

ITI-68



# INFORME TECNICO INTERNO

Nº 68

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA  
INMABB (UNS - CONICET)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

República Argentina

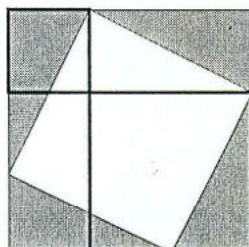


# INFORME TÉCNICO INTERNO

Nº 68

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1999 -



# **INFORME TÉCNICO INTERNO N° 68**

## **SOBRE LA REPRESENTACIÓN POSICIONAL DE NÚMEROS (\*)**

**Agnes Benedek**

(\*) Conferencia “**González Dominguez**”, pronunciada el 24/09/99 en la Universidad Nacional de La Plata en ocasión de la **XLIX Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina**.

**Universidad Nacional del Sur**

**INMABB**

**CONICET - UNS**

**AÑO 1999.**

## SOBRE LA REPRESENTACIÓN POSICIONAL DE NÚMEROS

*Agnes Benedek*

La Aritmética elemental contiene muchos pequeños resultados que iluminados desde una óptica de grafos y algoritmos resultan muy entretenidos y sencillos. Un ejemplo lo constituyen los sistemas numéricos generalizados.

Un sistema numérico tiene dos ingredientes. Una base  $b$  y un conjunto finito  $A = \{0 = a_0, a_1, \dots, a_{t-1}\}$  de cifras, todos ellos números complejos pertenecientes a algún anillo numérico contenido en  $\mathbf{C}$  como por ejemplo  $\mathbf{Z}$  o  $\mathbf{Z}(\delta)$ , con  $\delta$  un entero algebraico. Supondremos siempre que la base verifica la condición  $|b| > 1$ .

Llamaremos *enteros del sistema*  $\{b, A\}$  a los elementos del conjunto  $W := \left\{ w = \sum_{j=0}^N c_j b^j; c_j \in A \right\}$  incluido en el anillo al cual pertenecen las cifras y la base.

Usaremos para un entero la notación  $w = (c_N c_{N-1} \dots c_0)_b$  o bien, si la base se sobreentiende,  $w = c_N \dots c_0$ . Además sea  $H := \left\{ x = \sum_{j=1}^{\infty} c_{-j} b^{-j}; c_i \in A \right\}$ .  $H$  es el conjunto de los números

*fraccionarios del sistema*  $\{b, A\}$ . Usaremos la notación  $x = (0.c_{-1}c_{-2}\dots)_b$  o bien, si la base se sobreentiende,  $x = 0.c_{-1}c_{-2}\dots$ . Finalmente llamamos *números representables en el*

*sistema*  $\{b, A\}$  a los elementos del conjunto  $G := \left\{ x = \sum_{j=-\infty}^N c_j b^j; c_j \in A \right\}$ .

Ejemplificaremos primero con números enteros. Sea  $b \in \mathbf{Z}$ ,  $t := |b| > 1$  y  $A \subset \mathbf{Z}$  un sistema completo de restos módulo  $b$  que contiene al cero, esto es,

$$Z = \bigcup \{a_j + bZ; a_j \in A\} \text{ con } (a_j + bZ) \cap (a_i + bZ) = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Entonces  $W \subset Z$  y es natural preguntarse cuando vale la igualdad  $W = Z$ . Supongamos que nos dan un  $z \in Z$  y queremos hallar su desarrollo en el sistema  $\{b, A\}$ . Entonces su término  $c_0$  debe ser  $c_0 = a$  donde  $a \in A$  es tal que  $z \equiv a \pmod{b}$ . Luego, en primer lugar, los elementos de  $W$  tienen representación única. Esto permite construir un grafo dirigido por la siguiente función  $J: Z \rightarrow Z$ ,  $J(z) := (z - a)/b$ , que se puede indicar  $z \xrightarrow{a} \frac{z - a}{b}$ . O sea, dándole el "color"  $a$  a la flecha si  $a$  es el resto de  $z$  (mód  $b$ ) que está en  $A$ .

Si  $z \in W$  entonces  $J^h(z) = \sum_{j=h}^N c_j b^{j-h}$  y el camino que sale de  $z$  tiene sucesivamente los colores  $c_0, c_1, \dots, c_N, 0, 0, \dots$ . O lo que es lo mismo,  $J^{N+1}(z) = 0$  a partir de un número natural  $N$ . Recíprocamente, si  $J^{N+1}(z) = 0$  para un número natural  $N$  entonces  $z \in W$ .

Sea  $K = \max\{|a|; a \in A\}$ . Es inmediato que

$$\text{si } |z| > \frac{K}{|b| - 1} =: L \text{ entonces } |J(z)| \leq \frac{|z| + K}{|b|} < |z|.$$

Además, si  $|z| \leq L$ , entonces  $|J(z)| \leq L$ . Como en todo intervalo hay sólo un número finito de enteros, resulta que el camino que sale de un entero  $z$  tiene que terminar en un ciclo, formado por enteros de módulo no mayor que  $L$ .

**Definición.** Denotamos con  $P$  al conjunto de enteros periódicos. Esto es

$$P = \{n \in \mathbb{Z} : \exists h \in \mathbb{N} \text{ con } J^h(n) = n\}.$$

**Proposición 1** (Kátai, [K]). Sea  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $|b| > 1$  y  $A \subset \mathbb{Z}$  un sistema completo de restos módulo  $b$ . Son equivalentes las afirmaciones siguientes:

i)  $\mathbb{Z} = W$

ii)  $P = \{0\}$ .

Ejemplos: 1)  $\{2, \{0, 1\}\}$   $P = \{0, -1\}$

2)  $\{-2, \{0, 1\}\}$   $P = \{0\}$

3)  $\{3, \{0, 2, 7\}\}$   $P = \{0, -1\}$

4)  $\{N, \{-h, -h+1, \dots, -h+N-1\}\}$ ,  $N$  un número entero mayor que 1. Si  $\max\{|h|, |N-h-1|\} < N-1$  entonces  $P = \{0\}$ . (En este caso  $L < 1$  por lo que no hay periódicos  $\neq 0$ .)

Son casos particulares de 4)

4')  $\{3, \{-1, 0, 1\}\}$ ,  $\{4, \{-1, 0, 1, 2\}\}$ .

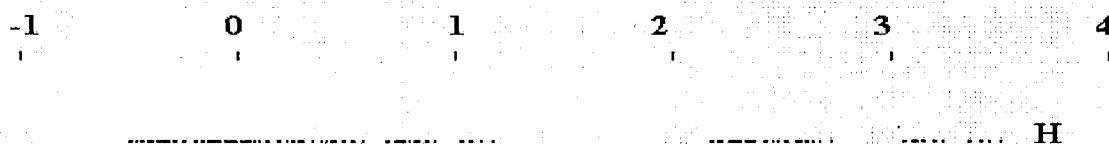
No podemos escribir los enteros negativos en base 4 con las cifras  $\{0, 1, 2, 3\}$ , pero basta cambiar la cifra 3 por la cifra  $-1$  para que todo entero sea representable.

**Proposición 2**, ([K]).  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $A \subset \mathbb{Z}$  y  $H := \left\{ x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j b^{-j}; c_j \in A \right\}$ . Entonces,

i)  $H$  es un conjunto compacto

ii) todo  $y \in \mathbb{R}$  se puede representar en la forma  $y = n + x$  con  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in H$ .

O sea siempre que  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $|b| > 1$  y  $A \subset \mathbb{Z}$  es un sistema completo de restos módulo  $b$ , las trasladadas en enteros del conjunto  $H$  cubren la recta:  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} n + H$ .



Esto puede llamar la atención cuando uno ve casos en los que el conjunto  $H$  tiene muchas lagunas. El diagrama precedente representa al conjunto  $H$  correspondiente al sistema  $\{3, \{-1, 0, 7\}\}$ . Si bien este conjunto es de segunda categoría de Baire, como todos los  $H$  que entran en la proposición 2, los intervalos abiertos que contiene tienen longitud muy pequeña y no son fáciles de detectar a simple vista, p. ej.  $(-\frac{1}{54}, \frac{1}{54}) \subset H$ .

También uno puede preguntarse si son "muchos" los números que están en más de un conjunto  $n+H$ . Respecto a esta pregunta vale la siguiente proposición, donde  $m(\Delta)$  representa la medida de Lebesgue del conjunto  $\Delta$  y  $B := \{c = c_1 - c_2; c_j \in A\} = A - A$ .

**Proposición 3.** (Indlekofer, Kátai, Rácskó, [IKR]) Sea  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $|b| > 1$ ,  $A \subset \mathbb{Z}$  un sistema completo de restos módulo  $b$ . Entonces,  $m(n_1 + H \cap n_2 + H) = 0$  para todo par de números diferentes  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  si y sólo si

(\*) los enteros del sistema numérico  $\{b, B\}$  coinciden con  $\mathbb{Z}$ .

Obsérvese que  $B = A - A$  y por lo tanto contiene en particular a  $A \cup -A$ . Entonces es inmediato que la condición (\*) se cumple en el caso  $\{3, \{-1, 0, 7\}\}$  del gráfico pues en ese caso  $B \supset \{0, 1, -1\}$  y con estas cifras en base 3 se escribe todo entero, (Ej. 4'). O sea que las trasladadas en números enteros del conjunto  $H$  de la figura precedente no sólo cubren la recta sino que la cubren económicamente: sólo se superponen en conjuntos de medida cero.

(En general la condición (\*) es poco restrictiva ya que el conjunto  $B$  contiene  $|b|$  restos (módulo  $b$ ) para cada entero  $z$  que no es múltiplo de  $b$ : si uno construye un grafo con vértices enteros correspondiente al sistema  $\{b, B\}$  de manera que de cada entero  $z$  no divisible por  $b$  salgan  $|b|$  flechas hacia  $(z - c)/b$  donde  $c$  recorre los restos mencionados, hay más posibilidades (que con  $\{b, A\}$ ) que de  $z$  salga un camino que termine en 0, (véase la Prop. 1).)

Analizando el caso  $b=3$  y  $A = \{0, a_1, a_2\}$  con  $a_i = i$  (módulo 3),  $i=1, 2$ , se observa que

$$(**) \quad \text{m.c.d.}(a_1, a_2) = 1$$

es una condición necesaria para que se cumpla (\*). En efecto, si  $\text{m.c.d.}(a_1, a_2) = d > 1$  entonces  $d$  divide a todo elemento de  $B$  y por lo tanto todos los enteros del sistema  $\{3, B\}$  son múltiplos de  $d$ . Luego no vale (\*). Se conjetura que (\*\*) también es suficiente y esto fue demostrado para los casos en que  $a_2 - a_1 \in \{1, 4, 7, 10\}$  y también verificado para  $1 \leq a_i \leq 990$ ,  $i=1, 2$ , sin otra limitación salvo por  $a_i \equiv i \pmod{3}$ .

**La intersección de  $H+n$  con  $H$ .** Hemos dicho que  $H+n \cap H+k$  tiene medida 0 para los sistemas numéricos que cumplen (\*) de la proposición 3. Sin embargo esta intersección suele tener a menudo dimensión de Hausdorff positiva.

Sea  $S := \{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : H \cap H+n \neq \emptyset\}$  y para  $\gamma \in S$ , sea  $B_\gamma := H + \gamma \cap H$ .  $z \in B_\gamma$  si y sólo si

$$(1) \quad z = \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j b^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_j b^{-j} \quad \text{con } \varepsilon_j, \tilde{\varepsilon}_j \in A.$$

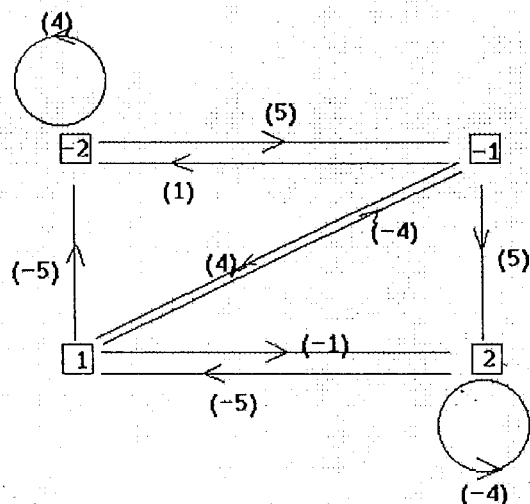
La igualdad anterior implica por un lado que  $|\gamma| \leq 2L = 2K / (|b| - 1)$  y por otro lado que

$$(2) \quad b\gamma + (\varepsilon_1 - \tilde{\varepsilon}_1) \in S.$$

Consideremos el grafo cuyos vértices forman  $S_1 := \{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 2L\}$  tal que de cada vértice  $\eta \in S_1$  salgan todas las posibles flechas con "colores"  $\delta \in B$  y que van de  $\eta$  a  $b\eta + \delta$ , si este entero resultare ser un vértice de  $S_1$ . Si un vértice está en  $S$  entonces es claro por (1) y (2) que de él sale por lo menos una flecha que llega a un vértice de  $S$  (quizás él mismo) y por lo tanto sale de él un camino infinito que pasa sólo por vértices pertenecientes a  $S$ . Recíprocamente, si en este grafo de un vértice sale un camino infinito entonces ese vértice está en  $S$  y también lo están todos los vértices que aparecen sobre este camino infinito.

Borrando de  $S_1$  los vértices de los cuales no sale ninguna flecha queda un conjunto  $S_2$ , borrando de  $S_2$  los vértices de los que no salen flechas que terminan en  $S_2$  queda un conjunto  $S_3$ , etc. Como en este proceso  $S_j \supset S$  para todo  $j$ , luego de un número finito de pasos se tendrá  $S_j = S$  y se habrá encontrado  $S$ .  $G(S)$  será el grafo de vértices  $S$  y flechas desde  $\gamma \in S$  a  $b\gamma + (\varepsilon_1 - \tilde{\varepsilon}_1) \in S$  etiquetadas con  $\delta = \varepsilon_1 - \tilde{\varepsilon}_1$  (habrá tantas con la misma etiqueta como representaciones que dan lugar a ese  $\delta$  pero con  $\varepsilon_1$  distintos).

Sea  $b=3$ ,  $A=\{-1,0,4\}$ .  $L=2$ ,  $B=\{-5,-4,-1,0,1,4,5\}$ . Con el proceso anterior se encuentra que  $S=\{\pm 1, \pm 2\}$ . Esto es que la "baldosa"  $H$  toca, siempre en el borde, a sus trasladadas en  $\pm 1, \pm 2$ . El grafo  $G(S)$  tiene el siguiente aspecto en este caso. Veamos como se puede



determinar la dimensión del contorno de  $H$ . Nos limitaremos a la dimensión box de ese conjunto (que no necesariamente coincide con la de Hausdorff aunque vale que  $\dim_B \geq \dim_H$ ).

De una  $n$ -upla  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in A^n$  diremos que es *continuable con respecto de  $B_\gamma$*  si tiene una continuación  $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots$  tal

que  $z = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j b^{-j} \in B_\gamma$ . Sea  $M(n, \gamma)$  el

número de  $n$ -uplas continuables con respecto de  $B_\gamma$ . Se puede ver que la dimensión box de  $B_\gamma$  existe y es

$$\dim_B(B_\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(M(n, \gamma))}{n \log|b|}.$$

Puede estimarse  $M(n, \gamma)$  usando el grafo  $G(S)$  pues  $M(n, \gamma)$  es el número de caminos de longitud  $n$  que salen de  $\gamma$ . Por ejemplo, en el caso anterior  $b=3$ ,  $A=\{-1,0,4\}$ , el grafo nos muestra que vale la recurrencia (por la simetría del grafo vale siempre  $M(n, \gamma) = M(n, -\gamma)$ ):

$$M(n, 1) = M(n-1, -2) + M(n-1, -1) + M(n-1, 2) = M(n-1, 1) + 2 \cdot M(n-1, 2),$$

$$M(n, 2) = M(n-1, 2) + M(n-1, 1).$$

Más aún, si llamamos  $y^{(n)} := \begin{pmatrix} M(n, 1) \\ M(n, 2) \end{pmatrix}$  y  $P := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  entonces el sistema anterior se

escribe como  $y^{(n)} = P y^{(n-1)} = P^n y^{(1)}$ ; por inspección del grafo se ve que  $y^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

A esta ecuación de recurrencia se le aplica la teoría de Perron de matrices positivas, obteniéndose que  $M(n, \gamma) \approx \xi^n$  pues el autovalor  $\xi$  de mayor módulo de la matriz  $P$  es positivo lo mismo que el autovector. Luego, como en este caso  $\xi = 1 + \sqrt{2}$  tenemos,

$$\dim_B(B_\gamma) = \frac{\log \xi}{\log 3} = \frac{\log(\sqrt{2} + 1)}{\log 3} \cong 0.8023.$$

### Sistemas numéricos complejos en anillos de enteros algebraicos.

Ejemplificaremos ahora con sistemas numéricos en anillos de enteros algebraicos. Sea  $\Theta$  un entero algebraico solución de la ecuación  $f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n = 0$  donde  $f(z)$  es un polinomio mónico, irreducible, de coeficientes enteros. Sea  $\mathbf{Z}(\Theta)$  el anillo generado por  $1, \Theta$ , es decir,  $\mathbf{Z}(\Theta) = \{u_0 + u_1 \Theta + \dots + u_{n-1} \Theta^{n-1}; u_j \in \mathbf{Z}\}$ . Sea  $b \in \mathbf{Z}(\Theta)$ ,  $|b| > 1$ . El conjunto  $I_b := \{b\sigma; \sigma \in \mathbf{Z}(\Theta)\}$  es un ideal en  $\mathbf{Z}(\Theta)$ . (Es claro que si  $b = \Theta$ ,  $u_0 + u_1 \Theta + \dots + u_{n-1} \Theta^{n-1} \in I_b$  si y sólo si  $u_0$  es un múltiplo de  $p_n$ ). Sea  $t = \#\{\text{clases laterales de } \mathbf{Z}(\Theta)/I_b\}$ , (vale  $t < \infty$ ). Eligiendo, para  $j=0, 1, \dots, t-1$ ,  $a_j \in \mathbf{Z}(\Theta)$  de la  $j$ -ésima clase de restos en el cociente  $\mathbf{Z}(\Theta)/I_b$  de manera que  $a_0 \in I_b$ , definimos el sistema completo de restos  $A = \{a_0, \dots, a_{t-1}\}$ . Con éste y precisando  $a_0 = 0$ , formamos el sistema numérico  $\{b, A\}$  con cifras  $A$ . Los enteros de este sistema pertenecen a  $\mathbf{Z}(\Theta)$  y nos podemos preguntar si todo elemento de  $\mathbf{Z}(\Theta)$  se representa como un entero del sistema. Esto se formula ahora así: dado  $\alpha = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \Theta^j \in \mathbf{Z}(\Theta)$  arbitrario ¿existen

elementos  $c_j \in A$  tales que  $\alpha = \sum_{j=0}^N c_j b^j$ ?

En analogía a lo hecho antes en  $\mathbf{Z}$  se ve que de existir esos  $c_j$  ellos quedan determinados unívocamente:  $c_0$  debe ser la cifra que está en la misma clase lateral que  $\alpha$ , etc.

Definimos la función  $J$  en  $\mathbf{Z}(\Theta)$  por  $J(\alpha) := (\alpha - c)/b$  donde  $c \in A$  es el elemento de  $A$  en la misma clase que  $\alpha$ . Si queremos repetir la proposición 1 tropezamos con la dificultad que ahora el grafo de la función  $J$  puede contener caminos infinitos que no terminan en ciclos pues en  $\mathbf{Z}(\Theta)$  puede haber infinitos puntos en una esfera (aun en el caso en que  $b$  y sus raíces conjugadas tengan módulo mayor que 1). Un ejemplo de ello es  $b = 3 - \sqrt{2} \in \mathbf{Z}(\Theta)$ ,  $\Theta = \sqrt{2}$ .  $b$  satisface la ecuación minimal  $x^2 - 6x + 7 = 0$ .  $A := \{0, 1, 2, \dots, 6\}$  es un sistema completo de restos. En este caso  $\mathbf{Z}(\Theta) = \{m + n\sqrt{2}\}$  es un conjunto denso en  $\mathbf{R}$ .

Si  $\Theta$  es no real, habrá un número finito de puntos de  $\mathbf{Z}(\Theta)$  en toda esfera si, por ejemplo,  $\mathbf{Z}(\Theta) \subset$  látice del plano complejo  $\Lambda = \{mu + nv; m, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $u$  y  $v$  linealmente independientes sobre  $\mathbf{R}$ . En efecto, vale la siguiente

**Proposición 4.** Sea  $\beta \in \mathbf{C}$ , no real y tal que para todo  $j \geq 0$ ,  $\beta^j$  está en el látice  $\Lambda$ . Entonces  $\beta$  es un entero cuadrático, (cf. [BPP]).

Veamos algunos casos de esta situación.

**Los enteros de Gauss.** Sea  $b = A + Bi \in \mathbf{Z}(i) := \{m + ni; m, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $|b| > 1$ . La ecuación minimal que satisface  $b$  es  $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2 = 0$  y un sistema completo de restos módulo  $b$  es  $A_c := \{0, 1, \dots, A^2 + B^2 - 1\}$  (el subíndice "c" indica "canónico").  $\mathbf{Z}(i)$  es un látice por lo que en cada bola sólo hay un número finito de elementos y en consecuencia la proposición 1 se extiende a este caso. Como  $\text{Im}(b^j)$  es un múltiplo de  $B$  para todo  $j$ , resulta que el

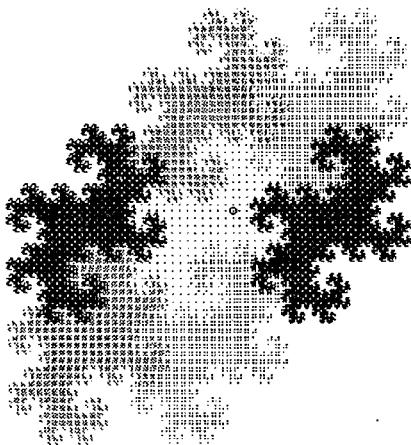


conjunto de los enteros del sistema  $\{b, A_c\}$  no coincide con  $\mathbf{Z}(i)$  si  $|b| > 1$ . Vale el siguiente teorema.

**Teorema 1** (Kátai y Szabó, [KSz]). Los enteros del sistema  $\{b, A_c\}$  coinciden con  $\mathbf{Z}(i)$  si y sólo si  $\text{Im}(b) = \pm 1$ ,  $\text{Re}(b) < 0$ .

Si los enteros de un sistema numérico coinciden con  $\mathbf{Z}(i)$  entonces todo número complejo es representable, por lo tanto,  $\mathbf{C} = \{z = c_N \dots c_0 \cdot c_{-1} c_{-2} \dots c_j \in A\} = \bigcup_{w \in W} H + w$ ,

(véase el teorema 3). Esto dice que las trasladadas en enteros del sistema del conjunto  $H$  pavimentan el plano complejo. Entonces  $m(H) > 0$ . Un argumento de empaque muestra también que  $m(H + w_1 \cap H + w_2) = 0$  para  $w_1 \neq w_2$ . En el caso más simple el teorema 1 dice que con la base  $b = -1 + i$  y cifras  $A_c = \{0, 1\}$ , todo entero de Gauss es representable.



La figura muestra parte del embaldosado  $\bigcup_{w \in W} H + w$  en el sistema  $\{-1 + i, \{0, 1\}\}$ . Es fácil

ver que en los casos que  $b = 2, 1 + i, 1 - i$ , no existen cifras  $A$  adecuadas para las cuales los enteros de  $\{b, A\}$  coinciden con  $\mathbf{Z}(i)$ . En efecto, en estos casos  $b - 1$  tiene módulo 1; luego, si  $c \in A \subset \mathbf{Z}(i)$  es una cifra no nula entonces  $\gamma = c \cdot (1 - b)$  verifica  $\gamma = c + b\gamma$ , de donde sigue que  $J(\gamma) = \gamma$ , o sea que  $\gamma$  es un elemento periódico no nulo que no puede representarse como entero en  $W$ .

Si  $\mathbf{Z}(i) \ni b \neq 2, 1 + i, 1 - i$  y  $|b| > 1$  entonces siempre existe un sistema de cifras  $A_b \subset \mathbf{Z}(i)$  para el cual los enteros del sistema  $\{b, A_b\}$  coinciden con

$\mathbf{Z}(i)$ , (Steidl, [S]). Esto pasa, por ejemplo, para  $b = A + i$  con el sistema de cifras simétrico

$$A_s = \left\{ \left[ \frac{-A^2 + 2}{2} \right], \dots, \left[ \frac{A^2 + 2}{2} \right] \right\} \quad \text{si } |A| > 3.$$

**Los enteros de Eisenstein.** Consideremos el anillo  $\mathbf{Z}(w) = \{m + nw; m, n \in \mathbf{Z}\}$  donde  $w = \exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right)$  es raíz cúbica de la unidad.  $w$  verifica la ecuación cuadrática

$w^2 + w + 1 = 0$ . También  $\mathbf{Z}(w)$  es un látice y la proposición 1 se extiende a este caso. Por



ejemplo, las cifras  $A_d = \{0, 1, w, 1 + w\}$  junto con la base  $b = 2w^2$  forman un sistema numérico donde los enteros del sistema coinciden con  $\mathbf{Z}(w)$ . Las baldosas  $H, H + 1, H + 1 + w, H + w$ , son exhibidas en la figura adyacente. En este caso 0 es un punto interior de  $H$ , (cf. prop. 5). En la figura abajo a la derecha ilustramos los conjuntos  $H, H + 1, H + 1 + w$  para  $b = 2 + w$ , y cifras  $\tilde{A} = \{0, 1, 1 + w\}$ . En el segundo caso 0 no es un punto interior de  $H$  y el conjunto

de enteros de ese sistema no coincide con  $Z(w)$ . En efecto,  $b-1$  es una unidad del anillo y se repite un argumento ya usado para probar que  $\gamma = 1.(\overline{b-1}) = -w^2$  es un elemento periódico y por lo tanto no representable. En ambos casos

$$C = \bigcup_{l \in Z(w)} (H + l) \text{ pues vale el}$$

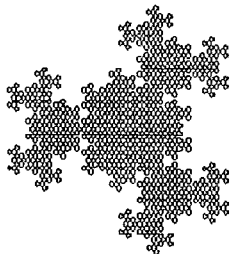
**Teorema 2.** Sea  $b \in Z(\Theta)$ ,  $\Theta$  un entero cuadrático y  $A$  un sistema completo de restos que contiene al 0. Entonces

$$C = \bigcup_{l \in Z(\Theta)} (H + l), \text{ (cf. prop. 2 y T. 2, [K])}$$

Otro ejemplo de sistema numérico donde los enteros del sistema coinciden con  $Z(w)$  es el de base  $-2$  y cifras

$$A = \{0, 1, w, -1-w\}. \text{ En este caso también } C = \bigcup_{l \in Z(w)} (H + l), 0$$

es un punto interior de  $H$ . El conjunto  $H$  se ve abajo a la izquierda.



**Propiedades geométricas del conjunto H.** Con cualquier elección de base y cifras el conjunto  $H$  es un conjunto compacto y autosemejante. En efecto, de toda sucesión de números de  $H$  se puede elegir una subsucesión que va "estabilizando las cifras" pues el conjunto de ellas es finito. Si la sucesión original converge, el límite será el elemento de  $H$  dado por las cifras estabilizadas.

La autosemejanza sigue del hecho que  $H = \bigcup_{i=1}^k f_i(H)$  donde

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$  y  $f_i(z) = a_i + z/b$ . Para cada  $i$ ,  $H_{a_i} := f_i(H) = \{x = 0.a_1c_2c_3\dots; c_j \in A\}$  es un conjunto semejante a  $H$  resultante de una contracción de módulo  $1/|b|$ . Reunimos en la siguiente proposición algunos resultados generales válidos para  $H$ .

**Proposición 5.** Si  $m(H)$  es la medida de Lebesgue de  $H$  entonces

i)  $m(H) \leq |b|^{-2} k m(H)$

ii) Si  $m(H) > 0$  entonces  $1 \leq |b|^{-2} k$

iii) Si  $m(H) > 0$  entonces  $|b|^2 = k$  si y sólo si  $m(f_i(H) \cap f_j(H)) = 0$  para  $i \neq j$ .

iv) Si 0 es un punto interior de  $H$  entonces  $C = \bigcup_{w \in W} (H + w)$ . La recíproca también es cierta si sólo hay un número finito de enteros en cada esfera.

Si recordamos que  $C = \bigcup_{w \in W} (H + w)$  implica que  $m(H) > 0$ , por ii) esto sólo puede ocurrir si

$$|b|^2 \leq k. \text{ Además por iii) ese cubrimiento será económico sólo si } |b|^2 = k.$$

**Comentarios finales.** 1) En primer lugar demostraremos el

**Teorema 2.** Sea  $b \in \mathbf{Z}(\Theta)$ ,  $\Theta$  un entero cuadrático no real y  $A$  un sistema completo de restos que contiene al 0. Entonces  $\mathbf{C} = \bigcup_{l \in \mathbf{Z}(\Theta)} (H + l)$ .

Demostración. Observemos que vale, con  $J, K$  y  $L$  como antes, que si  $z \in \mathbf{Z}(\Theta)$  entonces

$$|J(z)| \leq \frac{|z|}{|b|} + \frac{K}{|b|}, \quad |J^h(z)| \leq \frac{|z|}{|b|^h} + \frac{K}{|b|} + \dots + \frac{K}{|b|^h} < \frac{|z|}{|b|^h} + L.$$

Luego, si  $|z| \leq |b|^h L$ , resulta

$$|J^h(z)| < 2L.$$

Sea  $m := \#\{\alpha \in \mathbf{Z}(\Theta) : |\alpha| < 2L\}$ .  $m < \infty$  pues  $\mathbf{Z}(\Theta)$  es un látice. En consecuencia,  $J^{h+m}(z) \in P$ . Esto dice que todo  $z \in \mathbf{Z}(\Theta)$  se escribe en base  $b$  como  $z = (pc_N c_{N-1} \dots c_0)_b$  donde  $p$  es periódico (eventualmente 0) y  $c_j \in A$ . Entonces

$z \cdot b^{-M} \in \bigcup_{l \in \mathbf{Z}(\Theta)} (H + l)$  para todo  $M \leq N$ . Como  $N$  es arbitrariamente grande, resulta que

$$\{z \cdot b^{-M} : z \in \mathbf{Z}(\Theta), M \in \mathbf{N}\} \subset \bigcup_{l \in \mathbf{Z}(\Theta)} (H + l). \text{ Pero } \mathbf{C} = \text{cl}\{z \cdot b^{-M} : z \in \mathbf{Z}(\Theta), M \in \mathbf{N}\} \subset \text{cl}\left(\bigcup_{l \in \mathbf{Z}(\Theta)} (H + l)\right)$$

$$= \bigcup_{l \in \mathbf{Z}(\Theta)} (H + l). \text{ cl}(\Delta) \text{ indica la clausura del conjunto } \Delta \text{ y la última igualdad se debe a que } H$$

es compacto y  $\mathbf{Z}(\Theta)$  intersecta a toda esfera en un conjunto finito de puntos, QED.

2) Esta demostración sirve para probar la proposición 2 cambiando  $\mathbf{Z}(\Theta)$  por  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{C}$  por  $\mathbf{R}$ .

3) La proposición 4 admite el siguiente complemento.

**Proposición 6.** Sea  $\Theta$  un entero algebraico no real de grado  $d > 2$ .

a) Existen en  $\mathbf{Z}(\Theta)$  elementos tan próximos entre sí como se desee.

b) Si  $\mathbf{C} = \bigcup_{l \in \mathbf{Z}(\Theta)} (H + l)$  entonces para algún par de elementos de  $\mathbf{Z}(\Theta)$ ,  $w_1 \neq w_2$ ,

$H + w_1 \cap H + w_2$  tiene medida positiva.

Demostración. a) El conjunto  $B = \{c_0 + c_1 \Theta + \dots + c_{d-1} \Theta^{d-1} : |c_j| < k\} \subset \mathbf{Z}(\Theta)$  está contenido en una esfera de radio  $Ck$ . Supongamos que dos puntos arbitrarios de  $\mathbf{Z}(\Theta)$  estén a distancia  $> 2\varepsilon > 0$ .  $B$  contiene  $(2k-1)^d$  puntos distintos y los círculos con centro en ellos y radio  $\varepsilon$  son disjuntos. Además, ellos están en el círculo con centro 0 y radio  $Ck + \varepsilon$ . Luego  $\varepsilon^2 (2k-1)^d \leq (Ck + \varepsilon)^2$ . Esto lleva a un absurdo para  $k \rightarrow \infty$ .

b) Por hipótesis  $\mathbf{C} = \bigcup_{l \in \mathbf{Z}(\Theta)} (H + l)$  por lo que los conjuntos  $H + w$  deben contener una esfera

de radio  $c > 0$  (T. de Baire). En consecuencia, si el par de elementos  $w_1, w_2$  dista menos que  $c$ ,  $m(H + w_1 \cap H + w_2) > 0$ , QED.

4) Para recuperar teoremas de teselado que valen para el caso  $d=2$  parece más indicado asignar a  $z = c_0 + c_1 \Theta + \dots + c_{d-1} \Theta^{d-1} \in \mathbf{Z}(\Theta)$  el vector  $\vec{z} := [c_0 c_1 \dots c_{d-1}]^t \in \mathbf{Z}^d$ . En esta correspondencia  $\mathbf{Z}(\Theta) \rightarrow \mathbf{Z}^d$ ,  $\mathbf{Z}^d$  hereda las operaciones de  $\mathbf{Z}(\Theta)$  y se convierte en un anillo. Por ejemplo, la suma será la operación común de suma entre vectores y la

multiplicación por el vector  $\bar{\Theta} = [0, 1, 0, \dots, 0]^t$ , correspondiente a  $\Theta$ , será multiplicar por

$$\text{la matriz } M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -p_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -p_{d-1} \end{vmatrix}; \text{ es decir, } \bar{\Theta} \circ \bar{z} := \overline{\Theta \cdot z} = M\bar{z}.$$

Los números  $p_j \in \mathbb{Z}$  provienen de la ecuación minimal  $g(\Theta) = \Theta^d + p_{d-1}\Theta^{d-1} + \dots + p_0 = 0$  que define a  $\Theta$ . (M se denomina la matriz acompañante del polinomio  $g(x)$  y su polinomio característico es  $\pm g(x)$ ). Multiplicar por  $\Theta^j$  corresponderá a multiplicar por la matriz  $M^j$  y multiplicar a  $z$  por un elemento  $b \in \mathbb{Z}(\Theta)$ ,  $b = b_0 + b_1\Theta + \dots + b_{d-1}\Theta^{d-1}$ , corresponderá a la multiplicación por la matriz  $\tilde{M} := \sum_{j=0}^{d-1} b_j M^j$ :  $\bar{b} \cdot \bar{z} = \bar{b} \circ \bar{z} = \tilde{M}\bar{z}$ .

Sea  $A = \{0, a_1, \dots, a_{t-1}\}$  un sistema completo de restos módulo  $b \in \mathbb{Z}(\Theta)$ . Entonces  $\tilde{A} := \{\bar{0}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{t-1}\}$  es un sistema completo de restos de  $\mathbb{Z}^d / \tilde{M}\mathbb{Z}^d$  (y recíprocamente). Se definen como enteros del sistema numérico  $\{\bar{b}, \tilde{A}\} = \{\tilde{M}, \tilde{A}\}$  a los elementos del conjunto

$\tilde{W} := \left\{ \bar{z} = \sum_{j=0}^N \tilde{M}^j \bar{c}_j : \bar{c}_j \in \tilde{A} \right\}$ , los fraccionarios del sistema serán los elementos del

conjunto  $\tilde{H} := \left\{ \bar{z} = \sum_{j=-\infty}^{-1} \tilde{M}^j \bar{c}_j : \bar{c}_j \in \tilde{A} \right\}$  y los elementos del conjunto  $\tilde{G} :=$

$\left\{ \bar{z} = \sum_{j=-\infty}^N \tilde{M}^j \bar{c}_j : \bar{c}_j \in \tilde{A} \right\}$  serán los representables del sistema. Para la definición de  $\tilde{H}$  y

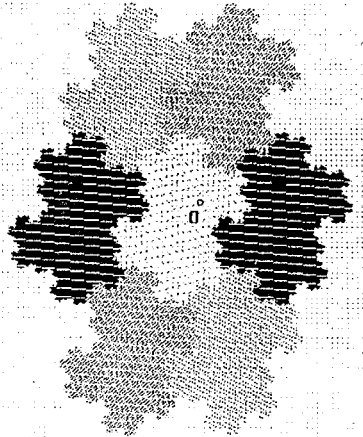
$\tilde{G}$  es necesario que las series involucradas converjan. Ese será el caso si todos los autovalores de  $\tilde{M}$  tienen módulo mayor que 1, o sea, si el radio espectral de  $\tilde{M}^{-1}$  es menor que 1.

**Teorema 3** ([B]) Sea  $\tilde{M}$  una matriz  $d \times d$  de elementos enteros, radio espectral de  $\tilde{M}^{-1} < 1$  y  $t := |\det \tilde{M}|$ . Sea  $\tilde{A} := \{\bar{0}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{t-1}\} \subset \mathbb{Z}^d$  un sistema completo de restos módulo  $\tilde{M}$ . Entonces, en el sistema  $\{\tilde{M}, \tilde{A}\}$  vale  $\mathbf{R}^d = \bigcup_{\bar{z} \in \mathbb{Z}^d} (\bar{z} + \tilde{H})$ .

5) W. J. Gilbert también ha estudiado sistemas como en el punto anterior en el caso particular en que  $b$  es un entero algebraico  $\Theta$  y las cifras son  $A_c = \{0, 1, \dots, t-1\}$  donde  $t$  es la norma de  $\Theta := |\text{producto de todas las raíces del polinomio minimal}| = |p_0| = |\det M|$ . En [G] demuestra entre otros interesantes resultados el siguiente (cf. también [KaK], [KaKo]),

**Teorema 4.** a) Si  $\Theta$  es un entero cuadrático de polinomio minimal  $\Theta^2 + p_1\Theta + p_0$  entonces los enteros del sistema  $\{\Theta, A\}$  coinciden con  $\mathbf{Z}(\Theta)$  si y sólo si  $p_0 \geq 2$  y  $-1 \leq p_1 \leq p_0$ .

b) En cada cuerpo cuadrático  $\mathbf{F}$  puede hallarse un entero algebraico  $\Theta$  tal que los enteros del sistema  $\{\Theta, A\}$  coinciden con  $\mathbf{Z}(\Theta)$  y son precisamente los enteros algebraicos del cuerpo  $\mathbf{F}$ .



6) En la figura a la izquierda mostramos el embaldosado por el conjunto fraccionario  $H$  correspondiente a la base

$$b = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ y cifras } A=\{0,1\} \text{ con } \Theta = b, W=\mathbf{Z}(\Theta). H \text{ es}$$

una réplica del llamado "dragón domado".

#### REFERENCIAS.

- [B] Boros Z., Representation of vectors in generalized number systems, Grazer Math. Ber., 327(1996)7-10.  
 [BG] Bandt Ch. and Gelbrich G., Classification of self-affine lattice tilings, J. London Math. Soc., (2)50 (1994)581-593.  
 [BP] Benedek A. and Panzone R., On the tame dragon, Revista de la UMA, 40, No. 3-4(1997)125-141.  
 [BPP] Benedek A., Panzone R. and Paolini G., A remark on numbers with powers in a point-lattice, Rev. UMA, vol. 41, No. 3, (1999).  
 [G] Gilbert W. J., Radix representations on quadratic fields, J. of Math. Analysis and App., 83(1981) 264-274.  
 [Go] Goffinet D., Number systems with a complex base: a fractal tool for teaching topology, AMM, 98(1991)249-255.  
 [H] Hecke E., *Vorlesungen über die Theorie der Algebraischen Zahlen*, Leipzig(1923), Chelsea Pub. Co.(1970).  
 [IKR] Indlekofer K.-H., Kátai I. and Racsó P., Some remarks on generalized number systems, Acta Sci. Math (Szeged), 57(1993)543-553.  
 [K] Kátai I., Generalized number systems and fractal geometry, János Pannonius University, Pécs(1995)  
 [KaK] Kátai I. and Kovács B., Kanonische Zahlensysteme bei reellen quadratischen algebraischen Zahlen Acta Sci. Math., 42(1980)99-107.  
 [KaKo] Kátai I. and Kovács B., Canonical number systems in imaginary quadratic fields, Acta Math. Hung., 37(1981)159-164.  
 [KSz] Kátai I., Szabó J. Canonical number systems for complex integers, Acta Sc. Math. 37(1975)255-260.  
 [P] Benedek A. and Panzone R., On the Eisenstein set, Rev. UMA, 41,2(1998)177-185.  
 [PJS] Peitgen H-O, Jürgens H. and Saupe D., *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, (1992).  
 [S] Steidl G., On symmetric representation of Gaussian integers, BIT, 29(1989)563-571.