenciales serán desarrollados en otro volumen. El lector, al hojear estos apuntes, hará bien en suponer que son sólo una invitación a la lectura de textos sistemáticos y organizados, que por cierto no faltan en la actualidad.

Rafael Panzone

Bahía Blanca, Marzo de 1998.

## INDICE GENERAL

<b>Capítulo I. SOBRE EL CONCEPTO DE CURVA.</b>	1
Continuo. Arco irreduciblemente conexo. Continuo de Peano. Local conexión. Teorema de Hahn y Mazurkiewicz. Curva de Jordan. Teorema de Jordan y Veblen. Rectificabilidad. Teorema de Tonelli. Un teorema de F. Riesz. Caracterización de Janiszewski. Parametrización. Teorema de Peano.	
<b>Capítulo II. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS DOMINIOS PLANOS.</b>	6
Región plana simplemente conexa. Teorema de Riemann. Corte de un arco. Local conexión. Teorema de Carathéodory. Uniforme local conexión. Accesibilidad. Recíproca del teorema de Jordan. Teorema de Kerékjártó.	
<b>Capítulo III. APLICACIONES ESENCIALES E INESENCIALES.</b>	10
Función exponencial o inessential. Función esencial. Teorema de las antípodas de Borsuk-Ulam. Retracto. Teorema del punto fijo de Brouwer. Teorema de Brouwer de la aplicación abierta. Lema de Alexander. Grado de una aplicación. Criterio de Eilenberg. Demostración de Dieudonné del teorema de Jordan-Veblen.	
<b>Capítulo IV. CURVAS DIFERENCIABLES Y LONGITUD DE UN ARCO.</b>	21
Curva $C^n$ . Parámetro longitud de arco. Longitud de una curva. Rectificabilidad. Sistema móvil de referencia. Matriz de Cartan. Curvatura.	
<b>Capítulo V. CIRCULO DE CURVATURA. CONTACTO ENTRE CURVAS.</b>	30
Radio de curvatura. Circunferencia osculatriz. El teorema de los cuatro vértices.	
<b>Capítulo VI. FUNCIONES MONOTONAS.</b>	34
El teorema de Barrow-Newton. La función de Cantor. Teorema de Ruziewicz.	
<b>Capítulo VII. TEOREMA DE STOKES EN EL PLANO.</b>	37
Formas diferenciales. Partición de la unidad. Dominio estándar. Dominio regular. Teorema especial de Stokes. Cubrimiento a la Whitney del complemento de un compacto. Teorema general de Stokes.	
<b>Capítulo VIII. TRANSFORMACIONES CONFORMES. TEOREMAS DE B. RIEMANN Y C. CARATHEODORY.</b>	50
Convergencia casi uniforme. Teorema de Stieltjes-Osgood. Lema de Schwarz. Teorema de Riemann. Elemento de contorno. Punto principal de un elemento de contorno. Teorema de Poisson. Región de Stolz. Un teorema de F. y M. Riesz. Teorema de Lindelöf. Teorema de Carathéodory.	

<b>Capítulo IX. EJEMPLO DE H. WHITNEY.</b>	63
Un caso particular del teorema de extensión de Whitney. Puntos críticos. Teorema de Morse. Teorema de Sard. El contraejemplo de Hassler Whitney.	
<b>Capítulo X. CURVAS GENERALIZADAS.</b>	72
Curvas admisibles. Teorema de Zarecki. Curvas reparametrizables. Curvas generalizadas. Elemento generalizado de línea. Elemento de línea. Curva de Lebesgue. Teorema de representación.	
<b>Capítulo XI. FUNCIONES ELIPTICAS. FUNCION MODULAR.</b>	89
Paralelogramo típico. Paralelogramo fundamental. Orden de una función elíptica. Construcción de funciones elípticas de orden positivo. La función de Weierstrass $\wp$ . Funciones modulares y su relación con $\wp$ . La función modular $J$ . Región fundamental. Diversas propiedades de la función modular.	
<b>REFERENCIAS.</b>	102

# 1a PARTE

Contiene los capítulos I al VII.

# CAPITULO I

## SOBRE EL CONCEPTO DE CURVA

### I.1.

En este capítulo discutimos algunas propiedades de las curvas planas. ¿Qué es una curva? En primer lugar es un conjunto de puntos, que supondremos acotado, con la topología heredada del espacio métrico  $\mathcal{R}^2$  en el cual está sumergido.

Es obvio que la cardinalidad de ese conjunto no juega un papel preponderante para distinguir las curvas de conjuntos que no lo son. Un arco de curva debe estar formado por un solo trazo. Topológicamente: debe ser un conjunto *conexo*.

#### Ejemplo 1.

El gráfico  $S$  de  $\text{sen}\frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, 1]$ , junto con el segmento del eje de abscisas  $[-1, 0]$  es un conjunto no cerrado y conexo (demostrarlo).

#### Ejemplo 2.

La clausura del conjunto  $S$ ,  $\bar{S}$ , consiste de  $S \cup B$ ,  $B = \{(0, y) : 0 < |y| \leq 1\}$ .

Al conjunto del Ej.1 mal podría llamársele arco de curva. Agreguemos a la conexión la propiedad de compacidad, y para evitar casos triviales, que el conjunto tenga más de un punto. Es decir, supongamos que nuestro conjunto sea un *continuo*, eliminando así al ejemplo 1 de nuestra consideración. (La cardinalidad de un continuo es  $c$ ).

Desafortunadamente un disco es un continuo, lo mismo que  $\bar{S}$ . Pero si pensamos que un arco de curva debe *vincular* dos puntos, el inicial y el final, agregamos una restricción que nos favorecerá.

#### Ejemplo 3.

El disco de centro 0 y radio 1, el segmento de las abscisas  $[-1, 1]$  y la semicircunferencia  $(x, +\sqrt{1-x^2})$  unen  $a = (-1, 0)$  con  $b = (1, 0)$ .

Los conjuntos del ejemplo 3 *vinculan* dos puntos  $a$  y  $b$ ,  $a \neq b$ . Pero si exigimos de nuestro continuo, al que queremos llamar arco de curva, que sea *irreducible* en el sentido que no contenga ningún subconjunto conexo propio que vincule  $a$  con  $b$ , el disco queda eliminado. Obsérvese que  $\bar{S}$  es un continuo no irreducible que une  $a$  con  $b$ ,  $a \neq b$ .

Nos falta todavía introducir la idea de recorrido en el arco, es decir, en nuestro continuo irreduciblemente conexo, pues ésta es esencial a la idea de curva.

Debemos entonces saber para  $0 \leq t \leq 1$ , que  $t = 0$  corresponde a un extremo,  $t = 1$  al otro y que al pasar  $t$  de 0 a 1 se "recorre" la curva. El ejemplo más simple de arco de curva sería entonces el segmento del eje de abscisas  $[0, 1]$  donde al punto  $(0, t)$  le corresponde  $t$ . En cierto sentido es el más general pues vale el

**Teorema 1.** *Todo continuo irreduciblemente conexo en  $\mathcal{R}^2$  que une dos puntos  $a$  y  $b$  es homeomorfo al intervalo  $[0,1]$ .*

Como las imágenes biunívocas y bicontinuas de  $[0,1]$  son llamadas *arcos de Jordan* tenemos el

**Corolario.** *Todo continuo irreduciblemente conexo es un arco de Jordan y recíprocamente.*

### I.2.

Aparentemente nuestro análisis nos llevó a una definición de arco de curva demasiado exigente. Como en presencia de la inyectividad, la bicontinuidad sigue de la continuidad de la aplicación (pues  $[0,1]$  es compacto), si no queremos caer en la definición de arco de Jordan, pero sí mantener la continuidad de la aplicación, la única restricción a levantar es la de la biunivocidad.

Llamaremos *arco de curva de Peano* a toda imagen continua  $P$  del intervalo  $[0,1]$ . Estos son conjuntos conexos compactos, o sea, si no se reducen a un punto, son continuos. Además son *localmente conexos*. Se dice que  $K$  es localmente conexo si dado un punto cualquiera  $a$  del conjunto  $K$  y un entorno de  $a$  de radio  $\epsilon$ ,  $U_\epsilon$ , existe un entorno de radio  $\delta$ ,  $U_\delta$ , tal que dos puntos  $x, y$  de  $K \cap U_\delta$  pueden unirse por un subconjunto conexo de  $K$  contenido en  $U_\epsilon$ . (Demostrar que un arco de Peano es localmente conexo).

Hahn y Mazurkiewicz probaron el siguiente:

**Teorema 2.** *Para todo continuo localmente conexo  $K$  hay una aplicación continua de  $[0,1]$  sobre  $K$ .*

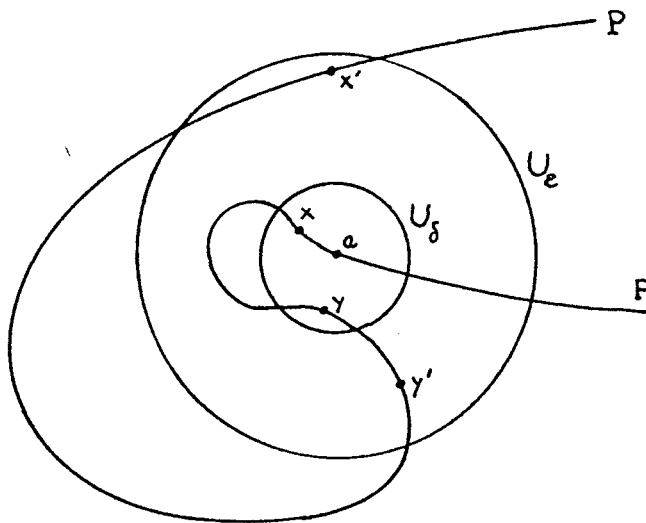
A los continuos localmente conexos se los llama también *continuos de Peano*, y con razón pues ya en 1890 Peano demostró el siguiente caso particular del teorema 2:

**Teorema 3.** *Sea  $K$  un cuadrado cerrado. Existe una aplicación continua de  $[0,1]$  sobre  $K$ .*

### I.3.

Por **dominio** entenderemos un abierto conexo. **Región** será un sinónimo de dominio, si no hay una indicación en contrario. Llamaremos *curva de Jordan* a un "arco de Jordan con extremos iguales". Precisamente, una curva de Jordan es un conjunto homeomorfo a la circunferencia. En 1910, L.E.J. Brouwer dió un ejemplo consistente en tres dominios planos con exactamente la misma frontera. Sin embargo, el contorno común a las tres regiones no es un arco de Jordan pues vale el siguiente importante resultado.

**Teorema 4 (Jordan-Veblen, 1905).** *Todo arco de Jordan tiene un único dominio complementario. Toda curva de Jordan tiene exactamente dos dominios complementarios que la tienen por frontera.*





## I.4.

Sea  $F(t) = (x(t), y(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , la aplicación continua que define una curva de Peano  $P$ . Diremos que  $P$  es *rectificable* si las longitudes de las poligonales inscriptas forman un conjunto acotado. El supremo de este conjunto es, por definición, la *longitud de  $P$* . Sabemos que  $x(t)$  e  $y(t)$  son continuas, y vale el

**Teorema 5.** *El arco de Peano  $P$  es rectificable si y solo si  $x(t)$  e  $y(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , son funciones continuas de variación acotada.*

Más aún,

**Teorema 6 (Tonelli).** *Si  $P$  es rectificable entonces tiene tangente en casi todo  $t$ . Además, dado  $t$ , si  $A$  y  $B$  son puntos de la curva tales que  $t_A < t < t_B$ , vale*

$$\lim_{t_B, t_A \rightarrow t} \frac{\|B - A\|}{t_B - t_A} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}, \text{ c.d. } t.$$

Sin embargo, un arco de Jordan no es necesariamente rectificable.

En efecto, la función  $w$  de Van der Waerden,  $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , tiene un gráfico continuo que describe un arco de Jordan y  $\Delta w / \Delta x$  no tiene límite ni finito ni infinito en ningún punto.

## I.5.

Si un arco de Jordan llenara una esfera no se desconectaría al quitarle un número arbitrario pero finito de puntos. De la definición seguiría entonces que lo mismo le ocurriría al segmento  $[0, 1]$ , lo cual es falso. Vale entonces el

**Teorema 7.** *Un arco de Jordan es nunca denso.*

Pero que un arco no sea denso en ninguna esfera no dice nada sobre la medida plana del mismo. En efecto, un arco de Jordan puede tener medida plana *positiva* (W. F. Osgood, 1902; H. Lebesgue, 1903). Más aún,

**Teorema 8 (F. Riesz, 1905).** *Dado un conjunto compacto totalmente desconexo (=sus componentes conexas constan de un solo punto) existe una curva de Jordan que lo contiene.*

Sin embargo es fácil demostrar la siguiente

**Proposición 1.** *Una curva de Jordan rectificable tiene medida plana cero.*

## I.6.

Volvamos a las propiedades de conexión de un arco de Jordan. Se dice que  $x \in E$ ,  $E$  conjunto conexo, es un punto de *corte* si  $E \setminus \{x\}$  no es conexo. Se sabe que todo continuo tiene al menos dos puntos que no son de corte, y vale el siguiente resultado.

**Teorema 9 (Janiszewski, 1912).** *Un continuo tal que todos sus puntos, excepto dos, son de corte es un arco de Jordan.*

También,

**Teorema 10.** *Si la conexión de un continuo  $K$  es destruída eliminando dos puntos arbitrarios entonces  $K$  es una curva de Jordan.*

### I.7.

Los ejemplos de Osgood y Lebesgue, y el teorema de Riesz, colaboran para que se destaque aún más el teorema de Jordan-Weblen. Es oportuno citar ahora la recíproca de este resultado.

**Teorema 11.** *Si un conjunto compacto  $J$  tiene exactamente dos dominios complementarios, y si cada uno de sus puntos  $x$  es extremo de dos arcos de Jordan contenidos respectivamente, salvo por ese extremo, en cada dominio complementario, entonces  $J$  es una curva de Jordan.*

### I.8.

Escudriñando entre las ideas esbozadas en las secciones precedentes notamos que en realidad la palabra "curva" fue usada para describir conceptos distintos, que pasamos a analizar en el caso, por ejemplo, de un "arco de Jordan".

Al conjunto de puntos en  $\mathcal{R}^2$ , imagen biunívoca y continua del intervalo  $[0, 1]$  por una aplicación  $F(t)$ , lo llamaremos *camino*. El camino junto con la aplicación  $F$  definen una *trayectoria* o *curva parametrizada*.  $t$  será el *parametro*. Dos parametrizaciones  $t$  y  $\tau$  se dirán *equivalentes* si la correspondencia  $t \leftrightarrow \tau$  es biunívoca y bicontinua, y a  $t = 0$  le corresponde  $\tau = 0$ ; o lo que es lo mismo si  $t = t(\tau)$  y  $\tau = \tau(t)$  definen aplicaciones continuas, estrictamente crecientes, de  $[0, 1]$  sobre  $[0, 1]$ , (demostrarlo). Entonces  $F(t)$  y  $G(\tau) = F(t(\tau))$  se dirán *trayectorias equivalentes*. Por *arco de curva* denotaremos a la familia de trayectorias equivalentes a una dada. Teniendo clara la diferencia entre concepto y concepto, no evitaremos en lo que sigue el abuso de lenguaje cuando se trate de la palabra "curva", salvo cuando aquél contribuya con una confusión innecesaria. Sobre un camino de un arco de Jordan sólo es posible definir dos trayectorias no equivalentes, o sea, sólo da lugar a dos arcos de Jordan, y esto en correspondencia con los distintos sentidos de recorrido. Por ejemplo, en el intervalo  $[0, 1]$  se puede ir de un extremo a otro en el sentido de las  $t$  crecientes o en el de las  $t$  decrecientes.

En el caso de una curva de Jordan las transformaciones  $t = t(\tau)$  utilizadas para definir la equivalencia de trayectorias deben ser homeomorfismos de la circunferencia unitaria que preservan orientación. Los mismos no tienen necesariamente un punto fijo como en el caso de los arcos.

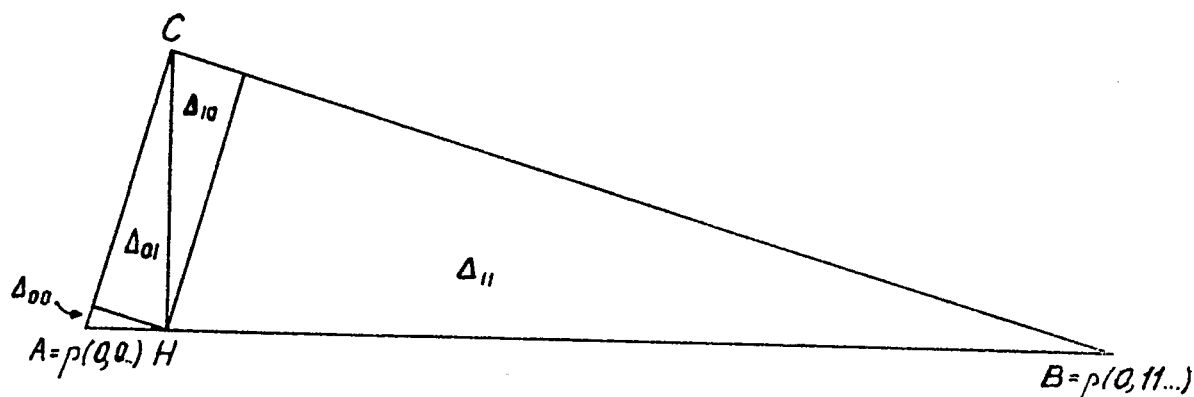
### I.9.

**Teorema de Peano.** *Existe una aplicación continua del intervalo  $[0, 1]$  sobre un triángulo plano dado.*

#### Demostración.

Tomemos un triángulo rectángulo no isósceles. A cada punto  $x \in [0, 1]$ ,  $x = 0.\mu_1\mu_2\mu_3\dots$ ,

$\mu_i = 0, 1$ , le haremos corresponder un encaje de triángulos semejantes al  $\Delta = \overset{\Delta}{ABC}$  que



definirán un punto  $p = p(x)$  de  $\Delta$ :

$$\{p\} = \Delta_{\mu_1} \cap \Delta_{\mu_1\mu_2} \cap \Delta_{\mu_1\mu_2\mu_3} \cap \dots$$

Simbólicamente:  $p = (\Delta_{\mu_1}, \Delta_{\mu_1\mu_2}, \dots)$ . Dado  $\Delta_{\mu_1 \dots \mu_n} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ , la altura desde el vértice ortogonal al lado opuesto lo divide en dos triángulos semejantes a él, uno pequeño y uno grande.  $\Delta_{\mu_1 \dots \mu_n 0}$  designará al pequeño y  $\Delta_{\mu_1 \dots \mu_n 1}$  al grande. Es una buena definición: si un punto admite dos desarrollos  $x = 0.\mu_1\mu_2\dots = 0.\nu_1\nu_2\dots$ , vale que  $p = (\Delta_{\mu_1}, \Delta_{\mu_1\mu_2}, \dots) = q = (\Delta_{\nu_1}, \Delta_{\nu_1\nu_2}, \dots)$ . Por ejemplo,  $x = 0.100\dots = 0.01111\dots$ ,  $p(x) = C$  (ver figura).  $p(x)$  es continua pues por ejemplo, si  $x$  no es diádico, entonces  $x_n \rightarrow x$  implica que los desarrollos de  $x_n$  y  $x$  tienen un número tan grande como se quiera de primeras cifras iguales lo que hace que sus imágenes estén arbitrariamente próximas.

Es fácil ver que todo punto está en un encaje de triángulos y por lo tanto es imagen de un  $x \in [0, 1]$ . No es biunívoca:  $x = 0.010000\dots$  e  $y = 0.11000\dots$  tienen por imagen a  $H$  pero  $x \neq y$ . QED.

**I.10.**

Como vimos las aplicaciones continuas de un segmento sobre el plano pueden presentar particularidades sorprendentes. Las de la circunferencia agregan otras nuevas. Sea  $f(z)$  una aplicación continua de la circunferencia sobre la recta. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $f$  aplica la circunferencia unitaria sobre  $[-1, 1]$ ; entonces  $g(z) = f(z) - f(-z)$  lleva  $\{|z| = 1\}$  sobre un conjunto conexo contenido en  $[-2, 2]$ . Como  $g$  es impar, existe  $z$  tal que  $g(z) = 0$ . Luego, en la circunferencia hay dos puntos diametralmente opuestos que tienen la misma imagen, (cf. cap. III).

## CAPITULO II

### ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS DOMINIOS PLANOS

#### II.1.

Si el espacio métrico  $\mathcal{R}^1$  fuera homeomorfo a  $\mathcal{R}^q$ ,  $q > 1$ , entonces  $\mathcal{R}^1 \setminus \{0\} \sim \mathcal{R}^q \setminus \text{imagen de } 0$ , lo cual es imposible pues  $\mathcal{R}^1 \setminus \{0\}$  no es conexo. Si  $\mathcal{R}^2 \sim \mathcal{R}^q$ ,  $q > 2$ , y  $C$  es una circunferencia en  $\mathcal{R}^q$ , entonces  $\mathcal{R}^q \setminus C \sim \mathcal{R}^2 \setminus \text{imagen de } C$ . Pero la imagen de  $C$  es una curva de Jordan, y en  $\mathcal{R}^2$  se rompe la conexión y en  $\mathcal{R}^q$  no. Vale que  $\mathcal{R}^n$  no puede ser transformado topológicamente en  $\mathcal{R}^m$  si  $m \neq n$ . Esto es un caso particular del teorema de Brouwer de invariancia de conjuntos abiertos:

**Teorema 1.** *Si un abierto en  $\mathcal{R}^n$  tiene por imagen a  $E$  en  $\mathcal{R}^n$  bajo una aplicación biunívoca y continua, entonces  $E$  es abierto y la aplicación es un homeomorfismo.*

Luego, si  $E \subset \mathcal{R}^m \subset \mathcal{R}^n$ ,  $m < n$ , y la aplicación es continua de  $\mathcal{R}^n$  sobre  $E$ , entonces no es inyectiva. En este orden de ideas se encuentra el siguiente teorema:

Sea  $f$  una aplicación continua del disco cerrado  $\bar{D}$  en su contorno  $T$ . Entonces existe un punto  $\mu \in T$  tal que él y su diametralmente opuesto tienen la misma imagen por  $f$ .

#### II.2.

Recordemos ahora un famoso teorema de Riemann:

**Teorema 2.** *Sea  $G$  una región plana simplemente conexa cuyo complemento en  $\mathcal{R}^2$  es no vacío (cf. NB). Entonces  $G$  puede transformarse conformemente<sup>1</sup> sobre el disco  $D = \{|z| < 1\}$  de manera que un punto arbitrario  $a \in G$  sea transformado en  $0$ . La transformación queda unívocamente determinada si una dirección arbitraria en  $a$  se transforma en una dirección dada en  $0$ .*

Este resultado puede mejorarse cuando al contorno de  $G$  se lo conoce con más precisión.

**Teorema 3.** *Sea  $G$  una región simplemente conexa limitada por una curva de Jordan  $J$ . Si  $w = f(z)$  transforma conformemente  $D = \{|z| < 1\}$  en  $G$  entonces  $f$  puede extenderse continuamente a  $\bar{D}$ , y su extensión transforma topológicamente  $\bar{D}$  en  $\bar{G}$  y  $\partial D$  en  $\partial G$ .*

#### II.3.

El teorema 3 puede generalizarse de la siguiente forma (cf. II.5):

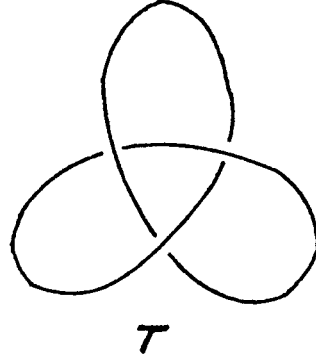
---

<sup>1</sup>transformación conforme =<sub>DEF</sub> transformación biunívoca definida por una función meromorfa.

**Teorema 4.** Si  $J$  es una curva de Jordan, es posible transformar topológicamente  $\mathcal{R}^2$  en sí mismo de manera que la transformación lleve  $J$  en una circunferencia  $C$ , y los dominios interior y exterior de  $J$  en sus homólogos de  $C$ . Más aún, la transformación puede obtenerse como extensión de un homeomorfismo dado entre  $J$  y  $C$ .

Sin embargo un "trébol  $T$ " en  $\mathcal{R}^3$  (ver figura) es homeomorfo a una circunferencia  $C$  pero no existe *ninguna* transformación topológica de  $\mathcal{R}^3$  en sí mismo que lleve  $T$  en  $C$ .

NB. Una región plana se dice **simplemente conexa** si su complemento en el plano cerrado  $Z^2$  -la esfera de Riemann- es conexo. La misma definición se utiliza para regiones en  $Z^2$ .  $Z^2$  es compacto y por lo tanto no es homeomorfo a  $D$ .  $\mathcal{R}^2$  y  $D$  son homeomorfos, pero no son conformemente equivalentes, pues según un teorema de Liouville no hay funciones enteras acotadas no constantes.



Una región plana  $G$  tal que  $Z^2 \setminus G$  es conexo y  $\mathcal{R}^2 \setminus G \neq \emptyset$ , tiene por complemento en  $Z^2$  a un continuo que contiene al punto en el infinito del plano complejo. Una función meromorfa elemental establece una correspondencia conforme entre una región  $\mathcal{P}$  simplemente conexa en  $Z^2$ , distinta de  $Z^2$  y de  $Z^2$  menos un punto, y una región plana como la  $G$ . El teorema de Riemann afirma entonces que  $\mathcal{P}$  es conformemente equivalente a  $D$ .

#### II.4.

A continuación citamos algunos resultados que involucran a dominios planos, la mayoría de los cuales, aunque de demostración no trivial, tienen enunciados de contenido "evidente".

A los dominios planos considerados en esta sección y la siguiente se los **supondrá siempre acotados**. Sea  $D$  entonces un dominio plano acotado.

**Teorema 5.** Si la curva de Jordan  $J_1$  es interior a  $J_2$ , su dominio interior está contenido en el de  $J_2$ .

#### Definición 1.

Un arco de Jordan con sus dos extremos en  $\partial D$  se dirá un *corte* de  $D$  si todos sus puntos no extremos pertenecen a  $D$ . Un arco de Jordan que tiene un extremo en  $\partial D$  y todos sus otros puntos, incluido su otro extremo, en  $D$ , será denominado *semicorte* de  $D$ .

**Teorema 6.** Un *semicorte* de  $D$ ,  $L$ , no desconecta. Además, la frontera de  $D \setminus L$  es  $L \cup \partial D$ .

**Teorema 7.** Si ambos extremos de un *corte*  $L$  de  $D$  están en la misma componente del complemento de  $D$  entonces  $D \setminus L$  tiene exactamente dos componentes y  $L$  está contenido en la frontera de ambas.

**Teorema 8.** Si  $D_1$  es uno de los dominios complementarios de una curva de Jordan  $J$  y  $L$  es un *corte* de  $D_1$  cuyos extremos dividen  $J$  en dos arcos  $L_1$  y  $L_2$  entonces las dos componentes de  $D_1 \setminus L$  tienen como fronteras a  $L \cup L_1$  y  $L \cup L_2$ , respectivamente.

**Teorema 9.** *Sea  $D$  un dominio. Las componentes de  $\mathcal{R}^2 \setminus \overline{D}$  tienen fronteras conexas.*

**Teorema 10.** *Todo dominio residual de un conjunto  $C$  cerrado (= componente conexas de  $\mathcal{R}^2 \setminus C$ ) conexo tiene frontera conexas.*

**Teorema 11.** *Cada componente de  $\mathcal{R}^2 \setminus D$ ,  $D$  dominio, contiene exactamente una componente de  $\partial D$  (= la frontera de  $D$ ).*

**Teorema 12.** *Un corte en el dominio  $D$  con extremos en diferentes componentes de  $\partial D$  no destruye la conexión de  $D$ .*

## II.5.

### Definición 2.

Un dominio  $D$  se dirá *simplemente conexo* si  $\mathcal{R}^2 \setminus D$  es conexo. Esto **equivale** a que todo polígono cerrado formado por paralelas a los ejes contenido en  $D$  contiene en su interior sólo puntos de  $D$ . Y también equivale a que la frontera de  $D$  sea conexas.

**Teorema 13.** *Todo dominio residual de un continuo es simplemente conexo.*

**Teorema 14.** *Un corte en un dominio simplemente conexo determina exactamente dos dominios que también son simplemente conexos.*

**Teorema 15.** *Si todo corte del dominio  $D$  destruye su conexión entonces  $D$  es simplemente conexo.*

**Teorema 16.** *Un dominio  $\subset \mathcal{R}^2$  es simplemente conexo si y sólo si es homeomorfo al interior de una circunferencia.*

**Teorema 17.** *Si los puntos  $x, y \in D$ ,  $D$  simplemente conexo, están separados<sup>2</sup> en  $D$  por un conjunto cerrado  $F \subset D$  entonces están separados en  $D$  por una componente de  $F$ .*

### Notación.

$$U(a, \delta) = U_\delta(a) = B(a, \delta) = B_\delta(a) := \{z : |z - a| < \delta\}.$$

## II.6.

### Definición 3.

Un subconjunto  $E \subset \mathcal{R}^2$  se dice *localmente conexo* (l.c.) en  $a$  si dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que dos puntos cualesquiera de  $E \cap U(a, \delta)$  están unidos por un conjunto conexas que yace en  $E \cap U(a, \epsilon)$ . Podemos suponer siempre que  $a \in \overline{E}$ .

Esto es lo mismo que decir que dado  $\epsilon$  existe  $\epsilon' < \epsilon$  tal que  $E \cap U_{\epsilon'}(a)$  es un subconjunto de una componente de  $E \cap U_\epsilon(a)$ .

---

<sup>2</sup>dos puntos se dicen *separados* en  $D$  por un conjunto  $E$  si pertenecen a diferentes componentes de  $D \setminus E$ .

**Teorema 18.** Sea  $D$  un dominio simplemente conexo conformemente equivalente al disco  $D_1$ . El contorno de  $D$  es localmente conexo si y sólo si la transformación conforme se extiende a una aplicación bicontinua de  $\overline{D}_1$  en  $\overline{D}$ , (Carathéodory).

$E$  se dice *uniformemente localmente conexo* (u.l.c.) si dado  $\epsilon$  existe  $\delta$  tal que dados dos puntos  $x, y \in E$ ,  $|x - y| < \delta$  implica la existencia de un conexo  $C \subset E$  de diámetro  $< \epsilon$  que los une.

(En espacios compactos,  $l.c. \iff u.l.c.$  Sea  $G$  abierto y acotado; si  $\partial G$  es l.c. en todo punto entonces  $\partial G$  es u.l.c. y recíprocamente)

**Teorema 19.** Sea  $D$  el dominio interior de la curva  $J$  de Jordan. Entonces,  $\overline{D}$  es u.l.c..

#### Definición 4.

Si  $D$  es un dominio  $\subset \mathcal{R}^2$ ,  $x \in \partial D$  se dice *accesible desde  $D$*  si es un extremo de un semicorte en  $D$ .

(Los puntos accesibles son densos en  $\partial D$ . Un arco de Jordan es accesible en todo punto desde su dominio residual el cual no es localmente conexo en los puntos no extremos del arco.)

**Teorema 20.** Si  $D$  es l.c. en  $a \in \partial D$  entonces  $a$  es accesible desde  $D$ . La recíproca es falsa.

**Teorema 21.** Un dominio simplemente conexo no es l.c. en puntos de corte de su frontera.

Arco semilineal:= arco de Jordan formado por una sucesión finita o numerable de segmentos consecutivos.

**Teorema 22.** Una curva de Jordan es accesible en cada uno de sus puntos desde ambos dominios complementarios por arcos semilineales.

**Teorema 23 (Recíproca del T. de Jordan).**

1<sub>a</sub> Forma: Si un conjunto cerrado tiene dos dominios complementarios desde cada uno de los cuales es accesible en cada uno de sus puntos entonces es una curva de Jordan.

2<sub>a</sub> Forma: Si un dominio acotado es simplemente conexo y u.l.c. entonces su frontera es una curva de Jordan.

3<sub>a</sub> Forma: Si un dominio acotado es simplemente conexo y l.c. en su frontera, entonces ésta es una curva de Jordan.

**Teorema 24 (Kerékjártó).** Si dos curvas de Jordan,  $J_1$  y  $J_2$ , tienen más de un punto en común, todos los dominios residuales de  $J_1 \cup J_2$  son dominios de Jordan.

Las demostraciones de los teoremas enunciados en este Capítulo pueden estudiarse en la referencia [NM].

## CAPITULO III

### APLICACIONES ESENCIALES E INESENCIALES

#### III.1.

Ciertas propiedades topológicas profundas de conjuntos planos y de la esfera siguen como consecuencia de resultados sencillos sobre funciones sin logaritmo continuo.

Designaremos con  $\mathcal{R}$  a los números reales, con  $\mathcal{C}$  a los complejos, con  $\mathcal{X}$  a un espacio topológico ( $T_2$ ), con  $\mathcal{D}$  al interior del disco unitario (en  $\mathcal{C}$ ) y con  $\mathcal{T}$  a su contorno:  $\{z : |z| = 1\}$ .

#### Definición.

Sea  $f$  una aplicación continua de  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ . Diremos que  $f$  es **exponencial** (**inesencial**) si tiene un logaritmo continuo, es decir, existe una aplicación continua  $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $f(x) = \exp \Phi(x)$ . Una función se dirá **esencial** si no es exponencial.

#### Ejemplos.

1) Sea  $n$  entero. La aplicación  $z \rightarrow z^n$ ,  $z \in \mathcal{X} = \mathcal{T}$ , es exponencial si y sólo si  $n = 0$ . En efecto, si  $2\pi i \Phi$  fuera un logaritmo continuo de la aplicación tendríamos  $z^n = e^{2\pi i \Phi(z)}$  para todo  $z \in \mathcal{T}$ , y por lo tanto

$$(1) \quad e^{2\pi i \Phi(e^{2\pi i \theta}) - 2\pi i n \theta} = 1 \quad \text{para todo } \theta \in \mathcal{R}$$

Luego,  $\psi(\theta) = \Phi(e^{2\pi i \theta}) = n\theta + N$  para todo  $\theta$ . Entonces,  $N = \psi(0) = \psi(1) = n + N$  implicaría  $n = 0$ .

2) La aplicación  $E : (0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{T} \setminus \{1\}$ ,  $E(t) = e^{it}$ , define un homeomorfismo. Su inversa es  $L(z) = t$  si  $z = e^{it}$ . Toda aplicación continua  $f$  de  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{T} \setminus \{1\}$  es **exponencial**. En efecto,

$$(2) \quad z = f(x) = e^{iL(f(x))} = e^{i(L \circ f)(x)}, \Phi(x) = i(L \circ f)(x).$$

3) Si  $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0\}$  es impar y continua entonces es **esencial**. En efecto, si no lo fuera existiría  $g$  continua y no nula, tal que  $g^2 \equiv f$ . Luego,  $g(-u)/g(u) \equiv i$ , o bien  $\equiv -i$ . Entonces  $g(u)/g(-u) \equiv -i$ , o bien  $\equiv i$ , contradicción. Una generalización de este resultado se prueba en III.6.

#### III.2.

Es importante notar que deformaciones homotópicas de aplicaciones esenciales son esenciales.



**Teorema 1.** Sean  $f_1$  y  $f_2$  aplicaciones continuas de  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ . Si para todo  $x \in \mathcal{X}$ ,  $|f_1(x) - f_2(x)| < |f_2(x)|$  entonces  $f_1$  es exponencial si y sólo si  $f_2$  lo es.

**Demostración.**

Sea  $h = f_1/f_2$ . Entonces  $|h(x) - 1| < 1$  para todo  $x$ . De esto sigue que  $h(x) \neq 0$  para todo  $x$ , y que  $h(x)$  es exponencial. Definamos  $g(x) := h(x)/|h(x)|$ . Luego,  $g(\mathcal{X}) \subset \mathcal{T} \cap \{(0, \infty) \times \mathcal{R}\}$ , y existe  $\Phi(x)$  continua tal que:  $g = \exp \Phi$ . Por lo tanto:  $h(x) = |h(x)| \cdot \exp \Phi(x)$ . En consecuencia:

$$f_1 = f_2 \cdot e^{\Phi + \ln|h|} = f_2 \cdot e^{\Phi_1}, \text{ QED.}$$

**Teorema 2.** Sea  $\mathcal{X}$  compacto, y sea  $F : \mathcal{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0\}$  continua en  $(x, t)$ . Si  $F_t(x) := F(x, t)$  entonces  $F_0$  es esencial si y sólo si  $F_1$  lo es.

**Demostración.**

$d = \inf_{(x,t)} |F(x, t)| > 0$ . De la continuidad uniforme de  $F$  sigue que dado  $d$  existe  $n$  tal que si  $|s - t| \leq 1/n$ ,  $0 \leq s, t \leq 1$ , entonces  $|F(x, t) - F(x, s)| < d$  para todo  $x \in \mathcal{X}$ . Luego, de

$$\begin{aligned} |F_0(x) - F_{1/n}(x)| &< d \leq |F(x, 1/n)| \\ &\dots\dots\dots \\ |F_{n-1/n}(x) - F_1(x)| &< d \leq |F_1(x)| \end{aligned}$$

resulta que  $F_0$  es exponencial sii  $F_{1/n}$  lo es  $\dots$ , sii  $F_1$  es exponencial. QED.

**Corolario.** Sea  $f$  continua de  $\overline{\mathcal{D}}$  en  $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ . Entonces  $f$  es exponencial.

**Demostración.**

Sea  $F : \mathcal{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0\}$  definida por:  $F(z, t) = f(tz)$ . Como  $F_0(z) = f(0) \neq 0$ ,  $F_0$  es exponencial, y por lo tanto  $F_1(z) = f(z)$  es exponencial. QED.

### III.3.

Observemos que la **restricción** de una función exponencial a un subconjunto  $\mathcal{X}'$  de  $\mathcal{X}$  también es exponencial. Sea  $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{R}^3 : \sum |x_i|^2 = 1\}$ .

**Teorema 3 (de las antípodas; Borsuk-Ulam).** Sea  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$  continua. Entonces existe  $p \in \mathcal{S}$  tal que  $f(p) = f(-p)$ .

**Demostración.**

Definamos  $F : \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{C}$  por  $F(z) := f(z, \sqrt{1 - |z|^2}) - f(-z, -\sqrt{1 - |z|^2})$ . Si el resultado fuese falso tendríamos  $F(z) \neq 0$  para todo  $z \in \overline{\mathcal{D}}$ . Del corolario 2 seguiría entonces que  $F$  sería exponencial. Por lo tanto también lo sería  $F|_{\mathcal{T}} : F|_{\mathcal{T}}(u) = f(u, 0) - f(-u, 0)$ , en contradicción con el ejemplo 3). QED.

**Teorema 4.** Sea  $f : \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{T}$  continua. Entonces existe  $u \in \mathcal{T}$  tal que  $f(u) = f(-u)$ .

**Demostración.**

Sea  $H(u, t) := (2 - t)f(u) - tf(-u)$ . Supongamos que para todo  $u \in \mathcal{T}$ ,  $f(u) \neq f(-u)$ . Como  $|f(u)| = |f(-u)| \equiv 1$ , sigue que  $H(u, t) \neq 0$  en  $\mathcal{T} \times [0, 1]$ .  $H_0(u) = 2f(u)$  es una deformación homotópica de  $H_1(u) = f(u) - f(-u)$ . Esta última es esencial según el ejemplo 3), y  $H_0$  es exponencial según el corolario al teorema 2, contradicción. QED.

Es decir, necesariamente hay dos puntos antipodales del contorno  $\mathcal{T}$  con la misma imagen. De esto sigue el siguiente *principio del tambor* que afirma que  $\mathcal{T}$  no puede ser un retracto de  $\overline{\mathcal{D}}$ .

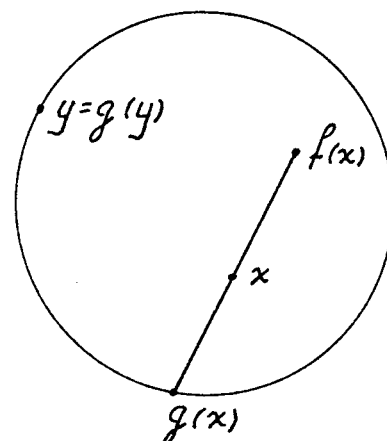
**Corolario.** No existe una aplicación continua de  $\overline{\mathcal{D}}$  sobre  $\mathcal{T}$  que deje fijo cada punto de  $\mathcal{T}$ .

Veamos ahora una aplicación de este principio.

**Teorema 5 (del punto fijo; Brouwer).** Sea  $f : \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$ , continua. Entonces existe  $x \in \overline{\mathcal{D}}$  tal que  $f(x) = x$ .

**Demostración.**

Si no fuera así,  $f(x) \neq x$  para todo  $x$ . Luego, podría construirse  $g : \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{T}$ , como en la figura.  $g$  sería continua y dejaría invariante todo punto de  $\mathcal{T}$ , contradicción. QED.

**EJERCICIOS.**

1. Sea  $I = [0, 1]$ . Demostrar el principio del tambor en el caso que  $\overline{\mathcal{D}}$  sea reemplazado por  $I$  y  $\mathcal{T}$  por el contorno de  $I$  en  $\mathcal{R}$ .

2. Redemostrar el teorema del punto fijo para aplicaciones continuas de  $I$  en  $I$ .

**III.4.**

La propiedad  $D$  para funciones reales continuas tiene su análogo bidimensional en el siguiente teorema (por qué?).

**Teorema 6.** Sea  $F : \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{C}$ , continua, tal que para todo  $u \in \mathcal{T} : F(u) = u$ . Entonces,  $\overline{\mathcal{D}} \subset F(\overline{\mathcal{D}})$ .

**Demostración.**

Si no fuera así existiría  $p \in \overline{\mathcal{D}} \setminus F(\overline{\mathcal{D}})$ . Luego,  $|p| < 1$ . Definamos:

$$f(z) := \frac{F(z) - p}{|F(z) - p|}$$

Entonces  $f$  llevaría  $\overline{D}$  sobre  $\mathcal{T}$ . Del teorema 4 seguiría entonces que existe  $u \in T$  tal que  $f(u) = f(-u)$ . Pero  $F(u) = u$ ,  $F(-u) = -u$ , y por lo tanto  $\frac{u-p}{|u-p|} = \frac{-u-p}{|-u-p|}$ . O sea,

$$(3) \quad (|u+p| + |u-p|)u = (|u+p| - |u-p|)p.$$

Como  $1 = |u| > |p|$ , y  $0 < |u+p| + |u-p| \geq ||u+p| - |u-p||$ , seguiría de (3) una contradicción. QED.

### III.5.

Toda aplicación biunívoca y continua de un espacio compacto sobre uno de Hausdorff es bicontinua. Para ver esto basta mostrar que si un conjunto  $Y$  es compacto respecto a la topología  $\tau_1$ , Hausdorff respecto a la topología  $\tau_2$  y  $\tau_1 \succ \tau_2$  entonces  $\tau_1 = \tau_2$ . (En efecto, si  $C$  es cerrado  $\tau_1$  entonces es compacto  $\tau_1$ , y por lo tanto compacto  $\tau_2$ ; luego, es cerrado  $\tau_2$ ). En espacios euclídeos el resultado vale aún para abiertos:

**Teorema 7 (de la aplicación abierta; Brouwer).** *Sea  $U \subset \mathcal{C}$ , abierto;  $g : U \rightarrow \mathcal{C}$  continua y biunívoca. Entonces,  $g(U)$  es un subconjunto abierto de  $\mathcal{C}$  y  $g^{-1} : g(U) \rightarrow U$  es continua.*

Esto sigue del siguiente:

**Lema 1.** *Sea  $f : \overline{D} \rightarrow \mathcal{C}$  continua e inyectiva. Entonces  $f(0)$  es un punto interior.*

En efecto, el lema implica que  $g(U)$  es abierto. Como la imagen de un disco cerrado  $K$  con centro  $a$ ,  $K \subset U$ , es un compacto  $g(K)$ , la aplicación  $g$  es bicontinua entre  $K$  y  $g(K)$ . Por ser  $g(a)$  interior a  $g(K)$ ,  $g^{-1}$  es continua en  $g(a)$ .

El lema es fácil de demostrar para una aplicación continua  $f$  de  $I = [-1, 1]$  en  $\mathcal{R}$ .  $f(I)$  se reduce a un punto o bien a un intervalo no trivial. En este último caso, si  $f(0)$  no es interior a  $f(I)$ ,  $f(0)$  es necesariamente un extremo de ese intervalo. Por lo tanto hay dos puntos  $x, y \in I$ ,  $x < 0 < y$ , tales que  $f(x) = f(y)$ .

#### Demostración del lema 1.

Sea  $y_0 = f(0)$ . Definamos  $h(u, t) : \mathcal{T} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0\}$  por  $h(u, t) = f\left(\frac{u}{1+t}\right) - f\left(\frac{-tu}{1+t}\right)$ . Entonces,  $h_1(u) = f(u/2) - f(-u/2)$  es continua, impar y no nula; por lo tanto esencial. Luego será esencial su deformación homotópica:  $h_0(u) = f(u) - y_0$ .

Sea  $r = \inf_{x \in \mathcal{T}} |h_0(x)|$ ;  $r$  es positivo. Sea  $y_1$  tal que  $|y_1 - y_0| < r$ .

Definamos:  $h_2(u) = f(u) - y_1$ ,  $h_2 : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$ . Vale

$$|h_2(u) - h_0(u)| = |y_1 - y_0| < r \leq |h_0(u)| \quad \text{para todo } u \in \mathcal{T}.$$

En consecuencia,  $h_2$  es no nula y esencial. Consideremos la aplicación:  $F(z) = f(z) - y_1$ ,  $z \in \overline{D}$ . Si  $F(\overline{D}) \subset \mathcal{C} \setminus \{0\}$ ,  $F$  sería exponencial y por lo tanto sería exponencial  $F|_T = h_2$ , contradicción. Es decir, existe  $z \in \overline{D}$  tal  $F(z) = 0 = f(z) - y_1$ . Como  $h_2(u) \neq 0$ ,  $z \in D$ . Luego  $f(D)$  llena  $B_r(y_0)$ . QED.

**III.6.**

Sea  $n > 1$ ,  $n$  entero; sean  $w = e^{2\pi i/n}$  y  $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0\}$ ,  $f$  continua. Si

$$f(wu) = \bar{w}f(u) \quad \text{para todo } u \in \mathcal{T},$$

entonces  $f$  no tiene una raíz enésima continua, y por lo tanto es **esencial**. En efecto, sea  $g$  continua tal que  $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $g^n \equiv f$ . Entonces  $g^n(wu) = f(wu) = \bar{w}f(u) = \bar{w}g^n(u) \neq 0$  implica  $(g(wu)/g(u))^n = \bar{w}$  para todo  $u \in \mathcal{T}$ . En consecuencia,  $g(wu)/g(u) = \nu =$  raíz  $n$ -ésima de  $\bar{w}$ . Luego

$$1 = \frac{g(w)}{g(w)} = \frac{g(w^{n+1})}{g(w)} = \frac{g(w^2)}{g(w)} \cdot \frac{g(w^3)}{g(w^2)} \cdots \frac{g(w^{n+1})}{g(w^n)} = \nu^n = \bar{w},$$

contradicción, QED.

**III.7.**

El resto del capítulo lo dedicamos al teorema de Jordan-Veblen que reenunciamos a continuación (Ts. 8 y 9). Sea  $K$  un compacto,  $K \subset \mathcal{C} (= \mathcal{R}^2)$ , y sea  $A$  una componente de  $\mathcal{C} \setminus K$ . Entonces,  $A$  es abierto y  $A \cup K$  es cerrado. En efecto,  $\mathcal{C} \setminus (A \cup K)$  es unión de componentes de  $\mathcal{C} \setminus K$ .

Además, existe en el complemento de  $K$ , por ser  $K$  acotado, exactamente una componente no acotada. Sea ahora  $K = J$ , una curva de Jordan. De lo dicho sigue que  $\bar{A} \cup J = A \cup J$ ,  $\partial A \subset J$ . Demostraremos los siguientes resultados:

**Teorema 8.**  $\partial A = J$ .

**Teorema 9.**  $\mathcal{C} \setminus J$  tiene exactamente dos componentes.

**Teorema 10.** Un arco de Jordan  $\Gamma$  no desconecta a su complemento.

Veamos que  $T.10 \Rightarrow T.8$ . Sean  $a \in A$  y  $x \in J$ . Sea  $\gamma$  un subarco abierto de  $J$  tal que  $x \in \gamma$  y  $\gamma \subset B_\epsilon(x)$ ,  $\epsilon$  suficientemente pequeño.  $\gamma = \mathcal{C} \setminus (J \setminus \gamma)$  es un abierto conexo en virtud del T.10. Luego es posible unir  $a$  con  $x$  con un arco  $p$  en  $\gamma$ . Sea  $y$  el primer punto de  $p$  no en  $A$ . Entonces,  $y \in \partial A$ , por lo tanto,  $y \in \gamma$ . En consecuencia,  $x \in \partial A$ , QED.

El teorema 10 es consecuencia del siguiente resultado, llamado el **lema de Alexander**:

**Teorema 11.** Sean  $A$  y  $B$  compactos conexos contenidos en  $\mathcal{C}$  tal que  $A \cap B$  es conexo o vacío. Sean  $a, b \in \mathcal{C} \setminus (A \cup B)$ . Si  $A$  y  $B$  no separan  $a$  de  $b$  tampoco lo hace  $A \cup B$ .

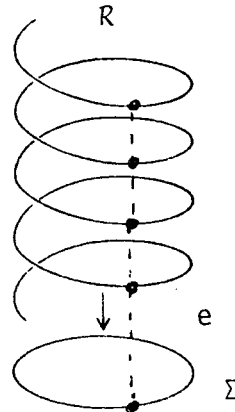
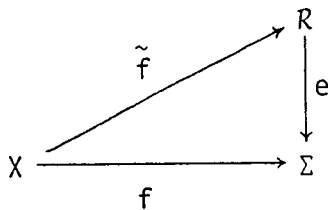
T.11  $\Rightarrow$  T.10: Supongamos que  $\epsilon > 0$  es tal que  $B_\epsilon(a)$  y  $B_\epsilon(b)$  no intersecan a  $\Gamma$ . Dividamos  $\Gamma$  en subarcos de diámetro menor que  $\epsilon$ . Cada uno de estos no separa  $a$  de  $b$  (demostrarlo) por lo que tampoco los separa su unión  $\Gamma$ , QED.

**III.8.**

La demostración del T. de Jordan-Veblen se apoyará en dos resultados sobre separación de puntos por un compacto: el criterio de Eilenberg y el lema de Alexander.

Sea  $e : \mathcal{R} \rightarrow \Sigma$ ,  $\Sigma := \Sigma_1(0) = (\mathcal{T}, \cdot)$ ,  $e(t) := e^{2\pi it}$ .

Esta aplicación es suryectiva y continua, y define un homomorfismo del grupo aditivo  $\mathcal{R}$  en el grupo multiplicativo  $\Sigma$ , cuyo núcleo es  $Z$ . En lo que sigue del capítulo no distinguiremos entre  $\Sigma$  y  $\mathcal{T}$  cuando se trate del conjunto  $\{z : |z| = 1\}$ .  $\mathcal{R}$  y  $e$  definen un *cubrimiento* de  $\Sigma$ , concepto que no analizaremos en profundidad. Dados  $X$ , espacio topológico, y  $f$  aplicación continua de  $X$  en  $\Sigma$  ¿ existe una aplicación continua  $\tilde{f}$  que hace conmutativo el siguiente diagrama?:



Una tal  $\tilde{f}$  se llama un *relevamiento* (lifting). La función  $\Phi(x) = 2\pi i \tilde{f}(x)$  es una rama de  $\ln f : f(x) = e(\tilde{f})(x) = \exp \Phi(x)$ . Luego, en esta situación:

*f admite un relevamiento si y sólo si es exponencial.*

Diremos que  $f$  es **homotópica** a 0 si  $f$  es homotópica a una función constante.

### Lema 2.

(i) Si  $h : X \rightarrow \Sigma$  es continua y no suryectiva entonces es homotópica a 0.

(ii) Toda aplicación continua  $f : I \rightarrow \Sigma$  tiene un relevamiento  $\tilde{f}$ . Todo otro relevamiento se obtiene del anterior por medio de una traslación por un entero.

(iii) La proposición (ii) vale aún si  $I$  es reemplazado por  $I \times I$ .

### Demostración.

(i)  $\Sigma$  menos un punto es homeomorfo a  $(0,1)$  que es un espacio contraíble a un punto.

(ii) Dividamos  $I$  en  $n$  subintervalos iguales de manera que para todo  $j$ :

$$f([j/n, (j+1)/n]) \subsetneq \Sigma.$$

$f|[0, 1/n]$  tiene un relevamiento lo mismo que  $f|[1/n, 2/n]$ . Estos pueden hacerse iguales en  $x = 1/n$ , con lo que se logra un relevamiento de  $f|[0, 2/n]$ . Siguiendo así se obtiene  $\tilde{f}$ , el cual está unívocamente determinado por  $\tilde{f}(0)$ .

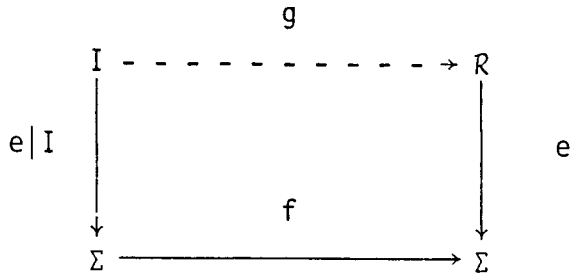
(iii) Idem (ii), QED.

Supongamos ahora  $X = \Sigma$  y consideremos el diagrama siguiente donde  $f$  es continua de  $\Sigma$  en  $\Sigma$ . Sea  $g$  un relevamiento de  $f \circ (e|I)$ . Entonces

$$e(g(1)) = f(e(1)) = f(e(0)) = e(g(0)).$$

Luego  $g(1) - g(0) \in Z$ . Si  $g'$  es otro relevamiento,  $g'(1) - g'(0) = g(1) - g(0)$  pues  $g' = g + k$ ,  $k \in Z$ . Definimos el **grado de la aplicación**, sin ambigüedad, por

$$\text{grado } f = \text{deg}(f) := g(1) - g(0).$$



Dadas  $f_1$  y  $f_2$  es fácil ver que el producto  $f_1 \cdot f_2$  satisface  $\text{deg}(f_1 \cdot f_2) = \text{deg } f_1 + \text{deg } f_2$ .

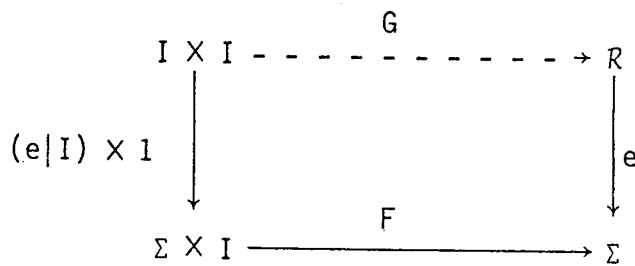
**Teorema 12.** Sea  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ,  $f$  continua; las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (i)  $f$  es homotópica a 0,
- (ii)  $\text{deg}(f) = 0$ ,
- (iii)  $f$  tiene un relevamiento  $\tilde{f}$ .

**Demostración.**

Si  $f$  es homotópica a 0, entonces es exponencial (T.2) y por lo tanto hay un relevamiento  $\tilde{f}$ . En este caso,  $\tilde{f}(\Sigma)$  es un compacto de  $\mathcal{R}$  el cual es contraíble a un punto. Luego  $f = \tilde{f} \circ e$  es homotópica a 0. O sea, (i)  $\Leftrightarrow$  (iii). Obsérvese que solo se usó la compacidad del dominio de  $f$  para demostrar la equivalencia de (i) e (iii). Si  $f$  tiene grado 0 hay un relevamiento  $g$  de  $f \circ (e|I)$  con  $g(1) = g(0)$ . Sea  $\tilde{f} : \Sigma \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $\tilde{f} = g \circ (e|I)^{-1}$ ; la única ambigüedad posible es en  $x = 1$  pues  $(e|I)^{-1}(1) = \{0, 1\}$ . Pero como  $g(1) = g(0)$ ,  $\tilde{f}$  está bien definida y es un relevamiento de  $f$ . O sea, (ii)  $\Rightarrow$  (iii).

(i)  $\Rightarrow$  (iii). Basta ver que aplicaciones homotópicas tienen el mismo grado. Sea  $F$  una homotopía entre  $f$  y  $f'$ ,  $F : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma$ . Consideremos el diagrama



$G$  es un relevamiento de  $F \circ ((e|I) \times id)$ . La aplicación  $f(t) = F(t, 0)$  tiene un relevamiento  $g(t) = G(t, 0)$ . Luego,  $deg f = G(1, 0) - G(0, 0)$ . Análogamente,  $deg f' = G(1, 1) - G(0, 1)$ . Sea  $d(u) := G(1, u) - G(0, u)$ . Como  $e(G(1, u)) = F(1, u) = e(G(0, u))$ ,  $d$  toma valores enteros. Como es continua, resulta  $d = cte$ . Entonces,  $deg f = def f'$ , QED.

### III.9.

Si  $z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$  definimos

$$(4) \quad N(z) := z/|z| \in \Sigma.$$

**Teorema 13 (Criterio de Eilenberg).** Sean  $K \subset \mathcal{C}$ ,  $K$  compacto,  $a, b \in \mathcal{C} \setminus K$ . Entonces  $a$  y  $b$  están en la misma componente de  $\mathcal{C} \setminus K$  si y sólo si la aplicación

$$(5) \quad f(z) := N\left(\frac{z-a}{z-b}\right), \quad z \in K,$$

es homotópica a 0,

#### Demostración.

Si  $a$  y  $b$  están en una misma componente  $A$  y  $p(t)$  es un arco en  $A$  que une  $a$  con  $b$ , entonces  $H(z, t) = N\left(\frac{z-p(t)}{z-b}\right)$  define una homotopía de  $f$  con una aplicación constante.

Sean  $A$  y  $B$  componentes distintas de  $\mathcal{C} \setminus K$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $A$  es acotada, (cf. III.7). Si  $f(z)$  es homotópica a 0 entonces, por el T.2, tiene un relevamiento  $\tilde{f}$ .  $\tilde{f}(K)$  es un compacto de  $\mathcal{R}$  de extremos  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $\beta \geq \alpha$ . Sea  $B_R(0) \supset K$ . Podemos extender  $\tilde{f}$  (T. de Tietze) en forma continua de  $K$  a  $\mathcal{C} \setminus A$ . En consecuencia, existe una extensión continua  $f_1$  de  $\tilde{f}$ , de  $K$  a  $\mathcal{C} \setminus A$ , con valores en  $[\alpha, \beta]$ . Luego, existe una extensión  $g_1$  de  $f$ , con valores en  $\Sigma$ ,  $g_1 := e(f_1)$ .

Por otra parte,  $f(z)$  tiene sentido para todo  $z \neq a, \neq b$ . Tiene además una extensión natural continua,  $g_2$ , a  $(A \cup K) \setminus \{a\}$ ,  $g_2 : (A \cup K) \setminus \{a\} \rightarrow \Sigma$ , pues  $b \in \bar{A}$ .  $K$  es la intersección de los dominios de  $g_1$  y  $g_2$ , donde ambas coinciden con  $f$ . Luego, juntas definen una función  $F$  continua,  $F : \mathcal{C} \setminus \{a\} \rightarrow \Sigma$ , que extiende a  $f$ . Sea  $\epsilon > 0$  y  $B_\epsilon(a) \subset A$ . Definimos una homotopía  $H : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma$ ,

$$(6) \quad h_t(z) := H(z, t) := F(a + z(\epsilon + tQ)), \quad |z| = 1, 0 \leq t \leq 1,$$

donde  $Q$  es tal que  $a + z(\epsilon + Q) \in \bar{A}$  si  $z \in \Sigma$ . Si  $t = 1$ ,  $deg h_1 = 0$ , pues  $h_1(z) = F(a + z(\epsilon + Q)) = g_1(a + z(\epsilon + Q))$ . Por otra parte,  $h_0(z) = F(a + z\epsilon) = g_2(a + z\epsilon) = N\left(\frac{z\epsilon}{a+z\epsilon-b}\right) = N(z)N(\epsilon)N((a+z\epsilon-b)^{-1})$ . En consecuencia, si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño:  $deg h_0 = 1 + 0 + 0$  y  $0 = deg h_1 \neq deg h_0 = 1$ . Pero esto es imposible pues siendo  $h_1$  una deformación homotópica de  $h_0$  debería tener el mismo grado, QED.

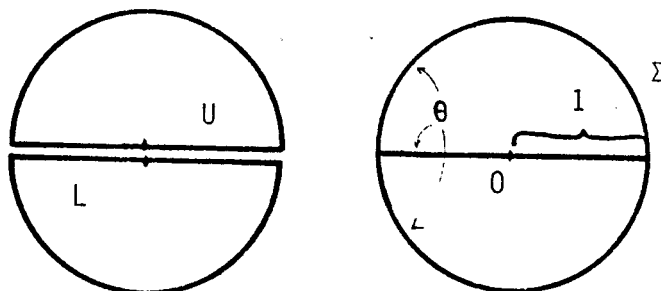
#### Demostración del T.11.

Sea  $f$  la función definida por (5) con  $K = A$  y  $g$  la definida análogamente pero con  $K = B$ . Como  $A$  y  $B$  no separan  $a$  de  $b$ ,  $f$  y  $g$  son homotópicas a 0. Por lo tanto, existen relevamientos  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  tales que:  $f = e(\tilde{f})$ ,  $g = e(\tilde{g})$ . Si  $A \cap B = \emptyset$ , la función  $f \cup g$  con dominio  $A \cup B$  admite un relevamiento. Si  $x_o \in A \cap B$  tomemos un relevamiento  $\tilde{g}$  tal que  $\tilde{g}(x_o) = \tilde{f}(x_o)$ . Entonces  $\tilde{g} = \tilde{f}$  en  $A \cap B$ , pues este conjunto es conexo. Nuevamente  $f \cup g$  admite un relevamiento, (cf. T.12), QED.

III.10.

Conjuntos  $\theta$ .

Sean  $U$  y  $L$  conjuntos unidimensionales como en la figura. Y sean  $p : \Sigma \rightarrow \theta$ ,  $p_U : \Sigma \rightarrow U$ ,  $p_L : \Sigma \rightarrow L$ , aplicaciones continuas que dejan invariantes los puntos de  $\Sigma$  que yacen en sus respectivos rangos y que proyectan según el eje de las  $y$  sobre  $[-1, 1]$  a los puntos restantes. En la figura tenemos



$$\theta = \Sigma \cup [-1, 1] = U \cup L.$$

$$\theta = \Sigma \cup [-1, 1] = U \cup L.$$

Vale:

**Teorema 14.** Sea  $f : \theta \rightarrow \Sigma$  continua. Entonces

$$(7) \quad \deg f \circ p = \deg f \circ p_U + \deg f \circ p_L.$$

**Demostración.**

$f \circ p$ ,  $f \circ p_L$  y  $f \circ p_U$  aplican  $\Sigma$  en  $\Sigma$ . Sean  $g$ ,  $g_U$  y  $g_L$  relevamientos de  $f \circ p \circ (e|I)$ ,  $f \circ p_U \circ (e|I)$  y  $f \circ p_L \circ (e|I)$ , y sea  $h$  un relevamiento de  $f|[-1, 1]$ . Podemos convenir en que  $h(-1) = g(1/2) : f(-1) = e(h(-1)) = e(g(1/2))$ , y construir  $g_U$  y  $g_L$  a partir de  $h$  y  $g$ , de la siguiente manera:

$$g_U(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ h(\cos 2\pi t), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad g_L(t) = \begin{cases} h(\cos 2\pi t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(t), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \deg f \circ p &= g(1) - g(0) = g(1) + h(1) - h(1) - g(0) = \\ &= g_L(1) - g_L(0) + g_U(1) - g_U(0) = \deg f \circ p_L + \deg f \circ p_U, \end{aligned} \quad \text{QED.}$$

**Corolario.** Sea  $F : \theta \rightarrow \mathcal{C}$  continua;  $a, b \in \mathcal{C} \setminus F(\theta)$ . Si dos de los compactos conexos  $F(\Sigma)$ ,  $F(U)$ ,  $F(L)$  no separan a de b, el tercero tampoco.

**Demostración.**

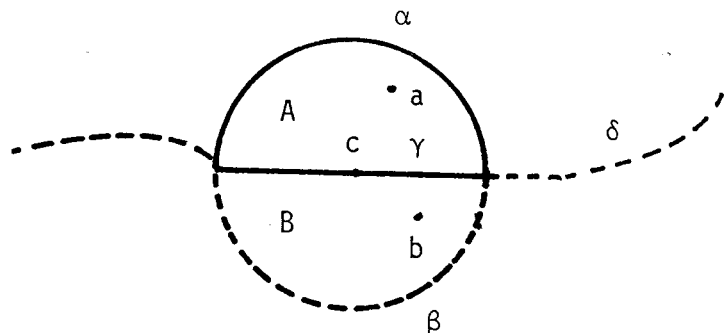
Sea  $f(z) := N\left(\frac{F(z)-a}{F(z)-b}\right)$ ;  $f : \theta \rightarrow \Sigma$ .  $F(\Sigma)$  no separa a de b si y sólo si  $f|_{\Sigma}$  es homotópica a 0, o sea, si y sólo si  $\deg f \circ p = 0$ . Idem para  $F(U)$  y  $F(L)$ . La tesis sigue ahora de (7), QED.



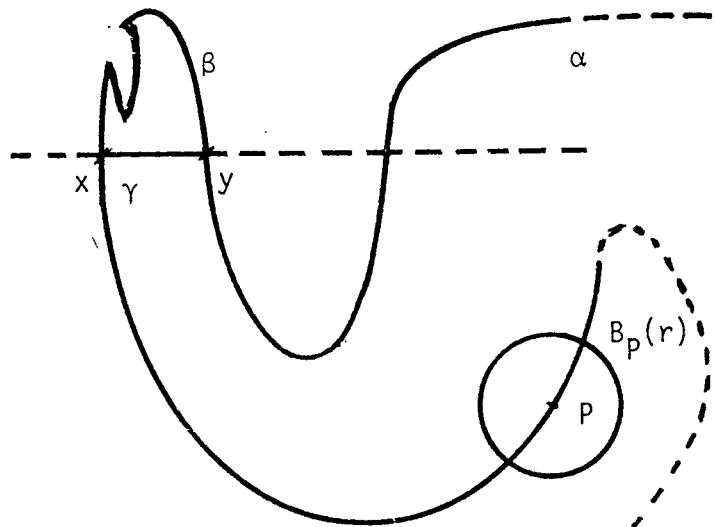
III.11.

**Demostración del T.9 (según Dieudonné).**

**CASO ESPECIAL:** existe un segmento  $\gamma$  tal que  $J = \gamma + \delta$ ,  $\delta$  arco de Jordan, (ver figura). Sin pérdida de generalidad puede suponerse que  $\gamma$  es un diámetro de  $B_r(c)$  y que  $J \cap B_r(c) = \gamma$ . Toda componente de  $\mathcal{C} \setminus J$  contiene a  $A$  o a  $B$ , (T.8). Luego hay a lo sumo dos regiones complementarias a  $J$ .  $\alpha \cup \delta$  no separa  $a$  de  $b$  mientras que  $\alpha \cup \gamma$  separa  $a$  de  $b$ . Del Cor. al T.14 sigue entonces que  $\gamma \cup \delta$  separa  $a$  de  $b$ . Es decir, hay exactamente dos regiones complementarias.



**CASO GENERAL:** Sea  $\gamma$  un segmento que une los puntos  $x, y$  de  $J$ , y supongamos que no hay otros puntos de  $J$  en  $\gamma$  fuera de sus extremos. Esta situación se presenta si el problema no es reducible al caso especial. Esto se demuestra en la nota final. Sean  $P \in J \setminus (\gamma \cup \beta)$  y  $r$  tal que  $B_r(P) \cap (\gamma \cup \beta) = \emptyset$ . Sean  $a$  y  $b$  puntos de  $B_r(P) \setminus J$ . Entonces  $\beta \cup \gamma$  no separa a  $a$  de  $b$ . Luego,  $a$  y  $b$  están separados por  $J = \alpha \cup \beta$  si y sólo si lo están por  $J' = \alpha \cup \gamma$ . Como  $J'$  tiene exactamente dos regiones complementarias, ambas del contorno  $J'$ , hay dos puntos en  $B_r(P) \setminus J$  separados por  $J'$ , y por tanto por  $J$ . Por la misma razón no puede haber tres puntos en  $B_r(P) \setminus J$  separados dos a dos por  $J$ . Se deduce entonces que  $\mathcal{C} \setminus J$  tiene exactamente dos componentes, QED.



**NOTA.**

La situación se reduce al estudio de un arco simple  $V$  cuyos extremos son  $A$  y  $B$  del

eje real,  $A < B$ . Las coordenadas  $(X(t), Y(t))$  de los puntos de  $V$  pueden suponerse dependientes del parámetro  $t$  tal que  $A \leq t \leq B$ . Podemos suponer también que  $Y(s) > 0$  para un  $s \in (A, B)$ .

Como  $\{t; Y(t) = 0\}$  es cerrado y distinto de  $[A, B]$ , existe un intervalo abierto  $(A', B') \subset (A, B)$  donde  $Y$  es positiva con  $Y(A') = Y(B') = 0$ . Si  $V$  fuera parte de una curva de Jordan  $J$  que no contiene ningún segmento definimos como  $\gamma$  al segmento  $[A', B']$  y como  $\beta$  al arco de  $V$  que une  $A'$  con  $B'$ .

## CAPITULO IV

### CURVAS DIFERENCIABLES Y LONGITUD DE UN ARCO

#### IV.1.

Designaremos con  $\underline{x}$  un vector del plano. Sea  $\underline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t)) : I = [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}^2$ . Diremos que  $\underline{f}$  es una **representación**  $C^n$  de una curva, o bien que  $\underline{f}$  representa a una curva  $C^n$ ,  $n \geq 0$ , si para todo  $t_0 \in I$  existe un entorno  $V$  de  $t_0$  tal que  $\underline{f}$  restringida a  $V$  define un homeomorfismo de  $V$  sobre  $\underline{f}(V)$  con funciones  $f_1, f_2$ ,  $n$  veces continuamente diferenciables. En particular, todo arco de Jordan tiene una representación  $C^0$ . Consideremos las aplicaciones continuas:

$$(1) \quad \underline{u}(t) = (\cos 2\pi t, \sen 2\pi t), \underline{v}(t) = (\cos 2\pi t^2, \sen 2\pi t^2).$$

El objeto geométrico definido por  $\underline{u}$  no es esencialmente distinto al definido por  $\underline{v}$  desde el punto de vista de la geometría que considera las propiedades de esos objetos que no dependen de las aplicaciones que los definen. Por eso se dice que una trayectoria de Peano  $\underline{f}$  representa una curva continua, la cual es por definición el conjunto de todas las aplicaciones  $\underline{h}(t) := \underline{f}(H(t))$ , donde  $H(t)$  es un homeomorfismo de  $I$  sobre sí mismo tal que  $H(0) = 0$ . Todas las aplicaciones  $\underline{h}$  así construídas definen la curva. Asimismo tenemos:

**Definición 1.** Llamaremos **curva**  $C^n$ ,  $n \geq 0$ , a la familia de las funciones  $g$  obtenidas a partir de una representación  $C^n$  (trayectoria  $C^n$ ),  $\underline{f} : I \rightarrow \mathcal{R}^2$ , y de la forma  $g = \underline{f} \circ H$ , donde  $H$  y  $H^{-1}$  son aplicaciones  $C^n$  de  $I$  sobre sí mismo con  $H(0) = 0$ .

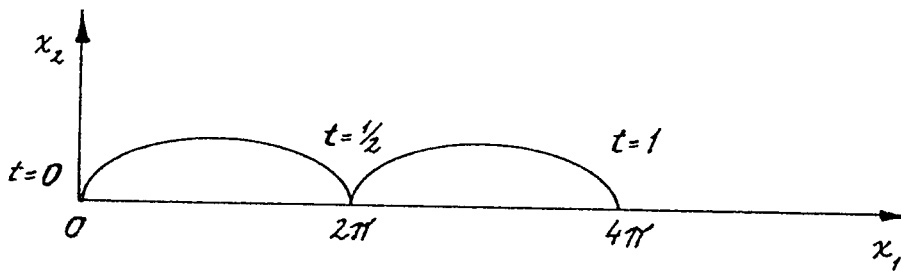
Luego, una curva  $C^1$  puede intersecarse a sí misma infinitas veces, puede tener infinitos puntos dobles o tener cúspides, aunque es localmente un arco de Jordan diferenciable.

#### Ejemplo 1.

Las curvas  $\underline{u}$  y  $\underline{v}$  en (1) representan la misma curva (cerrada)  $C^0$ , pero no son representaciones de una misma curva  $C^1$ .

#### Ejemplo 2.

La cicloide  $\underline{c}(t) = (4\pi t - \sen 4\pi t, 1 - \cos 4\pi t)$  viene definida por funciones analíticas en  $t$ . Pero su vector tangente se anula en  $t = 0, 1/2, 1$ , pues:  $\underline{c}'(t) = (4\pi - 4\pi \cos 4\pi t, 4\pi \sen 4\pi t)$ . Además  $dy/dx = \cotg 2\pi t$  es igual a  $\pm\infty$  en esos puntos.



## IV.2.

**Definición 2.** Una curva  $C^n$ ,  $n \geq 1$ , se dice definible como función de la longitud de arco si existe una representación para ella,  $\underline{f} \in C^n$ , tal que  $|\underline{f}'(t)| \equiv L = \text{constante no nula}$ .

Entonces, si  $s = L \cdot t$  y  $\underline{x}(s) = \underline{f}(s/L)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , tendremos  $|\underline{x}'(s)| \equiv 1$ . A  $s$  se lo denomina **parámetro longitud de arco**, y a  $L$  **longitud total de la curva**.

### Teorema 1.

(i) El parámetro  $s$  definido por

$$(2) \quad s = \int_0^t (\dot{f}_1^2 + \dot{f}_2^2)^{1/2} dx,$$

está determinado (salvo por una constante aditiva) unívocamente, es decir, es independiente de la representación  $C^n$ ,  $n \geq 1$ , de la curva dada.

(ii) Entre las representaciones  $C^n$ ,  $n \geq 1$ , de una curva hay a lo sumo una para la cual  $|\dot{f}(t)|$  es una constante positiva en  $0 \leq t \leq 1$ .

(iii) Condición necesaria y suficiente para que una curva  $C^n$ ,  $n \geq 1$ , sea definible como función de la longitud de arco es que tenga vector tangente no nulo en todo punto.

### Ejemplo 3.

La cicloide del ejemplo 2 y la  $\underline{v}$  del ejemplo 1 no son definibles como función de la longitud de arco, mientras que la  $\underline{u}$  del ej. 1 tiene vector tangente de longitud  $2\pi$  en todo punto.

### Demostración del teorema 1.

(i) Sea  $u = u(t)$ ,  $u(0) = 0$ , un homeomorfismo  $C^n$  entre  $0 \leq t \leq 1$  y  $0 \leq u \leq 1$ . Sea  $\underline{g}(u(t)) = \underline{f}(t)$ . Entonces  $d\underline{f}/dt = (d\underline{g}/du) \cdot (du/dt)$ . (Usamos indistintamente la notación  $d/dt = \dot{\quad}$ ). Luego

$$(3) \quad \begin{aligned} s(a) &= \int_0^a (\dot{f}_1^2 + \dot{f}_2^2)^{1/2}(t) dt = \int_0^a \left( \left( \frac{dg_1}{du} \right)^2 + \left( \frac{dg_2}{du} \right)^2 \right)^{1/2} (u(t)) \cdot \frac{du}{dt}(t) dt = \\ &= \int_0^{u(a)} (\dot{g}_1^2 + \dot{g}_2^2)^{1/2} du. \end{aligned}$$

O sea, el parámetro  $s$ , si  $s(0) = 0$ , no depende de la representación elegida. Como  $a = 1$  implica  $u(a) = 1$ , tenemos

$$(3') \quad L = \int_0^1 (\dot{f}_1^2 + \dot{f}_2^2)^{1/2} dt = \int_0^1 (\dot{g}_1^2 + \dot{g}_2^2)^{1/2} du.$$

(ii) Si  $|\dot{f}(t)| = cte. > 0$  entonces  $|\dot{f}(t)| = L$ . Si hubiera otra representación,  $\underline{g}(u)$ , tal que  $|\dot{g}(u)| = cte.$ , de (3) y (3') seguiría que  $|\dot{g}(u)| = L$  y

$$\int_0^a dt = \int_0^a \left( \frac{du}{dt} \right) dt \quad \text{para todo } a.$$

Por lo tanto,  $\frac{du}{dt} = 1$ , y  $u \equiv t$ . Luego  $\underline{g} \equiv \underline{f}$ .

(iii) Sea  $\underline{f}(t)$  una representación de una curva  $C^n$  tal que  $|\dot{f}(t)| > 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Definamos:

$$(3'') \quad s(t) = \int_0^t |\dot{f}(x)| dx, \quad L = s(1), \quad u = s/L.$$

Entonces,  $u$  establece una correspondencia entre  $0 \leq t \leq 1$  y  $0 \leq u \leq 1$  tal que *ella y su inversa son aplicaciones  $C^n$* . Además, si  $\underline{g}(u) = \underline{f}(t(u))$  entonces

$$\begin{aligned} |d\underline{g}/du| &= |d\underline{f}/dt| \left| \frac{dt}{du} \right| = |d\underline{f}/dt| \frac{dt}{du} = |\dot{f}(t)| \frac{dt}{ds} \frac{ds}{du} = \\ &= |\dot{f}(t)| \frac{1}{|\dot{f}(t)|} L = L, \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

### Ejercicio 1.

Sea  $n = 2$ . Calcular  $dt/ds$  y  $d^2t/ds^2$  en (iii) del teorema precedente. Demostrar que  $\underline{t}(s) := \dot{x}(s)$ , donde  $\underline{x}(s) = \underline{f}(t)$ , verifica  $|\underline{t}| = 1$ .

Sea  $\Sigma$  una partición del intervalo  $I = [0, 1]$  y  $\Sigma^*$  otra más fina (obtenida de la anterior intercalando nuevos puntos). Definamos:

$$(4) \quad L(\Sigma) = \sum_{i=0}^{N-1} |\underline{f}(t_{i+1}) - \underline{f}(t_i)|, \quad t_i \in \Sigma, \quad t_i < t_{i+1}.$$

La *longitud geométrica*  $L$  de un arco de Peano es, por definición, igual a  $\sup \{L(\Sigma) : \Sigma \text{ partición de } I\}$ . El arco se dice **rectificable** si  $L < \infty$ . Si  $\underline{f}(t)$  es una representación de una curva  $C^1$  tenemos

$$\begin{aligned} L(\Sigma) &= \sum_{i=0}^{N-1} (|f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i)|^2 + |f_2(t_{i+1}) - f_2(t_i)|^2)^{1/2} = \\ (5) \quad &= \sum_{i=0}^{N-1} (|\dot{f}_1(\xi_i)|^2 + |\dot{f}_2(\eta_i)|^2)^{1/2} (t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

donde  $t_i < \xi_i$ ,  $\eta_i < t_{i+1}$ . Como  $f_1$  y  $f_2$  son continuas sigue enseguida que

$$(6) \quad L = \int_0^1 (f_1^2 + f_2^2)^{1/2} dt \text{ y } L < \infty.$$

Como  $\Sigma \prec \Sigma^* \Rightarrow L(\Sigma) \leq L(\Sigma^*)$ ,  $L$  no sólo es el supremo sino también el límite de  $L(\Sigma)$  según el conjunto dirigido  $\{\Sigma\}$ . Si en (6) hubiéramos integrado sólo hasta  $a$ , habríamos obtenido  $s(a)$  (cf. (3)). Es decir, la longitud geométrica entre  $t = 0$  y  $t = a$  coincide, para curvas  $C^1$ , con nuestro parámetro longitud de arco, y aquella entre  $t = 0$  y  $t = 1$ , con nuestra longitud total. La longitud geométrica podrá utilizarse para definir una representación de la curva exactamente cuando  $|\underline{f}(t)| \neq 0$  para todo  $t$  (cf. T.1).

### Ejercicio 2.

Sea  $g(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , una función real convexa: en  $[a, b] \subset I$  la función no supera en ningún punto al segmento que une  $(a, g(a))$  con  $(b, g(b))$ , para todo par  $a < b$ ,  $a, b \in I$ . Supóngase  $g$  continua en  $x = 0$  y  $x = 1$ .

Demostrar:

- 1) que  $g(x)$  es continua,
- 2) que existe un punto  $c \in I$  tal que en  $[0, c]$  y en  $[c, 1]$ ,  $g$  es monótona,
- 3) que el arco de Jordan definido por  $g$  es rectificable, (cf. Cap.I).

### IV.3.

Sea  $\underline{f}(t)$  una curva  $C^1$  definible como función de la longitud de arco:  $\underline{x}(s) = \underline{f}(t)$  si

$$(7) \quad s = \int_0^{t(s)} (f_1(v)^2 + f_2(v)^2)^{1/2} dv.$$

Entonces  $\underline{x}(s) \in C^1([0, L])$ ;  $L = \text{long.total}$ . El par de versores  $\{\underline{t}, \underline{n}\}$  definidos por  $\underline{t}(s) = x_1'(s)\underline{e}_1 + x_2'(s)\underline{e}_2$ ,  $\underline{n}(s) = -x_2'(s)\underline{e}_1 + x_1'(s)\underline{e}_2$ , donde  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  es la base ortogonal de nuestro espacio  $\mathcal{R}^2$ , define al **sistema móvil de referencia (SM)** de la curva.  $\underline{t}$  es el vector tangente y  $\underline{n}$  aquél obtenido rotando  $\underline{t}$  en  $\pi/2$ . El versor  $\underline{t}(s)$  (con origen en 0) describe sobre la circunferencia unitaria la *imagen tangente* de  $\underline{x}(s)$ .

**Teorema 2.** *La imagen tangente determina la curva salvo por una traslación:*

$$(8) \quad \underline{x}(s) = \underline{x}_0 + \int_0^s \underline{t}(\sigma) d\sigma.$$

La matriz del sistema móvil (MSM),  $A(s)$ , se define por las siguientes relaciones:

$$(9) \quad \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) & \text{sen}\theta(s) \\ -\text{sen}\theta(s) & \cos\theta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ -x_2' & x_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix}$$

pues  $|\underline{t}| = |\underline{n}| = 1$ . Luego,  $A(s)$  determina a  $\underline{x}(s)$  salvo por una traslación.

## IV.4.

Supongamos  $\underline{x}(s) \in C^2([0, L])$ . La **matriz de Cartan** asociada a  $A$  es  $C(A) := A'A^{-1}$ , y verifica:

$$(10) \quad \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} = C(A) \begin{pmatrix} \underline{t} \\ \underline{n} \end{pmatrix}.$$

A (10) se la denomina *ecuación de Frenet*. De (9) sigue,

$$(11) \quad C(A) = \theta'(s) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta & \operatorname{cos}\theta \\ -\operatorname{cos}\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{cos}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \operatorname{cos}\theta \end{pmatrix} = \theta'(s)J,$$

donde  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$(12) \quad C(A) = \begin{pmatrix} 0 & x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2 \\ -(x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2) & 0 \end{pmatrix} = (\underline{x}' \wedge \underline{x}'')J.$$

Luego,

$$(13) \quad \underline{t}' = k(s)\underline{n}, \quad \underline{n}' = -k(s)\underline{t}, \quad k(s) = \dot{\theta}(s) = (\underline{x}' \wedge \underline{x}'')(s),$$

$k(s)$  es la *curvatura* de  $\underline{x}$  en  $\underline{x}(s)$ .

## IV.5.

**Definición 3.** Dos curvas se dicen *congruentes* si una es imagen de la otra por un movimiento euclídeo:  $\underline{x} \rightarrow R\underline{x} + \underline{b}$ ,  $R$  matriz ortogonal de determinante +1.

**Ejercicio 3.**

Las curvas  $C^2$ ,  $\underline{x}(s)$  y  $\underline{x}(s) + \underline{b}$ ,  $\underline{b} = cte$ , tienen el mismo SM, la misma MSM y la misma longitud de arco. Tienen entonces también la misma matriz de Cartan, y por lo tanto, la misma curvatura.

Sea  $R$  la matriz ortogonal:

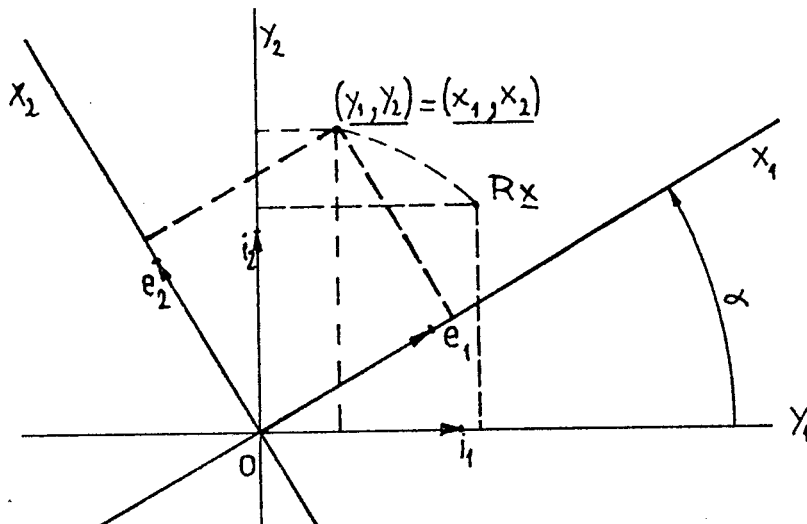
$$(14) \quad R = \begin{pmatrix} \operatorname{cos}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{cos}\alpha \end{pmatrix}.$$

La transformación de coordenadas se realiza según las fórmulas (ver figura):

$$(15) \quad (x_1, x_2) = (y_1, y_2)R.$$

Sin embargo, de

$$\begin{aligned} (y_1, y_2) \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \end{pmatrix} &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} = \\ &= ((y_1, y_2)R) \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} = (y_1, y_2) \left( R \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$



se deduce que las bases se transforman según la fórmula:

$$(16) \quad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos la curva  $C^2([0, L]) : \underline{x}(s) = x_1(s)\underline{e}_1 + x_2(s)\underline{e}_2$ . Entonces,  $R\underline{x}(s) := x_1(s)(R\underline{e}_1) + x_2(s)(R\underline{e}_2) = x_1(s)\underline{i}_1 + x_2(s)\underline{i}_2$ . Luego, sean  $u_1, u_2$ , coordenadas en  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  de  $R\underline{x}(s) : R\underline{x}(s) = u_1(s)\underline{e}_1 + u_2(s)\underline{e}_2$ . Entonces (cf. (15)):

$$(17) \quad (u_1, u_2) = (x_1, x_2)R.$$

#### Ejercicio 4.

Demostrar que:

- (1)  $R\underline{x}(s)$  tiene el mismo parámetro longitud y la misma longitud total que  $\underline{x}(s)$
- (2) su MSM es  $A(s)R$ .

$$(\text{sug.: } |(R\underline{x}(s))'| = |\underline{x}(s)'|; A(s)R = \begin{pmatrix} (x'_1, x'_2)R \\ (-x'_2, x'_1)R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 & u'_2 \\ -u'_2 & u'_1 \end{pmatrix}).$$

#### IV.6.

Sean  $A(s)$  y  $B(s)$ ,  $0 \leq s \leq L$ , matrices diferenciables no singulares, y  $D(s)$  una matriz diferenciable ortogonal. Entonces, si  $A = \text{cte}$ ,  $C(A) = 0$ . Además de  $C(AB) = (AB)' \cdot (AB)^{-1} = (AB' + A'B) \cdot B^{-1}A^{-1}$ , sigue que la matriz de Cartan de  $A \cdot B$  es igual a:

$$(18) \quad C(AB) = C(A) + AC(B)A^{-1}.$$

Análogamente, como  $D^t D = DD^t = I$ , tenemos:  $0 = (DD^t)' = D'D^t + DD'^t = D'D^{-1} + (D'D^{-1})^t$ .

Luego,

$$(19) \quad C(D) = -C(D)^t.$$



**Ejercicio 5.**

La curva  $R\underline{x}(s)$  (cf. (14) y Ejercicio 4) tiene la misma curvatura que  $\underline{x}(s)$  (Sug.:  $C(A(s)R) = C(A(s))$ ).

**Ejercicio 6.**

Dos curvas  $C^2$  congruentes tienen el mismo parámetro longitud de arco y la misma curvatura.

**Teorema 3.** Sean  $\underline{x}(s)$  e  $\underline{y}(\sigma)$  curvas  $C^2$  respecto a sus parámetros longitud de arco:  $s \in [0, L]$ ,  $\sigma \in [0, \wedge]$ . Entonces, si  $L = \wedge$  y  $k_x(s) = k_y(s)$  para todo  $s$ ,  $\underline{x}(s)$  es congruente a  $\underline{y}(s)$ .

El T.3 es una consecuencia del siguiente,

**Teorema 4.** Sean  $k(s) \in C^0([0, L])$ ,  $s_0 \in [0, L]$  y  $\{\underline{t}_0, \underline{n}_0\}$  un sistema ortonormal orientado como la base  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ . Existe una única curva  $C^2$  ( $0 \leq s \leq L$ ), cuyo parámetro longitud de arco es  $s$  y su longitud total  $L$ , que pasa por  $\underline{x}_0$  en el instante  $s_0$ , con tangente  $\underline{t}_0$  en  $\underline{x}_0 = \underline{x}(s_0)$ , y que admite a  $k(s)$  como su curvatura en cada punto.

La demostración del teorema 4 requerirá algunos lemas que pasamos a enunciar.

**Lema 1.** Sean  $A(s)$  y  $B(s)$  matrices diferenciables no singulares. Sea  $M(s) := B^{-1}(s)A(s)$ . Entonces  $C(A) = C(B)$  si y sólo si  $M$  es constante.

**Demostración.**

$C(A) = C(B) + BC(M)B^{-1}$ . Luego,  $C(A) = C(B)$  sii  $C(M) = 0$ , sii  $M' = 0$ , sii  $M = \text{cte.}$ , QED.

**Lema 2.** Sea  $K(s)$  una matriz continua,  $0 \leq s \leq 1$ . Dado  $s_0$  existe una matriz  $A(s) \in C^1$ , no singular, tal que

$$(20) \quad A(s_0) = I, K(s) = C(A(s)) \quad \text{para todo } s \in [0, 1].$$

**Demostración.**

Debemos resolver

$$(21) \quad A'(s) = K(s)A(s), A(s_0) = I.$$

Como  $K \in C^0$ , existe la matriz fundamental del sistema diferencial lineal  $\underline{y}'(s) = K(s)\underline{y}(s)$ , que coincide con la matriz identidad en  $s = s_0$ , QED.

**Lema 3.** La ecuación  $C(B) = K(s)$ ,  $K(s) \in C^0$ , tiene una única solución  $B(s) \in C^1$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) que en un punto dado,  $s_0$ , coincide con una matriz no singular  $T$  dada.

**Demostración.**

Sea  $A(s)$  como en el lema 2.  $B(s) := A(s)T$  verifica  $C(B) = C(A) = K$ ,  $B(s_0) = T$ . Del lema 1 sigue la unicidad, QED.

**Demostración del teorema 4.**

Las matrices  $A$  y  $T$  definidas por

$$(22) \quad A(s) := \begin{pmatrix} \cos \int_{s_0}^s k(t) dt & \operatorname{sen} \int_{s_0}^s k(t) dt \\ -\operatorname{sen} \int_{s_0}^s k(t) dt & \cos \int_{s_0}^s k(t) dt \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq L,$$

$$(23) \quad \begin{pmatrix} \underline{t}_0 \\ \underline{n}_0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix},$$

son ortogonales de determinante +1. La primera resuelve el problema

$$(24) \quad A'(s) = K(s)A(s), \quad A(s_0) = I, \quad 0 \leq s, \quad s_0 \leq L,$$

donde

$$K(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz ortogonal de determinante +1,

$$(25) \quad B(s) = A(s)T$$

es la solución del problema

$$(26) \quad C(B(s)) = K(s), \quad B(s_0) = T.$$

Luego,

$$(27) \quad \begin{pmatrix} \underline{t}(s) \\ \underline{n}(s) \end{pmatrix} := B(s) \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix},$$

es, para todo  $s$ , un sistema ortonormal equiorientado con la base  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ , y la curva

$$(28) \quad \underline{x}(s) = \underline{x}_0 + \int_{s_0}^s \underline{t}(r) dr, \quad 0 \leq s \leq L,$$

tiene por tangente a  $\underline{t}(s)$  en todo punto.  $\underline{x}(s)$  tiene por matriz del sistema móvil a  $B$  y por lo tanto su matriz de Cartan es  $C(B) = C(A) = K$ . Es decir,  $\underline{x}(s)$  tiene curvatura  $k(s)$  en todo  $s$ . Como el problema (26) tiene solución única, (28) es la única curva  $C^2$  que pasa por  $\underline{x}_0$ , tiene allí tangente  $\underline{t}_0$ , y en todo punto una matriz de Cartan igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{QED.}$$

## IV.7.

A continuación anotamos algunas fórmulas para el cálculo de la curvatura. Sea  $0 \leq u \leq 1$ ,  $\underline{x}(u) \in C^2$ . Entonces, si  $s = s(u)$ ,

$$(29) \quad k(s) = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}{|\dot{x}|^3}(u).$$

En efecto,  $|\dot{x}(u)| = \frac{ds}{du}$  y (29) sigue de (13).  
Si  $u = x_1$  y  $k = k(s(x_1))$ , vale

$$(30) \quad k = \frac{\frac{d^2 x_2}{dx_1^2}}{\left(1 + \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2\right)^{3/2}}(x_1).$$

En coordenadas polares:  $x_1 = r \cdot \cos \Phi$ ,  $x_2 = r \cdot \sen \Phi$ , donde  $r = r(t)$ ,  $\Phi = \Phi(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , tenemos:

$$(31) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\Phi}^2}.$$

Si  $(r(t), \Phi(t)) \in C^2$ , utilizando (31) y (29) se obtiene:

$$(32) \quad k = \frac{r^2 \dot{\Phi}^3 + 2\dot{r}^2 \dot{\Phi} + r\dot{r}\ddot{\Phi} - r\ddot{r}\dot{\Phi}}{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\Phi}^2)^{3/2}}.$$

Si  $\Phi(t) \equiv t$ ,

$$(33) \quad k = \frac{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{(\dot{r}^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Si  $t = s$  entonces  $\dot{r}^2 + r^2 \dot{\Phi}^2 = 1$  y se obtiene

$$(34) \quad k = \dot{\Phi}(1 + \dot{r}^2) + r\dot{r}\ddot{\Phi} - r\ddot{r}\dot{\Phi}.$$

NB. Obsérvese que  $A'(s)$  puede existir para todo  $s$  sin que necesariamente  $\underline{x}(s) \in C^2([0, L])$ , (cf. IV.4). Si  $\underline{x}(s) \in C^1$  y  $A'(s)$  existe, entonces  $A'(s)$  es medible lo mismo que  $\theta'(s)$ .

CAPITULO V  
CIRCULO DE CURVATURA Y  
CONTACTO ENTRE CURVAS

V.1.

**Hipotesis 1.** Sean  $\underline{f}(s)$  y  $\underline{g}(s)$  curvas  $C^1$  referidas a sus longitudes de arco. Supondremos que sus vectores tangentes tienen componentes absolutamente continuas diferenciables en todo punto.

Entonces, las curvaturas  $k_f(s)$ ,  $k_g(s)$  -que existen para todo  $s$ - están definidas por funciones localmente sumables.

**Hipotesis 2.** En  $s = 0$  las curvas  $\underline{f}$  y  $\underline{g}$  verifican:  $\underline{f}(0) = \underline{g}(0) = (0, 0)$ ,  $\underline{f}'(0) = \underline{g}'(0) = \underline{e}_1$ .

Esto último se expresa diciendo que las curvas están en *contacto* en  $s = 0$ . En esta situación existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $0 \leq x_1 < \epsilon$ ,  $\underline{f}$  y  $\underline{g}$  quedan definidas por sendas funciones  $C^1$ :  $x_2 = F(x_1)$ ,  $x_2 = G(x_1)$ , respectivamente. En efecto, consideremos  $\underline{f}(s) = (x_1(s), x_2(s))$ . Sea  $\underline{v}(s) = (x_1'(s), x_2'(s))$ . Por hipótesis existen  $x_1''(s)$  y  $x_2''(s)$ , y  $x_1'(0) = 1$ ,  $x_2'(0) = 0$ . Entonces,

$$(1) \quad x_1(s) = \int_0^s x_1'(t) dt, \quad x_2(s) = \int_0^s x_2'(t) dt.$$

En un entorno de  $x_1 = 0$  queda definida  $s$  como función de  $x_1$ :  $s = s(x_1)$ , y verifica:

$$(2) \quad \frac{ds}{dx_1} = 1/x_1'(s), \quad \frac{d^2s}{dx_1^2} = -(1/x_1'(s))^2 \frac{d^2x_1}{ds^2}.$$

Luego,  $x_2 = x_2(s(x_1)) = F(x_1)$ , tiene dos derivadas:

$$(3) \quad F'(x_1) = \frac{dx_2}{ds} \cdot \frac{ds}{dx_1}, \quad F''(x_1) = \frac{d^2x_2}{ds^2} \cdot \left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2 + \frac{dx_2}{ds} \cdot \frac{d^2s}{dx_1^2}.$$

O sea,  $F \in C^1$  y  $F'$  es diferenciable.

Es oportuno observar que  $\underline{v}'(s)$  es un vector *ortogonal* a  $\underline{v}(s)$ . En efecto, derivando la expresión  $1 = |\underline{v}(s)|^2 = \underline{v}(s) \cdot \underline{v}(s)$  obtenemos

$$(4) \quad 0 = 2\underline{v}(s) \cdot \underline{v}'(s).$$

Por lo tanto, como  $|\underline{v}| = 1$ ,  $\underline{v}'(s) \perp \underline{v}(s)$ .

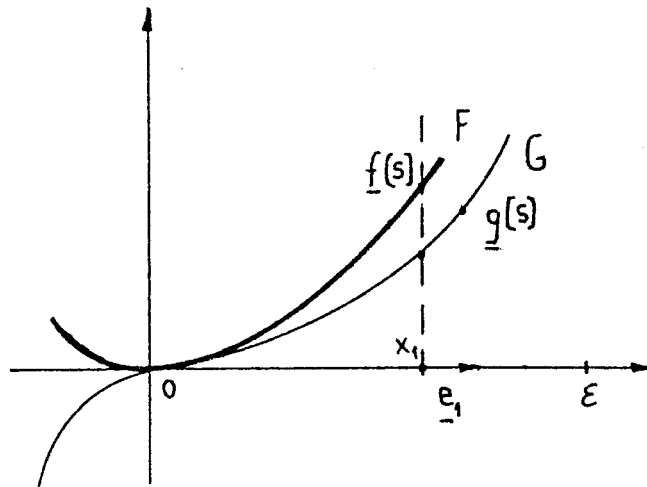
## V.2.

Con el objeto de estudiar el contacto en  $s = 0$  de  $\underline{f}$  con  $\underline{g}$  diremos que  $\underline{f}$  está por encima de  $\underline{g}$  en  $x_1 (> 0)$  si  $F(x_1) > G(x_1)$ . Naturalmente, se dice que  $\underline{g}$  está por debajo de  $\underline{f}$ .

**Teorema 1.** Sean  $\underline{f}$  y  $\underline{g}$  dos curvas que satisfacen las hipótesis 1 y 2. Entonces,

(i) Si  $k_f(0) > k_g(0)$ ,  $\underline{f}$  está por encima de  $\underline{g}$  en  $0 < x_1 \leq \epsilon$  para cierto  $\epsilon > 0$ .

(ii) Sea  $k_f(0) = k_g(0)$ , pero  $k_f(s) > k_g(s)$  en  $0 < s \leq \eta$ . Entonces, si cada una de las curvaturas no cambia de signo en  $(0, \eta]$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\underline{f}$  está por encima de  $\underline{g}$  en  $0 < x_1 \leq \epsilon$ .



Diremos que dos curvas como en el T.1,  $\underline{f}$ ,  $\underline{g}$ , se cruzan en  $x_1 = 0$  ( $s = 0$ ) si existe  $\epsilon$  tal que  $F(x_1) > G(x_1)$  en  $0 < x_1 \leq \epsilon$  y  $F(x_1) < G(x_1)$  en  $-\epsilon \leq x_1 < 0$ . Vale entonces el siguiente corolario del T.1 (demostrarlo).

**Corolario.** Sean  $\underline{f}$  y  $\underline{g}$  como en el T.1,(ii). Si en  $[-\gamma, 0)$ ,  $k_f(s) < k_g(s)$  y las curvaturas no cambian signo allí ni en  $(0, \eta]$ , entonces las curvas se cruzan en  $x_1 = 0$ .

**Demostración del T.1.**

Sea  $k_f(0) > k_g(0)$ . Por hipótesis, si  $s$  pertenece a un semientorno reducido positivo de  $s = 0$ ,

$$(5) \quad \theta_f(s) = k_f(0) \cdot s + o(s), \quad \theta_g(s) = k_g(0) \cdot s + o(s).$$

Recordemos las fórmulas

$$(6) \quad \theta_f(s) = \int_0^s k_f(r) dr, \quad \theta_g(s) = \int_0^s k_g(r) dr,$$

$$(7) \quad x_1(s) = \int_0^s \cos \theta(r) dr, \quad x_2(s) = \int_0^s \sen \theta(r) dr.$$

En un entorno  $W^+ = W \cap (0, \infty)$  de  $s = 0$ , si  $k_f(0) > 0 > k_g(0)$  tendremos  $\theta_f > 0$ ,  $\theta_g < 0$  y por lo tanto en un entorno de  $x_1 = 0$ ,  $V^+ = V \cap (0, \infty)$ , tendremos  $x_{2f} > 0$ ,  $x_{2g} < 0$ . Es decir,  $\underline{f}$  está por encima de  $\underline{g}$  allí. Si  $k_f(0) > k_g(0) \geq 0$ , de (5) obtenemos:

$$(8) \quad |\theta_g(s)| < |\theta_f(s)| = \theta_f(s) < \pi/2,$$

en un entorno  $W^+$  de  $s = 0$ .

Si  $k_f(0) = k_g(0) = 0$ , pero  $k_f(s) > k_g(s) \geq 0$  en  $W^+$ , de (2) obtenemos nuevamente (8). Y si  $k_f(0) = k_g(0) = 0$  pero  $k_f(s) > 0 \geq k_g(s)$  en  $W^+$  entonces  $\theta_f(s) > 0$ ,  $\theta_g(s) \leq 0$  ( $s > 0$ ) y  $x_{2f} > 0$ ,  $x_{2g} \leq 0$  en  $V^+$ .

Veamos ahora que (8) implica que  $F$  está por encima de  $G$  en un entorno  $V^+$ . En efecto, si  $s_1 > 0$ ,  $s_1$  suficientemente pequeño,

$$(9) \quad \begin{cases} x_{1f}(s_1) = \int_0^{s_1} \cos \theta_f(s) ds \leq x_{1g}(s_1) = \int_0^{s_1} \cos \theta_g(s) ds, \\ x_{2f}(s_1) = \int_0^{s_1} \text{sen } \theta_f(s) ds \geq |x_{2g}(s_1)| = \int_0^{s_1} \text{sen } \theta_g(s) ds. \end{cases}$$

Como  $\theta_g(s)$  es continua, existe  $s_2$  entre 0 y  $s_1$  tal que:  $x_{1g}(s_2) = x_{1f}(s_1)$ . Pero  $|x_{2g}(s_2)| \leq x_{2f}(s_2) \leq x_{2f}(s_1)$ . O sea, el punto  $(x_{1f}(s_1), x_{2f}(s_1))$  está por encima del punto  $(x_{1g}(s_2), x_{2g}(s_2))$ . Prestando más atención a las desigualdades estrictas vemos que  $F(x_1) > G(x_1)$  si  $x_1 = x_{1f}(s_1)$ .

Hemos demostrado:

(i) del teorema para  $k_f(0) > 0$ ,  $k_f(0) > k_g(0)$ . Supongamos  $0 \geq k_f(0) > k_g(0)$ . Este caso se reduce al estudiado cambiando simplemente los signos de  $x_{2f}$  y  $x_{2g}$ . (i) queda entonces completamente demostrada.

También se probó (ii) cuando  $k_f(s) > 0$ ,  $k_f(s) > k_g(s)$ . Si  $k_g(s) < k_f(s) \leq 0$ , el mismo artificio permite completar la demostración de ii), QED.

### V.3.

Sea  $R$  real, positivo o negativo. Cuando  $s$  recorre el segmento  $[0, 2\pi|R|]$ , las circunferencias

$$(10) \quad x_1(s) = R \text{sen}(s/R), \quad x_2(s) = R(1 - \cos(s/R)),$$

admiten a  $s$  como parámetro longitud de arco, pasan por  $(0,0)$ , tienen allí por vector tangente a  $\underline{e}_1$  y su curvatura  $k(s)$  es igual  $1/R$ . El signo de  $R$  indica en cual semiplano, superior o inferior, se encuentra ubicada la circunferencia. Dada una curva  $\underline{f}$  como en el teorema 1 vemos que las circunferencias (10) están en contacto con  $\underline{f}$  en  $(0,0)$ , y vale:

$$(11) \quad k_f(0) = \inf\{1/R_1 : R_1^{-1} = \text{curvatura de las circunferencias por encima de } \underline{f} \text{ en } (0,0)\},$$

$$(12) \quad k_f(0) = \sup\{1/R_2 : R_2^{-1} = \text{curvatura de las circunferencias por debajo de } \underline{f} \text{ en } (0,0)\}.$$

En esta situación proponemos la siguiente

**Definición.** *Círculo de curvatura de  $\underline{f}(s)$  en  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , es el círculo con centro  $(1/k_f(0))\underline{e}_2$  y radio  $1/k_f(0)$ . Su contorno será la circunferencia oscultriz  $S_f(0)$ . Si  $k_f(0) = 0$ , la circunferencia oscultriz coincide con la recta tangente a  $\underline{f}$  en  $\underline{f}(0)$ .*

Así, el radio de curvatura de la curva es el radio del círculo de curvatura, y la circunferencia oscultriz es la mejor aproximación local circular a  $\underline{f}$  en  $\underline{f}(0)$ . Si  $k_f(s)$  es estrictamente

creciente en un entorno de  $s = 0$  (o decreciente) entonces  $S_f(0)$  y  $\underline{f}$  se cruzan en  $\underline{f}(0)$ .

Supongamos  $\underline{f} \in C^2$ . Si su curvatura presenta un valor extremal estricto en  $s = 0$ ,  $\underline{f}$  y  $S_f(0)$  no se cruzan en  $\underline{f}(0)$ .

Los puntos extremales de la curvatura de  $\underline{f}$  se denominan *vértices* de la curva.

Necesariamente  $\underline{f}$  tiene por lo menos dos vértices. El **teorema de los cuatro vértices** (Mukhopadhaya) afirma que toda curva de Jordan  $C^2$  tiene por lo menos cuatro vértices.

### Ejercicio 1.

Estudiar la curva  $\underline{\Phi}(t) = (t, t^6 \cdot \text{sen } 1/t)$  en un entorno de  $t = 0$  y su contacto en  $(0,0)$  con  $\underline{g}(s) = (s, 0)$ . Comparar con los resultados del teorema 1.

### Ejercicio 2.

Sean  $\underline{f}(s)$  y  $\underline{g}(s)$  curvas satisfaciendo la hipótesis 1 que se intersecan en  $s = 0$ :  $\underline{f}(0) = \underline{g}(0)$ . Supongamos que  $\underline{f}'(0) = (1, 0) \neq \underline{g}'(0) \neq (0, 1)$ . Demostrar que en un entorno de  $\underline{f}(0)$ ,  $\underline{f}$  y  $\underline{g}$  se cruzan.

## CAPITULO VI

### FUNCIONES MONOTONAS

El familiar teorema sobre primitivas de una función afirma que dos funciones reales continuas definidas en  $[0, 1]$  con la misma derivada (finita) en todo punto difieren en una constante aditiva.

El teorema de Barrow y Newton, en el marco de la teoría de la integral de Lebesgue, podría enunciarse así:

**Teorema 1.** *Sea  $f(x)$  continua,  $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ . Si  $f'(x)$  existe en todo punto y  $\int_0^1 |f'(t)| dt < \infty$ , entonces  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ .*

Este resultado, que no demostraremos aquí, se basa esencialmente en la existencia en **todo** punto del límite numérico del cociente incremental  $\Delta f / \Delta x$ . Por ejemplo,  $e(x)$ , la función de Cantor, es continua y monótona creciente en sentido amplio y tiene derivada nula c.d. pero  $e(0) = 0$ ,  $e(1) = 1$ .

Obsérvese que  $x \rightarrow (x, f(x))$  es un arco de Jordan, si  $f(x)$  es continua. Además, si se satisfacen las hipótesis del teorema 1, queda unívocamente determinado por  $f(a)$  y  $f'(x)$ .

Es instructivo comparar estos resultados con (ii) del siguiente teorema 2.

Sea  $K =$  triádico de Cantor  $\cap (0, 1)$  y  $H = (0, 1) \setminus K = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ .

**Teorema 2 (Ruziewicz).**

(i) *Existe una función estrictamente creciente continua  $f : (0, 1) \rightarrow [0, 2]$  tal que es derivable en todo punto de  $H$  y su derivada Dini en los puntos de  $K$  es igual a  $+\infty$ .*

(ii) *Sea  $f'$  la derivada de  $f$  descripta. Hay infinitas funciones estrictamente crecientes, continuas,  $f(x; t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ ,  $f(x; 0) \equiv f(x)$ ,  $f(\cdot; t) : (0, 1) \rightarrow [0, t+2]$  tales que  $f'(x; t) \equiv f'(x)$  y si  $t < s$  entonces  $0 < f(x; s) - f(x; t) \neq$  constante.*

**Demostración.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Sea  $e(x)$  la función de Cantor (=escalera del diablo). Entonces podemos definir

$$(1) \quad f(x; t) = f(x) + t \cdot e(x).$$

(i) Sea  $g$  una función continua definida en  $\mathcal{R}$ , estrictamente creciente con derivada en  $[0, 1]$  tal que  $1/2 \leq g'(x)$  allí,  $0 \leq g(x) \leq 1$ , nula en  $(-\infty, 0]$ , constante en  $[1, \infty)$ . Especializaremos esta función más adelante. Definimos, en  $0 < x < 1$  y con  $(a_i, b_i)$  intervalo complementario del ternario de Cantor, la función  $f(x)$ :

$$(2) \quad f(x) := \sum_{m=1}^{\infty} \sum \left\{ \left( \frac{2}{5} \right)^m g \left( \frac{x - a_i}{b_i - a_i} \right) : b_i - a_i = 3^{-m} \right\}$$



Entonces  $|f(x)| \leq 2$ . Sea  $x = (0.d_1d_2 \dots d_j \dots)_3 \in [0, 1]$ . Luego,  $x \in \overline{K}$  si y sólo si  $x$  admite una representación tal que  $d_i \in \{0, 2\}$  para todo  $i$ .

Supongamos  $K \ni x \neq (0.d_1d_2 \dots d_j 0222 \dots)_3$ .

Como  $(0.d_1d_2 \dots d_j 0222 \dots)_3 = (0.d_1d_2 \dots d_j 100 \dots)_3$ , los puntos excluidos corresponden a puntos iniciales de lagunas de  $K$ . Sea  $d$  suficientemente pequeño  $> 0$ . Estimaremos

$$I = [f(x+d) - f(x)]/d$$

Se presentan las siguientes alternativas,

(I) si  $x+u \notin K$ ,  $\forall u \in (d/3, d]$ , entonces  $\exists(a_i, b_i)$ , intervalo complementario, tal que  $x < a_i \leq x+d/3 < x+d < b_i$  donde la primera desigualdad es estricta pues  $x$  no es el extremo inferior de un intervalo complementario, o bien,

(II)  $\exists u \in (d/3, d]$  tal que  $x+u \in K$  por lo que  $\exists(a_i, b_i) \subset (x, x+u)$  con  $b_i - a_i \geq u/3 > d/9$ . En efecto, de  $x+u > x$  sigue que existe  $j$  tal que  $x = (0.d_1d_2 \dots d_j 0 \sim)_3$  y  $x+u = (0.d_1d_2 \dots d_j 2 \sim)_3$ , donde  $\sim$  indica una sucesión de dígitos pertenecientes a  $\{0, 2\}$ , no necesariamente la misma en cada representación. En consecuencia,  $(x, x+u) \supset ((0.d_1d_2 \dots d_j 1)_3, (0.d_1d_2 \dots d_j 2)_3)$ . Por lo tanto,

$$(3) \quad 1/3^j \geq u \geq 1/3^{j+1} \geq u/3 \geq d/9.$$

Entonces, en el caso (I), para  $|(a_i, b_i)| = 3^{-m}$  obtenemos,

$$\begin{aligned} I &\geq \left(\frac{2}{5}\right)^m \frac{1}{d} \left[ g\left(\frac{x+d-a_i}{b_i-a_i}\right) - g\left(\frac{x-a_i}{b_i-a_i}\right) \right] \geq \left(\frac{2}{5}\right)^m \frac{1}{d} \left[ \frac{x+d-a_i}{b_i-a_i} - \frac{x-a_i}{b_i-a_i} \right] = \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^m \frac{1}{d} \frac{d}{b_i-a_i} = \left(\frac{6}{5}\right)^m \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En el segundo caso, recordando que  $g(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} I &\geq \frac{f(b_i) - f(a_i)}{d} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^m \left[ g(1) - g(0) \right] \frac{1}{d} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^m \frac{1}{2} \frac{1}{d} \geq \\ &\geq \left(\frac{2}{5}\right)^m \frac{1}{2} \frac{1}{9 \cdot 3^{-m}} = \left(\frac{6}{5}\right)^m \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

En estos puntos  $x$ ,  $D_+ f(x) = +\infty$ , pues  $m \rightarrow +\infty$  cuando  $d \rightarrow 0$ . (En efecto, dado  $q$  sea  $d_0 := \text{dist} \{x, \text{punto inicial de los intervalos complementarios de longitud } > 3^{-q}\}$ . Luego,  $d_0 > 0$  y tomando  $d < d_0$  aseguramos que  $|(a_i, b_i)| = 3^{-m} \leq 3^{-q}$ ).

Si  $x = (0.d_1d_2 \dots d_j 0222 \dots)_3 = (0.d_1d_2 \dots d_j 1000 \dots)_3$  este argumento falla. Asumiremos a continuación que  $g$  tiene además las siguientes propiedades:  $D_+g(0) = +\infty$  y  $D_-g(1) = +\infty$ . Entonces,  $D_+f(x) = +\infty$  también en los extremos izquierdos de intervalos complementarios del triádico. Análogamente se trata  $D_-$  obteniéndose que en todo

punto de  $K$  vale  $Df(x) = +\infty$ . Para probar que  $D_-f(x) = +\infty$  en los puntos de  $K$ , los puntos que se excluyen en primera instancia para analizar las alternativas (I) y (II) correspondientes, son los extremos derechos de intervalos complementarios que ahora son de la forma:  $x = (0.d_1d_2 \dots d_j 1222 \dots)_3 = (0.d_1d_2 \dots d_j 2000 \dots)_3$ , QED.

NOTA: Puede usarse  $g(x) = \frac{2}{\pi} \arcsen \sqrt{x}$ ,  $0 < x < 1$  pues  $g'(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \geq \frac{1}{2}$ .

## CAPITULO VII

### TEOREMA DE STOKES EN EL PLANO

#### VII.1. Formas Diferenciales.

Dada una región plana  $S$  definiremos en ella las  $i$ -formas,  $i = 0, 1, 2$ . 0-forma será cualquier función continua  $\Phi$  en  $S$ ;  $w = f(x, y)dx + g(x, y)dy$  será una 1-forma si  $f$  y  $g$  son 0-formas;  $W = F(x, y)dx \wedge dy$  será una 2-forma si  $F$  es una 0-forma. Por definición, toda  $n$ -forma con  $n > 2$  es nula. El símbolo  $\wedge$  define un producto entre diferenciales sujeto a las siguientes reglas:

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0.$$

Esto último explica por qué una 3-forma es una forma nula. De acuerdo a la regularidad de la  $i$ -forma podremos diferenciarla aplicándole el operador  $d$  de diferenciación el cual actúa de acuerdo a la regla de Leibnitz. Si  $\Phi \in C^1$ ,  $d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy$  será una 1-forma. Si  $w \in C^1$ ,  $dw = df \wedge dx + dg \wedge dy$ . Esta última se obtiene utilizando la que por ahora es una convención:  $ddx = ddy = 0$  y la regla de Leibnitz.  $dw$  es una 2-forma:

$$(1) \quad dw = (g_x - f_y)dx \wedge dy.$$

Si  $W$  es una 2-forma  $C^1$ ,  $dW = 0$ . Si  $\Phi$ ,  $w$  y  $W$  son  $C^2$  formas tenemos entonces,

$$dd\Phi = ddw = ddW = 0,$$

lo cual justifica la convención utilizada.

#### Ejercicio.

$$d(\Phi w) = \Phi dw + d\Phi \wedge w = d((\Phi f)dx + (\Phi g)dy).$$

Sea ahora  $T$  una transformación  $C^2$  de  $S$  en  $TS$  inyectiva de jacobiano no nulo. Entonces,  $S^* = TS$  es una región,  $T^{-1}$  es  $C^2$  y su jacobiano mantiene signo. Sea

$$T: (x, y) \rightarrow (\xi, \eta), \quad (x, y) \in S, \quad (\xi, \eta) \in S^*.$$

La siguiente operación  $T^*$  nos permitirá transplantar formas de  $S$  a  $S^*$ . Sea  $\Phi$  una 0-forma en  $S$ :  $T^*\Phi := \Phi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ , la que escribiremos simplemente como  $T^*\Phi = \Phi$ .

Si  $w$  es una 1-forma:  $T^*w := T^*fT^*dx + T^*gT^*dy$ . Convendremos por el momento en que  $T^*(dx) = d(T^*x)$ . Luego,  $T^*(dx) = dx(\xi, \eta) = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta$ . Así,

$$(2) \quad T^*w = (fx_\xi + gy_\xi)d\xi + (fx_\eta + gy_\eta)d\eta = f^*d\xi + g^*d\eta.$$

Si  $W$  es una 2-forma:  $T^*W = T^*FT^*(dx \wedge dy)$ , donde

$$T^*(dx \wedge dy) := \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi \wedge d\eta = j(\xi, \eta) d\xi \wedge d\eta.$$

Luego,

$$(2') \quad T^*W = F \cdot j \, d\xi \wedge d\eta.$$

Vale:

$$(3) \quad T^*d\Phi = dT^*\Phi, \quad T^*dw = dT^*w, \quad T^*dW = dT^*W.$$

La última relación es trivial y la primera fácil de verificar. Veamos la segunda,

$$(3') \quad \begin{aligned} T^*dw &= (g_x - f_y) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi \wedge d\eta = (g_x - f_y) \cdot (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) d\xi \wedge d\eta = \\ &= (f_\xi x_\eta + g_\xi y_\eta - f_\eta x_\xi - g_\eta y_\xi) d\xi \wedge d\eta = \\ &= \left[ -\frac{\partial}{\partial \eta} (fx_\xi + gy_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (fx_\eta + gy_\eta) \right] d\xi \wedge d\eta = dT^*w. \end{aligned}$$

En lo que sigue de esta sección *supondremos*  $j(\xi, \eta) > 0$ . Dado un arco de curva  $C^1$  contenido en  $S$ ,  $\Gamma : x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ , definimos, si  $w \in C$

$$(4) \quad \int_{\Gamma} w := \int_a^b \left( f \frac{dx}{dt} + g \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

El valor de la integral definida es **independiente** de la representación  $C^1$  del arco. También,  $\int_S W := \iint_S F(x, y) dx dy$ , si  $W \in C$  y se anula fuera de un compacto contenido en  $S$ . Entonces, si  $\Gamma^*$  es el arco en  $S^*$  dado por:  $\xi = \xi(x(t), y(t)), \eta = \eta(x(t), y(t)), a \leq t \leq b$ , tenemos,

$$(5) \quad \begin{aligned} \int_{\Gamma} w &= \int_a^b \left[ (fx_\xi + gy_\xi) \frac{d\xi}{dt} + (fx_\eta + gy_\eta) \frac{d\eta}{dt} \right] dt = \\ &= \int_a^b \left( f^* \frac{d\xi}{dt} + g^* \frac{d\eta}{dt} \right) dt = \int_{\Gamma^*} T^*w. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$(6) \quad \int_S W = \iint_{S^*} F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot j(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{S^*} T^*W.$$

Si  $w$  es una 1-forma:  $T^*w := T^*fT^*dx + T^*gT^*dy$ . Convendremos por el momento en que  $T^*(dx) = d(T^*x)$ . Luego,  $T^*(dx) = dx(\xi, \eta) = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta$ . Así,

$$(2) \quad T^*w = (fx_\xi + gy_\xi)d\xi + (fx_\eta + gy_\eta)d\eta = f^*d\xi + g^*d\eta.$$

Si  $W$  es una 2-forma:  $T^*W = T^*FT^*(dx \wedge dy)$ , donde

$$T^*(dx \wedge dy) := \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi \wedge d\eta = j(\xi, \eta) d\xi \wedge d\eta.$$

Luego,

$$(2') \quad T^*W = F \cdot j \, d\xi \wedge d\eta.$$

Vale:

$$(3) \quad T^*d\Phi = dT^*\Phi, \quad T^*dw = dT^*w, \quad T^*dW = dT^*W.$$

La última relación es trivial y la primera fácil de verificar. Veamos la segunda,

$$\begin{aligned} T^*dw &= (g_x - f_y) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi \wedge d\eta = (g_x - f_y) \cdot (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) d\xi \wedge d\eta = \\ &= (f_\xi x_\eta + g_\xi y_\eta - f_\eta x_\xi - g_\eta y_\xi) d\xi \wedge d\eta = \\ (3') \quad &= \left[ -\frac{\partial}{\partial \eta} (fx_\xi + gy_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (fx_\eta + gy_\eta) \right] d\xi \wedge d\eta = dT^*w. \end{aligned}$$

En lo que sigue de esta sección *supondremos*  $j(\xi, \eta) > 0$ . Dado un arco de curva  $C^1$  contenido en  $S$ ,  $\Gamma : x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ , definimos, si  $w \in C$

$$(4) \quad \int_{\Gamma} w := \int_a^b \left( f \frac{dx}{dt} + g \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

El valor de la integral definida es **independiente** de la representación  $C^1$  del arco. También,  $\int_S W := \iint_S F(x, y) dx dy$ , si  $W \in C$  y se anula fuera de un compacto contenido en  $S$ . Entonces, si  $\Gamma^*$  es el arco en  $S^*$  dado por:  $\xi = \xi(x(t), y(t)), \eta = \eta(x(t), y(t)), a \leq t \leq b$ , tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} w &= \int_a^b \left[ (fx_\xi + gy_\xi) \frac{d\xi}{dt} + (fx_\eta + gy_\eta) \frac{d\eta}{dt} \right] dt = \\ (5) \quad &= \int_a^b \left( f^* \frac{d\xi}{dt} + g^* \frac{d\eta}{dt} \right) dt = \int_{\Gamma^*} T^*w. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$(6) \quad \int_S W = \iint_{S^*} F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot j(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{S^*} T^*W.$$

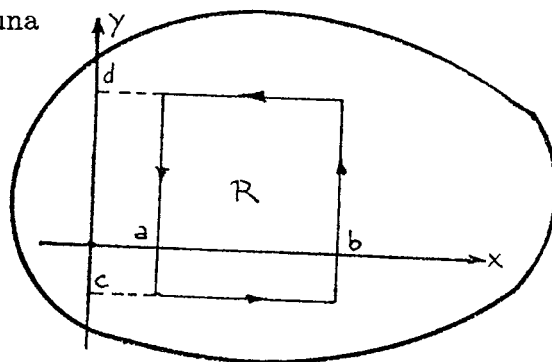
Obviamente:  $(T^{-1})^*T^*\Phi = \Phi$ . Como el producto de los jacobianos de  $T$  y  $T^{-1}$  es igual a uno,  $(T^{-1})^*T^*W = W$ . Para 1-formas observemos que

$$\begin{aligned} (T^{-1})^*(f^*d\xi + g^*d\eta) &= (f^*\xi_x + g^*\eta_x)dx + (f^*\xi_y + g^*\eta_y)dy = \\ &= [(fx_\xi + gy_\xi)\xi_x + (fx_\eta + gy_\eta)\eta_x]dx + [\dots]dy = f dx + g dy = w, \end{aligned}$$

pues  $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$ .

Vemos ahora el *teorema elemental de Stokes* (para rectángulos). Sea un rectángulo  $R$  contenido en  $S$  de lados paralelos a los ejes como en la figura y  $w$  una 1-forma  $C^1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_R dw &= \iint_R (g_x - f_y) dx dy = \\ &= \int_c^d [g(b, y) - g(a, y)] dy - \\ &\quad - \int_a^b [f(x, d) - f(x, c)] dx = \\ &= \int_{\partial R} (f dx + g dy) = \int_{\partial R} w. \end{aligned}$$



### VII.2. Partición de la unidad.

Denotaremos con  $C_0^\infty(S)$  al conjunto de las funciones indefinidamente diferenciables  $f$  cuyo soporte,  $\{x : f(x) \neq 0\}^-$ , es un compacto contenido en  $S$ .

**Teorema 1.** Sea  $\mathcal{D} = \{D_l\}_{l \in L}$  un cubrimiento de  $\mathcal{R}^2$  por abiertos  $D_l$  donde  $L$  es una familia arbitraria de índices. Entonces, existe una familia de funciones  $\{f_i\}_{i \in N}$  tal que para cada  $i$  existe  $l$  para el cual  $f_i \in C_0^\infty(D_l)$ , que es localmente finita (todo compacto de  $\mathcal{R}^2$  interseca sólo a un número finito de soportes) y que verifica  $\sum_{i \in N} f_i \equiv 1$  en  $\mathcal{R}^2$ .

#### Demostración.

(i) Reduciremos el problema al caso  $L$  numerable. Cada  $x \in \mathcal{R}^2$  lo cubrimos con un entorno abierto circular de radio menor que uno contenido en algún  $D_l$ . Con una subfamilia finita de ellos,  $\mathcal{G}_n$ , cubrimos  $K_n = \{x : n - 1 \leq |x| \leq n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Reemplazamos ahora  $\mathcal{D}$  por  $\mathcal{G} = \bigcup_n \mathcal{G}_n$ .

(ii) El teorema 1 seguirá ahora del siguiente

**Teorema 2.** Sea  $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in N}$  un cubrimiento localmente finito de  $\mathcal{R}^2$  por abiertos acotados. Entonces, existe una familia de funciones  $\{g_i\}_{i \in N}$ ,  $g_i \in C_0^\infty(G_i)$ ,  $0 \leq g_i \leq 1$ , tal que  $\sum g_i \equiv 1$  en  $\mathcal{R}^2$ .

En efecto, sea  $K_1 = \mathcal{C}(\bigcup_2^\infty G_i) = \mathcal{R}^2 \setminus \bigcup_2^\infty G_i$ . Si  $K_1 = \emptyset$ , definimos  $H_1 = \emptyset$ ,  $g_1 = 0$ . Si  $K_1 \neq \emptyset$ , existe  $H_1$  abierto tal que  $K_1 \subset H_1 \subset \overline{H_1} \subset G_1$ . Reemplazamos  $\{G_1, G_2, \dots\}$  por

$\{H_1, G_2, \dots\}$ . Tenemos,  $H_1 \cup \bigcup_2^\infty G_i = \mathcal{R}^2$ . Repetimos ahora el proceso: reemplazamos en la última familia  $G_2$  por  $H_2$  y así sucesivamente. Sabemos que dado  $\bar{H}_i$  existe una función no negativa,  $\psi_i \in C_0^\infty(G_i)$ , igual a uno en  $\bar{H}_i$ . (Una función así se obtiene convolucionando una función característica con una función de prueba adecuada). Definimos

$$g_i = \psi_i / \sum \psi_j.$$

Esta definición es buena pues la familia  $\{G_i\}$  es localmente finita. Como  $\cup H_i = \mathcal{R}^2$ ,  $\sum g_i \equiv 1$ , QED.

**Corolario.** Sea  $K$  un compacto y  $\{G_1, \dots, G_n\}$  un cubrimiento por abiertos acotados. Existe una familia de funciones no negativas,  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que  $g_i \in C_0^\infty(G_i)$ ,  $\sum g_i = 1$  en un entorno de  $K$ .

### VII.3. Dominios Estándar.

Sea  $Q \subset \mathcal{R}^2$ . Diremos que  $Q$  tiene *dimensión- $s = 0$*  para  $s = 1, 2$ , si para cada  $\epsilon > 0$  es posible hallar un  $c_0 = c_0(\epsilon)$  tal que para todo  $c \leq c_0$  existen cuadrados  $Q_1, \dots, Q_k$  (abiertos o cerrados) de diámetro menor o igual a  $c$  tales que

$$(a) \quad Q \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_k, \quad k \cdot c^s \leq \epsilon.$$

Un compacto plano de medida Lebesgue cero es de *dimensión-2 nula*.

Todo conjunto finito tiene *dimensión-1 nula* lo mismo que el conjunto  $\{0, 1/n^2\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Más aún,  $\dim_1\{(0, C_h) : 0 < C_h \downarrow 0, h = 1, 2, \dots\} = 0$ , (demostrarlo).

NB. Los cuadrados  $Q_j$  en (a) pueden siempre elegirse de lados paralelos a los ejes.

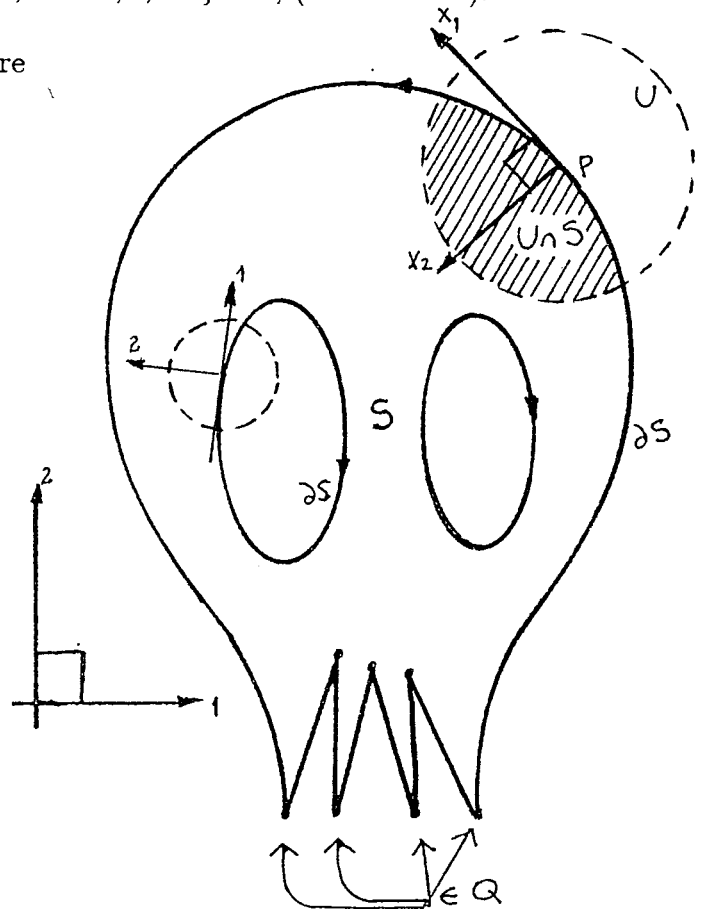
**Definición.** Sea  $S \subset \mathcal{R}^2$  abierto, conexo y acotado. Diremos que  $S$  es un *dominio estándar* si existe un conjunto  $Q \subset \partial S$  de *dimensión-1 nula* tal que para todo  $p \in P = \partial S \setminus Q$  existe un entorno  $U$  de  $p$ , disjunto con  $Q$ , tal que en él el contorno está representado por un arco  $C^1 : x_2 = f(x_1)$ , donde  $(x_1, x_2)$  son las coordenadas en el sistema móvil de referencia del contorno (dado por la tangente y la normal al arco en  $p$ ). Este sistema, está equiorientado con el sistema de coordenadas en  $\mathcal{R}^2$ .

Respecto al sistema móvil:

$$p = (0, 0), \quad S \cap U =$$

$$(b) \quad = \{(x_1, x_2) \in U : x_2 > f(x_1)\}.$$

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente teorema general de Stokes:



**Teorema 3.** Sea  $w$  una 1-forma en  $C^1(S)$ ,  $S$  sea un dominio estándar. Supongamos que  $w$  está definida en  $\bar{S} \setminus Q$  y es continua y acotada allí. Si  $dw$  es sumable en  $S$  y  $w$  es sumable en  $P$  entonces

$$(7) \quad \int_S dw = \int_{\partial S} w.$$

$\int_{\partial S} w$  significará precisamente  $\int_P w$ . La definición de esta última se dará más adelante y generalizará a aquella introducida en los cursos de Análisis.

Por el momento veamos que si  $J = \partial S$  es una curva de Jordan  $C^1$  con tangente no nula en todo punto entonces  $S$  es un dominio estándar. Llamaremos a estos dominios *estándar regulares*.

En efecto,  $J$  es definible como una función  $C^1$  de la longitud de arco  $s$ . Supongamos  $p = (0, 0) \in J$  y sea  $\underline{t}(0) = \underline{e}_1$  y  $\underline{n}(0) = \underline{e}_2$ . Entonces,  $x_1 = \int_0^s \cos \theta(t) dt$ ,  $x_2 = \int_0^s \sin \theta(t) dt$ ,  $\theta(t)$  continua. Luego,  $x_1 \sim s$  y podemos definir  $x_2 = h(x_1)$  en un entorno de  $s = 0$ . Además:  $dx_2/dx_1 = (dx_2/ds)/(dx_1/ds) \in C$ . Por lo tanto, en un pequeño entorno circular abierto  $K$  con centro en  $p$ ,  $J \cap K$  coincide con el lugar de los puntos de una curva  $C^1$ :  $x_2 = h(x_1)$ . Si  $U$  es un entorno circular concéntrico con  $K$  y suficientemente pequeño, (cf. II.4),  $\alpha = \{(x_1, x_2) \in \partial U : x_2 \geq h(x_1)\}$  y  $\beta = \{(x_1, x_2) \in \partial U : x_2 \leq h(x_1)\}$  son cortes de distintos dominios complementarios de  $J$ , y la tesis sigue inmediatamente, QED.

#### VII.4.

Es conveniente para la demostración del T.3 probar antes el siguiente caso particular (teorema especial de Stokes).

**Teorema 4.** Sea  $S$  un dominio estándar y  $w$  una 1-forma  $C^1(S)$ , continua en  $\bar{S}$ , de soporte compacto  $K \subset \bar{S}$  tal que  $K \cap Q = \emptyset$ . Entonces,

$$(8) \quad \int_S dw = \int_{\partial S} w.$$

#### Demostración.

Cubrimos  $K$  con un número finito de cuadrados abiertos  $B$  con centros en  $\bar{S}$  que tengan su clausura disjunta a  $Q$ . Esto es posible pues  $Q = \bar{Q}$ . Podemos lograr todavía que si el centro  $p$  de  $B$  pertenece a  $S$  entonces  $B \subset S$  y tiene lados paralelos a los ejes; y si  $p \in P$ , entonces  $B \cap S \subset U$ , donde  $U$  es un entorno de  $p$  como el descrito en la definición de "dominio estándar" y  $B$  tiene lados paralelos a los ejes del sistema móvil en  $p$ . Sea  $\{B_1, \dots, B_k\}$  ese cubrimiento de  $K$  y  $\{\Phi_i\}$  una partición de la unidad asociada al mismo. Luego,  $\sum \Phi_i = 1$  en un abierto  $V \supset K$  y  $\sum \Phi_i = 0$  en un abierto  $W \supset Q$ . Entonces,

$$w = f dx + g dy = \sum_{i=1}^k \Phi_i w; \quad w_i := \Phi_i w = f_i dx + g_i dy, \quad f_i, g_i \in C^1(S) \cap C(\bar{S} \setminus W);$$

$$dw_i = \Phi_i dw + d\Phi_i \wedge w = F_i dx \wedge dy, \quad F_i \in C(S).$$



Además,  $dw = \sum dw_i$  y

$$(9) \quad \int_S dw = \sum \int_S dw_i = \sum \int_{B_i \cap S} dw_i$$

Por otra parte,

$$(10) \quad \int_{\partial S} w := \sum_i \int_{\partial S} w_i, \quad \int_{\partial S} w_i := \int_{B_i \cap \partial S} w_i.$$

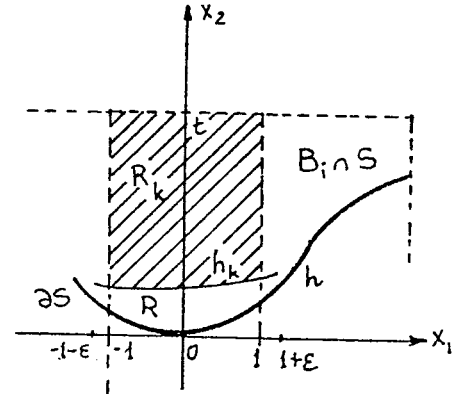
Es decir, *definimos*  $\int_{\partial S} w$  por medio de una partición de la unidad asociada al compacto  $(\text{sop } w) \cap \partial S$  de manera que cada  $w_i$  tenga en  $\partial S$  soporte contenido en un abierto relativo  $U \cap \partial S$ . La definición es buena pues es independiente de la partición utilizada. En efecto, dadas  $\mathcal{P}_1 = \{\Phi_i\}$  y  $\mathcal{P}_2 = \{\psi_j\}$ , sea  $\mathcal{P}_3 = \{\Phi_i \psi_j\}$ . Como  $\Phi_i = \sum_j \Phi_i \psi_j$ ,  $\psi_j = \sum_i \Phi_i \psi_j$ , se deduce fácilmente que el resultado obtenido con la partición  $\mathcal{P}_1$  ( $\mathcal{P}_2$ ) coincide con aquél obtenido con la partición  $\mathcal{P}_3$  (cf.(5)). Más aún, la definición coincide con la utilizada en la teoría clásica cuando  $\partial S$  es suficientemente regular.

Sea  $R \subset B_i \cap S$  como en la figura y tal que  $R \supset \text{sop } w_i$ . Existe una función  $h_k \in C^2(-1 - \epsilon < x_1 < 1 + \epsilon)$  tal que en el intervalo de definición verifica

$$(11) \quad \begin{aligned} 0 &< h_k(x_1) - h(x_1) < 1/k, \\ |h'_k(x_1) - h'(x_1)| &< 1/k. \end{aligned}$$

Sea  $R_k = \{(x_1, x_2) \in R : x_2 > h_k(x_1)\}$ . Entonces,

$$(12) \quad \begin{cases} \int_{R_k} dw_i &= \int_{R_k} (g_{i,x_1}^* - f_{i,x_2}^*) dx_1 dx_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_R dw_i, \\ \int_{\partial R_k} w_i &= \int_{-1}^1 [f^*(x_1, h_k(x_1)) dx_1 + g^*(x_1, h_k(x_1)) h'_k(x_1) dx_1] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\partial R} w_i. \end{cases}$$



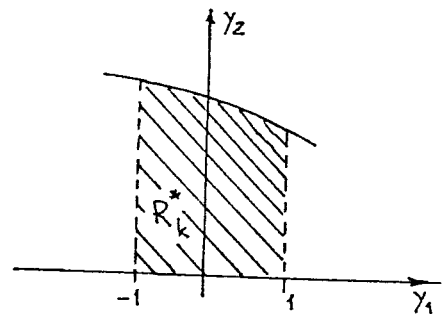
Esta demostración del teorema especial de Stokes, requiere que mostremos que

$$(13) \quad \int_{R_k} dw_i = \int_{\partial R_k} w_i.$$

La transformación  $T : R_k \rightarrow R_k^*$ ,  $T(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ ,

$$(14) \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - h_k(x_1),$$

es  $C^2$  y tiene jacobiano igual a uno. En realidad tiene esas propiedades en una región  $R'_k \supset \bar{R}_k$ . Sabemos que (cf.(5) y (6)):



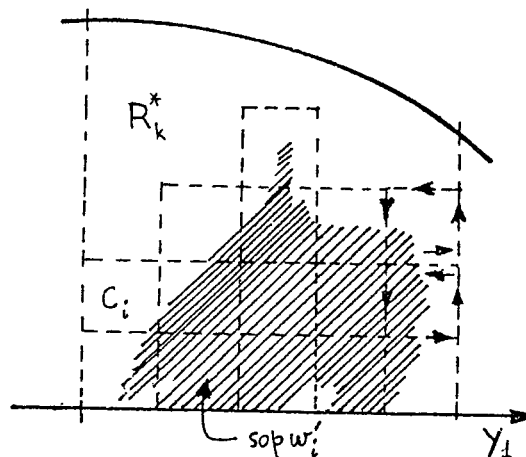
$$\int_{\partial R_k} w_i = \int_{\partial R_k^*} T^* w_i, \quad \int_{R_k} dw_i = \int_{R_k^*} T^*(dw_i) = \int_{R_k^*} d(T^* w_i).$$

Por lo tanto, la demostración de (13) se reduce a la de

$$(15) \quad \int_{R_k^*} d(T^* w_i) = \int_{\partial R_k^*} T^* w_i.$$

Como  $w_i$  tiene soporte en  $R$  que no toca los "lados" verticales ni el superior de esa región, entonces  $T^* w_i$  tendrá soporte que no toca los "lados" verticales ni el superior de  $R_k^*$ . (15) se deduce ahora de las siguientes igualdades obtenidas utilizando el teorema elemental de Stokes (ver figura). Sea  $w'_i = T^* w_i$ ,

$$\begin{aligned} \int_{R_k^*} dw'_i &= \int_{\Sigma C_j} dw'_i = \sum_j \int_{C_j} dw'_i = \sum_j \int_{\partial C_j} w'_i = \\ &= \int_{\partial \Sigma C_j} w'_i = \int_{\partial R_k^*} w'_i. \end{aligned}$$



El teorema elemental de Stokes prueba también que si  $B_l \subset S$  entonces

$$(16) \quad \int_{B_l} dw_l = \int_{\partial B_l} w_l = 0.$$

Consecuencia de (16), (13), (12), (10) y (9) es ahora la tesis del T.4, QED.

*Todo dominio estándar regular es normal.* (Normal para el teorema de Gauss. Es decir, sirve como dominio para ese teorema). En efecto, sea  $w = g dy \in C^1$ . Entonces,  $dw = g_x dx dy$ . Como  $(x, y) = (x_0, y_0) + \int_0^s (\cos \theta, \sin \theta) dt$ , utilizando el T. de Stokes, se tiene

$$\iint_S g_x dx dy = \int_{\partial S} g dy = \int g n_x ds,$$

donde:  $n_x(s) = \sin \theta(s)$  = primera componente de la normal exterior a  $S$  en el punto de  $J$  donde la longitud de arco vale  $s$ .

### VII.5. Una división de $\mathcal{R}^2 \setminus Q$ en cuadrados.

Sea  $Q$  un conjunto compacto. Sea  $K'_0$  un cuadrículado del plano con cuadrados de lado 1 paralelos a los ejes. Sea

$$K_0 := \{C : C \in K'_0, \text{dist}(C, Q) \geq 3 \text{diam} C = 3\sqrt{2}\}.$$

Cada cuadrado de  $K'_0 \setminus K_0$  lo partimos en 4 cuadrados cerrados de lado  $1/2$  y llamamos a esta familia  $K'_1$ . Luego definimos,

$$K_1 := \{C : C \in K'_1, \text{dist}(C, Q) \geq 3 \text{diam} C = 3\sqrt{2}/2\}.$$

Así siguiendo,

$$K_m := \{C : C \in K'_m, d(C, Q) \geq 3\sqrt{2}/2^m\}.$$

Sea  $R_i = \bigcup_{j=0}^i \{C : C \in K_j\}$ . Vale

**Teorema 5.**

- (i)  $p \notin R_i \Rightarrow d(p, Q) < 4\sqrt{2}/2^i$ ,
- (ii)  $p \in R_i \Rightarrow d(p, Q) \geq 3\sqrt{2}/2^i$ ,
- (iii)  $C \in K_m, m > 0 \Rightarrow d(C, Q) < 7\sqrt{2}/2^m$ ,
- (iv)  $p \in C \in K_{m-1}, p^* \in C^* \in K_{m+j}, p \notin R_m, j \geq 1, m \geq 1 \Rightarrow d(p, p^*) > \sqrt{2}/2^{m-1}$ ,
- (v)  $R_i \uparrow \mathcal{R}^2 \setminus Q$  si  $i \rightarrow \infty$ .

**Demostración.**

(i) Si  $p \notin R_i$  existe  $C \in K'_i \setminus K_i$  tal que  $p \in C$  y  $\text{dist}(C, Q) < 3\sqrt{2}/2^i$ . Entonces  $d(p, Q) \leq d(C, Q) + \text{diam} C < 3\sqrt{2}/2^i + \sqrt{2}/2^i$ .

(ii) Sigue directamente de la definición de  $K_j$ .

(iii) Si  $C \in K_m$  y  $m > 0$ ,  $C$  es uno de los cuadrados en que se subdividió un  $C^* \in K'_{m-1} \setminus K_{m-1}$ . Luego,  $d(C^*, Q) < 3\sqrt{2}/2^{m-1}$ . Sea  $p^* \in C^*$  y  $d(p^*, Q) = d(C^*, Q)$ . Como  $d(p^*, C) \leq \sqrt{2}/2^m$  resulta  $d(C, Q) < 7\sqrt{2}/2^m$ .

(iv) Sea  $p^* \in C^* \in K_{m+j}, p^* \notin R_m$ . Luego,  $d(p^*, Q) < 4\sqrt{2}/2^m$ . Es decir, existe  $q \in Q$  con  $d(p^*, q) < 4\sqrt{2}/2^m$ . Además, si  $p \in K_{m-1}, d(p, q) \geq d(p, Q) \geq 3\sqrt{2}/2^{m-1} = 6\sqrt{2}/2^m$ . Por lo tanto,  $d(p, p^*) \geq d(p, q) - d(p^*, q) > (6 - 4)\sqrt{2}/2^m = \sqrt{2}/2^{m-1}$ , QED.

En el capítulo IX volveremos, y en forma independiente, sobre esta división que permite construir un entorno acotado del compacto  $Q$  con cuadrados cuya distancia a  $Q$  es del mismo orden que su diámetro.

## VII.6. Un cubrimiento abierto de $\mathcal{R}^2 \setminus Q$ y una partición de la unidad.

Sea  $C_i \in K_m$ . Definimos  $C'_i$  como el cuadrado concéntrico con  $C_i$ , abierto, de lado doble. Entonces  $\{C'_i\}$  es un *cubrimiento abierto* de  $\mathcal{R}^2 \setminus Q$ :  $\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{C_i \in K_m} C'_i = \mathcal{R}^2 \setminus Q$ , pues  $C'_i \cap Q = \emptyset$ , (cf.(ii). T.5).

**Teorema 6.**

- (i)  $C \in K_{m-1}$  y  $C^* \in K_{m+i}, i \geq 1$ , entonces  $C' \cap C^* = \emptyset$ .
- (ii) Dado  $x \in \mathcal{R}^2 \setminus Q$  existe  $m = m(x)$  tal que si  $x \in C', C \in \cup K_j$ , entonces  $C \in K_m \cup K_{m+1}$ .
- (iii) Si  $x \in \mathcal{R}^2 \setminus Q$ , hay a lo sumo 17 cuadrados  $C', C \in \cup K_j$ , que lo contienen.

**Demostración.**

(i) Sea  $p \in C' \cap C^{*'}$ . Entonces,

$$d(p, C) \leq (\text{diam } C)/2 = \sqrt{2}/2^m; \quad d(p, C^*) \leq (\text{diam } C^*)/2 = \sqrt{2}/2^{m+i+1}.$$

Luego,  $d(C, C^*) \leq \sqrt{2}(1 + 2^{-i-1})/2^m < \sqrt{2}/2^{m-1}$ . Pero de (iv)T.5 se deduce que si  $p \in C \in K_{m-1}$ ,  $p^* \in C^* \in K_{m+j}$  y  $m, j \geq 1$ , entonces  $d(p, p^*) \geq \sqrt{2}/2^{m-1}$ . Por tanto,  $d(C, C^*) \geq \sqrt{2}/2^{m-1}$ , en contradicción con el resultado obtenido al negar la tesis de (i).

(ii) Es corolario de (i)

(iii) Es fácil de ver pues la cota es grosera, QED.

Sea  $\Phi(x)$  una función con las siguientes propiedades:

(a)  $\Phi \in C^\infty(\mathcal{R}^2)$ ; (b)  $\text{sop } \Phi \subset (-1, 1) \times (-1, 1)$ ; (c)  $0 \leq \Phi \leq 1$ ; (d)  $\Phi = 1$  en  $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ .

**Definición 1.** Dado  $C_i \in K_m$ , sea  $p_i$  su centro y

$$(17) \quad \Phi'_i(p) := \Phi(2^m(p - p_i)), \quad \mathcal{X}(p) := \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{C_i \in K_m} \Phi'_i(p).$$

Entonces  $\Phi'_i \in C_0^\infty(C'_i)$ . La suma  $\mathcal{X}(p)$  está bien definida y pertenece a  $C^\infty(\mathcal{R}^2 \setminus Q)$ , pues por el T.6, cada  $x \in \mathcal{R}^2 \setminus Q$  admite un entorno  $U \ni x$  tal que todas las funciones  $\Phi'_i$  son nulas en  $U$  salvo por un número finito de ellas. Más aún,  $\mathcal{X}(p) \geq 1$  si  $p \in \mathcal{R}^2 \setminus Q$ .

**Definición 2.**  $\Phi_i(p) := \Phi'_i(p)/\mathcal{X}(p)$ .

**Teorema 7.**

(i)  $\Phi_i(p) \in C_0^\infty(C'_i)$ ;  $0 \leq \Phi_i(p) \leq 1$ ;  $\sum \Phi_i(p) = 1$  en  $\mathcal{R}^2 \setminus Q$ . Es decir,  $\{\Phi_i\}$  es una partición de la unidad en  $\mathcal{R}^2 \setminus Q$  asociada al cubrimiento  $\{C'_i\}$ .

(ii)  $|\nabla \Phi_i(p)| \leq M.2^m$  si  $C_i \in K_m$ ,  $M = \text{constante independiente de } m \text{ e } i$ .

**Demostración de (ii).**

Como  $\mathcal{X}(p) \geq 1$  si  $p \in \mathcal{R}^2 \setminus Q$ , tenemos,

$$(18) \quad |\nabla \Phi_i(p)| = |\nabla \Phi'_i(p)/\mathcal{X}(p) - \Phi'_i(p)\nabla \mathcal{X}(p)/\mathcal{X}^2(p)| \leq |\nabla \Phi'_i(p)| + \sum_j \{|\nabla \Phi'_j(p)| : C'_j \cap C'_i \neq \emptyset\}.$$

En la última suma hay a lo sumo 17 sumandos no nulos, cada uno correspondiente a un  $C_j \in K_{m-1} \cup K_m \cup K_{m+1}$ . Luego, de (17) obtenemos,

$$\begin{cases} |\nabla \Phi'_i(p)| & \leq 2^m \cdot \max |\nabla \Phi(p)| \\ \sum |\nabla \Phi'_j(p)| & \leq 17.2^{m+1} \max |\nabla \Phi(p)|. \end{cases}$$

De (18) sigue entonces que

$$|\nabla \Phi_i(p)| \leq 35.2^m \max |\nabla \Phi(p)| = M.2^m, \quad \text{QED.}$$

### VII.7 Intervención de la hipótesis sobre la dimensión de $Q$ .

En el siguiente teorema se acota el número de cuadrados que componen  $K_m$ .

**Teorema 8.** Si  $Q$  es un compacto de dimensión-1 nula entonces

$$\#\{C : C \in K_m\} = o(2^m).$$

#### Demostración.

Sea  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon/a^2$ , donde  $a = 2 + 16\sqrt{2}$ . Sea  $\zeta_0$  tal que si  $\zeta \leq \zeta_0$  existe un cubrimiento con cuadrados de lados paralelos a los ejes,  $Q_1 \cup \dots \cup Q_N \supset Q$ , verificando:  $\text{diam } Q_i \leq \zeta$ ,  $N\zeta \leq \epsilon_1$ .

Sean  $m_0$  y  $m$  tales que  $\zeta = 2^{-m} < 2^{-m_0} \leq \zeta_0$ . Sea  $q_i \in Q_i$  el centro de  $Q_i$  y  $Q'_i$  un cuadrado con centro  $q_i$  y lado  $a2^{-m}$ . Si  $C \in K_m$  entonces existe  $i$  tal que  $C \subset Q'_i$ . En efecto, si  $C \in K_m$  existe  $q \in Q$  con  $d(q, C) < 7\sqrt{2}/2^m$ , (cf.(iii)T.5). Como este  $q \in Q_i$  para algún  $i$ ,  $d(q, q_i) \leq 1/2^m$ . Luego,

$$d(q_i, C) < (1 + 7\sqrt{2})/2^m.$$

En consecuencia,  $C$  está contenido en todo cuadrado de centro  $q_i$  cuyo lado es  $\geq$

$$2\left(\frac{1+7\sqrt{2}}{2^m} + \text{diam } C\right) = \frac{2+16\sqrt{2}}{2^m}. \text{ En particular, } C \subset Q'_i.$$

Como en cada  $Q'_i$  caben a lo sumo  $a^2$  cuadrados  $C \in K_m$ , resulta

$$\#\{C : C \in K_m\} \leq a^2 N \leq a^2 \epsilon_1 / \zeta = \epsilon 2^m, \quad \text{QED.}$$

### VII.8. Demostración del teorema general de Stokes (T.3).

Sea  $w \in C^1(S) \cap C(\bar{S} \setminus Q)$ . Como  $S$  es estándar,  $Q$  es compacto. Sea  $\psi_m := \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{C_i \in K_k} \Phi_i$ .  $\psi_m \in C_0^\infty(\mathcal{R}^2 \setminus Q)$  y  $\psi_m \uparrow 1$  en el complemento de  $Q$ . En particular, en  $P \cup S$ . Sea  $w_m = \psi_m w$ . El teorema especial de Stokes asegura ahora que  $\int_S dw_m = \int_{\partial S} w_m = \int_P w_m$ . Como  $dw_m = \psi_m dw + d\psi_m \wedge w$  sigue que

$$(19) \quad \int_P \psi_m w - \int_S \psi_m dw = \int_S d\psi_m \wedge w.$$

Debemos mostrar que en nuestro dominio acotado  $S : \int_S dw = \int_P w$ , donde  $P + Q = \partial S$ ,  $Q$  de dimensión-1 nula. Suponemos  $w$  acotada, sumable en  $P$ ,  $dw$  sumable en  $S$ .

Conviene en este momento leer la sección VII.9 donde se explican algunos de los términos y símbolos utilizados en la demostración.

El miembro izquierdo converge, para  $m \uparrow \infty$ , a  $\int_P w - \int_S dw$ ; luego, el teorema quedará demostrado si probamos que

$$(20) \quad \int_S d\psi_m \wedge w \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Observemos que

$$(21) \quad \begin{cases} \psi_m(p) = 1 & \text{si } p \in C \in K_j, j = 0, 1, \dots, m-2, \\ \psi_m(p) = 0 & \text{si } p \in C \in K_j, j = m+1, m+2, \dots, \\ d\psi_m(p) = 0 & \text{si } p \notin \cup\{C : C \in K_{m-1} \cup K_m\}. \end{cases}$$

Entonces, si  $N \geq |w| := \sup_P \sup (|f(p)|, |g(p)|)$ ,

$$(22) \quad \left| \int_S d\psi_m \wedge w \right| \leq N \sum \left\{ \int_C |\nabla \psi_m| dp : C \in K_{m-1} \cup K_m \right\}.$$

Pero, si  $p \in \cup\{C : C \in K_m \cup K_{m-1}\}$  entonces,

$$(23) \quad \begin{aligned} |\nabla \psi_m(p)| &= |\nabla(1 - \psi_m(p))| = \left| \nabla \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{C_i \in K_k} \Phi_i(p) \right| = \left| \nabla \sum_{k=m}^{m+1} \sum_{C_i \in K_k} \Phi_i(p) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=m}^{m+1} \sum_{C_i \in K_k} |\nabla \Phi_i(p)| \leq (\text{cf. Ts. 6 y 7}) \leq 17M2^{m+1}. \end{aligned}$$

En consecuencia, de (22) y (23), y T.8:

$$\left| \int_S d\psi_m \wedge w \right| \leq 34MN2^m \cdot 2^{2(1-m)} \#\{C : C \in K_m \cup K_{m-1}\} = o(1), \quad \text{QED.}$$

### VII.9.

La sumabilidad de  $dw$  sobre  $S$  significa que  $\sup_H \iint_H |g_x - f_y| dx dy < \infty$ , donde  $H$  recorre la familia de conjuntos compactos contenidos en  $S$ , y por lo tanto tiene un claro sentido  $\int_S dw := \iint_S (g_x - f_y) dx dy$ .

La sumabilidad de  $w$  sobre  $P = \partial S \setminus Q$  la definimos por

$$(24) \quad \sup_m \left\{ \int \psi_m |f dx + g dy| \right\} < \infty,$$

donde  $m = 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq \psi_m \leq 1$ ,  $\psi_m \in C_0^\infty(\mathcal{R}^2)$ ,  $\{\psi_m \neq 0\} \cap \partial S \uparrow P$ ,  $\psi_m(p) \uparrow 1$  para todo  $p \in P$ . La integral en (24) localmente significa  $\int_{U \cap \partial S} \psi_m \Phi_i |fx' + gy'| ds$ . El uso de particiones de la unidad,  $\{\Phi_i \in C_0^\infty(\mathcal{R}^2)\}$ , sobre compactos nos permite definir  $\int \psi_m |f dx + g dy|$  como una suma finita en  $i$  y también  $\int \psi_m (f dx + g dy)$ , con valores independientes de la partición de la unidad elegida, (cf. Cap.V y fórmulas (5) y (12)).

Entonces, existe  $M = \lim_{m \rightarrow \infty} \int \psi_m |f dx + g dy| < \infty$ .  $M$  es independiente de la sucesión monótona  $\{\psi_m\}$  elegida. (Dadas  $\{\psi_m\}$  y  $\{\psi'_k\}$  se tiene, para  $m$  fijo,  $\epsilon > 0$  pequeño y todo

$k \geq k_0(m)$ , que  $(1 - \epsilon)\psi_m \leq \psi'_k$  en todo punto de  $P$  en el soporte compacto de  $\psi_m$ ). En consecuencia,

$$(25) \quad \left\{ \int \psi_m (f dx + g dy) \right\}$$

define una sucesión de Cauchy con límite  $L$ , independiente de  $\{\psi_m\}$ . Convenimos entonces en que

$$(26) \quad L := \int_P w = \int_P f dx + g dy := \int_{\partial S} w.$$

## 2a PARTE

Contiene los capítulos VIII al XI. Los temas tratados aquí requieren un mayor esfuerzo del lector.



## CAPITULO VIII

### TRANSFORMACIONES CONFORMES

#### VIII.1.

A continuación presentamos algunas definiciones y propiedades de funciones y familias de funciones requeridas para la demostración del teorema de Riemann.

NOTACION:  $B_r(a) = \{z \in C : |z - a| < r\}$ ,  $S_r(a) = \overline{B_r(a)}$ ,  $\Sigma_r(a) = S_r(a) \setminus B_r(a)$ .

**Definición 1.** Se dice que una sucesión  $(f_n)$  de funciones holomorfas sobre una región  $G$  converge casi uniformemente a  $f(z)$ ,  $f_n \rightrightarrows f$ , si  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ ,  $f_n \xrightarrow{\rightarrow} f$ , sobre cualquier compacto  $K \subseteq G$ .

En esta situación, para cada  $n$  y cada  $z$  en el interior de un disco cerrado  $C \subset G$

$$(1) \quad f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{f_n(t)}{t - z} dt.$$

Luego,

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{f(t)}{t - z} dt,$$

y por tanto,  $f_n \rightrightarrows f$  implica  $f$  holomorfa en  $G$ .

**Definición 2.** Una familia de funciones definidas en una región  $G$  se dice casi uniformemente acotada si es uniformemente acotada sobre cada compacto  $K \subset G$ .

**Definición 3.** Una familia  $\theta$  de funciones holomorfas sobre una región  $G$  se dice normal si toda sucesión contenida en  $\theta$  contiene a su vez una subsucesión casi uniformemente convergente.

**Teorema 1 (Stieltjes-Osgood).** Toda familia  $\theta$  de funciones holomorfas sobre una región  $G$ , casi uniformemente acotada, es normal.

**Demostración.**

Para cada disco cerrado  $E \subset G$  existe otro  $C \subset G$  que lo contiene en su interior. Entonces para  $z_1, z_2 \in E$ , y toda  $f \in \theta$ :

$$(3) \quad f(z_2) - f(z_1) = \frac{z_2 - z_1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{f(t)}{(t - z_1)(t - z_2)} dt.$$

En consecuencia,

$$(4) \quad |f(z_2) - f(z_1)| \leq M \cdot |z_2 - z_1|,$$

y la familia  $\theta$  es equicontinua y acotada sobre todo compacto contenido en  $G$ . El teorema de Arzelá-Ascoli y la  $\sigma$ -compacidad de  $G$  aseguran ahora la existencia de una sucesión casi uniformemente convergente, QED.

**Teorema 2.** Sea  $\{w_n\}$  una sucesión de funciones holomorfas y  $w_n \rightrightarrows w$  sobre  $G$ . Entonces,

(i)  $w_n^{(k)} \rightrightarrows w^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

(ii) si cada  $w_n$  es inyectiva entonces  $w$  es inyectiva si no es constante.

**Demostración.**

(i)  $w$  es holomorfa. Luego, de  $w(z) - w_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{w(t) - w_n(t)}{t - z} dt$  sigue que  
 $w'(z) - w_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{w(t) - w_n(t)}{(t - z)^2} dt$ , si  $z \in \overset{\circ}{C}$ , y  $C$  es un disco cerrado contenido en  $G$ .  
 Sigue ahora que  $w_n' \rightrightarrows w'$ .

(ii) Supongamos  $w$  no constante y que para ciertos  $z_1, z_2$  en  $G$ ,  $z_1 \neq z_2$ , vale  $w(z_1) = w(z_2) = w_0$ , que se puede suponer cero sin pérdida de generalidad. Supongamos  $S_\epsilon(z_1) \cap S_\epsilon(z_2) = \emptyset$ ;  $S_\epsilon(z_i) \subset G$ ,  $i = 1, 2$ , y tales que ninguno de esos discos contiene otro cero de  $w$  que su centro. Como  $w_n \rightarrow w$  sobre  $\Sigma_\epsilon(z_1) \cup \Sigma_\epsilon(z_2)$  del teorema de Rouché se concluye que si  $n \geq n_0$ ,  $w$  y  $w_n$  tienen el mismo número de ceros dentro de  $S_\epsilon(z_1)$  y  $S_\epsilon(z_2)$ , lo que contradice la inyectividad de  $w_n$ , QED.

**Teorema 3.** Sea  $w(z) \neq 0$ , holomorfa en un entorno de  $z = 0$  y tal que  $w(0) = 0$ . Entonces,  $w(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots$ ,  $c_m \neq 0$ ,  $m \geq 1$ , en un entorno de  $0$ . Además, dado  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño existe  $\eta > 0$ ,  $\eta = \eta(\epsilon)$ , tal que para todo  $\mu \in B_\eta(0) \setminus \{0\}$  hay exactamente  $m$  puntos distintos de  $B_\epsilon(0)$ ,  $\{z_1, \dots, z_m\}$ , tales que  $w(z_i) = \mu$ .

**Demostración.**

Sea  $\epsilon$  tal que  $w(z) \neq 0$  en  $B_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ . Como  $w'(z) \neq 0$  podemos suponer que allí también  $w'(z) \neq 0$ . Sea  $\eta := \inf \{|w(z)| : z \in \Sigma_\epsilon(0)\} > 0$ , y  $w_0 \in B_\eta(0) \setminus \{0\}$ . Entonces, la función  $F(z) = w(z) - w_0$  verifica en  $\Sigma_\epsilon(0)$ :

$$|F(z) - w(z)| = |w_0| < \eta \leq |w(z)|.$$

Entonces, por el teorema de Rouché,  $F(z)$  tiene en  $B_\epsilon(0)$  tantos ceros como  $w(z)$ . Como en esos puntos,

$$\frac{d}{dz}(w(z) - w_0) = w'(z) \neq 0,$$

tales ceros son simples. Es decir,  $w(z)$  toma el valor  $w_0$  en exactamente  $m$  puntos distintos de  $B_\epsilon(0)$ , QED.

**Definición 4.** Sea  $G$  una región plana. Se dice que la aplicación  $w : G \rightarrow C$  es una transformación conforme si  $w$  es holomorfa e inyectiva.

Del teorema de Brouwer se deduce que  $w(G)$  es una región. Y del teorema 3 que  $w'(z) \neq 0$  en todo  $z \in G$ . Luego,  $w^{-1}(t)$  es una función holomorfa e inyectiva tal que  $(w^{-1})'(t) \neq 0$  para todo  $t \in w(G)$ .

## VIII.2.

Haremos uso frecuente de las transformaciones lineales y homográficas que constituyen grupos de transformaciones conformes de la forma:  $w(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ , y  $w(z) = (az + b)/(cz + d)$ ,  $ad - bc \neq 0$ , respectivamente.

Si  $w = az + b$  y  $a \neq 1$ , es decir, si la transformación lineal no es simplemente una traslación, entonces existe un punto fijo  $z_0$ , y podemos escribir:

$$(5) \quad w - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0), \quad k > 0,$$

o sea,  $z \rightarrow w$  resulta de la composición de una rotación de centro  $z_0$ , una dilatación de centro 0 y una traslación, que por otra parte son todas definibles por medio de transformaciones lineales. Una transformación homográfica viene dada por una aplicación meromorfa con un solo polo, y simple, en  $z_0 = a/c$ . La aplicación

$$(6) \quad w - a = r^2/(z - a),$$

define una inversión de centro  $a$  y radio  $r$ . Si  $c \neq 0$ , o sea, si la transformación no es lineal, puede escribirse como

$$(7) \quad w = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c};$$

es decir, toda transformación homográfica es el producto de un número finito de transformaciones lineales y una inversión. Algunas propiedades de las transformaciones homográficas se citan a continuación en el

**Teorema 4.**

(i) las transformaciones homográficas transforman circunferencias en circunferencias (propias o impropias),

(ii) toda transformación conforme del plano -o del plano menos un punto- en el plano, es una transformación homográfica; las primeras son necesariamente lineales,

(iii) si  $C_1$  y  $C_2$  son circunferencias, propias o impropias, y  $z_i \in C_i$ ,  $i = 1, 2$ , entonces existe una transformación homográfica que lleva  $z_1$  en  $z_2$ , y  $C_1$  sobre  $C_2$ ,

(iv) la transformación homográfica llamada **factor de Blaschke**:

$$(8) \quad \underline{B}(z) = \frac{R^2}{|p|} \frac{z - p}{z - R^2/\bar{p}} = \frac{R^2|p|}{p} \frac{z - p}{\bar{p}z - R^2},$$

donde  $|p| < R$ , tiene valor absoluto constante en  $\Sigma_R(0)$ :  $\underline{B}(z) = R$ , y se anula en  $p$ . Luego,  $\underline{B}$  lleva  $p$  en 0,  $B_R(0)$  sobre  $B_R(0)$  y  $\Sigma_R(0)$  sobre  $\Sigma_R(0)$ .

Vale también el siguiente

**Teorema 5.**

(i) Si  $w(z)$  es una transformación conforme de  $B_R(a)$  sobre sí mismo tal que  $w(a) = a$  entonces es una rotación de centro  $a$ .

(ii) Toda transformación conforme de  $B_r(0)$  sobre sí mismo es una transformación homográfica.

Para demostrarlo recurriremos al así llamado **Lema de Schwarz**:

**Teorema 6.** Sea  $w(z)$  una función holomorfa definida en  $B_R(0)$  tal que allí

$$|w(z)| \leq M < \infty \text{ y } w(0) = 0.$$

Entonces

$$(9) \quad \text{en } z = 0, |w'(0)| \leq M/R,$$

$$(10) \quad \text{si } z \in B_R(0) \setminus \{0\}, |w(z)| \leq M|z|/R.$$

Si se da la igualdad en alguna de las dos desigualdades precedentes entonces  $w(z) = e^{i\alpha} Mz/R$ .

**Demostración.**

Sea  $F(z) := w(z)/z$ .  $F(z)$  es holomorfa en  $B_R(0)$  pues  $w(0) = 0$ . Para  $0 < r < R$ ,  $M(r) := \sup\{|F(z)| : |z| = r\}$ . Entonces  $|F(z)| \leq M(r) \leq M/r$  si  $|z| \leq r$ .

En consecuencia

$$(11) \quad |F(z)| \leq M/R, \text{ para todo } z \in B_R(0).$$

El principio de máximo da lugar a dos alternativas:  $|F(z)| < M/R$  en  $B_R(0)$ , o bien,  $|F(z)| \equiv M/R$ . En el primer caso es  $|w(z)| < M|z|/R$  en  $B_R \setminus \{0\}$ . Además como  $w'(z) = zF'(z) + F(z)$  resulta  $|w'(0)| = |F(0)| < M/R$ . En el segundo caso es  $F(z) = e^{i\theta} M/R$ , o sea,  $w(z) = e^{i\theta} Mz/R$  y  $|w'(0)| = M/R$ , QED.

**Demostración del Teorema 5.**

(i) Se puede suponer  $a = 0$  y en tal caso se verifica la acotación  $|w(z)| \leq R$  sobre  $B_R(0)$ . Además,  $w^{-1}$  está en las mismas condiciones. Luego,  $|w(z)| \leq R|z|/R = |w^{-1}(w(z))| \leq |w(z)|$ . Entonces,  $|w(z)| = |z|$  y por tanto,  $w(z) = e^{i\theta} z$ .

(ii) Si  $w(0) = 0$ , por la proposición anterior resulta  $w$  una rotación. Sea  $w(0) = z_0 \neq 0$ . Consideremos la composición  $H = \underline{B} \circ w$ , de  $w$  con el producto de Blaschke  $\underline{B}$  que lleva  $B_R(0)$  sobre sí mismo y  $z_0$  en 0. Nuevamente por la proposición anterior  $H$  es una rotación y entonces  $w = \underline{B}^{-1} \circ H$  es homográfica, QED.

### VIII.3.

Necesitaremos también en la demostración del teorema de Riemann poder definir una rama de  $\sqrt{z}$  sobre cierta región. Para esto veamos el

**Teorema 7.** Sea  $G$  una región simplemente conexa,

(i) para toda función holomorfa  $W$  que no se anule en  $G$  existe una rama  $F$  del logaritmo de  $W$ .

(ii)  $e^{\alpha F}$  es una rama de  $W^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(iii) Si  $0 \notin G$  puede definirse en  $G$  una rama de  $\ln z$ .

**Demostración.**

(i) La función

$$(12) \quad F_1(z) := \int_{z_0}^z \frac{W'(t)}{W(t)} dt, \quad z_0, z \in G,$$

está bien definida en  $G$  y es holomorfa; por lo tanto también lo será la función  $\Phi(z) := W(z)/e^{F_1(z)}$  que verifica  $\Phi' = (W' - WF_1')/exp F_1 = 0$ . Entonces,  $\Phi(z) \equiv C$ , constante no nula. Luego,

$$(13) \quad F(z) := F_1(z) + \ln C$$

es holomorfa en  $G$ , y  $exp F = C \cdot exp F_1 = W$ .

(ii) y (iii) siguen fácilmente, QED.

Veamos una aplicación del último teorema.

**Teorema 8.** *Sea  $G$  abierto simplemente conexo,  $G \subsetneq B_1(0)$ ,  $0 \in G$ . Entonces existe una función  $F$  holomorfa en  $G$ , inyectiva y con  $|F(z)| < 1$  para todo  $z \in G$ , tal que  $F(0) = 0$ ,  $|F(z)| > |z|$  si  $z \neq 0$  y  $|F'(0)| > 1$ .*

**Demostración.**

Por hipótesis existe  $a \in B_1(0) \setminus G$ . Llamemos  $F_1$  a una transformación homográfica que aplique  $B_1(0)$  sobre  $B_1(0)$  y lleve  $a$  en  $0$ . O sea,  $0 \in F_1(G)$ . Como imágenes homeomorfas de dominios simplemente conexos también lo son,  $F_1(G)$  es simplemente conexo. Por lo tanto puede definirse una rama de  $\sqrt{z}$  sobre  $F_1(G)$  a la que llamaremos  $F_2(z)$ . Sea ahora  $F_3 : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$  una aplicación (biyectiva) homográfica que aplica  $F_2(F_1(0))$  en  $0$ . Llamaremos  $F := F_3 \circ F_2 \circ F_1$ .  $F : G \rightarrow F(G)$  es holomorfa y biyectiva, entonces  $F(G)$  es un abierto (simplemente conexo) contenido en  $B_1(0)$ . Sea

$$\Phi := F^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1} \circ F_3^{-1} : F(G) \rightarrow G.$$

$\Phi$  es holomorfa y admite una extensión  $\tilde{\Phi}$  a todo el disco  $B_1(0) : \tilde{\Phi}(w) := F_1^{-1}([F_3^{-1}(w)]^2)$ ,  $|w| < 1$ .  $\tilde{\Phi}$  no puede ser una rotación porque si lo fuese tendríamos:

$$z^2 = (F_1 \circ \tilde{\Phi} \circ F_3)(z), \quad |z| < 1.$$

Es decir,  $z \rightarrow z^2$  sería una composición de funciones homográficas, y por lo tanto homográfica, y conforme, lo que no es cierto en  $z = 0$ . Entonces,  $\tilde{\Phi}$  satisface las hipótesis del Lema de Schwarz y no es una rotación, por lo que se verifica que

$$|\tilde{\Phi}(z)| < |z| \quad \text{si } |z| \neq 0, \quad |\tilde{\Phi}'(0)| < 1.$$

En consecuencia,

$$|z| = |\tilde{\Phi}(F(z))| < |F(z)| \quad \text{si } |z| \neq 0, \quad \text{y } |F'(0)| = \frac{1}{|\tilde{\Phi}'(0)|} > 1, \quad QED.$$

## VIII.4.

Para demostrar el teorema de Riemann es conveniente reducir el problema a regiones acotadas, lo cual se logra con el siguiente

**Lema 1.** Si  $G$  es una región simplemente conexa del plano y  $\mathcal{R}^2 \setminus G \neq \emptyset$  entonces  $G$  se puede transformar conformemente en una región (simplemente conexa) contenida en  $B_1(0)$ .

**Demostración.**

Si existen  $b$  y  $R$  tales que  $\mathcal{R}^2 \setminus G \supset S_R(b)$ , la demostración es sencilla puesto que la función

$$w(z) = \frac{R}{z - b}$$

aplica  $G$  en una subregión de  $B_1(0)$ . En el caso general, sea  $b \in \mathcal{R}^2 \setminus G$ , y  $f(z) := z - b$ . Como  $f$  no se anula en  $G$  hay allí una rama de  $\ln f$  a la que notamos  $L(z)$ . Esta función define una transformación conforme de  $G$ . Si definimos  $H := L(G)$  y consideramos la rama  $L^*(z) := L(z) + 2\pi i$  y su correspondiente  $H^* := L^*(G)$ , se tiene  $H \cap H^* = \emptyset$ . En efecto, si existiera  $u$  perteneciente a ambas regiones sería  $u = L(z_0) = L(z_1) + 2\pi i$ , luego  $z_0 = z_1$ , y por tanto  $L(z_0) = L(z_0) + 2\pi i$ , contradicción. Entonces, el complemento de  $H$  contiene un disco  $S_r(c)$ , y el lema sigue inmediatamente, QED.

**Lema 2.** Sea  $G$  una región simplemente conexa tal que  $G \subset B_1(0)$ ,  $a \in G$ . Entonces existe una transformación conforme  $W$  de  $G$  sobre  $B_1(0)$  tal que  $W(a) = 0$ .

**Demostración.**

Utilizando un factor de Blaschke (cf.T.4) podemos reducir el caso a aquél donde  $a = 0$ . Sea  $\mathcal{F} := \{F : F \text{ holomorfa, inyectiva, de dominio } G, F(0) = 0, F(G) \subset B_1(0)\}$ . Sea  $m := \sup \{|F'(0)| : F \in \mathcal{F}\}$ .  $m \geq 1$  pues la identidad pertenece a  $\mathcal{F}$ . Sea  $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |F'_n(0)| = m$ . Como  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada, por el teorema de Stieltjes-Osgood se sabe que existe una subsucesión  $\{F_{n_j}\}$  casi uniformemente convergente en  $G$  a una función holomorfa  $W$  la cual es inyectiva (T.2) y tal que  $W(0) = 0$  y  $|W(z)| \leq 1$  si  $z \in G$ . Como  $W(G)$  debe ser un abierto en realidad tenemos  $|W(z)| < 1$  si  $z \in G$ . Por otra parte  $F'_{n_j} \rightrightarrows W'$ , y por tanto,  $m = |W'(0)|$ . Es decir,  $W \in \mathcal{F}$  y  $|W'(0)| \geq |F'(0)|$  para toda  $F \in \mathcal{F}$ .

Si fuera  $B_1(0) \setminus W(G) \neq \emptyset$  existiría una función  $\Phi$  inyectiva y holomorfa sobre  $W(G)$  tal que  $|\Phi(z)| < 1$  allí y  $|\Phi'(0)| > 1$  (T.8). Luego, la función  $\Phi \circ W : G \rightarrow B_1(0)$  pertenecería a  $\mathcal{F}$ . Sin embargo

$$|(\Phi \circ W)'(0)| = |\Phi'(0)| \cdot |W'(0)| > |W'(0)|,$$

lo cual es imposible. En consecuencia,  $W(G) = B_1(0)$ , QED.

## VIII.4.

Para demostrar el teorema de Riemann es conveniente reducir el problema a regiones acotadas, lo cual se logra con el siguiente

**Lema 1.** Si  $G$  es una región simplemente conexa del plano y  $\mathcal{R}^2 \setminus G \neq \emptyset$  entonces  $G$  se puede transformar conformemente en una región (simplemente conexa) contenida en  $B_1(0)$ .

**Demostración.**

Si existen  $b$  y  $R$  tales que  $\mathcal{R}^2 \setminus G \supset S_R(b)$ , la demostración es sencilla puesto que la función

$$w(z) = \frac{R}{z - b}$$

aplica  $G$  en una subregión de  $B_1(0)$ . En el caso general, sea  $b \in \mathcal{R}^2 \setminus G$ , y  $f(z) := z - b$ . Como  $f$  no se anula en  $G$  hay allí una rama de  $\ln f$  a la que notamos  $L(z)$ . Esta función define una transformación conforme de  $G$ . Si definimos  $H := L(G)$  y consideramos la rama  $L^*(z) := L(z) + 2\pi i$  y su correspondiente  $H^* := L^*(G)$ , se tiene  $H \cap H^* = \emptyset$ . En efecto, si existiera  $u$  perteneciente a ambas regiones sería  $u = L(z_0) = L(z_1) + 2\pi i$ , luego  $z_0 = z_1$ , y por tanto  $L(z_0) = L(z_0) + 2\pi i$ , contradicción. Entonces, el complemento de  $H$  contiene un disco  $S_r(c)$ , y el lema sigue inmediatamente, QED.

**Lema 2.** Sea  $G$  una región simplemente conexa tal que  $G \subset B_1(0)$ ,  $a \in G$ . Entonces existe una transformación conforme  $W$  de  $G$  sobre  $B_1(0)$  tal que  $W(a) = 0$ .

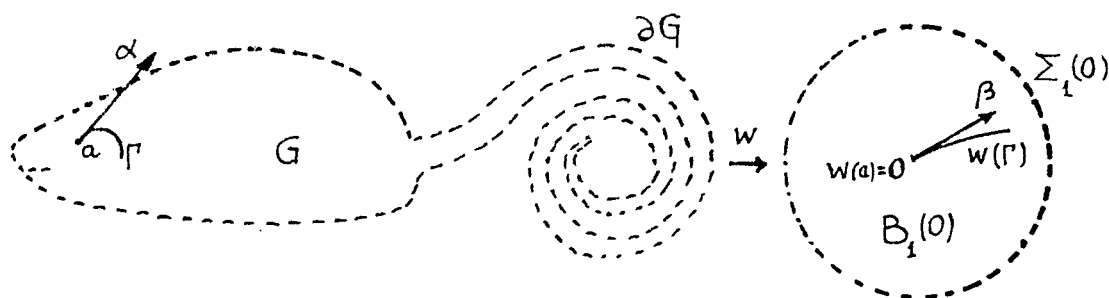
**Demostración.**

Utilizando un factor de Blaschke (cf.T.4) podemos reducir el caso a aquél donde  $a = 0$ . Sea  $\mathcal{F} := \{F : F \text{ holomorfa, inyectiva, de dominio } G, F(0) = 0, F(G) \subset B_1(0)\}$ . Sea  $m := \sup \{|F'(0)| : F \in \mathcal{F}\}$ .  $m \geq 1$  pues la identidad pertenece a  $\mathcal{F}$ . Sea  $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |F'_n(0)| = m$ . Como  $\mathcal{F}$  está uniformemente acotada, por el teorema de Stieltjes-Osgood se sabe que existe una subsucesión  $\{F_{n_j}\}$  casi uniformemente convergente en  $G$  a una función holomorfa  $W$  la cual es inyectiva (T.2) y tal que  $W(0) = 0$  y  $|W(z)| \leq 1$  si  $z \in G$ . Como  $W(G)$  debe ser un abierto en realidad tenemos  $|W(z)| < 1$  si  $z \in G$ . Por otra parte  $F'_{n_j} \rightrightarrows W'$ , y por tanto,  $m = |W'(0)|$ . Es decir,  $W \in \mathcal{F}$  y  $|W'(0)| \geq |F'(0)|$  para toda  $F \in \mathcal{F}$ .

Si fuera  $B_1(0) \setminus W(G) \neq \emptyset$  existiría una función  $\Phi$  inyectiva y holomorfa sobre  $W(G)$  tal que  $|\Phi(z)| < 1$  allí y  $|\Phi'(0)| > 1$  (T.8). Luego, la función  $\Phi \circ W : G \rightarrow B_1(0)$  pertenecería a  $\mathcal{F}$ . Sin embargo

$$|(\Phi \circ W)'(0)| = |\Phi'(0)| \cdot |W'(0)| > |W'(0)|,$$

lo cual es imposible. En consecuencia,  $W(G) = B_1(0)$ , QED.



**Teorema 9 (Riemann).** Sea  $G$  una región simplemente conexa, plana, tal que  $\mathcal{R}^2 \setminus G \neq \emptyset$ . Sea  $a \in G$ . Entonces, existe una única transformación conforme de  $G$  sobre  $B_1(0)$ ,  $F(z)$ , tal que lleva  $a$  en  $0$  y una dirección arbitraria  $\alpha$  en  $a$  sobre una dirección dada  $\beta$  en  $0$ .

**Demostración.**

Por lo ya dicho sabemos que existe una transformación que lleva conformemente  $G$  sobre  $B_1(0)$  y  $a$  en  $0$ . Componiendo con una rotación adecuada, podemos lograr que una dirección  $\alpha$  en  $a$  se transforme en una  $\beta$  dada. Sean  $W$  y  $\tilde{W}$  dos transformaciones con estas propiedades. Entonces

$$F(z) := (W \circ \tilde{W}^{-1})(z) : B_1(0) \rightarrow B_1(0),$$

es sobre y deja fijos el origen y la dirección  $\beta$ . Por el teorema 5,  $F$  define una rotación y necesariamente  $F(z) = z$ . Luego,  $W = \tilde{W}$ , QED.

### VIII.5.

**Definición 5.** Un arco abierto de Jordan  $\Gamma$  con extremos  $p, q$  distintos se dice un corte de una región acotada  $G$  si  $\Gamma \subset G$  y  $p, q \in \partial G$ .

Las regiones acotadas simplemente conexas tienen varias caracterizaciones. Cualquiera puede adoptarse como definición. Tomemos por ejemplo la

**Definición 6.** Una región acotada  $G$  se dice simplemente conexa si todo corte la separa en exactamente dos regiones,  $G_1$  y  $G_2$ .

Cada una de las regiones  $G_i$  es también simplemente conexa.

**Definición 7.** Si  $G$  es una región acotada simplemente conexa, una sucesión de cortes  $\{q_n\}$  de  $G$  se llama una sucesión fundamental de cortes si  $\bar{q}_n \cap \bar{q}_m = \emptyset$  para  $m \neq n$ ,  $q_n$  separa a  $q_{n+1}$  de  $q_{n-1}$  en  $G$  y la sucesión de arcos  $q_n$  converge a un punto del contorno de  $G$ . (SFC:=sucesión fundamental de cortes).

De la definición se desprende que a la sucesión  $\{q_n\}$  le está asociada una sucesión  $\{D_n\}$  de regiones simplemente conexas tal que  $G \supset D_n \supset D_{n+1}$ . Sea  $\Gamma_n$  el conjunto de puntos de  $\partial D_n$  no en  $G$ . Entonces  $\Gamma_n = \bar{\Gamma}_n \supset \Gamma_{n+1}$ . Además,  $\bigcap D_n = \emptyset$ . En efecto, sean  $x \in \bigcap D_n$  y  $j$  un arco en  $G$  que une  $x$  con un punto de  $q_1$ ; si  $x_n \in q_n \cap j$ ,  $\{x_n\}$  no converge a un punto de  $\partial G$ .



**Definición 8.** Dos sucesiones fundamentales de cortes,  $\{q_n\}$  y  $\{q'_n\}$ , de  $G$ , se dicen equivalentes si  $D_n \supset \{q'_m : m \geq m_0(n)\}$  y  $D'_n \supset \{q_m : m \geq m_1(n)\}$ .

**Definición 9.** De un subconjunto compacto  $\pi \subset \partial G$  se dirá que es un elemento de contorno si existe una sucesión fundamental de cortes  $\{q_n\}$  tal que  $\pi = \cap \partial D_n$ .

Entonces:  $\pi = \cap \overline{\Gamma_n} = \cap \overline{D_n}$ . Además,  $\lim q_n \in \pi$ .

**Definición 10.**  $p \in \pi$  se dice principal en el elemento de contorno  $\pi$  respecto de una SFC que define al elemento si es límite de una SFC equivalente a la dada. En caso contrario se lo llama secundario o accesorio respecto de esa SFC.

Dos elementos de contorno no son necesariamente disjuntos, y un punto principal respecto de una SFC no es necesariamente principal respecto de otra no equivalente. Véase la siguiente fig.1, y luego la fig.2 al final del capítulo.

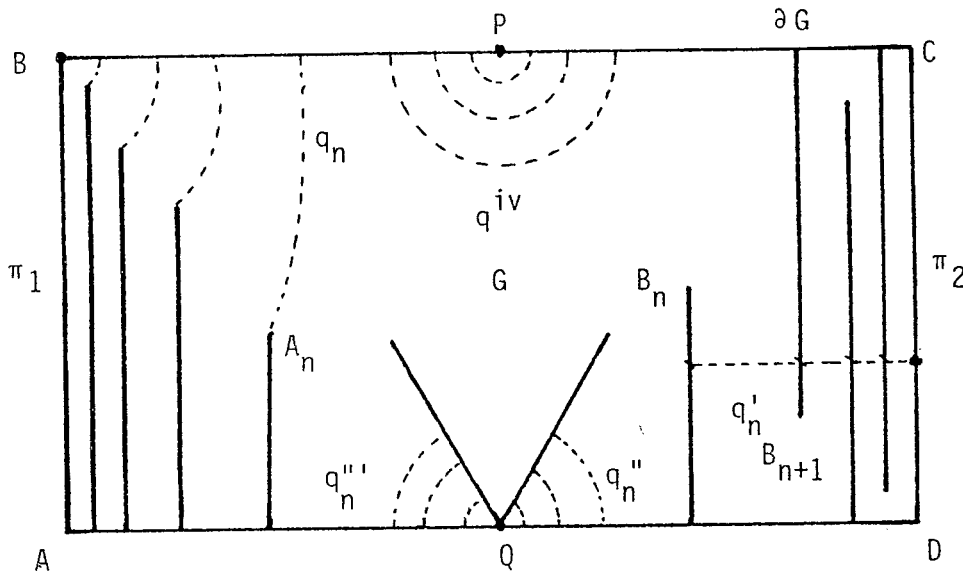


Fig.1

En la figura 1 es  $A = (0,0)$ ,  $B = (0,1)$ ,  $C = (k,1)$ ,  $D = (k,0)$ ,  $A_n = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ ,  $B_n = (k - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ ,  $B_{n+1} = (k - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ .  $\pi_1, \pi_2$  y  $\pi_3 = \{P\}$  son elementos de contorno,  $\pi_1 = \overline{AB}$ ,  $\pi_2 = \overline{CD}$ .  $B$  es el único punto principal de  $\pi_1$ ; todo punto de  $\pi_2$  es principal.  $\pi_4 = \{Q\}$  es un elemento de contorno que puede ser definido por sucesiones fundamentales de cortes no equivalentes. Dejamos al lector la demostración de la (cf. Cap.II):

**Proposición 1.** Supongamos que es  $J$  el contorno de la región  $G$ . Si  $J$  es una curva de Jordan entonces todo punto  $p$  de  $J$  es un elemento de contorno y recíprocamente.

**Definición 11.** Sean  $\pi$  un elemento de contorno y  $\{w_j\}$  una sucesión de puntos en  $G$ . Si existe una sucesión de cortes que define a  $\pi$ ,  $\{q_n\}$ , tal que para todo  $n$ ,  $D_n \supset \{w_j : j \geq j_0(n)\}$ , entonces diremos que  $w_j$  converge a  $\pi$ .

Si  $\{q'_n\}$  es equivalente a  $\{q_n\}$  entonces también para todo  $n$ ,  $D'_n \supset \{w_j : j \geq j'_0(n)\}$ .

**Proposición 2.** Si  $G$  tiene por contorno una curva de Jordan entonces  $w_n \rightarrow \pi = \{P\}$  si y sólo si  $w_n \rightarrow P$  en el sentido ordinario.

## VIII.6.

Algunos de los teoremas que se enuncian a continuación son utilizados en la demostración del T. de Carathéodory.

**Teorema 10 (Poisson).** Si  $f(\rho e^{i\theta})$  es continua en  $\theta$ ,  $\rho$  constante  $> 0$ , entonces la función

$$(14) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta, \quad z = re^{i\phi}, \quad r < \rho,$$

es armónica en  $B_\rho(0)$  y admite una extensión continua a  $S_\rho(0)$  que verifica:  $u|_{\Sigma_\rho(0)} = f$ .

Dado un disco  $B_r(a)$  se llama **región de Stolz** en un punto  $b \in \Sigma_r(a)$  a un cono con vértice en  $b$ , abierto, contenido en  $B_r(0)$ , simétrico respecto a la normal a  $\Sigma_r$  en  $b$ , y de ángulo menor que  $\pi/2$ .

**Teorema 11.** Si  $u(z)$  es una función armónica y acotada en  $B_1(0)$  entonces para casi todo punto de  $\Sigma_1(0)$  existe  $u(e^{i\theta}) := \lim u(z)$  siempre que  $z \rightarrow e^{i\theta}$  dentro de una región de Stolz en  $e^{i\theta}$ . Vale entonces, para  $|z| < 1$ ,

$$(15) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta, \quad z = re^{i\phi}.$$

Si además  $|u(e^{i\theta})| < m$  para  $e^{i\theta}$  en un entorno de  $z = 1$  entonces  $\overline{\lim} |u(z)| \leq m$  para  $z \rightarrow 1$ ,  $z \in B_1(0)$ . En particular, si  $\lim_{e^{i\theta} \rightarrow 1} u(e^{i\theta}) = a$  entonces  $\lim_{\substack{z \in B_1(0) \\ z \rightarrow 1}} u(z) = a$ .

Una aplicación inmediata del T.11 asegura que si  $G(z)$  es holomorfa y acotada en  $B_1(0)$  entonces, para casi todo  $\theta$ ,  $G(e^{i\theta})$  está bien definida.  $g(\theta) := G(e^{i\theta})$  es acotada y medible.

Es bien conocido el siguiente teorema:

**Teorema 12.** Si  $G(z)$  es holomorfa en  $B_1(0)$  y se anula en un conjunto infinito de puntos con un punto de acumulación en  $B_1(0)$  entonces  $G(z) \equiv 0$ .

Vale también el siguiente resultado debido a F. y M. Riesz:

**Teorema 13.** Si  $G(z)$  es holomorfa y acotada en  $B_1(0)$  y si  $G(e^{i\theta}) = 0$  en un conjunto de medida positiva del contorno entonces  $G(z) \equiv 0$ .

Este último teorema, que no probaremos aquí, generaliza al precedente en cierto sentido y extiende al siguiente resultado que permite conjeturarlo.

**Lema 3.** Sea  $G(z)$  holomorfa en  $B_1(0)$  y acotada. Si en un arco del borde:  $0 \leq \theta \leq 2\pi/n$ , se verifica:  $G(z) \rightarrow 0$  para  $z \in B_1(0)$  tendiendo a un punto del arco, entonces  $G(z) \equiv 0$ .

En efecto, sea  $H(z) := G(z) \cdot G(e^{2\pi i/n} z) \dots G(e^{2\pi i(n-1)/n} z)$ . Esta función tiene una extensión continua a  $S_1(0)$ , nula en el borde. En virtud del principio del máximo,  $H \equiv 0$ . En consecuencia,  $G \equiv 0$ , QED.

Este resultado admite también la siguiente generalización:

**Teorema 14.** Sea  $G(z)$  holomorfa y acotada en  $B_1(0)$  y sea  $\{\gamma_n\}$  una sucesión de arcos de Jordan,  $\gamma_n \subset B_1(0)$ , con extremos  $p_n, q_n$ ,  $p_n = r_n e^{i\alpha}$ ,  $q_n = R_n e^{i(\alpha+\epsilon)}$ ,  $\epsilon > 0$ , tal que  $\gamma_n$  converge uniformemente al arco  $\sigma$  del contorno:  $\sigma = \{e^{i\theta} : \alpha \leq \theta \leq \alpha + \epsilon\}$ . Luego, si  $M_n = \max_{z \in \gamma_n} |G(z)| \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$  entonces  $G(z) \equiv 0$ .

**Teorema 15 (Lindelöff).** Sea  $D$  un recinto de Jordan de contorno  $J$ . Sea  $0 \in J$  y  $G(z)$  una función holomorfa en  $D$  que pueda extenderse continuamente a  $J \setminus \{0\}$ .

(i) Si  $G(z)$  converge al valor  $a$  cuando  $z \rightarrow 0$  sobre  $J \setminus \{0\}$  entonces  $\lim G(z) = a$  para  $z \rightarrow 0$ ,  $z \in D$ .

(ii) Si  $G(z) \rightarrow a$  para  $z \rightarrow 0$  de un lado de  $z = 0$  sobre  $J \setminus \{0\}$  y  $G(z) \rightarrow b$  por el otro lado entonces  $a = b$ .

Obsérvese que este último resultado es falso si  $G$  es sólo armónica.

### VIII.7.

Refinaremos ahora el concepto de convergencia a un elemento de contorno. Sea  $\pi$  un tal elemento y  $\{q_n\}$  una SFC que lo define. Pongamos  $p = (\pi, \{q_n\})$  y  $\mathcal{P}$  sea la familia de los  $p$  así definidos con la siguiente relación de equivalencia.

**Definición 12.**  $p_1 = p_2$  si  $\pi_1 = \pi_2$  y  $\{q_{1,n}\}$  es equivalente a  $\{q_{2,n}\}$ .

En la Fig.1,  $p'_1 = (Q, \{q''_n\}) \neq p'_2 = (Q, \{q'''_n\})$ .

**Definición 13.** Diremos que  $\{w_n\} \subset D$  converge a  $p = (\pi, \{q_n\})$ , o que  $w_n \rightarrow \pi$  según  $\{q_n\}$ , si  $D_n \supset \{w_j : j \geq j_0(n)\}$  para todo  $n$ .

Obsérvese que si  $p_1 = p_2$  entonces  $w_n \rightarrow p_1$  si y sólo si  $w_n \rightarrow p_2$ , (cf. def. 7, 8 y 11).

**Proposición 3.** Si  $J$  es una curva de Jordan y  $\pi = \{P\}$  entonces  $w_n \rightarrow P$  si y sólo si  $w_n \rightarrow (\pi, \{q_n\})$  cualquiera sea  $\{q_n\}$  que defina a  $\pi$ .

En efecto, en esta situación todas las SFC que definen a  $\pi$  son equivalentes, (cf. prop. 1 y 2).

**Teorema 16 (Carathéodory).** Si  $f(z)$  es una transformación conforme de  $B_1(0)$  sobre una región acotada simplemente conexa  $D$  entonces  $f$  puede extenderse a  $S_1(0)$  de manera que a cada  $z_0 \in \Sigma_1(0)$  le corresponda un elemento  $p \in \mathcal{P}$ . Esa correspondencia,  $\eta$ , define una biyección y es tal que una sucesión  $\{z_n\} \subset B_1(0)$  converge a  $z_0 \in \Sigma_1(0)$  si y sólo si  $w_n = f(z_n)$  converge a  $\pi$  según  $\{q_n\}$ , donde  $\eta\{z_0\} = p = (\pi, \{q_n\})$ . Además

$$\partial D = \cup \{\pi : (\pi, \cdot) \in \mathcal{P}\}.$$

En relación con este último teorema véase la Fig.2. Con las mismas hipótesis del T.16 tenemos el

**Lema 4.** Sean  $r_1 \in (0, 1]$ ,  $r_n \leq r_{n-1}/2$ ,  $\Delta_n = \{z \in B_1(0) : r_{n+1} < |z - 1| < r_n\} \supset C(\rho_n) = \text{arco de circunferencia de radio } \rho_n \text{ con extremos en } \Sigma_1(0)$ , donde  $r_{n+1} < \rho_n < r_n$ . Existe una subsucesión  $\{\rho_{n_i}\}$  tal que la sucesión fundamental de cortes en  $B_1(0)$ ,  $\{C(\rho_{n_i})\}$ , tiene por imagen a  $\{\gamma(\rho_{n_i}) := f(C(\rho_{n_i}))\}$ , la cual es una sucesión fundamental de cortes en  $D$ .

**Demostración.**

El área de  $f(\Delta_n)$  y la longitud de  $\gamma(\rho)$ , donde  $\gamma(\rho) = f(Q(\rho))$ ,  $Q(\rho) = \{z \in \Delta_n : |z - 1| = \rho\}$ ,  $\rho \in (r_{n+1}, r_n)$ , pueden calcularse con las siguientes fórmulas:

$$(16) \quad |f(\Delta_n)| = \iint_{\Delta_n} |f'(z)|^2 r dr d\theta; \quad |\gamma(\rho)| = \int_{Q(\rho)} |f'(z)| r d\theta,$$

donde  $z = 1 + re^{i\theta}$ . Entonces,  $|\gamma(\rho)|$  es semicontinua inferiormente y positiva.

Además,

$$\iint_{\Delta_n} |f'(z)| r dr d\theta \leq |f(\Delta_n)|^{1/2} \left( \iint_{\Delta_n} r dr d\theta \right)^{1/2} \leq r_n \sqrt{\pi} |f(\Delta_n)|^{1/2}.$$

Sea  $M$  el ínfimo esencial de  $|\gamma(\rho)|$  en  $(r_{n+1}, r_n)$  y  $m$  el ínfimo de  $|\gamma(\rho)|$  en  $[r_{n+1}, r_n]$ . Entonces,  $M \geq m > 0$  y vale:

$$0 < \int_{r_{n+1}}^{r_n} M dr \leq \int_{r_{n+1}}^{r_n} d\rho \int_{Q(\rho)} |f'(z)| r d\theta \leq \iint_{\Delta_n} |f'(z)| r dr d\theta \leq r_n \sqrt{\pi} |f(\Delta_n)|^{1/2}.$$

Luego, existe  $t_n$  tal que  $t_n \in (r_{n+1}, r_n)$  y

$$(17) \quad \begin{aligned} & \text{longitud de } f(Q(t_n)) = |f(Q(t_n))| = \\ & = \int_{Q(t_n)} |f'(z)| r d\theta < 3\sqrt{\pi} |f(\Delta_n)|^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

pues los  $\Delta_n$  son disjuntos dos a dos y  $D$  es acotado.

Más aún, el conjunto de los  $t_n$  que satisfacen (17) tiene **medida positiva**.

Sean  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  los extremos de  $f(Q(t_n))$  en  $\partial D$ . Definimos  $\rho_1 = t_1$  con  $t_1$  satisfaciendo (17). Puede ocurrir que al elegir un  $t_2$  tengamos  $\{\alpha_2, \beta_2\} \cap \{\alpha_1, \beta_1\} = \emptyset$  y entonces  $\rho_2 := t_2$ .

En caso contrario, sea  $Q(\rho)$  un arco en  $\Delta_2$  de extremos  $A$  y  $B$  tal que  $f(Q)$  tenga algún extremo igual a  $\alpha_1$  o a  $\beta_1$ . El conjunto de puntos  $A$  en  $\Sigma_1(0)$  con esta propiedad es de medida cero pues  $f$  no es constante (cf. T.13). Idem para  $B$ . Luego, existe  $\rho_2 \in (r_3, r_2)$  tal que  $\gamma(\rho_2) = f(Q(\rho_2))$ ,  $|\gamma(\rho_2)| < 3\sqrt{\pi} |f(\Delta_2)|^{1/2}$  y tal que los extremos  $\alpha_2, \beta_2$  de  $\gamma(\rho_2)$  son distintos de  $\alpha_1$  y de  $\beta_1$ . Análogamente hallamos  $\rho_3 \in (r_4, r_3)$  tal que  $Q(\rho_3)$  tiene por imagen a  $\gamma(\rho_3)$  cuyos extremos  $\alpha_3, \beta_3$  no pertenecen a  $\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2\}$ , etc..

Si en el paso  $n$ ,  $\alpha_n = \beta_n$ , entonces un pequeño giro de  $Q(\rho_n)$  con centro en  $\alpha_n$  da lugar al arco  $C(\rho_n)$  tal que  $f(C(\rho_n))$  tiene extremos distintos y satisface (17). Esto último se verifica aplicando el argumento ya utilizado. Reemplazamos entonces  $Q(\rho_n)$  por  $C(\rho_n)$ . Si  $\alpha_n \neq \beta_n$ , definimos  $C(\rho_n) = Q(\rho_n)$ . Como  $|f(C(\rho_n))| \rightarrow 0$ , existe una subsucesión  $\{\rho_{n_i}\}$  tal que  $\gamma(\rho_{n_i}) = f(C(\rho_{n_i}))$  converge a un punto, necesariamente en  $\partial D$ . Sigue ahora fácilmente que  $\{\gamma(\rho_{n_i})\}$  es una sucesión fundamental de cortes, QED.

**Demostración del T.16.**

Sean  $p = (\pi, \{q_n\}) \in \mathcal{P}$ ,  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  los extremos de  $q_n$ ,  $w_0 = \lim q_n$ . Sea  $\{w_n : n = 1, 2, \dots\}$  una sucesión de puntos en  $D$  con las siguientes propiedades:

$$(c) \quad w_n \rightarrow p, \quad w_n \rightarrow w \in \pi, \quad f^{-1}(w_n) \rightarrow z_0 \in \Sigma_1(0).$$

Dados  $p$  y  $w \in \pi$  siempre existen sucesiones (c) asociadas a ellos. Definamos  $A_n := f^{-1}(q_n)$ . Los extremos  $a_n$  y  $b_n$  de  $A_n$  son los puntos de  $\Sigma_1$  determinados por  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  respectivamente.

Para ver que  $A_n$  tiene límite  $a_n$  (y  $b_n$ , en el borde) basta observar que en caso contrario existirían dos radios fijos de  $B_1(0)$  que intersectarían a  $A_n$  infinitas veces al acercarse  $A_n$  al contorno. Del teorema 14 seguiría  $f(z) \equiv \text{cte}$ ; contradicción.

Además  $a_n \neq b_n$ . En efecto, supongamos  $a_n = b_n$ ; aplicando el T.15 a la función  $f(z)$  sobre una subregión de  $B_1$  cuyo contorno es  $A_n$  resulta  $\alpha_n = \beta_n$ , contradicción.

La función  $f(z) - w_0$  converge uniformemente a cero sobre los arcos de Jordan  $A_n$  pues  $f(A_n) = q_n \rightarrow w_0$ . Si los arcos  $A_n$  no convergieran a un punto de  $\Sigma_1$  existiría un cono  $V$  con vértice en 0 tal que sobre  $A_n \cap V$ ,  $f(z) - w_0 \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ . En virtud del T.14.  $f(z) \equiv w_0$ , lo cual es imposible.

Sea entonces  $z_0 = \lim A_n$ ,  $z_0 \in \Sigma_1$ .  $\{A_n\}$  es una SFC en  $B_1(0)$ . Existe entonces una SFC equivalente a  $\{A_n\}$ ,  $\{C(\rho_n)\}$ , del tipo del lema 4 (cf.Prop.3).  $f(z)$  aplica esta última en una SFC equivalente a  $\{q_n\}$ ,  $\{\gamma_n\}$ . Definimos

$$(18) \quad \eta(z_0) := p.$$

Observemos que si  $w_j \rightarrow \pi$  según  $\{q_n\}$  entonces  $z_n = f^{-1}(w_n)$  converge a  $z_0$ , y recíprocamente.

Veamos que la definición (18) es independiente de  $\{w_n\}$  y  $w$  de la sucesión (c). Sean  $w' \in \pi$  y  $w'_n \rightarrow p$ ,  $w'_n \rightarrow w'$ . Supongamos que  $f^{-1}(w'_n) \rightarrow z_1 (\in \Sigma_1)$ . Si  $z_0 \neq z_1$  entonces a partir de un  $j_0$ ,  $\{f^{-1}(w'_j)\}$  y  $f^{-1}(w_j)$  están separadas por un  $C(\rho_m)$ ,  $m = m(j_0)$ . Sin embargo, (ver Def.13), sus imágenes  $\{w'_j\}$  y  $\{w_j\}$  están en un mismo  $D_r$  si  $j \geq j_1(r)$ . Si  $D_r$  se elige contenido en el dominio asociado al elemento  $\gamma_m = f(C(\rho_m))$  de la SFC  $\{\gamma_n\}$ , equivalente a  $\{q_n\}$ , se obtiene una contradicción. O sea,  $z_0 = z_1$ . Es decir,  $z_0$  queda determinado por  $w_0 = \lim q_n \in \pi$ . Luego, si  $z_0 \neq z_1$ , entonces  $\eta(z_0) \neq \eta(z_1)$ .

Por otra parte, el lema 4 permite asignar cada  $z_0 \in \Sigma_1$  al elemento de contorno  $\pi_0$  determinado por la sucesión fundamental de cortes  $\{f(C(\rho_n))\}$ , imagen de la SFC  $\{C(\rho_n)\}$  que converge a  $z_0$ . Luego,  $\eta^{-1}(P) = \Sigma_1$ .

Sólo resta ver que los elementos de contorno  $\pi$  cubren  $\partial D$ . Sea  $w \in \partial D$ . Existen  $\{w_n\} \subset D$  y  $z_0 \in \Sigma_1$  tales que  $w_n \rightarrow w$ ,  $z_n = f^{-1}(w_n) \rightarrow z_0$ . Para este  $z_0$  construimos  $\{C(\rho_n)\}$  como en el lema 4. Vale  $\{C(\rho_n)\} \rightarrow z_0$ . Si  $q_n := f(C(\rho_n))$  entonces  $\{q_n\}$  (o una subsucesión) es una SFC que define un elemento de contorno  $p = (\pi, \{q_n\})$  para el cual  $w \in \pi$ . En efecto,  $\pi = \bigcap \bar{D}_n$ , QED.

**Corolario del T.16.** Si además  $J$  es una curva de Jordan y  $J = \partial D$ ,  $f$  se extiende a un homeomorfismo entre  $S_1$  y  $\bar{D}$  de manera que  $\Sigma_1 \leftrightarrow J$  y  $B_1 \leftrightarrow D$ .

El corolario sigue de la Prop.3 y el T.16. Los detalles se dejan al lector.

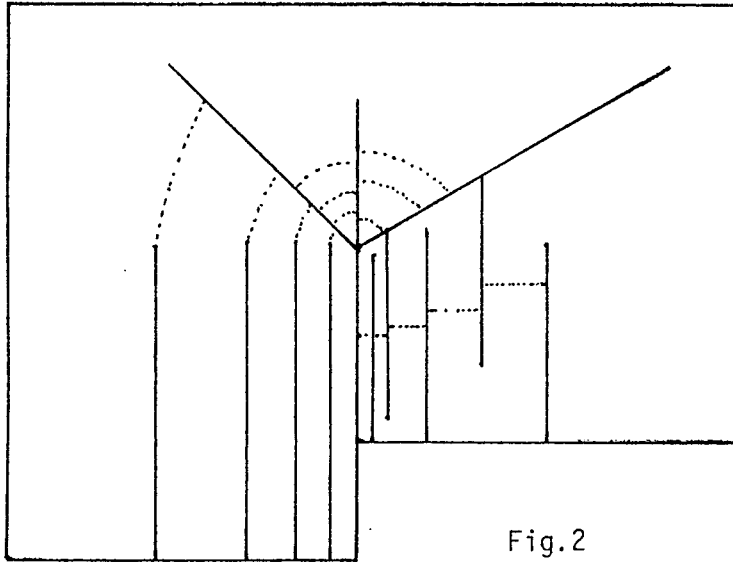


Fig.2

**CAPITULO IX**  
**EJEMPLO DE H. WHITNEY**

**IX.1.**

**Un caso particular del Teorema de extensión de Whitney.**

NOTACION:  $C, C'$  representan constantes absolutas  $\geq 1$ , no necesariamente iguales en distintas fórmulas y  $x, y, z$  puntos del plano.  $|x|$  representa la distancia de  $x$  al origen. Para fijar ideas supondremos que tenemos un compacto  $H \subset Q_0 =$  cuadrado cerrado de centro 0 y lado 1. Sea  $R = 3.int Q_0 =$  cuadrado abierto de lado 3 con centro en 0. Los cuadrados tienen lados paralelos a los ejes.

**Teorema 1.** *Sea  $f(x)$  una función real definida sobre  $H$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq w(|x - y|)$  si  $x, y \in H, x \neq y$ , donde  $w(t)/t$  es una función no negativa, monótona creciente, definida en la semirrecta positiva y que tiende a 0 para  $t \rightarrow 0$ . Entonces, existe una extensión  $\mathfrak{E}f$  definida en  $R$  tal que:*

- (i)  $\mathfrak{E}f(x) = f(x)$  si  $x \in H$
- (ii)  $\mathfrak{E}f(x) \in C^1$  en  $R$
- (iii)  $|\mathfrak{E}f(x) - \mathfrak{E}f(y)| \leq w(C|x - y|)$  si  $x \in H, y \in R$
- (iv)  $|\text{grad } \mathfrak{E}f(x)| \leq C' \frac{w(C \text{dist}(x, H))}{C \text{dist}(x, H)}$  donde  $x \in R/H$ .

Este teorema es un caso muy particular del teorema de extensión. El resultado general se enuncia en IX.3. La hipótesis puede ejemplificarse sin mucha dificultad con funciones no constantes si  $H$  es numerable con un único punto de acumulación. Antes de la demostración observemos que el gradiente de  $\mathfrak{E}f(x)$  será 0 si  $x \in H$  como consecuencia de (iii) y la hipótesis sobre  $w$ .

Subdividimos  $R$  en nueve cuadrados de lado 1, de interiores disjuntos y llamamos  $F_0$  al conjunto de esos cuadrados;  $Q_0 \in F_0$ . Luego, definimos inductivamente  $F_n =$  el conjunto de cuadrados de lado  $2^{-n}$  en que quedan divididos los cuadrados que componen  $F_{n-1}$ . Si  $Q \in F_n$  y  $Q' \in F_m$  con  $m \leq n$ , entonces o bien son de interior disjunto, o bien  $Q \subseteq Q'$ .

$$\text{Sea } M' = \left\{ Q \in \bigcup_{j=0}^{\infty} F_j : \text{dist}(Q, H) \geq \text{diam}(Q) \right\}.$$

**Definición 1.**  $M = \left\{ Q \in M' : Q \neq \tilde{Q} \in M' \Rightarrow Q \not\subseteq \tilde{Q} \right\}.$

$l_Q$  representará al lado del cuadrado  $Q$ . El operador  $^C$  denotará el complemento a  $R$ . Por ejemplo,  $H^C = R \setminus H$ .

**Proposición 1.**

- (i) Si  $Q, \tilde{Q} \in M, Q \neq \tilde{Q}$ , entonces sus interiores son disjuntos.
- (ii)  $\bigcup \{Q : Q \in M\} = H^C$ .

- (iii) Si  $Q \in M$  entonces  $\text{diam}(Q) \leq \text{dist}(Q, H) \leq 3 \cdot \text{diam}(Q)$ .
- (iv) Sean  $Q \in M$ ,  $\tilde{Q} \in M'$ . Si  $Q \cap \tilde{Q} \neq \emptyset$  entonces  $l_{\tilde{Q}} \leq 4 \cdot l_Q$ .
- (v) Si  $Q \in M$  entonces hay a lo sumo 20 cuadrados  $\tilde{Q} \in M$  que verifican  $Q \cap \tilde{Q} \neq \emptyset$ .

**Demostración.**

(i) e (ii) son inmediatos.

(iii) Sea  $Q \in F_j$  y sea  $\tilde{Q} \in F_{j-1}$  tal que  $Q \subseteq \tilde{Q}$ . Entonces  $\tilde{Q} \notin M$ . Luego  $2 \cdot \text{diam}(Q) = \text{diam}(\tilde{Q}) > \text{dist}(\tilde{Q}, H)$  y por lo tanto  $\text{dist}(Q, H) \leq \text{dist}(\tilde{Q}, H) + \text{diam}(Q) \leq 3 \cdot \text{diam}(Q)$ .

(iv) Si  $x \in Q \cap \tilde{Q}$  con  $\text{diam}(Q) \leq \text{diam}(\tilde{Q})$ , entonces, usando iii),  $\text{dist}(x, H) \leq \text{diam}(Q) + \text{dist}(Q, H) \leq 4 \cdot \text{diam}(Q)$ , mientras que por la definición de  $M'$  :  $d(x, H) \geq \text{dist}(\tilde{Q}, H) \geq \text{diam}(\tilde{Q})$ .

(v) sigue de (iv), QED.

**Definición 2.** Si  $Q$  es un cuadrado de lado  $l$  y centro  $c$  entonces  $Q^*$  denotará al cuadrado abierto con lados paralelos de longitud  $(1 + \epsilon)l$ , con  $\epsilon < 1/8$ , fijo y el mismo centro  $c$ .

Consideremos los elementos de  $M$  numerados:  $M = \{Q_k : k = 1, 2, \dots\}$ . Sea  $M^* = \{Q_k^* : Q_k \in M\}$ . Vale la siguiente

**Proposición 2.**

- (i) Si  $Q_k^* \cap Q_i \neq \emptyset$  entonces  $Q_k \cap Q_i \neq \emptyset$ .
- (ii) Si  $x \in H^C$  entonces hay a lo sumo 21 números  $k$  tales que  $x \in Q_k^*$ .

**Demostración.**

(i) Sea  $Q \in M$ . Por Prop.1, (iv), los cuadrados de  $M$  que tocan  $Q$  tienen lados de longitud mayor o igual a  $l_Q/4$ . Por lo tanto

$$R \cap Q^* \subset \text{int} \bigcup \{ \tilde{Q} \in M : Q \cap \tilde{Q} \neq \emptyset \}.$$

(ii) sigue de (i) y de la Prop.1, (v), pues si  $x \in H^C$  entonces  $x \in Q_i \in M$  y si también  $x \in Q_k^*$ ,  $Q_k \cap Q_i \neq \emptyset$ , QED.

**NB.** Obsérvese que (ii) puede afirmarse también de puntos fuera de  $R$ . Incluso de un pequeño entorno de  $x$  para todo  $x \notin H$ .

Respecto de (i) nótese que vale:  $Q_i^* \cap Q_k^* \neq \emptyset$  implica  $Q_k \cap Q_i \neq \emptyset$ . En efecto, por la elección de  $\epsilon$ ,  $Q_i^* \cap Q_k^* \neq \emptyset \Rightarrow Q_k^* \cap Q_i \neq \emptyset$ .

NOTACION:  $l_i$  denotará la longitud del lado de  $Q_i$  y  $c_i$  su centro.

Sea  $\phi(x) \in C^\infty$  tal que  $0 \leq \phi(x)$ ,  $\phi(x) = 1$  en  $Q_0$  y  $\phi(x) = 0$  si  $x \notin Q_0^*$ .

**Definición 3.**  $\tilde{\phi}_i(x) := \phi\left(\frac{x - c_i}{l_i}\right)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(x)$ ;  $\phi_i(x) = \frac{\tilde{\phi}_i(x)}{\Phi(x)}$ .

En  $x \in H^C$ ,  $\Phi(x) \geq 1$  y en todo punto,  $\phi_i(x) \geq 0$ .

Es claro que las  $\phi_i(x)$  forman una partición de la unidad de  $H^C$ , esto es, vale el (cf. NB):



**Lema 1.**  $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) = 1$  en  $H^C$  y todo  $x \notin H$  admite un entorno donde se anulan todas las  $\phi_i$  salvo por un número finito de ellas.

**Demostración del teorema 1.**

Sea  $y_i \in H$  tal que  $\text{dist}(Q_i, H) = \text{dist}(Q_i, y_i)$ .

Definimos

$$\mathfrak{E}f(x) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} f(y_i)\phi_i(x) & \text{si } x \in H^C \\ f(x) & \text{si } x \in H \end{cases}$$

De la definición sigue (i) y también que  $\mathfrak{E}f(x) \in C^\infty(H^C)$ , dado que sólo un número finito de sumandos es distinto de cero en un entorno de cada  $x \in H^C$ .

Supongamos (iii). Entonces,  $\mathfrak{E}f(x)$  es continua. Además,  $\text{grad } \mathfrak{E}f(x)$  existe y es nulo para  $x \in H$ . Por tanto, (ii) sigue de (iv).

Veamos (iii). Sea  $x \in H$ ,  $y \in H^C$

$$(1) \quad |\mathfrak{E}f(x) - \mathfrak{E}f(y)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} (f(x) - f(y_i))\phi_i(y) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f(x) - f(y_i)|\phi_i(y)$$

Llamemos  $\delta := |x - y|$ . Sea  $i$  tal que  $\phi_i(y) \neq 0$ . Entonces  $y \in Q_i^*$ ,

$$(2) \quad \delta \geq \text{dist}(y, H) \geq \text{dist}(Q_i, H) - \text{dist}(y, Q_i) \geq (1 - \frac{\epsilon}{2}) \text{diam}(Q_i).$$

Luego

$$(3) \quad l_i < C\delta \text{ con } C \text{ una constante absoluta.}$$

Además, usando (3), la definición de  $y_i$  y la Prop.1, (iii):

$$(4) \quad |y_i - y| \leq \text{dist}(y_i, Q_i) + \text{diam } Q_i^* \leq C'\delta$$

pues la suma es  $\leq 3.\text{diam } Q_i + \text{diam } Q_i^*$ .

Luego, para estos  $i$ :

$$(5) \quad |x - y_i| \leq |x - y| + |y - y_i| \leq (1 + C')\delta.$$

Teniendo en cuenta (1), la hipótesis sobre  $f$  y que  $w$  es creciente con  $w(t) \rightarrow \infty$  para  $t \rightarrow \infty$ , resulta,

$$|\mathfrak{E}f(x) - \mathfrak{E}f(y)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} w((1 + C')\delta) \cdot \phi_i(y) = w((1 + C')\delta).$$

Esto prueba (iii).

(iv). Sea  $x \in H^C$ . Por Lema 1,  $\sum_{i=1}^{\infty} \nabla \phi_i(x) = 0$ . Luego, si  $\tilde{x} \in H$  es tal que  $|x - \tilde{x}| = \text{dist}(x, H)$  resulta:

$$\nabla \mathfrak{E}f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f(y_i) - f(\tilde{x})) \nabla \phi_i(x),$$

donde la suma se reduce a los  $i$  tales que  $\nabla \phi_i(x)$  no es cero en un entorno de  $x$ . Sea  $i$  uno de estos. De la definición de  $\tilde{x}$  sigue que  $|x - \tilde{x}| \leq |x - y_i|$ , que implica (cf.Prop.1),

$$(6) \quad |\tilde{x} - y_i| \leq 2|x - y_i| \leq 2(\text{dist}(y_i, Q_i) + \text{diam}(Q_i^*)) \leq Cl_i$$

Tenemos entonces,

$$(7) \quad |\nabla \mathfrak{E}f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} w(Cl_i) |\nabla \phi_i(x)|.$$

Por otra parte,

$$|\nabla \phi_i(x)| \leq C \max \left\{ \left| \frac{\nabla \tilde{\phi}_i(x)}{\Phi(x)} \right|, \left| \frac{\nabla \Phi(x)}{\Phi^2(x)} \right| \right\} \leq \frac{C \max |\nabla \phi|}{l_i}$$

pues los  $Q_j^*$  que contienen a  $x$  poseen lados del mismo orden que  $l_i$ , (cf.Prop.1).

Usando que  $|\nabla \phi_i(x)| \leq \frac{C}{l_i}$  y que  $l_i \leq C' \text{dist}(x, H)$  se obtiene (iv) de (7).

Esta última desigualdad sigue de:  $\text{dist}(x, H) = |x - \tilde{x}| \geq \text{dist}(\tilde{x}, Q_i^*) \geq \text{dist}(H, Q_i^*) \geq \text{dist}(H, Q_i) - \epsilon \text{diam} Q_i \geq (1 - \epsilon) \text{diam} Q_i$ . QED.

## IX.2.

### El contraejemplo de Whitney.

Dada una función  $f(x)$  en una región  $D$  del plano,  $f \in C^m(D)$ ,  $m \geq 1$ , diremos que  $x \in D$  es un punto crítico de  $f$  si  $\nabla f(x) \equiv \text{grad} f(x) = 0$ . Es natural conjeturar que si  $H \subset D$  es un conjunto conexo de puntos críticos entonces  $f$  es constante sobre  $H$ . Esto es efectivamente así si  $m \geq 2$  (M. Morse, cf. IX.4) pero para  $m = 1$  presentamos el siguiente ejemplo de H. Whitney de una función  $C^1(D)$  no constante sobre una curva de Jordan de puntos críticos.

★ **El arco.** Sea  $Q$  un cuadrado de lado 1 en el plano y sean  $Q_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  cuatro cuadrados de lados  $1/3$ , ubicados cíclicamente en el interior de  $Q$ , a distancia  $1/12$  del contorno de  $Q$ . Sean los puntos  $E$  (=entrada) y  $S$  (=salida) centros de lados consecutivos de  $Q$  de manera que  $E$  equidiste de  $Q_0$  y de  $Q_1$  y  $S$  equidiste de  $Q_0$  y de  $Q_3$ . Sean  $E_i$  y  $S_i$  centros de lados consecutivos de  $Q_i$  de manera que  $S_i$  y  $E_{i+1}$  estén sobre lados enfrentados para  $i = 0, 1, 2$  mientras que  $E_0$  esté cerca de  $E$ , y  $S_3$  esté cerca de  $S$ , (ver Fig.1). Para  $i = 0, 1, 2, 3$ , sea  $\phi_i$  la semejanza de razón  $1/3$ , que lleva el cuadrado  $Q$  en  $Q_i$  de manera que  $\phi_i(E) = E_i$ ,  $\phi_i(S) = S_i$ , ( $\phi_2$  es una homotecia de razón  $1/3$ ,  $\phi_0$  incluye una reflexión respecto al eje de las  $y$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_3$  incluyen rotaciones en  $\pi/2$  y  $-\pi/2$ ).

Sea  $A_0$  el segmento  $EE_0$ ,  $A_j$  el segmento  $S_{j-1}E_j$  para  $j = 1, 2, 3$  y finalmente  $A_4$  el segmento  $S_3S$ . Para  $\alpha = \{i_1, \dots, i_s\}$  un multiíndice con  $i_k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , definimos para  $h \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , recursivamente, (cf. Fig. 2 y 3):

$$Q_{i\alpha} = \phi_i(Q_\alpha) \quad A_{i\alpha h} = \phi_i(A_{\alpha h}).$$

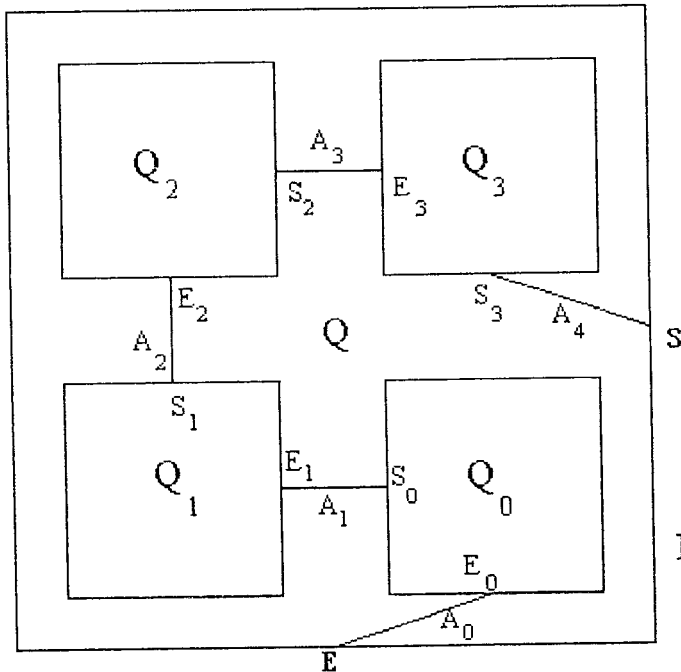


Fig. 1 .

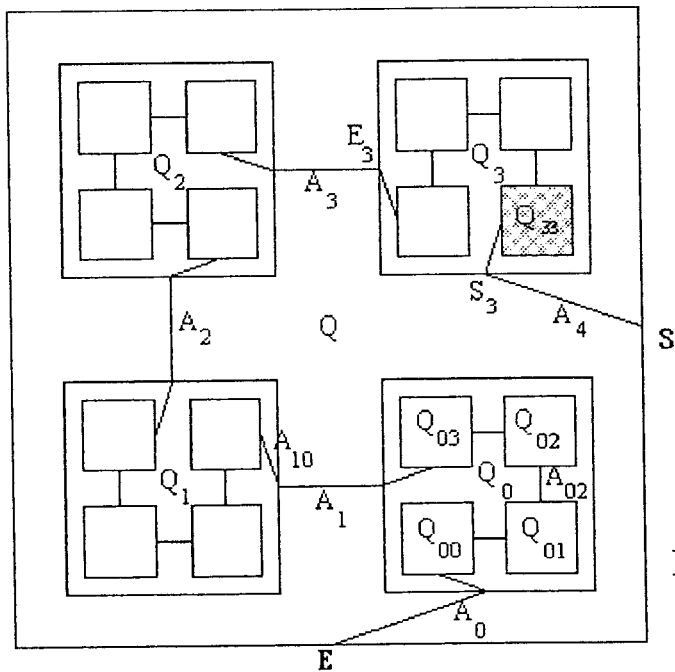


Fig. 2

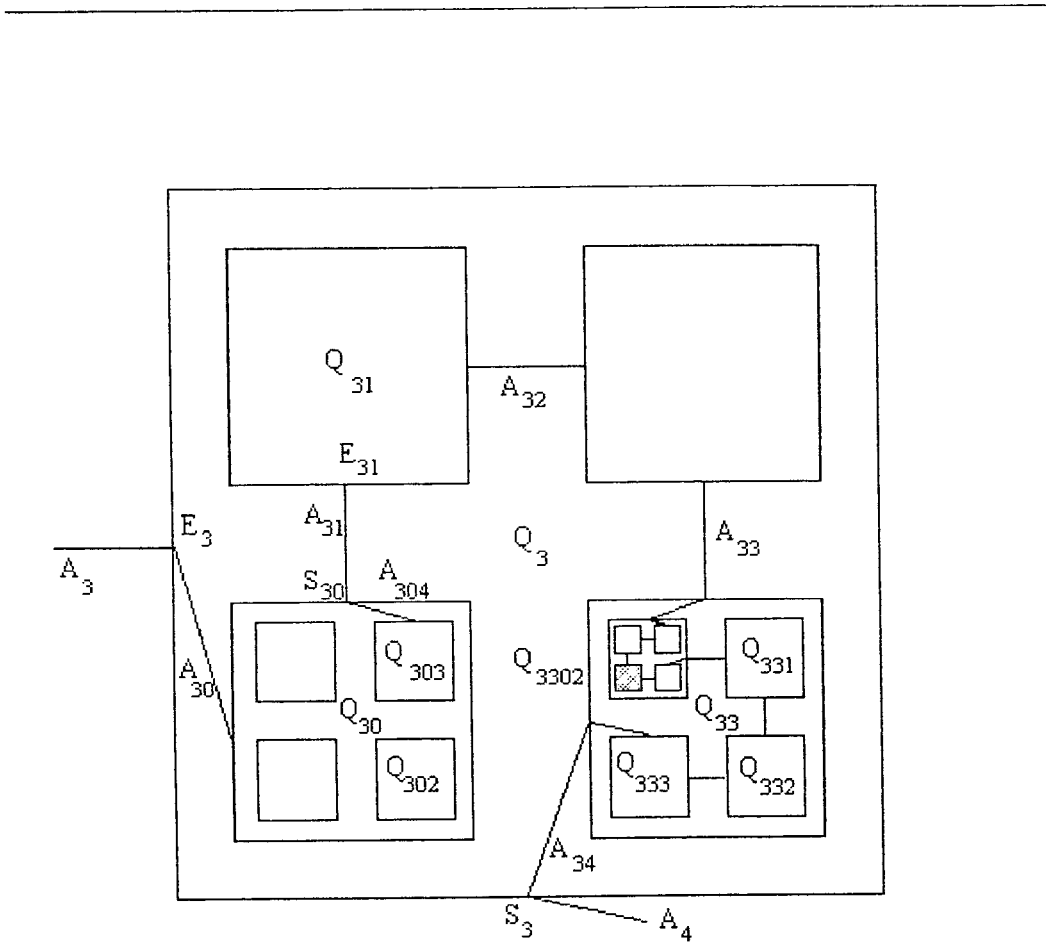


Fig. 3

Si  $\alpha = \{i_1 i_2 \dots\}$  es una sucesión,  $i_k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , entonces  $Q_\alpha$  será el punto de intersección de todos los cuadrados  $Q_\beta$  con  $\beta = \{i_1 i_2 \dots i_n\}$ . La unión de todos los segmentos  $A_{\alpha h}$  junto con los puntos  $Q_\alpha$  forma un arco de Jordan  $H$ , que puede representarse como la imagen topológica del segmento  $[0,1]$ . En efecto, una transformación  $x : [0, 1] \rightarrow H$ , con  $x(0) = E$ ,  $x(1) = S$ , se puede obtener si representamos cada punto de  $t \in (0, 1)$  en base 9,  $t = 0.a_1 a_2 \dots$  con  $a_h \in \{0, 1, \dots, 8\}$ . Esta representación es única, salvo por las de período 8, las que excluirémos en lo que sigue. Usaremos en su lugar su expresión equivalente de período 0.

Si  $t = 0.a_1 a_2 \dots$  con  $a_h = 2i_h + 1$  y  $\alpha = \{i_1 i_2 \dots\}$  definimos  $x(t) = Q_\alpha$ .

Si  $a_h = 2i_h + 1$  para  $h = 1, \dots, n$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  y  $\alpha = \{i_1 \dots i_n\}$ , entonces definimos  $x : [0.a_1 \dots a_n(2k), 0.a_1 \dots a_n(2k + 1)] \rightarrow A_{\alpha k}$  en forma lineal.

Obsérvese que para  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  el punto inicial de  $A_{\alpha k}$  es el punto final de  $A_{\alpha(k-1)4}$ . Y también que el punto inicial de  $A_{\alpha 0}$  es el punto final de  $A_\alpha$ .

★ **La función f.** Definimos primero la función  $f(x)$  sobre  $H$  de la siguiente manera:  $f(E) = 0$ ,  $f(S) = 1$ . Si  $t = 0.a_1 a_2 \dots$  con  $a_h = 2i_h + 1$  para  $h = 1, \dots, n$  y  $a_{n+1} = 2k$ , definimos  $f(x(t)) = \sum_{h=1}^n \frac{i_h}{4^h} + \frac{k}{4^{n+1}}$  (si  $n$  es  $\infty$ , entonces no aparece el último sumando).

Como  $\frac{k-1}{4^m} + \frac{3}{4^{m+1}} + \dots + \frac{3}{4^{m+h}} + \frac{4}{4^{m+h+1}} = \frac{k}{4^m}$ , resulta  $f(A_{\alpha k}) = f(A_{\alpha(k-1)4}) = f(A_{\alpha(k-1)3\dots 34})$  para  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  y también  $f(A_{\alpha h}) = f(A_{\alpha h 0 \dots 0})$  para  $h \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

O sea,  $f$  es constante sobre las poligonales que componen  $H$  y sólo crece en los puntos  $Q_\alpha$  con  $\alpha$  una sucesión infinita.

**Teorema 2.** *La función  $f(x)$ , definida sobre el compacto  $H$ , verifica para  $x, y \in H$ ,*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^r \quad \text{donde } r := \frac{\log 4}{\log 3} > 1.$$

**Demostración.**

Sean  $x, y \in H$ ,  $x = x(0.a_1a_2\dots)$ ,  $y = x(0.b_1b_2\dots)$  tales que

$$(8) \quad f(x) \neq f(y).$$

Sea  $n$  definido por  $a_h = b_h$  para  $h = 1, \dots, n$  y  $a_{n+1} \neq b_{n+1}$ . Entonces (8) implica que  $a_h = 2i_h + 1$  es impar para  $h \leq n$ , y de la definición de  $f$  se ve que

$$(9) \quad f(x) - f(y) = 4^{-n}(f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})) \text{ con } \tilde{x} = x(0.a_{n+1}a_{n+2}\dots), \tilde{y} = x(0.b_{n+1}b_{n+2}\dots).$$

Por otro lado,  $x = \phi_\alpha(\tilde{x})$ ,  $y = \phi_\alpha(\tilde{y})$  con  $\alpha = \{i_1i_1\dots i_n\}$ . Luego

$$|x - y| = 3^{-n}|\tilde{x} - \tilde{y}| \quad \text{o sea, } |x - y|^r = 4^{-n}|\tilde{x} - \tilde{y}|^r$$

y

$$(10) \quad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^r} = \frac{|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})|}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^r}$$

Hay tres posibilidades de ubicación del par  $\tilde{x}, \tilde{y}$  en  $Q$ .

Caso 1:  $\tilde{x} \in Q_h, \tilde{y} \in Q_k$ .

Caso 2:  $\tilde{x} \in Q_h, \tilde{y} \in A_k$ .

Caso 3:  $\tilde{x} \in A_h, \tilde{y} \in A_k$ .

Como  $a_{n+1} \neq b_{n+1}$ , debe ser  $h \neq k$  en los casos 1 y 3, mientras que en el caso 2, la desigualdad (8) implica que  $\tilde{x} \notin A_{(k-1)4} \cup A_{k0}$ .

Sigue que  $|\tilde{x} - \tilde{y}| \geq 1/6$  en el caso 1,  $|\tilde{x} - \tilde{y}| \geq 1/36$  en el caso 2,  $|\tilde{x} - \tilde{y}| \geq \sqrt{2}/6$  en el caso 3. O sea en todo caso  $|\tilde{x} - \tilde{y}| \geq 1/36$ . Como  $|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq 1$ , sigue que el cociente en (10) está acotado por  $C = 36^r$ , QED.

★ El teorema 2 muestra que  $f(x)$  definida sobre la curva  $H$  verifica la hipótesis del teorema 1 con  $w(t) = C.t^r$ . Luego la extensión dada por ese teorema es una función continuamente diferenciable en  $Q$ , de gradiente nulo en  $H$ , no constante sobre  $H$ . Es el ejemplo de Whitney. El arco  $H$  tiene dimensión de Hausdorff  $\frac{\log 4}{\log 3} \in (1, 2)$  y por lo tanto medida cero.

## IX.3.

$x, y$  representarán puntos de  $R^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ ,  $R$  un hipercubo abierto de  $R^n$ .  $\alpha \in N^n$  representará  $n$ -uplas de números naturales,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ ,  $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

El teorema de extensión de Whitney responde a la siguiente pregunta: Dada una familia de funciones  $\{f_\alpha(x); |\alpha| \leq m\}$  sobre un conjunto cerrado  $H$ ,  $H \subset R$ , bajo qué hipótesis se puede asegurar que ellas son las restricciones a  $H$  de  $D^\alpha F$ , donde  $F \in C^m(R)$  es una función con  $m$  derivadas continuas en  $R$ .

En el caso que exista una tal función se tiene, por la fórmula de Taylor, para  $|\beta| \leq m$ ,  $x, y \in H$ ,

$$(11) \quad \left| f_\beta(x) - \sum_{|\alpha| \leq m-|\beta|} f_{\alpha+\beta}(y) \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \right| \leq w_{m-|\beta|}(|x-y|)$$

donde  $w_h(t)$  es una función definida sobre la semirrecta positiva tal que  $\frac{w_h(t)}{t^h} \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow 0$ . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $\frac{w_h(t)}{t^h}$  es monótona creciente. Luego (11) es una relación necesaria entre las  $f_\alpha$  para la existencia de  $F$ . El teorema de Whitney dice que también es suficiente

**Teorema de Whitney.** Sean  $\{f_\alpha(x); |\alpha| \leq m\}$  funciones definidas sobre un compacto  $H \subset R$  que verifican (11) con las funciones  $\frac{w_h(t)}{t^h}$  monótonas crecientes,  $\geq 0$  y tales que  $\frac{w_h(t)}{t^h} \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow 0$ .

Entonces, existe una función  $F \in C^m(R)$  tal que  $D^\alpha F(x) = f_\alpha(x)$  para todo  $x \in H$ .

En el párrafo 1 se considera el caso de este teorema donde  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $f_\alpha(x) \equiv 0$  para  $|\alpha| = 1$ . La hipótesis (11) se reduce en este caso a

$$(12) \quad |f_0(x) - f_0(y)| \leq w_1(|x-y|).$$

Recordemos como se obtiene la fórmula (11).

Si  $F(t)$  es una función de una variable real, con  $m$  derivadas continuas en  $|t| \leq 1$ , entonces

$$(13) \quad F(t) - \sum_{j=0}^m F^{(j)}(0) \frac{t^j}{j!} = \int_0^t (t-x)^{m-1} (F^{(m)}(x) - F^{(m)}(0)) \frac{dx}{(m-1)!}$$

En particular sigue que

$$(14) \quad \left| F(1) - \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} F^{(j)}(0) \right| \leq \max\{|F^{(m)}(x) - F^{(m)}(0)|; x \in [0, 1]\} / m!$$

Si aplicamos estas fórmulas a la función  $F(t) := f(y + t(x-y))$  y usamos el hecho que

$$(15) \quad F^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha f(y + t(x-y)) \frac{j!}{\alpha!} (x-y)^\alpha$$

resulta,

$$(16) \quad \left| f(x) - \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f(y) \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \right| \leq \max \{ 2|D^\alpha f(z)|; |\alpha| = m, |x-z| \leq |x-y| \} \cdot |x-y|^m n^m =: w_m(|x-y|).$$

#### IX.4.

Sea  $\Omega$  un abierto de  $R^N$  y sea  $F(x)$  una función real de  $C^p(\Omega)$ .  $m$  denotará la medida de Lebesgue en el espacio que corresponda. Sea  $\mathcal{C} := \{x; \nabla F(x) = 0\}$ , el conjunto de puntos críticos de  $F$ .

**Teorema de Morse.** Si  $p \geq N$  entonces  $m(F(\mathcal{C})) = 0$ .

Luego, si  $N = 2$  entonces  $p \geq 2$  implica que  $F(\mathcal{C})$  es un conjunto en  $R^1$  de medida cero, que es justamente el caso citado en el párrafo 2.

Sea ahora  $F$  a valores en  $R^m$  y  $F'(x)$  la matriz jacobiana. En esta situación,  $\mathcal{C} := \{x; \text{rango } F'(x) < m\}$ . El siguiente resultado generaliza al precedente,

**Teorema de Sard.**  $p + m \geq N + 1 \Rightarrow m(F(\mathcal{C})) = 0$ .

## CAPITULO X

### CURVAS GENERALIZADAS

#### Introducción.

Las curvas generalizadas son ciertas funcionales lineales de un espacio dual  $B^*$ .

Este espacio dual  $B^*$  contiene los 'representantes' de todas las curvas mas o menos suaves (continuas con derivadas continuas a trozos digamos). La clausura, dentro de  $B^*$  de todos los 'representantes' son las curvas generalizadas. Es decir, dentro de esta clausura, estarían todas las curvas mas eventuales elementos nuevos, limites de dichas curvas.

Como dicha clausura intersecada con la esfera de radio  $R$  resulta ser compacta se pueden obtener teoremas automaticos de existencia sobre infimos o supremos de ciertas funcionales. El siguiente ejemplo aclara las cosas.

Tratemos de encontrar el mínimo de

$$\int_0^1 (1+x^2)(1+(x^2-1)^2)dt$$

sobre las curvas  $x(t)$   $t \in [0, 1]$  continuas con derivadas continuas a trozos con la propiedad  $x(0) = x(1) = 0$ . Si uno toma a  $x_\epsilon(t)$  continua con derivadas  $\pm 1$  a trozos y  $|x_\epsilon(t)| < \epsilon$ , la integral no es mayor a  $\epsilon^2 + 1$ . Sin embargo, el limite de  $x_\epsilon(t)$  tiende a la curva constante igual a cero. Si uno calcula la integral para  $x_0(t) = 0 \forall t \in [0, 1]$ , esta da 2. Por otro lado se ve la integral de arriba, es siempre  $\geq 1$ . Es decir si bien la solución no existe dentro de las curvas continuas con derivadas continuas a trozos, la solución se puede pensar como una curva constante igual a cero que en cada punto tiene pendientes 1 y -1 con probabilidad 1/2. Esto es una curva generalizada. Lo que sigue es una descripción matemática de esta idea.

El orden de este capitulo es el siguiente: en X.1 y X.2 se dan las definiciones generales de los espacios de Banach con los que se va a definir una curva generalizada; en X.3 se da la definición de curva generalizada y el enunciado del teorema mas importante de este capitulo (teorema de representación). X.4 contiene un ejemplo parecido al de arriba. X.5 y X.6 contienen la demostración del teorema de representación.

#### X.1.

Las curvas generalizadas son ciertas funcionales lineales de un espacio dual  $B^*$ . Definamos, pues, nuestro espacio de Banach  $B$  que tendrá como dual a  $B^*$ .

**Definición.** El espacio de Banach  $B = C(A)$  es el conjunto de funciones continuas en un compacto  $A \subset \mathcal{R}^{2n}$  con la norma del supremo, i.e., si  $L(p)$  es una función continua su norma es

$$\|L\| = \sup_{p \in A} |L(p)|.$$



El compacto  $A$  está formado por todos los puntos  $p$  tales que

$$p = (x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = (x, \dot{x})$$

$$K > 0, \quad -K \leq x_i \leq K, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$|\dot{x}| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2} = 1.$$

Sea  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , una curva AC en  $\mathcal{R}^n$ (\*) : cada una de sus componentes es AC con  $-K \leq x_i(t) \leq K$  para  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $i = 1, \dots, n$  y tal que  $|\dot{x}(t)| = 1$  salvo en un conjunto de medida cero, ( $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ ). Llamaremos a estas curvas, **curvas admisibles**. Se puede identificar una funcional  $\mathcal{F} \in B^*$  asociada a esta curva de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}(L) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad L \in B.$$

Veamos que está bien definida:

(I) Dadas las definiciones de  $L$  y  $x(t)$ ,  $L(x(t), \dot{x}(t))$  tiene sentido para todo  $t$  casi doquier y es una función acotada y medible en  $[t_0, t_1]$ .

(II)

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt \right| \leq (t_1 - t_0) \|L\|,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (L_1 + L_2)(x, \dot{x}) dt = \int_{t_0}^{t_1} L_1(x, \dot{x}) dt + \int_{t_0}^{t_1} L_2(x, \dot{x}) dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (\alpha L)(x, \dot{x}) dt = \alpha \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt.$$

Luego,  $\mathcal{F} \in B^*$ .

## X.2.

Llamaremos  $A'$  al conjunto de puntos  $p$  tales que

$$-K \leq x_i \leq K \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Es obvio que  $A \subseteq A'$ .

**Lema 1.** Sea  $L$  función continua en  $A$ . Existe una única función continua  $L_e$  definida en  $A'$  de tal manera que

$$(I) \quad L_e|_A = L,$$

$$(II) \quad L_e(x, \dot{x}k) = kL_e(x, \dot{x}), \quad k \geq 0.$$

---

(\*)AC: absolutamente continua

**Lema 2.** Sea  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , una función continua, estrictamente creciente y tal que  $m\{f'(x) = 0\} = 0$ . Entonces  $f^{-1}$  es AC (Teo. de Zarecki).

Sea  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , una curva AC, con  $-K \leq y_i \leq K$  para todo  $t$  para todo  $i$ , y tal que  $0 < |\dot{y}(t)| < K'$  cd. Llamaremos a estas curvas, **curvas reparametrizables**.

Sea

$$\mathcal{F}(L) = \int_{t_0}^{t_1} L_e(y(t), \dot{y}(t)) dt.$$

La demostración de que  $\mathcal{F} \in B^*$  es análoga a la hecha, sólo es necesario recalcar que

$$(L_1 + L_2)_e = L_{1e} + L_{2e},$$

$$(\alpha L_1)_e = \alpha L_{1e},$$

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} L_e(y, \dot{y}) dt \right| \leq K' |t_1 - t_0| \|L\|.$$

Sean  $\tau = s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{y}| dt$ ,  $l = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}| dt$ .

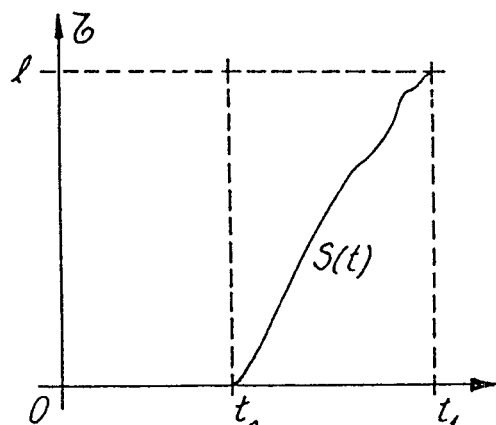
Por el teorema de derivación de Lebesgue  $\dot{s}(t) = |\dot{y}(t)|$  cd, entonces  $s(t)$  es AC, estrictamente creciente y  $m\{s(x) = 0\} = 0$ ; luego por el lema 2,  $s^{-1}(\tau)$  es AC (y estrictamente creciente).

Sea  $Q = \{t : |\dot{y}(t)| \exists, 0 < |\dot{y}(t)|, \dot{s}(t) = |\dot{y}(t)|\}$ , entonces  $m(\sim Q) = 0^*$ . Por ser  $s(t)$  AC y estrictamente creciente entonces  $m(s(\sim Q)) = 0$ . Sea  $\tau \notin s(\sim Q)$ , entonces

$$\left| \frac{dy}{d\tau}(s^{-1}(\tau)) \right| = |\dot{y}(s^{-1}(\tau)) \dot{s}^{-1}(\tau)| = \left| \dot{y}(t) \frac{1}{\dot{s}(t)} \right| = 1.$$

Es decir que  $y(s^{-1}(\tau)) = x(\tau)$  es una función AC, con  $|\dot{x}(\tau)| = 1$  cd. Además,

$$\begin{aligned} \int_0^l L(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau &= \int_0^l L_e(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau = \\ &= \int_0^l L_e(x(\tau), \dot{y}(s^{-1}(\tau))) \dot{s}^{-1}(\tau) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_e(y(t), \dot{y}(t) \dot{s}^{-1}(s(t))) \dot{s}(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_e(y(t), \dot{y}(t)) dt. \end{aligned}$$



Hemos demostrado que si tenemos una curva  $y(t)$  reparametrizable y su funcional  $\mathcal{F}$  asociada, entonces existe una curva  $x(\tau)$  admisible cuya funcional asociada  $\mathcal{F}'$  es igual a  $\mathcal{F}$ .

(\*)  $\sim Q = [t_0, t_1] \setminus Q$ .

Esto es debido a que  $y(t)$  permite una reparametrización, suficientemente buena, por medio del parámetro longitud de arco  $\tau$ .

### X.3.

**Definición.** Una curva  $z(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  se dice *lipschitziana* si existe una constante  $c$  tal que

$$|z(t') - z(t)| \leq c|t' - t| \text{ para todo } t, t' \in [t_0, t_1].$$

**Definición.** Las funcionales lineales que provienen de curvas mediante la correspondencia descrita más arriba serán llamadas **funcionales o curvas admisibles**.

**Definición.** El cono positivo de  $B^*$  es el conjunto de funcionales  $\mathcal{F}$  tal que

$$\mathcal{F}(L) \geq 0 \text{ si } L \geq 0 \text{ con } L \in B.$$

Está claro que una funcional admisible pertenece al cono positivo.

**Teorema Alaoglu-Bourbaki.** La esfera de radio  $R$  en  $B^*$  con la topología débil es compacta.

**Teorema.**  $B$  es separable, y por lo tanto, la esfera de radio  $R > 0$  en  $B^*$  munida de la topología débil en  $B^*$  es metrizable.

**Definición.** Llamaremos **curvas generalizadas** a la clausura dentro de  $B^*$  (con la topología débil) de las curvas admisibles.

Sea  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , una curva admisible y  $\mathcal{F}$  su funcional asociada. Entonces

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{\|L\|=1} |\mathcal{F}(L)| \leq (t_1 - t_0)\|L\| = (t_1 - t_0).$$

Pero si  $L_1 \equiv 1$  entonces

$$\mathcal{F}(L_1) = t_1 - t_0 = \|\mathcal{F}\| = \text{longitud de la curva } x(t).$$

Más aún, toda funcional del cono positivo de  $B^*$  alcanza su norma en la función idénticamente uno.

**Teorema de Riesz.** Dado  $\mathcal{F} \in B^*$  existe una única medida  $\mu$  con signo, regular, definida sobre los borelianos de  $A$  de tal manera que

$$\mathcal{F}(L) = \int_A L d\mu \text{ para todo } L \in B.$$

Además, si  $\mathcal{F}$  pertenece al cono positivo entonces la medida es positiva.

(La medida  $\mu$  se dice regular si para todo  $E$  boreliano y para todo  $\epsilon > 0$  existen  $F = \bar{F}$ ,  $G = \overset{\circ}{G} \subset A$  tales que  $G \supset E \supset F$  y  $|\mu(c)| < \epsilon$  para todo boreliano  $c \subset G \setminus F$ ).

**Definición.** Llamaremos **elemento generalizado de línea** ó **elemento de línea turbulento** a una funcional  $\mathcal{F}_o$  tal que por el teorema de representación de Riesz se escriba

$$\mathcal{F}_o(L) = \int_A L d\mu$$

con  $\mu$  una medida positiva, nula fuera del conjunto de puntos  $\{p = (x_0, \dot{x})\} \subset A$ , con cierto  $x_0$  fijo.

Si la medida  $\mu$  (positiva) está toda concentrada en un punto  $p = (x_0, \dot{x}_0)$  llamaremos a esa funcional, **elemento de línea**.

**Definición.** Dado un elemento generalizado de línea llamaremos **resultante** al vector

$$\left( x_0, \int_A \theta d\mu \right).$$

Entendemos

$$\int_A \theta d\mu = \left( \int_A \dot{x}_1 d\mu, \dots, \int_A \dot{x}_n d\mu \right) = (\mathcal{F}_o(\dot{x}_1), \dots, \mathcal{F}_o(\dot{x}_n)).$$

Nuestro principal interés está en el teorema que sigue.

**Teorema de representación.** Un elemento  $\mathcal{F} \in B^*$  es una curva generalizada si y sólo si existe una función vectorial lipschitziana  $x(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ <sup>1</sup> y para casi todo  $t$ , un elemento generalizado de línea  $g_t$  con resultante  $(x(t), \dot{x}(t))$  de tal manera que  $\|g_t\|$  está uniformemente acotado y

$$\mathcal{F}(L) = \int_0^1 g_t(L) dt \text{ para todo } L \in B.$$

#### X.4.

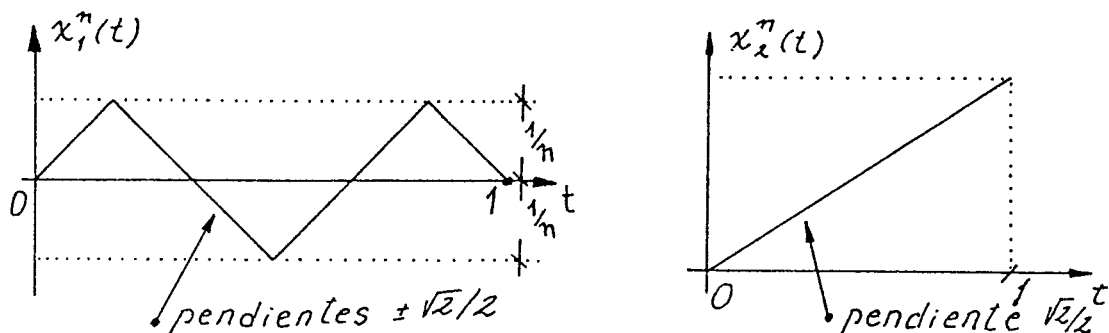
Veamos un ejemplo de curva generalizada.

##### A) Curva de Lebesgue.

Sea  $x^n(t) = (x_1^n(t), x_2^n(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , en el plano tal que  $x_2^n(t) = t/\sqrt{2}$  para todo  $n$  y  $x_1^n(t)$  es un "diente de sierra" de altura  $1/n$  con pendiente  $\pm\sqrt{2}/2$  (ver figura).

Como  $|\dot{x}^n(t)| = \sqrt{(\pm\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2} = 1$  cd, las curvas  $x^n(t)$  son admisibles y además longitud de  $x^n(t) = 1$  para todo  $n$ . Sean  $\mathcal{F}^n$  las funcionales asociadas a  $x^n(t)$ . Probaremos que existe  $\mathcal{F}$ , una curva generalizada, tal que  $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$  (débilmente).

<sup>1</sup>  $-K \leq x_i(t) \leq K$  para todo  $i$  para todo  $t \in [0, 1]$ .



Para ello sea  $\{P_i\}$  la familia de polinomios que es densa en  $C(A) = B$ .

Para saber qué sucede con  $\mathcal{F}^n(P_i)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  basta analizar lo que sucede con un monomio  $m$ :

$$m = a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dot{x}_1^{j_1} \dot{x}_2^{j_2}.$$

Entonces,

$$\mathcal{F}^n(m) = a \int_0^1 x_1^{n i_1}(t) x_2^{n i_2}(t) \dot{x}_1^{n j_1}(t) \dot{x}_2^{n j_2}(t) dt.$$

Dado que  $|x_2^{n i_2}(t) \dot{x}_1^{n j_1}(t) \dot{x}_2^{n j_2}(t)| \leq k$  para todo  $t$  cd. y  $x_1^n(t) \rightarrow 0$  (uniformemente) entonces si  $i_1 > 0$  tenemos que la integral tiende a cero.

Supondremos pues que  $i_1 = 0$  (i.e. el monomio  $m$  no posee primer factor);  $j_1$  puede ser par o impar. Supongamos que  $j_1$  es par, entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^n(m) &= a \int_0^1 x_2^{n i_2}(t) \dot{x}_1^{n j_1}(t) \dot{x}_2^{n j_2}(t) dt = \\ &= a \int_0^1 (t/\sqrt{2})^{i_2} \cdot (\pm\sqrt{2}/2)^{j_1} (\sqrt{2}/2)^{j_2} dt = \\ &= a(\sqrt{2}/2)^{j_1+j_2+i_2} \cdot \frac{1}{i_2+1}. \end{aligned}$$

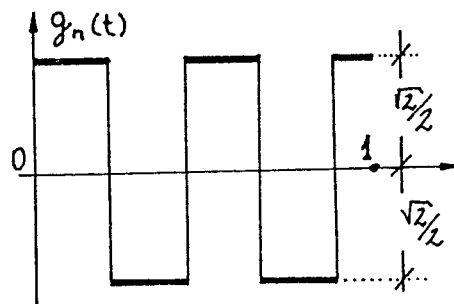
Si  $j_1$  es impar entonces nuestra integral es de la forma

$$\mathcal{F}^n(m) = \int_0^1 f(t) g_n(t) dt \quad \text{para todo } n \text{ (} f(t) \text{ fijo),}$$

donde  $f$  es continua,  $g_n(t)$  es una función que oscila entre  $\sqrt{2}/2$  y  $-\sqrt{2}/2$  en intervalos iguales y estos tienden a cero si  $n \rightarrow \infty$ .

Luego,  $\mathcal{F}^n(m) \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ . Luego, para todo  $m$  monomio existe el límite de  $\mathcal{F}^n(m)$ ; entonces también existe el límite de  $\mathcal{F}^n(P)$  donde  $P$  es un polinomio. Sea  $f$  cualquier función de  $B$ :

$$|\mathcal{F}^n(f - P_i)| \leq \|\mathcal{F}^n\| \|f - P_i\| = \|f - P_i\| \quad \text{para todo } n.$$



Como  $\{P_i\}$  es densa en  $B$  entonces existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^n(f)$ . Luego, por propiedades de linealidad de  $\mathcal{F}^n$  y  $\|\mathcal{F}^n\| = 1$  para todo  $n$ , queda definida  $\mathcal{F}$  por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^n(f) = \mathcal{F}(f),$$

y de manera que

- (I)  $\mathcal{F}(f_1 + f_2) = \mathcal{F}(f_1) + \mathcal{F}(f_2)$
- (II)  $\mathcal{F}(kf_1) = k\mathcal{F}(f_1)$
- (III)  $\|\mathcal{F}\| \leq 1$ .

¿Cómo es  $\mathcal{F}$ ?

Sea  $x(t)$  la curva definida por  $x(t) = (x_1(t) = 0, x_2(t) = t/\sqrt{2})$  para todo  $t \in [0, 1]$  y para todo  $t$  de ese intervalo  $g_t$  un elemento generalizado de línea que tiene masa  $1/2$  en cada uno de los puntos  $(x_1(t) = 0, x_2(t) = t/\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  y  $(x_1(t) = 0, x_2(t) = t/\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .

Luego

$$g_t(m) = 0 \text{ si } i_1 > 0 \text{ o si } j_1 \text{ es impar.}$$

Si  $i_1 = 0, j_1$  es par, entonces

$$(1) \quad g_t(m) = a(\sqrt{2}/2)^{i_2+j_2+j_1} t^{i_2}.$$

Además  $g_t(L) = 1/2 \cdot L(0, t/\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) + 1/2 \cdot L(0, t/\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ . Luego definiendo  $\int_0^1 g_t(L) dt = G(L)$ , se ve fácilmente que  $G \in B^*$ . Además por (1),  $G(m) = \mathcal{F}(m)$ . Por lo que  $\mathcal{F}(P_i) = G(P_i)$  para todo  $i$ . Como  $\mathcal{F}, G$  son continuas sigue que  $\mathcal{F} = G$ .

La resultante de  $g_t$  es

$$(0, t/\sqrt{2}, g_t(\dot{x}_1), g_t(\dot{x}_2)) = (0, t/\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}/2) = (x(t), \dot{x}(t)).$$

### Demostración del teorema de representación.

#### X.5. Necesidad.

Sea  $\mathcal{F}$  una curva generalizada tal que  $\|\mathcal{F}\| = \mathcal{F}(1) < c$ . Sea  $\{\mathcal{H}\}$  el conjunto de funcionales admisibles de norma  $\leq c$ ; entonces  $\mathcal{F} \in \overline{\{\mathcal{H}\}}$  y además para todo  $H \in \overline{\{\mathcal{H}\}}$ ,  $\|H\| \leq c$ ; luego  $\overline{\{\mathcal{H}\}} \subseteq \mathcal{R}_c^* =$  esfera de radio  $c$  de  $B^*$ , que es compacta (en la topología débil) y metrizable.

Luego, existe  $x^i(t), t \in [t_0^i, t_1^i]$ , curvas admisibles con sus funcionales  $\mathcal{F}^i$  asociadas, de tal manera que

$$(I) \quad \mathcal{F}^i \xrightarrow{w} \mathcal{F} \text{ (débilmente),}$$

$$(II) \quad |t_1^i - t_0^i| = \|\mathcal{F}^i\| \leq c \quad \text{para todo } i.$$

Sea  $y^i(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , la reparametrización lineal de  $x^i(t)$  [i.e.  $y^i(t) = x^i((t_1^i - t_0^i)t + t_0^i)$ ], entonces

$$|y^i(t') - y^i(t)| \leq c|t' - t|, \text{ para todo } i, \text{ para todo } t, t' \in [0, 1].$$

Luego  $y^i(t)$  son equicontinuas (por ser lipschitzianas) y además equiacotadas (por definición de curva admisible). Luego existe una subsucesión tal que  $y^{i'}(t) \rightarrow y(t)$  (uniformemente). Entonces  $y(t)$  es lipschitziana y

$$|\dot{y}(t)| \leq c \quad \text{c.d.}$$

Tomaremos esta subsucesión (que volveremos a llamar  $y^i$ ).

Definimos

$$G_t^i(L) = \int_0^t L_e(y^i, \dot{y}^i) dt \quad t \in [0, 1]$$

Entonces

$$G_0^i \equiv 0, \quad G_1^i = \mathcal{F}^i,$$

$$(2) \quad |G_t^i(L) - G_{t'}^i(L)| \leq c|t - t'| \|L\|.$$

Obsérvese que para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $i$ , fijos,  $G_t^i(L)$  es una funcional de norma  $\leq ct$ .

Sea  $q \in [0, 1]$  racional, entonces existe una subsucesión,  $G_q^{i'}$ , y un elemento  $G_q \in B^*$  tal que

$$G_q^{i'} \xrightarrow{w} G_q \text{ débilmente}$$

ya que  $G_q^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \in \mathcal{R}_c^*$ .

De esta nueva sucesión,  $G_q^{i'}$ , se extrae otra subsucesión,  $G_q^{i''}$  ( $q'$  racional,  $q' \neq q$ ) tal que

$$G_q^{i''} \rightarrow G_{q'} \text{ (débilmente).}$$

Repetiendo el procedimiento para todo  $q \in$  racionales de  $[0, 1]$ , y tomando la sucesión diagonal tendremos una sucesión  $G_t^j$  tal que el  $\lim_{j \rightarrow \infty} G_t^j(L)$  existe si  $q \in$  racionales de  $[0, 1]$  y  $L \in \mathcal{B}$ .

Probemos que el límite existe también si  $t \in [0, 1]$ . Dado que el límite de  $G_q^j(L)$  existe, entonces

$$\begin{aligned} & |G_t^{j_1}(L) - G_t^{j_2}(L)| = \\ & = |(G_t^{j_1}(L) - G_q^{j_1}(L)) + (G_q^{j_2}(L) - G_t^{j_2}(L)) + (G_q^{j_1}(L) - G_q^{j_2}(L))| \leq \\ & \leq 2|t - q|c \|L\| + |G_q^{j_1}(L) - G_q^{j_2}(L)| \leq \epsilon \end{aligned}$$

si  $|t - q|$  suficientemente pequeño y  $j_1, j_2$  suficientemente grandes. Llamaremos  $\phi(t, L)$  al nuevo límite, i.e.,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} G_t^j(L) = \phi(t, L) \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ para todo } L \in \mathcal{B}.$$

Por propiedades del límite, por ser  $G_i^j$  funcionales lineales y por la propiedad (2) tenemos que

$$(I) \quad \phi(t, L_1 + L_2) = \phi(t, L_1) + \phi(t, L_2)$$

$$(II) \quad \phi(t, kL) = k\phi(t, L)$$

$$(III) \quad |\phi(t, L) - \phi(t', L)| \leq c|t - t'| \|L\| \quad \text{para todo } t, t' \in [0, 1], L \in B.$$

En particular,  $\phi(t, L)$  es, para  $L$  fijo, lipschitziana y por lo tanto AC, y para  $t$  fijo un elemento de  $B^*$  de norma  $\leq c|t|$ .

Sea  $\{L_i\} i = 1, 2, \dots$  la familia de polinomios a coeficientes racionales en  $x, \dot{x}$ . Esta familia es densa en  $C(A) = B$ . Entonces salvo un conjunto  $E$  de medida cero de  $[0, 1]$ , existe  $\dot{\phi}(t, L_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots$

Probemos que la derivada existe también para cualquier  $L \in B$ .

Sea  $L \in B, t \notin E$ , entonces (dado que  $\dot{\phi}(t, L_i)$  existe)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\phi(t + \Delta_1, L) - \phi(t, L)}{\Delta_1} - \frac{\phi(t + \Delta_2, L) - \phi(t, L)}{\Delta_2} \right| = \\ & \left| \frac{\Delta_1 \phi(t, L)}{\Delta_1} - \frac{\Delta_2 \phi(t, L)}{\Delta_2} \pm \frac{\phi(t + \Delta_1, L_i) - \phi(t, L_i)}{\Delta_1} \pm \frac{\phi(t + \Delta_2, L_i) - \phi(t, L_i)}{\Delta_2} \right| = \\ & = \left| \frac{\phi(t + \Delta_1, L - L_i) - \phi(t, L - L_i)}{\Delta_1} - \frac{\phi(t + \Delta_2, L - L_i) - \phi(t, L - L_i)}{\Delta_2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\phi(t + \Delta_1, L_i) - \phi(t, L_i)}{\Delta_1} - \frac{\phi(t + \Delta_2, L_i) - \phi(t, L_i)}{\Delta_2} \right| \leq \\ & \leq 2\|L - L_i\|c + \epsilon' \leq \epsilon \end{aligned}$$

si  $\|L - L_i\|, \Delta_1, \Delta_2$  son suficientemente pequeños.

Luego,  $\dot{\phi}(t, L)$  existe salvo en el conjunto  $E$  de medida cero.

También por linealidad, propiedades de límites y propiedad (III), para todo  $t \in E$

$$(I) \quad \dot{\phi}(t, L_1 + L_2) = \dot{\phi}(t, L_1) + \dot{\phi}(t, L_2)$$

$$(II) \quad \dot{\phi}(t, kL) = k\dot{\phi}(t, L)$$

$$(III) \quad |\dot{\phi}(t, L)| \leq c\|L\|.$$

Luego,  $\dot{\phi}(t, L) \in B^*$  y se tiene  $\|\dot{\phi}(t, \cdot)\| \leq c$  para todo  $t \notin E$ .

Llamaremos  $g_t(L) := \dot{\phi}(t, L)$ . Como  $\phi(t, L)$  es AC entonces

$$\mathcal{F}(L) = \lim_{i \rightarrow \infty} G_1^i(L) - \lim_{i \rightarrow \infty} G_0^i(L) = \phi(1, L) - \phi(0, L) = \int_0^1 \dot{\phi}(t, L) dt = \int_0^1 g_t(L) dt.$$

¿Cuál es la naturaleza de  $g_t$ ?



Sabemos que  $\|g_{t_0}\| \leq c$  para todo  $t_0 \notin E$ . Además

$$\begin{aligned} & \frac{\phi(t_0 + \Delta, L) - \phi(t_0, L)}{\Delta} = \\ & = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(G_{t_0+\Delta}^i(L) - G_{t_0}^i(L))}{\Delta} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^{t_0+\Delta} L_e(y^i, \dot{y}^i) dt}{\Delta}. \end{aligned}$$

Tómese un  $L \in B$  tal que  $L(p) = 0$  si  $p = (y(t_0), \dot{x})$  cualquiera sea  $\dot{x}$  con  $|\dot{x}| = 1$ .

Luego,  $L_e(p) = 0$  si  $p = (y(t_0), \dot{x})$  con  $|\dot{x}| \leq c$ . Este último conjunto de puntos,  $D$ , es compacto y por lo tanto, existe un abierto  $D'$  que lo contiene (y que podemos suponer formado por puntos a una distancia  $< s$  de  $D$ ) de tal manera que sobre  $D'$ ,  $|L_e| < \epsilon$ .

Tómese  $i_0$  tal que

$$|y^i(t_0) - y(t_0)| < s/2 \text{ para todo } i \geq i_0.$$

También

$$\left| \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \dot{y}^i dt \right| \leq \int_{t_0}^{t_0+\Delta} |\dot{y}^i| dt \leq c\Delta < s/2 \text{ si } \Delta < s/2c.$$

De aquí resulta que  $|y(t_0) - y^i(t_0 + \Delta)| < s$  si  $\Delta < s/2c$ , para todo  $i \geq i_0$ .

Luego,  $(y^i(t), \dot{y}^i(t))$ ,  $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$  con  $\Delta < s/2c$ , para todo  $i \geq i_0$ , pertenece a  $D'$  (salvo medida cero de  $[t_0, t_0 + \Delta]$ ). Entonces

$$\left| \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \frac{L_e(y^i, \dot{y}^i) dt}{\Delta} \right| \leq \epsilon \text{ para todo } i \geq i_0, \Delta < s/2c.$$

Hemos demostrado que si  $t_0 \notin E$  entonces  $|\dot{\phi}(t_0, L)| \leq \epsilon$  para esos  $L$ .

Luego,  $g_{t_0}(L) = 0$  con  $L$  tal que  $L(p) = 0$  si  $p = (y(t_0), |\dot{x}| = 1)$ . Además,  $g_{t_0}$  pertenece al cono positivo. Por el teorema de representación de Riesz existe una medida positiva  $\mu$  concentrada en los puntos  $p = (y(t_0), |\dot{x}| = 1)$  tal que

$$g_{t_0}(L) = \int_A L d\mu \text{ para todo } L \in B$$

i.e.,  $g_{t_0}$  es un elemento generalizado de línea.

Calculemos la resultante de  $g_{t_0} : (y(t_0), \int_A \theta d\mu(t_0))$ .

Calculemos la primer componente de  $\int_A \theta d\mu(t_0)$

$$\dot{\phi}(t_0, L_1) = g_{t_0}(L_1) = \int_A L_1 d\mu(t_0) \text{ con } L_1 \equiv \dot{x}_1.$$

Dado que  $L_{1e} = \dot{x}_1$  entonces

$$\begin{aligned} & \frac{\phi(t_0 + \Delta, L_1) - \phi(t_0, L_1)}{\Delta} = \\ & = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^{t_0+\Delta} L_{1e}(y^i, \dot{y}^i) dt}{\Delta} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\int_{t_0}^{t_0+\Delta} \dot{y}_1^i(t) dt}{\Delta} = \\ & = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{y_1^i(t_0 + \Delta) - y_1^i(t_0)}{\Delta} = \frac{y_1(t_0 + \Delta) - y_1(t_0)}{\Delta}. \end{aligned}$$

Luego,  $\dot{\phi}(t_0, L_1) = \dot{y}_1(t_0)$  e  $\int_A \theta d\mu(t_0) = \dot{y}(t_0)$ , QED.

**X.6. Suficiencia.**

Está claro que la función

$$\mathcal{F}(L) = \int_0^1 g_t(L) dt \text{ para todo } L \in B = C(A)$$

está por hipótesis bien definida y es una funcional lineal perteneciente al cono positivo.

Queremos probar que es una curva generalizada. Para ello construiremos funcionales lineales pertenecientes al cono positivo,  $G_1, G_2, G_3$ , con ciertas propiedades. La última de ellas será, en realidad, una funcional admisible cuya curva asociada es un polígono.

Para definir  $G_1$ , reemplácese  $x(t)$  por  $(1 - \epsilon)x(t)$  y la medida  $\mu$ , que define a  $g_t$ , por  $(1 - \epsilon)\mu_\epsilon$  para casi todo  $t$ , donde  $\mu_\epsilon$  está concentrada en  $\{((1 - \epsilon)x(t), \dot{x}) : |\dot{x}| = 1\}$  y tiene la "misma distribución que  $\mu$ ". Definimos

$$g_{1,t}(L) := \int_A L d(1 - \epsilon)\mu_\epsilon.$$

La funcional  $G_1$  (definida mas abajo) tiene la propiedad que  $G_1 \in B^*$  (más aún al cono positivo) ya que si  $L^\epsilon(x, \dot{x}) := L((1 - \epsilon)x, \dot{x})$ :

(I)

$$\begin{aligned} G_1(L) &:= \int_0^1 (1 - \epsilon)g_t(L^\epsilon) dt = (1 - \epsilon)\mathcal{F}(L^\epsilon) = \\ &= \int_0^1 g_{1,t}(L) dt \text{ para todo } L \in B, \text{ pues} \\ g_t(L^\epsilon) &= \int L^\epsilon(x(t), \dot{x}) d\mu_t = \int L((1 - \epsilon)x(t), \dot{x}) d\mu_t = g_{1,t}(L)/(1 - \epsilon). \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} G_1(L_1 + L_2) &= (1 - \epsilon)\mathcal{F}((L_1 + L_2)^\epsilon) = (1 - \epsilon)\mathcal{F}(L_1^\epsilon + L_2^\epsilon) = \\ &= (1 - \epsilon)(\mathcal{F}(L_1^\epsilon) + \mathcal{F}(L_2^\epsilon)) = G_1(L_1) + G_1(L_2). \end{aligned}$$

(III)

$$G_1(kL_1) = (1 - \epsilon)\mathcal{F}((kL_1)^\epsilon) = (1 - \epsilon)\mathcal{F}(kL_1^\epsilon) = kG_1(L_1).$$

(IV)

$$|G_1(L)| = |(1 - \epsilon)\mathcal{F}(L^\epsilon)| \leq |1 - \epsilon| \|\mathcal{F}\| \|L^\epsilon\| \leq |1 - \epsilon| \|\mathcal{F}\| \|L\|.$$

La resultante del elemento generalizado de línea  $g_{1,t}$  es  $(x(t)(1 - \epsilon), \dot{x}(t)(1 - \epsilon))$  para casi todo  $t$ ,  $\|g_{1,t}\| \leq (1 - \epsilon)\|g_t\|$  para casi todo  $t$  y finalmente

$$G_1(L) \rightarrow \mathcal{F}(L) \quad L \in B \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0$$

ya que  $L^\epsilon \rightarrow L$  uniformemente.

Dado que  $G_1$  es, en cierta forma, "exactamente igual" a  $G$  (i.e; en el sentido de su representación: las hipótesis del teorema), seguiremos llamando  $x(t)$  a su curva 'soporte' y  $\mu$  a la medida asociada a  $g_{1t}$ .

Para definir  $G_2$ , tómesese la esfera  $|\dot{x}| = 1$  en  $\mathcal{R}^n$  y divídase ésta en  $N$  conjuntos disjuntos  $\Theta_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$ , tomando una dirección representativa  $\theta_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$ , de cada conjunto  $\Theta_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$ , de tal manera que

$$|\theta - \theta_\alpha| < s \text{ para todo } \theta \in \Theta_\alpha, \alpha = 1, \dots, N, 1 > s > 0.$$

Sea ahora  $m = N + 2n$ . Sean además  $\theta_\alpha, \alpha = N + 1, \dots, m$ , las direcciones paralelas y antiparalelas a los ejes de  $\mathcal{R}^n$ . Los  $\Theta_\alpha$  deberán ser Borel-medibles.

Al definir  $G_2$ ,  $x(t)$  (la curva 'soporte') permanecerá igual. Reemplazaremos  $\mu(t)$  por una medida discreta que tendrá pesos positivos  $\mu_\alpha(t), \alpha = 1, \dots, m$ , asociada a los vectores  $(x(t), \theta_\alpha), \alpha = 1, \dots, m$ .

Con esto la resultante no será afectada mientras que la diferencia  $|\sum_{\alpha=1}^m \mu_\alpha - \int d\mu|$  será arbitrariamente pequeña.

Definimos(\*)

$$\mu_\alpha(t) = s/m + \int_{\Theta_\alpha} d\mu, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Para definir los otros  $\mu_\alpha(t), \alpha = N + 1, \dots, m$ , consideremos el vector

$$\begin{aligned} \xi &:= \int \theta d\mu - \sum_{\alpha=1}^N \theta_\alpha \mu_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Theta_\alpha} \theta d\mu - \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Theta_\alpha} \theta_\alpha d\mu - \sum_{\alpha=1}^N (s/m) \theta_\alpha = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Theta_\alpha} (\theta - \theta_\alpha) d\mu - \sum_{\alpha=1}^N (s/m) \theta_\alpha. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} |\xi| &\leq \sum_{\alpha=1}^N \left| \int_{\Theta_\alpha} (\theta - \theta_\alpha) d\mu \right| + \sum_{\alpha=1}^N \left| \frac{s}{m} \theta_\alpha \right| \leq \\ &\leq \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Theta_\alpha} |\theta - \theta_\alpha| d\mu + s \cdot N/m \leq \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Theta_\alpha} s d\mu + s \leq s(\bar{\mu} + 1) \end{aligned}$$

donde  $\bar{\mu} = \int d\mu = \|g_{1t}\|$ . Entonces definimos

$$\mu_\alpha(t) = s/m + \max(\xi \cdot \theta_\alpha, 0), \quad \alpha = N + 1, \dots, m$$

donde  $\xi \cdot \theta_\alpha$  es el producto escalar y  $\max(a, b)$  denota el mayor de  $a$  y  $b$ .

(\*)  $\mu$  está concentrada en  $\{(x(t), |\dot{x}| = 1)\} \subset \mathcal{R}^{2n}$ , mientras que, por definición,  $\Theta_\alpha$  está definida en un espacio  $\mathcal{R}^n$ . Esta integral debe entenderse sobre un espacio  $\mathcal{R}^n$  de tal manera que el isomorfismo  $(x(t), \dot{x}) \rightarrow (\dot{x}, t)$  fijo, "copia" la medida (en  $\mathcal{R}^{2n}$  y para  $t$  fijo) en  $\mathcal{R}^n$ .

Así  $G_2$  se compone de la curva  $x(t)$  y para casi todo  $t$ ,  $g_{2t}$ , de un elemento generalizado de línea cuya medida positiva está concentrada en los puntos  $(x(t), \theta_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ , con pesos  $\mu_\alpha(t)$ .

Veamos que  $G_2$  está bien definida.

La resultante de  $g_{2t}$  es

$$(x(t), g_{2t}(\dot{x}_1), \dots, g_{2t}(\dot{x}_n)) = (x(t), \sum_{\alpha=1}^m \theta_\alpha \mu_\alpha(t)).$$

Por definición de  $\mu_\alpha$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^m \theta_\alpha \mu_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^N \theta_\alpha \mu_\alpha + \sum_{\alpha=N+1}^m \theta_\alpha \mu_\alpha = \int \theta d\mu - \xi + \sum_{\alpha=N+1}^m \theta_\alpha (s/m + \max(\xi \cdot \theta_\alpha, 0)) = \\ &= \int \theta d\mu - \xi + \sum_{N+1}^m \theta_\alpha s/m + \sum_{N+1}^m \theta_\alpha \max(\xi \cdot \theta_\alpha, 0) = \int \theta d\mu = \dot{x}(t). \end{aligned}$$

Además  $\sum_{\alpha=1}^m \mu_\alpha = \|g_{2t}\| \leq \bar{\mu} + s + m|\xi|$  (i.e; está uniformemente acotado) y  $g_{2t}(L) = \sum_{\alpha=1}^m L(x(t), \theta_\alpha) \mu_\alpha(t)$  es medible en  $t$  (cf. Nota Final).

Luego,

$$G_2(L) = \int_0^1 g_{2t}(L) dt \text{ es un elemento de } B^*,$$

también,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\alpha=1}^m \mu_\alpha - \bar{\mu} = \sum_{\alpha=1}^N \mu_\alpha + \sum_{\alpha=N+1}^m \mu_\alpha - \bar{\mu} = \\ &= \frac{s \cdot N}{m} + \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Theta_\alpha} d\mu + \frac{s(m-N)}{m} + \sum_{N+1}^m \max(\xi \cdot \theta_\alpha, 0) - \bar{\mu} = \\ &= s + \sum_{N+1}^m \max(\xi \cdot \theta_\alpha, 0) \leq s + m|\xi| \leq s(1 + m\bar{\mu} + m). \end{aligned}$$

Si  $L \in B = C(A)$  sea  $|L(p) - L(p')| < \epsilon$  si  $|p - p'| < s$ ,  $\sup_{p \in A} |L(p)| \leq M$ , entonces

$$\begin{aligned} |g_{2t}(L) - \int_A L d\mu| &= \left| \sum_{\alpha=1}^m L(x(t), \theta_\alpha) \mu_\alpha(t) - \int_A L(x(t), \dot{x}) d\mu \right| = \\ &= \left| \sum_{\alpha=1}^N L(x(t), \theta_\alpha) \mu_\alpha(t) + \sum_{\alpha=N+1}^m L(x(t), \theta_\alpha) \mu_\alpha(t) - \int_A L(x(t), \dot{x}) d\mu \right| \leq \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{\alpha=1}^N L(x(t), \theta_\alpha) \int_{\Theta_\alpha} d\mu - \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Theta_\alpha} L(x(t), \dot{x}) d\mu \right| + \left| \sum_{\alpha=N+1}^m L(x(t), \theta_\alpha) \mu_\alpha(t) \right| \leq \leq \epsilon \bar{\mu} + M \sum_{N+1}^m \mu_\alpha(t) \leq \epsilon \bar{\mu} + M(s + m|\xi|) \text{ para todo } t \text{ salvo medida cero.}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |G_2(L) - G_1(L)| &= \left| \int_0^1 g_{2t}(L) dt - \int_0^1 g_{1t}(L) dt \right| = \\ &= \left| \int_0^1 (g_{2t}(L) - \int_A L d\mu) dt \right| \leq \int_0^1 \left| g_{2t}(L) - \int_A L d\mu \right| dt = o(1) \text{ para } s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Luego  $G_2(L) \rightarrow G_1(L)$  para todo  $L \in B$  si  $s \rightarrow 0$ .

Veamos que con las funciones  $\mu_\alpha(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ , se puede reconstruir la curva  $x(t)$  dado  $x(0)$ .

Esto es cierto ya que

$$\sum_{\alpha=1}^m \theta_\alpha \mu_\alpha = \dot{x} \quad (\text{salvo medida cero}).$$

Integrando miembro a miembro

$$\sum_{\alpha=1}^m \theta_\alpha \lambda_\alpha(t) = x(t) - x(0)$$

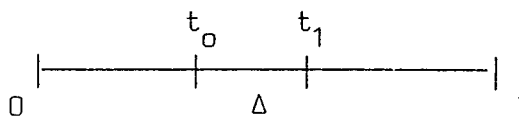
donde  $\int_0^t \mu_\alpha(\tau) d\tau = \lambda_\alpha(t)$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ .

Construiremos finalmente  $G_3$ . Para ello aproximaremos las funciones  $\lambda_\alpha(t)$  por funciones  $s_\alpha(t)$ .

Dividamos el intervalo  $[0, 1]$  en  $\nu$  intervalos iguales  $\Delta$  y cada  $\Delta$  en  $m$  intervalos más,  $\Delta_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$  (los cuales no tienen por qué ser iguales y cuya longitud se va a definir abajo).

Si llamamos

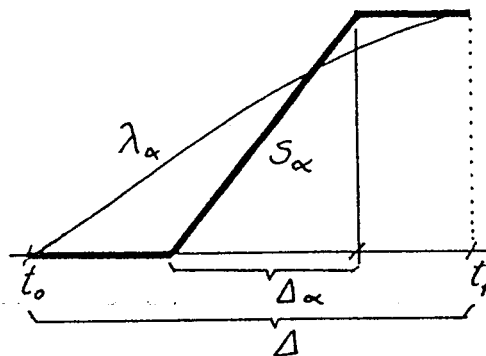
$$\lambda = \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha.$$



Entonces (ver fig.1)

$$|\Delta_\alpha| := \frac{|\Delta \lambda_\alpha|}{|\Delta \lambda|} \cdot |\Delta| = \frac{\lambda_\alpha(t_1) - \lambda_\alpha(t_0)}{\lambda(t_1) - \lambda(t_0)} \cdot |\Delta|.$$

Como las funciones  $\lambda_\alpha$  son estrictamente crecientes, entonces  $|\Delta_\alpha| \neq 0$ . Además  $\sum_{\alpha=1}^m |\Delta_\alpha| = \Delta$ . Definimos, para todo  $t \in \Delta$ ,  $s_\alpha(t)$  como sigue: si  $t \notin \Delta_\alpha$



entonces  $s_\alpha(t)$  es constante e igual a  $\lambda_\alpha(t_0)$  a la izquierda de  $\Delta_\alpha$ , e igual a  $\lambda_\alpha(t_1)$  a la derecha de  $\Delta_\alpha$  (Fig.1). Si  $t \in \Delta_\alpha$  entonces es lineal con pendiente

$$\frac{\Delta\lambda_\alpha}{|\Delta_\alpha|} = \frac{\Delta\lambda}{|\Delta|}.$$

Dado que existe un  $k' > 0$  tal que

$$0 \leq \sum_{\alpha=1}^m \mu_\alpha(t) \leq k',$$

$$\left| \int_{\Delta} \sum_{\alpha=1}^m \mu_\alpha(t) \right| = |\Delta\lambda| \leq k'|\Delta|$$

y por lo tanto  $0 \leq \dot{s}_\alpha(t) \leq k'$  para  $t \in [0, 1]$ . Además por construcción tenemos que  $|s_\alpha(t) - \lambda_\alpha(t)| \leq \Delta\lambda_\alpha \leq k'|\Delta_\alpha|$ .

Ahora definimos (en la forma inversa a la que se encuentra  $x(t)$  en función de  $\lambda_\alpha(t)$ ) una función vectorial  $\hat{x}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,

$$\hat{x}(t) := x(0) + \sum_{\alpha=1}^m \theta_\alpha s_\alpha(t).$$

Aquí se ve la necesidad de la construcción de  $G_1$ . Dado que  $|\hat{x}(t) - x(t)| = \left| \sum_{\alpha=1}^m \theta_\alpha (s_\alpha - \lambda_\alpha) \right| \leq \sum_{\alpha=1}^m |s_\alpha - \lambda_\alpha|$ , y como las funciones  $s_\alpha$  aproximan uniformemente a  $\lambda_\alpha$ , resulta que  $\hat{x}(t)$  pertenece al cubo, cualquiera sea  $t$ .

Esta  $\hat{x}$  es la representación paramétrica de un polígono (que es una curva reparametrizable).

A la funcional lineal asociada la llamamos  $G_3$ . Veamos

$$\begin{aligned} |G_3(L) - G_2(L)| &= \left| \int_0^1 L_e(\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) dt - \int_0^1 g_{2t}(L) dt \right| = \\ &= \left| \sum_{\alpha=1}^m \int_0^1 L(\hat{x}(t), \theta_\alpha) \dot{s}_\alpha(t) dt - \int_0^1 \left( \sum_{\alpha=1}^m L(x(t), \theta_\alpha) \mu_\alpha(t) \right) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{\alpha=1}^m \left| \left( \int_0^1 L(\hat{x}(t), \theta_\alpha) \dot{s}_\alpha(t) dt - \int_0^1 L(x(t), \theta_\alpha) \mu_\alpha(t) dt \right) \right|. \end{aligned}$$

Dado que fijamos  $G_2$ , entonces  $m$  está fijo. Para probar que  $G_3(L) \rightarrow G_2(L)$  si  $\Delta \rightarrow 0$  bastará probar que

$$\int_0^1 L(\hat{x}(t), \theta_\alpha) \dot{s}_\alpha(t) dt - \int_0^1 L(x(t), \theta_\alpha) \mu_\alpha(t) dt \rightarrow 0 \text{ si } \Delta \rightarrow 0,$$

pero obsérvese que

$$\int_0^1 (L(\hat{x}(t), \theta_\alpha) - L(x(t), \theta_\alpha)) \dot{s}_\alpha(t) dt \rightarrow 0 \text{ si } \Delta \rightarrow 0,$$

ya que  $L(\hat{x}(t), \theta_\alpha) \rightarrow L(x(t), \theta_\alpha)$  (uniformemente) y  $|\dot{s}_\alpha(t)| \leq k'$ . Luego bastará sólo probar que

$$\int_0^1 L(x(t), \theta_\alpha) (\dot{s}_\alpha(t) - \mu_\alpha(t)) dt \rightarrow 0 \text{ si } \Delta \rightarrow 0.$$

Este último problema es similar al siguiente (la nomenclatura es nueva, no guarda relación con la anterior).

Sean

$$\left. \begin{array}{l} |g_1^i(t)| \leq k \\ |g_2(t)| \leq k \end{array} \right\} \text{ para todo } i; \text{ para todo } t \in [0, 1]; g_1^i(t), g_2(t) \text{ funciones medibles.}$$

Además para todo  $\epsilon$  existe  $i_0$  tal que

$$\left| \int_0^t g_1^i(\tau) d\tau - \int_0^t g_2(\tau) d\tau \right| < \epsilon \text{ para todo } t \in [0, 1], \text{ para todo } i \geq i_0.$$

Entonces debemos demostrar que si  $f(t)$  es continua en  $[0, 1]$ , entonces

$$\int_0^1 f(t)(g_1^i(t) - g_2(t)) dt \rightarrow 0 \text{ si } i \rightarrow \infty.$$

Si  $f_N(t)$  es una función a saltos entonces obviamente

$$\int_0^1 f_N(t)(g_1^i(t) - g_2(t)) dt \rightarrow 0 \text{ si } i \rightarrow \infty.$$

Además si  $f_N(t)$  es una sucesión de funciones a saltos tal que  $f_N(t) \rightarrow f(t)$  (uniformemente) entonces

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 (f(t) - f_N(t))(g_1^i(t) - g_2(t)) dt \right| \leq \\ & \leq \int_0^1 |f - f_N| (|g_1^i| + |g_2|) dt \leq 2k\epsilon \text{ para todo } i, \text{ para todo } N \geq N_0. \end{aligned}$$

Luego, para la expresión anterior fijemos  $N = N_0$  y sea  $i_0$  tal que

$$\left| \int_0^1 f_{N_0}(t)(g_1^i(t) - g_2(t)) dt \right| < \epsilon \text{ si } i \geq i_0.$$

Luego

$$\left| \int_0^1 f(t)(g_1^i(t) - g_2(t))dt \right| = \left| \int_0^1 f(g_1^i - g_2)dt \pm \int_0^1 f_{N_0}(g_1^i - g_2)dt \right| \leq 2k\epsilon + \epsilon.$$

Esto completa la demostración del teorema.

NOTA FINAL. Que  $g_{2t}(L)$ , para todo  $L \in B$ ,  $t \in [0, 1]$ , es una función medible (y si lo es, sumable por la acotación uniforme de  $g_{2t}$ ) depende de los primeros  $N$  pesos  $\mu_\alpha(t)$ , ya que si estos lo son entonces  $\xi = \int \theta d\mu - \sum_{\alpha=1}^N \theta_\alpha \mu_\alpha$  es un vector con componentes funciones medibles pues  $\int \theta d\mu = \dot{x}(t)$  es medible, y por lo tanto  $\max(\xi \cdot \theta_\alpha, 0)$ ,  $\alpha = N + 1, \dots, m$ , es medible y las  $\mu_\alpha(t)$ ,  $\alpha = N + 1, \dots, m$ , también lo son.

Demostremos que  $\mu_\alpha(t)$   $\alpha = 1, \dots, N$  son medibles. Por definición

$$\mu_\alpha(t) = s/m + \int_{\Theta_\alpha} d\mu \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Tomemos  $\alpha$  fijo. Sean  $\Theta_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , elegidos de la siguiente manera:

(I)  $\Theta_\alpha = \bigcap_1^\infty a_i = \bigcup_1^\infty C_i$ .

(II)  $a_i$  abiertos tales que  $a_i \supset a_{i+1}$  para todo  $i$ .

(III)  $C_i$  cerrados tales que  $C_{i+1} \supset C_i$  para todo  $i$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , para casi todo  $t$  existe  $i_0(t)$  tal que si  $i \geq i_0$ , entonces

$$0 \leq \mu a_i - \mu C_i \leq \epsilon.$$

Por lo que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu C_i = \mu \Theta_\alpha \quad \text{para todo } t \text{ c.d..}$$

Sea  $f^i(\dot{x}) = f^i(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$  una sucesión de funciones continuas tales que

(I)  $f^i(\dot{x}) = 1$  si  $\dot{x} \in C_i$ ,

(II)  $f^i(\dot{x}) = 0$  si  $\dot{x} \notin a_i$ ,

(III)  $0 \leq f^i(\dot{x}) \leq 1$  para todo  $\dot{x}$ .

Luego

$$g_{1t}(f^i(\dot{x})) = \int f^i(\dot{x}) d\mu(t) \rightarrow \int_{\Theta_\alpha} d\mu.$$

Como  $g_{1t}(f^i(\dot{x}))$  es medible en  $t$ , entonces  $\int_{\Theta_\alpha} d\mu$  es medible.



CAPITULO XI  
 FUNCIONES ELIPTICAS. FUNCION MODULAR.

1. Funciones elípticas.

**Definición 1.** Se llama *función elíptica* a toda función meromorfa  $f(z)$  definida en el plano complejo  $C$ , doblemente periódica. Esto es, existen dos números complejos no nulos  $\omega_1, \omega_2$ , de cociente no real tales que  $f(z + n\omega_1 + m\omega_2) = f(z)$  para todo  $n, m \in Z$ .

De aquí en adelante  $\omega_1, \omega_2$  se considerarán fijos, y se sobreentenderá que hablamos de funciones elípticas con los *mismos períodos*, salvo cuando se aclare explícitamente que no es así.

De la definición sigue inmediatamente:

**Proposición 1.**

(i) Si  $f, g$  son funciones elípticas entonces también lo son  $f + g, f/g, f \cdot g$ . En otras palabras, las funciones elípticas forman un cuerpo.

(ii) Si  $f$  es una función elíptica entonces  $\frac{df}{dz} =: f'$  también es una función elíptica.

Por la doble periodicidad de  $f(z)$ , ella queda determinada por sus valores sobre un *paralelogramo típico*:  $\{z = s\omega_1 + t\omega_2 : s \in [a, a + 1), t \in [b, b + 1)\}$ ,  $a, b$  reales. Vale

**Proposición 2.**

(i) Si la función elíptica  $f(z)$  no tiene polos entonces es constante.

(ii) La suma de los residuos de los polos de  $f(z)$  que caen en un paralelogramo típico es 0.

**Demostración.**

Si  $f(z)$  no tiene polos entonces es una función entera, acotada. Luego, (i) es consecuencia del teorema de Liouville.

(ii) Sea  $\Gamma$  el contorno de un paralelogramo típico sobre el cual no haya polos. Por la doble periodicidad de  $f$ ,  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ . Pero esa integral es  $2\pi i$  veces la suma de los residuos de los polos de  $f$  que caen en dicho paralelogramo, QED.

**Corolario 1.** No existen funciones elípticas con un sólo polo y de primer orden.

Pero se puede decir más.

**Corolario 2.** La suma de los órdenes de todos los polos de  $f$  que caen en un paralelogramo típico es igual a la suma de los órdenes de todos los ceros de  $f$  que caen en un paralelogramo típico.

En efecto, de la Prop.1 sigue que  $f'/f$  es elíptica. Luego,

$$\#(\text{ceros de } f \text{ encerrados por } \Gamma) - \#(\text{polos de } f \text{ encerrados por } \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz = 0.$$

**Definición 2.** Se llama orden de la función elíptica  $f$  al número de ceros de  $f$  (contados con sus multiplicidades) que caen en un paralelogramo típico.

## 2. Construcción de funciones elípticas de orden positivo.

**Proposición 3.** Sea  $j > 2$ . La serie de funciones meromorfas  $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^j}$ , converge uniformemente en cualquier paralelogramo típico. La serie define entonces una función elíptica de orden  $j$ .

### Demostración.

Sea  $k = \min \{|x\omega_1 + y\omega_2| : x, y \text{ reales}, |x + yi| = 1\}$ . Obsérvese que  $k > 0$ , y verifica,  $|x\omega_1 + y\omega_2| \geq k|x + yi|$  para todo par de números reales  $\{x, y\}$ . Luego,

$$(1) \quad k \cdot \max \{|m|, |n|\} \leq k \cdot |m + in| \leq |w|, \quad w = m\omega_1 + n\omega_2, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Si  $z$  pertenece al paralelogramo fundamental:  $\{z = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 : 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\}$  y  $\max \{|m|, |n|\} \geq 2$  entonces por (1),  $k \cdot \max \{|m|, |n|\} \leq k'|z - m\omega_1 - n\omega_2|$ , o sea,

$$\frac{1}{|z - m\omega_1 - n\omega_2|} \leq \frac{k'}{k \cdot \max \{|m|, |n|\}}.$$

Además, la siguiente serie de términos positivos verifica para  $j > 2$ ,

$$(2) \quad \sum_{m,n \neq 0,0} \frac{1}{(\max \{|m|, |n|\})^j} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\#\{\{m, n\} : \max \{|m|, |n|\} = N\}}{N^j} \leq 8 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^{j-1}}.$$

Por tanto,  $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^j}$  converge a una función meromorfa  $f_j(z)$  en el paralelogramo fundamental; en efecto, un resto de esta serie tiene como mayorante un múltiplo de la serie numérica (2). Se comprueba fácilmente que  $f_j(z + \omega_1) = f_j(z + \omega_2) = f_j(z)$ . Vale entonces que existen funciones elípticas de orden  $j \geq 3$ . La serie que define  $f_j(z)$  no converge para  $j = 2$ , pero veremos que se la puede modificar para construir una función elíptica de orden 2, la función de Weierstrass.

**Proposición 4.** Sea  $\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n \neq 0,0} \left[ \frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right]$ . La serie de la derecha converge uniformemente sobre compactos a una función elíptica de orden 2.

### Demostración.

Obsérvese que el corchete en la sumatoria vale

$$[\cdot] = \frac{z(2m\omega_1 + 2n\omega_2 - z)}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2(m\omega_1 + n\omega_2)^2}.$$

Si  $z$  pertenece al paralelogramo fundamental

$$\{z = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 : 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\} \text{ y } \max \{|m|, |n|\} \geq 2, \text{ entonces } |[\cdot]| \leq \frac{C}{(\max \{|m|, |n|\})^3}.$$

De esto se deduce la uniforme convergencia sobre compactos de la serie,

$$(3) \quad \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n \neq 0,0} \left[ \frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right],$$

o sea,  $\wp(z)$  es meromorfa en el plano complejo.

Por otro lado,  $\wp(z + \omega_1) - \wp(z) = \sum_{(m,n)} \left[ \frac{1}{(z - (m-1)\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} \right]$  donde la suma se extiende sobre *todos* los pares de enteros  $m, n$ . Si  $z$  se mantiene acotado, la serie doble obtenida de la precedente eliminando los primeros sumandos admite una mayorante convergente independiente de esos  $z$ , por tanto, sumando primero en  $m$  se comprueba que  $\wp(z + m\omega_1) - \wp(z) = 0$ . Análogamente se ve que  $\wp(z + \omega_2) - \wp(z) = 0$ , QED.

Veremos que la función elíptica  $\wp(z)$ , de orden 2, junto con su derivada, de orden 3,  $\frac{d\wp(z)}{dz} = -2f_3(z)$ , generan todas las funciones elípticas en el sentido que si  $f(z)$  es una función elíptica entonces puede escribirse como una expresión racional en  $\wp(z)$  y  $\wp'(z)$ .

Recordemos que  $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$  donde  $\sum'$  indica que la suma se extiende sobre los  $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$  no nulos.

**Teorema 1.** Si  $f(z)$  es elíptica entonces existen funciones racionales  $R_i$  tales que

$$f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z).R_2(\wp(z))$$

### Demostración.

Sea  $f$  no trivial.  $f$  puede escribirse en forma única como suma de una función par,  $F(z) = (f(z) + f(-z))/2$ , y una función impar,  $G(z) = (f(z) - f(-z))/2$ , ambas elípticas.

Supongamos que en  $0, \omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$ ,  $F(z)$  no tenga ceros. Los ceros de  $F$  vienen apareados. En efecto, si  $F$  tiene un cero de orden  $p$  en un  $a \in$  paralelogramo fundamental, entonces también tiene un cero de orden  $p$  en  $-a + m\omega_1 + n\omega_2 \neq a$ , que para  $m$  y  $n$  adecuados pertenecerá al paralelogramo fundamental. Para este punto  $a$ , consideremos la función elíptica par  $\wp(z) - \wp(a)$ . Como  $\wp(z)$  tiene un polo de orden 2 en todo paralelogramo típico, los ceros de  $\wp(z) - \wp(a)$  en  $a$  y en  $-a + m\omega_1 + n\omega_2$  tienen que ser simples. Por ello  $(\wp(z) - \wp(a))^p$  tiene un cero de orden  $p$  en  $a$  y otro de orden  $p$  en  $-a + m\omega_1 + n\omega_2$ . Luego, un producto finito de la forma:

$$A(\wp(z) - \wp(a))^p \dots (\wp(z) - \wp(b))^q$$

tiene en el paralelogramo fundamental los mismos ceros que  $F$ , con sus multiplicidades y un polo en el origen de orden  $2(p + \dots + q)$ .

Aplicando esto a  $1/F$ , bajo la hipótesis que  $F$  no tenga polos en  $0, \omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$ , se ve que un producto:

$$B = (\wp(z) - \wp(c))^r \dots (\wp(z) - \wp(d))^s$$

tiene en el paralelogramo fundamental los mismos ceros que  $1/F$  y un polo en el origen de orden  $2(r + \dots + s) = 2(p + \dots + q)$ .

Luego,  $A/(F(z)B)$  coincide con una constante  $C$  y  $F(z) = A/(C.B) = R_1(\wp(z))$ .

La hipótesis sobre la ubicación de los ceros y polos de  $F$  se puede lograr considerando en lugar de  $F$  la función elíptica par  $\tilde{F}(z) = C_1 + 1/(F(z) + C_2)$  con constantes  $C_i$  adecuadamente elegidas. Como  $F(z)$  es una función racional de  $\tilde{F}(z)$ , se obtiene que  $F(z) = R_1(\wp(z))$ , sin la hipótesis restrictiva sobre la ubicación de los ceros y polos de  $F(z)$ .

Para terminar, obsérvese que  $G(z)/\wp'(z)$  es una función elíptica par. Entonces por lo ya demostrado  $G(z)/\wp'(z) = R_2(\wp(z))$ , y se concluye el teorema. QED.

### 3. Conexión entre $\wp$ y $\wp'$ .

Nuestro siguiente objetivo es demostrar el Teorema 2.

Sean  $G_h = G_h(w_1, w_2) = \sum_{w \in W \setminus 0} \frac{1}{w^h}$  y  $W = \{mw_1 + nw_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ .

#### Teorema 2.

(i) Existen constantes  $g_2, g_3$ , tales que

$$\left(\frac{d\wp}{dz}\right)^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

(ii) La dependencia de  $g_2, g_3$  de  $w_i$  se expresa como

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6.$$

#### Demostración.

Calculamos el desarrollo de Laurent en 0 de una primitiva de  $\wp(z)$ .

Integrando de 0 a  $z$ ,  $z$  pequeño, los términos no singulares en 0 de la serie que define a  $\wp(z)$ , obtenemos una serie uniformemente convergente, la primitiva de  $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ , nula en el origen, dada por la serie:  $\sum_{w \in W \setminus 0} - \left[ \frac{1}{z-w} + \frac{z}{w^2} + \frac{1}{w} \right]$ . Luego

$$(4) \quad \zeta(z) := \frac{-1}{z} + \sum_{w \in W \setminus 0} - \left[ \frac{1}{z-w} + \frac{z}{w^2} + \frac{1}{w} \right]$$

donde  $-[\ ] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{w^{k+1}}$ , es una primitiva de  $\wp(z)$ , siendo la serie  $\zeta(z) := \frac{-1}{z} + \sum_{w \in W \setminus 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{w^{k+1}}$

absoluta y uniformemente convergente para  $z$  pequeño pues de (1) y (2) se deduce, si  $j > 2$ , que

$$k^j \sum_{w \in W \setminus 0} \frac{1}{|w|^j} \leq 8 \sum_1^{\infty} \frac{1}{N^2} = \frac{4}{3} \pi^2.$$

De (4) y el hecho que  $G_{2k+1} = 0$  para  $k = 1, 2, \dots$ , sigue que los primeros términos de la serie de Laurent de  $\zeta(z)$  son:  $\zeta(z) = -\frac{1}{z} + G_4 z^3 + G_6 z^5 + G_8 z^7 + \dots$

Derivando obtenemos los siguientes desarrollos de Laurent de  $\wp(z)$  y de  $\wp'(z)$ :

$$(5) \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots \quad \wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots$$

Usando (5) se ve que la serie de Laurent de  $(\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + 60G_4 \wp(z) + 140G_6$  sólo tiene potencias positivas de  $z$ . Entonces, en primer lugar es una función elíptica sin polos, o sea una constante, y en segundo lugar, por anularse en el origen, es 0, QED.

$[x = \wp(z), y = \wp'(z)$  es una parametrización de las raíces de la ecuación algebraica

$$(6) \quad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

del mismo modo que  $x = \operatorname{sen}(z), y = \operatorname{cos}(z)$  es una parametrización de las raíces de  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x = \operatorname{ch}(z), y = \operatorname{sh}(z)$  es una parametrización de las raíces de  $x^2 - y^2 = 1$ .

Moviendo el látice se puede obtener cualquier valor para  $g_2$  y  $g_3$ . Como  $y^2 + ay = bx^3 + cx^2 + dx + e$  se reduce a (6) por medio de transformaciones lineales de  $x$  e  $y$ , las raíces de cualquier ecuación de esta forma se pueden parametrizar con traslaciones de múltiplos de  $x = \wp(z), y = \wp'(z)$  para un  $W$  adecuado.]

**Teorema 3.** Para  $y = 0$  las tres raíces de  $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$  son distintas (simples).

**Demostración.**

Sea  $z_0 \in \left\{ \frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2} \right\}$ , (ver Fig.1). Entonces,  $2z_0 \in W$  y el hecho que  $\wp(z)$  es una función par conduce a

$$(7) \quad \wp(z + z_0) = \wp(-z - z_0) = \wp(-z - z_0 + 2z_0) = \wp(-z + z_0).$$

Derivando en el punto  $z = 0$ , obtenemos

$$(8) \quad \wp'(z_0) = -\wp'(z_0) = 0.$$

Luego  $\wp(z) - \wp(z_0)$  tiene en  $z_0$  un cero de orden por lo menos dos. Pero esta función es elíptica de orden dos (pues tiene sólo polos de orden dos en los puntos de  $W$ ) y entonces no puede tener un cero de orden superior a dos en  $z_0$ , ni otros ceros distintos a  $z_0 + w$ ,  $w \in W$ . En particular, si  $z_1 \in \left\{ \frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2} \right\}$ ,  $z_1 \neq z_0$ , entonces  $\wp(z_1) - \wp(z_0) \neq 0$ .

Hemos probado entonces que los valores  $\wp\left(\frac{w_1}{2}\right), \wp\left(\frac{w_2}{2}\right), \wp\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)$  son distintos dos a dos. Estos tres números son raíces de la ecuación de tercer grado:  $(\wp'(z_0))^2 = 0 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ . Como son distintos, son todas las raíces, que son simples. O sea,

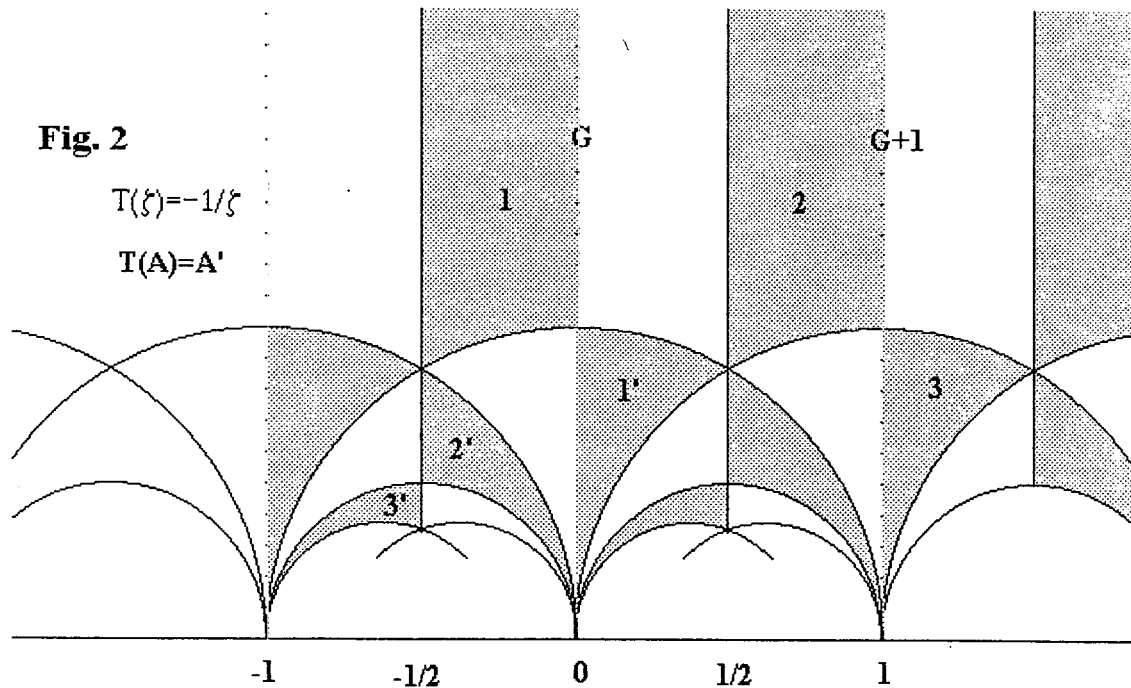
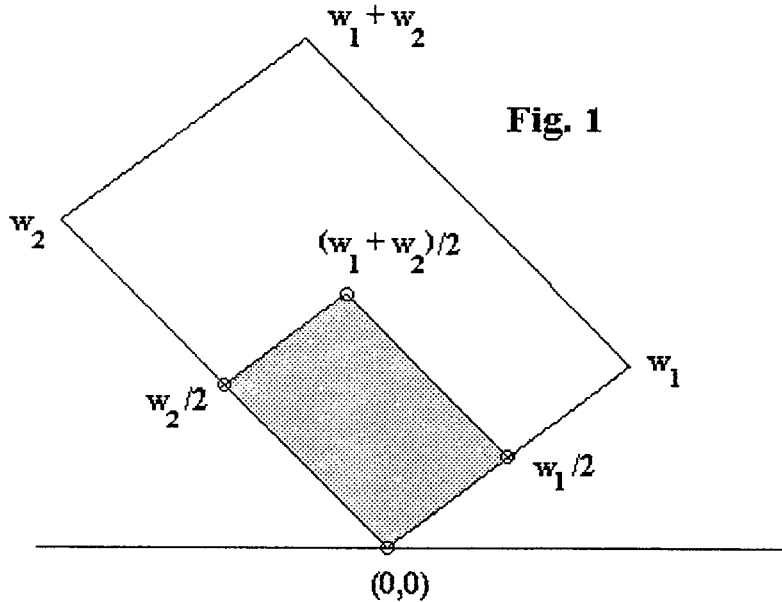
$$(9) \quad 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4 \left( x - \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) \right) \cdot \left( x - \wp\left(\frac{w_2}{2}\right) \right) \cdot \left( x - \wp\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right) \right) \quad \text{QED}$$

Como corolario tenemos  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ . En efecto,  $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$  tiene raíces simples si y sólo si su discriminante  $\Delta \neq 0$ , QED.

#### 4. La función modular $J(z)$ .

Consideremos la dependencia de los valores de  $g_2$  y  $g_3$  de  $\{w_1, w_2\}$ . De la definición (cf.(ii), Teorema 2) se ve inmediatamente que

$$(10) \quad g_2(\lambda w_1, \lambda w_2) = \frac{1}{\lambda^4} g_2(w_1, w_2) \quad g_3(\lambda w_1, \lambda w_2) = \frac{1}{\lambda^6} g_3(w_1, w_2)$$



Como las funciones en (10) dependen sólo del látice  $W$ , y no de los generadores  $w_1, w_2$  que se elijan, valen las identidades,

$$(11) \quad g_h(w_1, w_2) = g_h(w_2, w_1) = g_h(w_1, w_1 + w_2) = g_h(-w_1, w_2), \text{ para } h = 2, 3.$$

Definamos:  $\tilde{J}(w_1, w_2) := \frac{g_2^3(w_1, w_2)}{g_2^3(w_1, w_2) - 27g_3^2(w_1, w_2)}$ . Por el corolario al teorema 3, el denominador no es cero mientras  $\frac{w_2}{w_1} \notin R$ . Por (10) y (11) esta función homogénea de grado cero verifica con  $\tau = \frac{w_2}{w_1} \notin R$ ,

$$(12) \quad \tilde{J}(w_1, w_2) = \tilde{J}(w_1, -w_2) = \tilde{J}(w_2, w_1) = \tilde{J}(1, \tau) = \tilde{J}(1 - \tau) = \tilde{J}(1, 1 + \tau) = \tilde{J}(1, -1/\tau).$$

**Definición 3.** Se llama función modular  $J(\tau)$  a la función  $J(\tau) = \tilde{J}(1, \tau)$ .

De (12) obtenemos:

$$(13) \quad J(\tau) = J(1 + \tau) = J(-1/\tau) = J(-\tau).$$

**Proposición 5.** Sean  $a, b, c, d \in Z$ ,  $c \geq 0$ , con  $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$ . Entonces la transformación  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  es una transformación conforme de  $H := \{z; \text{Im}z > 0\}$  sobre  $H$ .

**Demostración.**

Si  $c > 0$  entonces  $T(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)}$  pues  $ad - bc = 1$ .  $T$  es una composición de transformaciones de la forma:  $T_r(z) = z + r$  con  $r$  real,  $I(z) = -1/z$ ,  $M(z) = mz$  con  $m > 0$ , cada una de las cuales lleva  $H$  sobre  $H$ .

Si  $c = 0$  entonces  $a = d = \pm 1$ , y  $T(z) = z + b/d = z \pm b =$  traslación en un número real que lleva  $H$  sobre  $H$ , QED.

Obsérvese que  $J(\tau)$  es *analítica regular* en  $H$  como se ve de la definición de  $G_4$  y  $G_6$ , (cf. T.2, (ii)). En efecto,  $\text{Im}(\tau) > 0$  implica  $mw_1 + nw_2 \neq 0$  si  $m$  y  $n$  no son ambos nulos y  $\Delta \neq 0$ .

**Teorema 4.** Si  $a, b, c, d \in Z$  con  $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$  entonces

$$J\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = J(\tau).$$

**Demostración.**

Sean  $w'_1 = cw_2 + dw_1$ ,  $w'_2 = aw_2 + bw_1$ . Entonces  $w_1 = aw'_1 - cw'_2$ ,  $w_2 = dw'_2 - bw'_1$ . En consecuencia,  $w'_1, w'_2$  y  $w_1, w_2$  generan el mismo látice  $W$ , de manera que  $\tilde{J}(w'_1, w'_2) = \tilde{J}(w_1, w_2)$ . Llamando  $\tau := \frac{w_2}{w_1}$  y  $\tau' = \frac{w'_2}{w'_1}$  resulta

$$J(\tau) = \tilde{J}(1, \tau) = \tilde{J}(1, \tau') = J(\tau') \quad \text{QED.}$$

## 4.1.

Sea  $g(z)$  una función meromorfa definida en  $H$  tal que

- (i) no tiene polos en  $\{Im z > M\}$  para  $M$  bastante grande,
- (ii)  $g(z) = g(z + 1)$ .

Entonces, una función  $f(t)$ , meromorfa en  $\{0 < |t| < 1\}$ , queda definida mediante la identidad:  $f(t) = f(e^{2\pi iz}) = g(z)$  para  $t = e^{2\pi iz}$ . Esta  $f$  está bien definida y es analítica en un entorno reducido de 0. Luego posee un desarrollo de Laurent:  $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_h t^h$ , que expresado en la variable  $z$  se escribe  $f(e^{2\pi iz}) = g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_h e^{2\pi i h z}$  y que convergerá en  $\{Im z > M\}$ .

Como vimos, la función  $J(z)$  no tiene polos en  $H$  por lo que para ella puede usarse  $M = 0$ .

**Definición 4.**

Diremos que una función  $g(z)$  es *modular* si  $g : H \rightarrow C$  y se verifica:

- (i)  $g$  es meromorfa en  $H$ , sin polos en  $\{Im z > M\}$  para algún  $M$
- (ii)  $g(z) = g(Az)$  para toda transformación  $Az = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in Z$  con  $\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$
- (iii) existe un  $n \in Z$  tal que  $a_h = 0$  para  $h < n$  en el desarrollo de Fourier  $g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_h e^{2\pi i h z}$  y  $a_n \neq 0$ , o sea,  $g(z) = \sum_n^{\infty} a_j e^{2\pi i j z}$ .

Para la función modular  $J(z)$  probaremos que  $a_h = 0$  si  $h < -1$ . O sea que  $J(z) = \sum_{h=-1}^{\infty} a_h e^{2\pi i h z}$  y esa función también es modular en el sentido de la definición 4, con  $M = 0$ . Notamos, sin demostración, que toda función modular  $g(z)$  es una *expresión racional* en  $J(z)$ .

Para conocer los valores de una función modular  $g(\tau)$  en el semiplano  $Im(\tau) > 0$ , basta conocerlos en la región  $G = \{\tau : |\tau| \geq 1, |Re \tau| \leq \frac{1}{2}\}$ , llamada **región fundamental**.

Esto podría probarse, sin entrar en detalles, de la siguiente manera. Los valores de  $J(\tau)$  en  $G$  determinan sus valores en  $G_1 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (G + n)$ , y esos a su vez a los valores de  $J(\tau)$  en  $G_2 := -1/G_1$ . Reiterando, quedan determinados sus valores en  $G_3 = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (G_2 + n)$  y en  $G_4 = -1/G_3$ , etc., (ver Fig.2).

**NB.** En el próximo teorema, la región  $G$  se tomará *con* los puntos del contorno que caen en  $\{Re z \leq 0\}$ , y *sin* los puntos del contorno que caen en  $\{Re z > 0\}$ .  $\rho$  representa al punto  $i = e^{2\pi i/4}$  y  $\tilde{\rho} = e^{2\pi i/3}$ .

**Teorema 5.** Si  $g(z)$  es una función modular y  $n$  es el entero definido en (iii),  $\left( f(e^{2\pi iz}) = \right.$



$\sum_n a_j e^{2\pi i j z} = g(z), a_n \neq 0$ ), entonces

$$-n = \sum \{(\text{orden del cero de } g \text{ en } z) - (\text{orden del polo de } g \text{ en } z) : z \in G \setminus \{\rho, \tilde{\rho}\}\} +$$

$$+ ((\text{orden del cero de } g \text{ en } \rho) - (\text{orden del polo de } g \text{ en } \rho))/2 +$$

$$+ ((\text{orden del cero de } g \text{ en } \tilde{\rho}) - (\text{orden del polo de } g \text{ en } \tilde{\rho}))/3.$$

**Demostración.**

Consideremos la integral:  $I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$  sobre el camino  $\gamma$  representado en la figura 3.

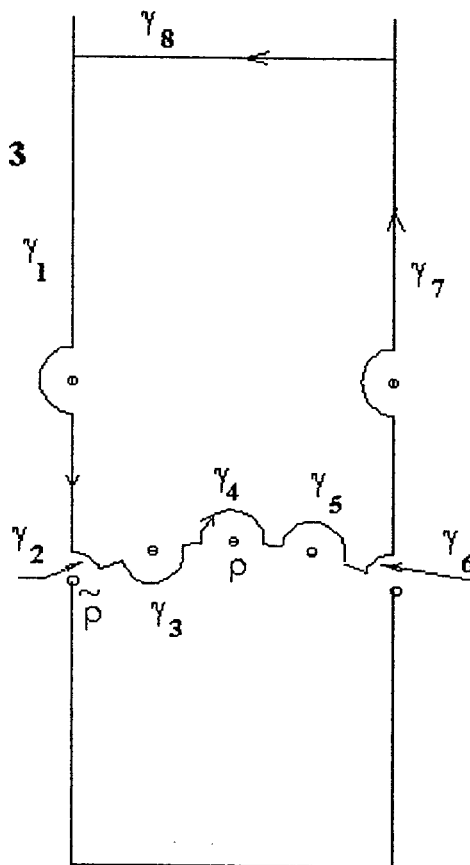
$$(14) \quad I = \sum \{(\text{orden del cero de } g \text{ en } z) - (\text{orden del polo de } g \text{ en } z) : z \in G \setminus \{\rho, \tilde{\rho}\}\}.$$

$\gamma$  se compone de varios arcos, que denominamos  $\gamma_h, h = 1, 2, \dots, 8$ , llamando  $I_h$  la integral sobre  $\gamma_h$ . Para mayor claridad,

- (i)  $\gamma_2$  y  $\gamma_6$  son partes de circunferencias de radio pequeño con centros en  $\tilde{\rho}$  y su simétrico respecto al eje imaginario.
- (ii)  $\gamma_4$  es parte de una circunferencia de radio pequeño con centro en  $\rho = i$
- (iii)  $\gamma_7 = \gamma_1 + 1$ , recorrido en sentido contrario al de  $\gamma_1$
- (iv)  $\gamma_3 = T\gamma_5$ , con  $Tz = -1/z$ , recorrido en sentido contrario al de  $\gamma_5$ .

Teniendo en cuenta (ii) y (iv) y la propiedad de invariancia de una función modular por  $T$  y traslación en enteros, resultan  $I_1 + I_7 = 0, I_3 + I_5 = 0$ . Esta última resulta de  $g(z) = g(-1/z), g'(z) = g'(-1/z)z^{-2}$ . En cambio  $I_2 + I_6 =$  la integral sobre un arco de circunferencia correspondiente a un ángulo  $\cong 2\pi/3$ , recorrido en sentido *negativo*. Luego, cuando el radio tiende a cero,  $I_2 + I_6$  tiende a  $-((\text{orden del cero de } g \text{ en } \tilde{\rho}) - (\text{orden del polo de } g \text{ en } \tilde{\rho}))/3$ . Asimismo  $I_4$  tiende, cuando el radio tiende a cero, a  $-((\text{orden del cero de } g \text{ en } \rho) - (\text{orden del polo de } g \text{ en } \rho))/2$ . Luego, hemos probado que:

**Fig. 3**



$$(15) \quad I = I_8 - ((\text{orden del cero de } g \text{ en } \tilde{\rho}) - (\text{orden del polo de } g \text{ en } \tilde{\rho}))/3 - \\ - ((\text{orden del cero de } g \text{ en } \rho) - (\text{orden del polo de } g \text{ en } \rho))/2.$$

En vista de (14) y (15), el teorema quedará probado si se demuestra que

$$(16) \quad I_8 = -n \text{ si } \text{Im } \gamma_8 \text{ es suficientemente grande.}$$

Haciendo en  $I_8$  el cambio de variable  $t = e^{2\pi iz}$ ,  $\gamma_8$  se transforma en una pequeña circunferencia  $\alpha$  alrededor del origen, recorrida en sentido *negativo*. Entonces,

$$I_8 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = -n, \quad \text{QED.}$$

**Teorema 6.** Para la función modular  $J(z)$  vale:

(i)  $J(z)$  es analítica regular en el semiplano superior  $H$  y  $n = -1$  en el sentido del punto (iii) de la Definición 4.

(ii)  $J(\tilde{\rho}) = 0$ ,  $J(\rho) = 1$ , siendo  $\tilde{\rho}$  un cero de orden 3 de  $J(z)$  y  $\rho$  un cero de orden 2 de  $J(z) - 1$ . Estas funciones no tienen otros ceros en  $G$ .

(iii)  $J$  transforma el interior de  $G_- := G \cap \{Re z < 0\}$  en  $H$  en forma biunívoca y sobre, y el contorno de  $G_-$  en el eje real, en forma biunívoca, de manera que:

$$J(\text{lado } Re z = -1/2) = \text{semirrecta } (-\infty, 0]$$

$$J(\text{arco de circunferencia}) = [0, 1]$$

$$J(\text{lado } Re z = 0) = [1, \infty).$$

**Demostración.**

Ya notamos que  $J$  es analítica regular. Aceptemos que  $n = -1$ .

(ii) Tenemos,

$$G_6(1, i) = \sum' \frac{1}{(n + mi)^6} = \sum' \frac{(-i)^6}{(-in + m)^6} = \sum' \frac{-1}{(ni + m)^6} = -G_6(1, i)$$

Luego,  $g_3(1, i) = 0$ . De la definición de  $J$  sigue que  $J(i) = 1$ , o sea  $J(\rho) = 1$ .

Por otro lado  $\tilde{\rho}^3 = 1$ . Por tanto,

$$(17) \quad G_4(1, \tilde{\rho}) = \sum' \frac{1}{(n + \tilde{\rho}m)^4} = \sum' \frac{\tilde{\rho}^{-4}}{(\tilde{\rho}^2 n + m)^4} = \tilde{\rho}^2 G_4(1, \tilde{\rho}^2).$$

Pero de  $\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho} + 1 = 0$ , sigue que el látice generado por 1 y  $\tilde{\rho}$  es el mismo que el generado por 1 y  $\tilde{\rho}^2$ , luego  $g_2(1, \tilde{\rho}) = g_2(1, \tilde{\rho}^2)$ . Como  $\tilde{\rho}^2 \neq 1$ , sigue de (17) que  $g_2(1, \tilde{\rho}) = 0$ . De la definición de  $J$  sigue entonces que  $J(\tilde{\rho}) = 0$ . Esto prueba la primera parte de (ii).

Aplicando el teorema 5 a  $J(z)$  (cf. NB que precede a ese teorema) se ve que  $z = \tilde{\rho}$  debe ser un cero triple y el único cero de  $J(z)$  en  $G$ . Análogamente,  $J(z) - 1$  tiene un cero en  $\rho$

que por el teorema 5 es doble y el único cero de esta función en  $G$ . Esto termina de probar (ii).

(iii) Sea  $c \in C \setminus \{0, 1\}$ . Entonces  $J(z) - c$  es una función modular, con  $n = -1$ , que no se anula ni en  $\rho$  ni en  $\tilde{\rho}$ . Luego, tiene exactamente un cero de orden 1 en  $G$ . Esto es,  $J$  transforma  $G$  en  $C$  en forma biunívoca y sobre.

De la definición de  $J$  se ve que

$$(18) \quad J(\bar{z}) = \overline{J(z)}.$$

Usando (13) obtenemos para  $t$  real,  $J(it) = J(-(\overline{it})) = \overline{J(-it)} = \overline{J(it)} = \text{real}$ , y también

$$J\left(it - \frac{1}{2}\right) = J\left(-\left(\overline{it + \frac{1}{2}}\right)\right) = J\left(\overline{\left(it + \frac{1}{2}\right)}\right) = \overline{J\left(it + \frac{1}{2}\right)} = \overline{J\left(it - \frac{1}{2}\right)} = \text{real}.$$

Por otra parte, si  $|z| = 1$ , entonces  $\bar{z} = 1/z$  y de (13) sigue que

$$J(z) = J(-\bar{z}) = J(\bar{z}) = \overline{J(z)} = \text{real}.$$

Luego,  $J$  toma valores reales en el contorno de  $G_-$ . Como  $J(z)$  toma cada valor una única vez y cuando  $z$  recorre el contorno de  $G_-$  en sentido positivo pasa primero por  $\tilde{\rho}$  con  $J(\tilde{\rho}) = 0$  y después por  $\rho$  con  $J(\rho) = 1$ , debe ser, por (i), una función monótona estrictamente creciente de  $-\infty$  a  $\infty$ . (Si  $J(\partial G_-) = (a, b)$  con  $a$  finito entonces  $J(z) - a$  tiene un cero simple en un punto de  $G/\partial G_-$  y en un entorno de ese punto repite algún valor de  $(a, b)$ ). Dado que  $J(z)$  es una función analítica, ella transforma regiones sin cambiar la orientación. Luego, la imagen  $J(G_-)$  de  $G_-$  tiene que ser el semiplano  $H = \{Im z > 0\}$  y (iii) queda demostrada.

Finalmente probaremos que  $n = -1$ . Para ello recurriremos a la siguiente identidad:

$$(19) \quad \pi \cot \pi \tau = \frac{1}{\tau} + \sum_{m \in Z \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\tau + m} - \frac{1}{m} \right).$$

Para probar (19), llamemos  $f(\tau) := \pi \cot \pi \tau - \left( \frac{1}{\tau} + \sum_{m \in Z \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\tau + m} - \frac{1}{m} \right) \right)$ . Las únicas singularidades de esta función están en  $\tau \in Z$  y son evitables. Además es una función periódica de período 1. Entonces  $f'(\tau) = -\frac{\pi^2}{\text{sen}^2 \pi \tau} + \sum_{m \in Z} \frac{1}{(\tau + m)^2}$  también es una función entera de período 1. Luego está acotada en  $|Im \tau| \leq 1$ . Para  $|Im \tau| > 1$ , usando que  $|\text{sen}(x + iy)|^2 = \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y$  obtenemos  $|\text{sen}^2 \pi \tau| > \text{sen}^2 \pi$  y por tanto que  $|f'(\tau)| < \frac{\pi^2}{\text{sen}^2 \pi} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1 + m^2}$ . Resumiendo,  $f'(\tau)$  es una función entera acotada y por consiguiente una constante. Sigue que  $f(\tau) = a\tau + b$ . Por la periodicidad de  $f(\tau)$ ,  $a = 0$  y como  $f(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$  resulta (19).

Sea ahora  $Im\tau > 0$ . Teniendo en cuenta que  $\pi \cot \pi\tau = -i\pi \frac{1 + e^{2\pi i\tau}}{1 - e^{2\pi i\tau}} = -i\pi(1+q) \frac{1}{1-q} = -i\pi(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n)$  con  $q = e^{2\pi i\tau}$ , obtenemos  $\frac{1}{\tau} + \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{\tau+m} - \frac{1}{m} \right) = -i\pi(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n)$ .

Derivando esta última expresión  $h$  veces respecto de  $\tau$ , resulta:

$$(20) \quad (-1)^h h! \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+m)^{h+1}} = -(2\pi i)^{h+1} \sum_{r=1}^{\infty} r^h q^r, \quad q = e^{2\pi i\tau}.$$

Para  $h = 3$  tenemos

$$(21) \quad -6 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+m)^4} = -16\pi^4 \sum_{r=1}^{\infty} r^3 q^r.$$

Por otro lado, usando (21), obtenemos,

$$(22) \quad \begin{aligned} g_2 = g_2(1, \tau) &= 60 \sum' \frac{1}{(m+n\tau)^4} = 60 \left\{ 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{2}{(m+n\tau)^4} \right\} = \\ &= 60 \left\{ 2\xi(4) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{8}{3} \pi^4 \sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2\pi i n r \tau} \right) \right\} = 120\xi(4) + 320\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi i m \tau} \sum_{d|m} d^3 = \\ &= \frac{4\pi^4}{3} \left( 1 + 240 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) e^{2\pi i m \tau} \right) \end{aligned}$$

Aquí se ha usado la notación

$$(23) \quad \xi(m) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^m} \quad \sigma_k(m) = \sum_{d|m} d^k$$

Los valores de  $\xi(2m)$  se hallan usando la siguiente expresión que se obtiene de (19),

$$(24) \quad \pi z \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} z^{2j} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}} = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi(2j) z^{2j},$$

en particular,  $\xi(4) = \frac{\pi^4}{90}$ ,  $\xi(6) = \frac{\pi^6}{945}$ .

[De otra forma: los números de Bernoulli  $B_k$ ,  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = 1/2$ ,  $B_2 = 1/6$ ,  $B_4 = 1/30$ ,  $B_6 = 1/42$ ,  $B_{2n+1} = 0$ ,  $B_{2n} = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \xi(2n)$  para  $n = 1, 2, \dots$ , pueden obtenerse del desarrollo  $\frac{t}{1-e^{-t}} = B_0 + B_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} t^{2n}$ ].

De (20), con  $h = 5$ , se obtiene,

$$(25) \quad 15 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau + m)^6} = -8\pi^6 \sum_{r=1}^{\infty} r^5 q^r$$

Procediendo como en el caso precedente (fórmula (22)) y usando (25), se obtiene

$$(26) \quad \begin{aligned} g_3 = g_3(1, \tau) &= 140 \sum' \frac{1}{(m + n\tau)^6} = 280\xi(6) - \frac{448}{3}\pi^6 \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi im\tau} \sum_{d|m} d^5 = \\ &= \pi^6 \frac{8}{27} \left[ 1 - 504 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) e^{2\pi im\tau} \right]. \end{aligned}$$

Entonces, los desarrollos de  $g_3^2$  y de  $g_2^3$  en potencias de  $q = e^{2\pi i\tau}$  se escriben

$$\begin{aligned} g_2^3 &= \frac{\pi^{12} 4^3}{27} (1 + 3 \times 240q + \sum_{h>1} b_h q^h) \\ -27g_3^2 &= -\frac{\pi^{12} 8^2}{27} (1 - 2 \times 504q + \sum_{h>1} c_h q^h) \end{aligned}$$

de donde

$$(27) \quad \Delta := g_2^3 - 27g_3^2 = Cq + \sum_{r=2}^{\infty} C_r q^r \text{ con } C \neq 0.$$

Como  $J(\tau) = g_2^3/\Delta$ , resulta  $n = -1$  y queda demostrada (i) del Teorema 6, QED.



## REFERENCIAS

- [A] Apostol T., *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, GTM 41, Springer, (1976).
- [B] Boas R. P., Jr., *A Primer of Real Functions*, MAA, (1982).
- [BBFK] Behnke H., Bachmann F., Fladt K. and Kunle H., *Fundamentals of Mathematics*, vol. II, *Geometry*, MIT Press, (1974).
- [BS] Behnke H. und Sommer F., *Theorie der Analytische Funktionen einer Komplexen Veränderlichen*, Springer, (1965).
- [BU] Burckel B., Inessential maps and classical Euclidean Topology, *Jahrbuch Überblicke Mathematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim|Wien|Zürich, (1981), 119-137.
- [BZ] Benedek A., Fernández E. y Panzone R., *Lecciones complementarias de Análisis Superior*, Cap. II, INMABB (UNS-CONICET), (1987).
- [GH] Guggenheimer H. W., *Differential Geometry*, McGraw Hill, (1963).
- [NM] Newman M. H. A., *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, New York; Cambridge, (1961).
- [P] Panzone R., *Guia de estudio para el curso VARIABLE COMPLEJA Y FUNCIONES ESPECIALES*, INMABB (UNS-CONICET), (1991).
- [RSzN] Riesz F. et Sz.-Nagy B., *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest, (1953).
- [SZ] Saks S. and Zygmund A., *Analytic Functions*, Warszawa-Wroclaw, (1952).
- [TM] Tsuji M., *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, (1959).
- [W] Whitney H., A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. Journal*, 1(1935)514-517.
- [WH] Whitney H., *Geometric Integration Theory*, Princeton Univ. Press, (1957).
- [Y] Young L.C., *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, (Saunders), (1969).

## AGRADECIMIENTOS.

A la Sra. Susana P. de Cuenca y a la Bqca. Mariana Pintos, quienes prepararon el primer borrador y la versión definitiva de estas Notas, respectivamente. También a la Mg. Aurora Germani por su interés para que estas aparezcan entre las publicaciones del INMABB.