INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 69

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1999 -

(Versión revisada 2003)

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 69

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 1999 -

(Versión revisada 2003)

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 69

ÁLGEBRAS DE BOOLE MONÁDICAS

Antonio A. Monteiro y Luiz F. Monteiro

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 1999

(Versión revisada 2003)

ALGEBRAS DE BOOLE MONADICAS

Antonio A. R. Monteiro y Luiz F. Monteiro

Redacción de Luiz F. Monteiro

INMABB - CONICET -UNS

1999
Versión revisada - 2003

Nota del redactor

Estas notas estan basadas, fundamentalmente, en el curso *Algebras de Boole monádicas* que dictara en la Universidad Nacional del Sur, en diversas oportunidades, entre 1960 y 1973, el Dr. Antonio Monteiro.

Agradecemos la colaboración en el dactilografiado y corrección de estas notas a los siguientes docentes del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Sur: Doctores Manuel Abad y Aldo V. Figallo, al Mg. Ignacio D. Viglizzo y a los Licenciados Sonia Savini, Julio Sewald y Alicia Ziliani. En la versión actual la colaboración del Lic. Martín Figallo.

Los cursos que A. Monteiro dictara en la UNS, en particular el curso sobre Algebras de Boole Monádicas, fueron de fundamental importancia para la realización de mi Tesis Doctoral, [23], cuyo tema generaliza precisamente el de las Algebras de Boole monádicas. Algunos de los resultados obtenidos en la misma permitieron mejorar algunas demostraciones de la teoría de las Algebras de Boole monádicas que fueron incluídas en los cursos que dictados por mi en la U.N.S. entre 1973 y 1994.

Los capítulos sobre Algebras de Boole monádicas libres no formaban parte de los cursos que el Dr. Antonio Monteiro dictara en la U.N.S. En el mismo incluímos resultados obtenidos por: L. Monteiro en 1968, que fueron expuestos en un curso de A. Monteiro en 1973, y que solo fueron publicados en 1978, [24], por L. Monteiro, M. Abad, S. Savini y J. Sewald en 1994, [2] e I. Viglizzo 1994, [35]. El capítulo sobre subálgebras monádicas, contiene diversos resultados, que tampoco formaban parte de los cursos de A. Monteiro.

En el capítulo 11 incluímos un resultado inédito de A. Monteiro. En el desarrollo de estas notas solo citaremos algunos resultados de la teoría de las Algebras de Boole. Para mayor información se recomienda consultar, por ejemplo: L. Monteiro *Algebras de Boole*, Informes Técnicos Internos 66 (1998), Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, que contiene partes de diversos cursos que el Dr. A. Monteiro dictara en la U.N.S., entre 1957 y 1975 y que L. Monteiro también dictara en la U.N.S. entre 1974 y 1999.

Los objetivos de la redacción de estas y otras notas son:

1) *Rendir un pequeño, pero sentido y merecido homenaje, a quien dejó una profunda huella en la U.N.S.*

2) *Dejar a disposición de futuras generaciones los contenidos de los cursos de nuestro querido maestro.*

Índice General

Introducción

El estudio de diversos cálculos proposicionales (clásico, intuicionista, modal, etc.) dá origen al estudio de ciertas estructuras algebraicas (álgebras de Boole, de Heyting, de Lewis, etc.) que tienen tambien un gran interés en la Matemática. Es suficiente remarcar, por ejemplo, que la teoría de las álgebras de Boole, de Heyting y de Lewis estan intimamente relacionadas con la teoría de los espacios topológicos.

De un modo general podemos decir que durante este siglo se acentuó la tendencia a estudiar diversos capítulos de la Lógica, utilizando técnicas generales del Algebra, tendencia que tiene su origen mas antigua en los trabajos de Boole y de sus contemporaneos. Por otro lado la teoría de los espacios topológicos tiene un rol muy importante en el estudio de la Lógica, despues de los trabajos de fundamentales de M. Stone, A. Tarski seguidos de los de H. Rasiowa, R. Sikorski y otros autores.

Paul Halmos inició el estudio de sistemas algebraicos intimamente relacionados con el cálculo funcional clásico, a los que denomina álgebras poliádicas.

Las álgebras de Boole monádicas son una abstracción del cálculo de funciones proposicionales de una variable.

(Extraída de: *Algébres monadiques*, A. Monteiro, Notas de Lógica Matemática 7 (1974), Instituto de Matemática, Universidad Nacional de Sur, Bahía Blanca, Argentina)

1 Algebras de equivalencia

Definición 1.1 *Dados dos conjuntos no vacíos E y E' diremos que E' es una imagen de E si existe una función suryectiva f de E en E'.*

Se plantea naturalmente el problema de determinar todas las imágenes de un conjunto E por medio de una construcción efectuada sobre E. Para ello consideremos una transformación f de E sobre E' y veamos cómo es posible reconstruir en E los elementos de E'.

Dado un elemento i de E' consideremos el conjunto $I_i = f^{-1}(i) = \{x \in E : f(x) = i\}$. Obtenemos de este modo una familia $\{I_i\}_{i\in E'}$, que es una partición del conjunto E, esto es, esta familia tiene las siguientes propiedades:

1. $I_i \neq \emptyset$ cualquiera que sea $i \in E'$.
2. $\displaystyle\bigcup_{i\in E'} I_i = E$.
3. Si $i, j \in E'$ e $i \neq j$ entonces $I_i \cap I_j = \emptyset$.

En efecto:

1. Si $I_{i_1} = \emptyset$ $(i_1 \in E')$ entonces no existiría ningún $x \in E$ tal que $f(x) = i_1$ y por lo tanto la función f no sería suryectiva.
2. Como $I_i \subseteq E$ para todo $i \in E'$ entonces (i) $\displaystyle\bigcup_{i\in E'} I_i \subseteq E$.

   Probemos ahora que $E \subseteq \displaystyle\bigcup_{i\in E'} I_i$. Sea $x \in E$, como $f(x) \in E'$ y $x \in I_{f(x)}$, entonces $x \in \displaystyle\bigcup_{i\in E'} I_i$, luego (ii) $E \subseteq \displaystyle\bigcup_{i\in E'} I_i$.

   De (i) e (ii) resulta que $E = \displaystyle\bigcup_{i\in E'} I_i$.
3. Si $i, j \in E'$ e $i \neq j$ entonces $I_i \cap I_j = \emptyset$.

   Supongamos que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, esto es, que existe $x \in I_i \cap I_j$. Luego $x \in I_i$ y $x \in I_j$, lo cual significa que $f(x) = i$, $f(x) = j$ y por consiguiente $i = j$, absurdo.

Tenemos entonces que cada transformación sobreyectiva f de E sobre E' da origen a una partición del conjunto E a la cual llamaremos *partición inducida por la transformación* f. Esto sugiere la idea de identificar las imágenes de un conjunto con las particiones de ese conjunto.
Sea $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i\in J}$ una partición del conjunto E. Podemos suponer sin inconvenientes que si i, j son dos elementos diferentes de J entonces $I_i \neq I_j$.

Sea E' el conjunto cuyos elementos son los conjuntos de la partición y probemos que E' es una imagen de E.
En efecto, dado un elemento $x \in E$ sea $f(x) = I_i \in E'$ el *único* conjunto de la partición $\mathcal{P}$ que contiene a x (la *existencia* y *unicidad* de este conjunto resultan de las propiedades de la partición). Obtenemos así una transformación f de E sobre E' y es evidente que la

partición inducida por f es la partición dada inicialmente visto que $I_i = f^{-1}(I_i)$.

Esto muestra que la determinación de las imágenes de un conjunto puede reducirse al estudio de las particiones de ese conjunto.

Ahora bien, el estudio de las particiones de un conjunto se puede identificar con el estudio de las relaciones de equivalencia sobre el conjunto dado.

En efecto si f es una transformación de E sobre E' y $\mathcal{P}$ la partición correspondiente entonces la relación de equivalencia $\sim$ asociada a la particion se define en la siguiente forma:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } f(a) = f(b)$$

la cual es evidentemente una relación de equivalencia.

En resumen: la determinación de las imágenes de un conjunto X, el estudio de las particiones de X y el estudio de las relaciones de equivalencia definidas sobre X, pueden considerarse como tres aspectos de un mismo problema.

A continuación estudiaremos las particiones. A cada uno de los conjuntos de una partición le llamaremos *célula* (*clase*) o *célula de equivalencia* (*clase de equivalencia*).

Sea $\mathcal{P}$ una partición de E y representemos por $\exists a$ la clase (unívocamente determinada) de la partición $\mathcal{P}$ que contiene al elemento a, entonces tenemos un operador $\exists$ que a cada punto de E hace corresponder una parte no vacía de E.
Vamos a extender este operador en forma natural a todas las partes de E del siguiente modo:

1. $\exists\emptyset = \emptyset$.
2. Si $X \neq \emptyset$, entonces $\exists X = \bigcup_{p \in X} \exists p$.

$\exists$ se denomina *operador de saturación* y se dice que el conjunto $\exists X$ es el *saturado* del conjunto X.
Desde el punto de vista de la teoría de relaciones de equivalencia es claro que $\exists X$ es la familia de todos los puntos que son equivalentes a algún punto del conjunto X.
Es claro que $\exists$ es un operador definido sobre el álgebra de Boole $A = \mathbf{2}^E$. Tenemos así un par $(A, \exists)$ formado por el álgebra de Boole $A = \mathbf{2}^E$ y por el operador $\exists$ que a cada $X \in A$ le hace corresponder $\exists X \in A$.

Indiquemos las propiedades más importamtes del operador $\exists$:

E0) $\exists\emptyset = \emptyset$,

E1) $X \subseteq \exists X$,

Como $p \in \exists p$, $\bigcup_{p \in X} \{p\} \subseteq \bigcup_{p \in X} \exists p$. Luego, $X = \bigcup_{p \in X} \{p\} \subseteq \bigcup_{p \in X} \exists p = \exists X$.

E2) $\exists(X \cap \exists Y) = \exists X \cap \exists Y$

i) $\exists(X \cap \exists Y) \subseteq \exists X \cap \exists Y$
Sea $p \in \exists(X \cap \exists Y)$ entonces existe (1) $x \in X \cap \exists Y$ tal que (2) $p \sim x$. De (1) resulta (3) $x \in X$ (4) $x \in \exists Y$; de (2) y (3) resulta (5) $p \in \exists X$ y de (4) resulta

(6) existe $y \in Y$ tal que $x \sim y$. De (6) y (2) se sigue que $p \sim y (y \in Y)$, esto es (7) $p \in \exists Y$. De (5) y (7) resulta $p \in \exists X \cap \exists Y$.

ii) $\exists X \cap \exists Y \subseteq \exists(X \cap \exists Y)$
Sea $p \in \exists X \cap \exists Y$. Luego $p \in \exists X$, y por lo tanto (1) existe $x \in X$ tal que $x \sim p$. Análogamente, como $p \in \exists Y$, (2) existe $y \in Y$ tal que $p \sim y$, de donde resulta que existen $x \in X$ e $y \in Y$ tales que $x \sim y$. Por lo tanto (3) $x \in \exists y$. De (1) y (3) resulta (4) $x \in X \cap \exists Y$. De (1) y (4) resulta que $p \in \exists(X \cap \exists Y)$

De i) y ii) resulta $E2$.

Lema 1.1 *$\exists$ es un operador completamente aditivo, esto es, si $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ entonces $\exists X = \bigcup_{i \in I} \exists X_i$.*

Dem. Si $p \in X$ entonces existe $i \in I$ tal que $p \in X_i$, luego $\exists p \subseteq \exists X_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \exists X_i$ y por lo tanto (i) $\exists X = \bigcup_{p \in X} \exists p \subseteq \bigcup_{i \in I} \exists X_i$.
Probemos ahora que (ii) $\bigcup_{i \in I} \exists X_i \subseteq \exists X$.
Sea $p \in \bigcup_{i \in I} \exists X_i$. Luego, existe un $i \in I$ tal que $p \in \exists X_i$. Como $p \in \exists X_i$, existe $x_i \in X_i$ tal que $p \sim x_i$, esto es $p \in \exists x_i$, pero de $x_i \in X_i \subseteq X$ resulta que $x_i \in X$. Luego, $p \in \exists x_i \subseteq \bigcup_{x \in X} \exists x = \exists X$. Luego $p \in \exists X$.
De (i) y (ii) resulta $\exists X = \bigcup_{i \in I} \exists X_i$. □

No indicaremos otras fórmulas de cálculo porque todas ellas (incluyendo la anterior) son consecuencias de las fórmulas E0, E1 y E2.
En el álgebra $A = 2^E$ están definidas las operaciones $\cap, \cup, -$ y $\exists$. Es natural entonces definir el concepto de subálgebra de $(A = 2^E, \exists)$.

Definición 1.2 *Una parte no vacía A' de $A = 2^E$ se dice una* subálgebra *del álgebra A, si A' es cerrada con respecto a $\cap, \cup, -, \exists$. Diremos también que A' es un* álgebra de equivalencia.

Se plantean naturalmente los dos problemas siguientes:

1. Dada el álgebra $A = 2^E$ y un operador $\exists$ definido sobre A que cumpla las condiciones E0, E1 y E2, ¿existirá alguna partición del conjunto E tal que $\exists$ sea el operador de saturación relativo a esa partición? La contestación es afirmativa y será demostrada más adelante.

2. Supongamos que A es un álgebra de Boole cualquiera en la cual está definido un operador $\exists$ con las propiedades E0, E1 y E2, ¿será el sistema dado, $(A, \exists)$ (al cual llamaremos *álgebra de Boole monádica*) representable isomórficamente por un álgebra de equivalencia, esto es, por una subálgebra del álgebra indicada en el primer problema? Nuevamente, la contestación es afirmativa y será demostrada más adelante.

2 Algebras funcionales monádicas

Sea B un álgebra de Boole y E un conjunto no vacío. Consideremos el conjunto $A = B^E$ de todas las funciones definidas sobre E y que toman sus valores en B. Si algebrizamos las funciones punto por punto, sabemos que A es un álgebra de Boole. El primer elemento de A es la función $\mathbf{0}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in E$, y el último elemento de A es la función $\mathbf{1}$ definida por $\mathbf{1}(x) = 1$ para todo $x \in E$.

Dada $f \in A$ queda determinado el siguiente subconjunto, de elementos de B, a saber el rango de f: $R(f) = \{f(x) : x \in E\}$.

En cualquiera de los siguientes casos: (1) B completa, (2) E finito, (3) $R(f)$ finito, podemos afirmar que existe el supremo (ínfimo) del conjunto $R(f)$, que notaremos $\exists f = \bigvee\limits_{x\in E} f(x)$, ($\forall f = \bigwedge\limits_{x\in E} f(x)$).

Ejemplo 2.1 *Sea E un conjunto con mas de un elemento. Consideremos la función $f : E \rightarrow B$, definida del siguiente modo: dado $x_o \in E$, $f(x_o) = k_1 \in B$ y si $x \in X$, $x \neq x_o$, $f(x) = k_2 \in B$ entonces $\exists f = k_1 \vee k_2$ y $\forall f = k_1 \wedge k_2$.*

Si $f \in A$ y existe el supremo (ínfimo) del conjunto $R(f)$ entonces podemos considerar las siguientes funciones de E en B:

$$(\boldsymbol{\exists} f)(x) = \exists f \text{ y } (\boldsymbol{\forall} f)(x) = \forall f, \text{ para todo } x \in E.$$

Observemos que dada la definición precedente ambas funciones $\boldsymbol{\exists}$ y $\boldsymbol{\forall}$ son constantes.

Definición 2.1 *Daremos el nombre de álgebra de Boole funcional monádica a toda subálgebra booleana S de $A = B^E$ que verifique:*

M1) Para toda $f \in S$, existen los elementos $\exists f$ y $\forall f$,

M2) Si $f \in S$, entonces $\boldsymbol{\exists} f, \boldsymbol{\forall} f \in S$.

El operador $\boldsymbol{\exists}$ ($\boldsymbol{\forall}$) será denominado cuantificador funcional existencial (universal).

Recordemos el siguiente resultado:

Lema 2.1 *Sea A un álgebra de Boole y $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq A$:*

1) Si existe el $\bigvee\limits_{i\in I} a_i$ entonces tambien existe el elemento $\bigwedge\limits_{i\in I} -a_i$ y $\bigwedge\limits_{i\in I} -a_i = -\bigvee\limits_{i\in I} a_i$,

2) Si existe el $\bigwedge\limits_{i\in I} a_i$ entonces tambien existe el elemento $\bigvee\limits_{i\in I} -a_i$ y $\bigvee\limits_{i\in I} -a_i = -\bigwedge\limits_{i\in I} a_i$.

En la Definición 2.1 no hace falta pedir que existan los elementos $\exists f$ y $\forall f$, y que $\boldsymbol{\exists} f, \boldsymbol{\forall} f \in S$, pues por el el Lema 2.1: $\exists f = \bigvee\limits_{x\in E} f(x) = -\bigwedge\limits_{x\in E} -f(x) = -\bigwedge\limits_{x\in E} (-f)(x) = -\forall - f$ y en consecuencia $(\boldsymbol{\exists} f)(x) = \exists f = -\forall - f = -\forall(-f)(x) = (-\boldsymbol{\forall} - f)(x)$. Abreviadamente se suele escribir $\boldsymbol{\exists} = -\boldsymbol{\forall} -$.
Análogamente $\forall f = -\exists - f$ y $\boldsymbol{\forall} f = -\boldsymbol{\exists} - f$.
En otras palabras, si S es una subálgebra booleana de A tal que para todo $f \in S$ existe el elemento $\exists f$ y además $\boldsymbol{\exists} f \in S$ entonces también existe el elemento $\forall f$ y $\boldsymbol{\forall} f \in S$. Es

claro que la recíproca de esta afirmación también es verdadera.

Sea C el subconjunto de $A = B^E$, de todas las funciones constantes. C es claramente una subálgebra booleana de A. Además si $f \in C$ esto es $f(x) = b \in B$ para todo $x \in E$, entonces existe el elemento $\exists f = \bigvee_{x \in E} f(x)$ y $\exists f = b$. También existe el elemento $\forall f = \bigwedge_{x \in E} f(x)$ y $\forall f = b$, por lo tanto si $f \in C$, $\forall f \in C$ y $\exists f \in C$.

Lema 2.2 *Si A es un álgebra de Boole y $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq A$, en la cual existe el elemento $\bigvee_{i \in I} a_i$, y $b \in A$, entonces tambien existe el elemento $\bigvee_{i \in I} (a_i \wedge b)$, y*

$$\bigvee_{i \in I} (a_i \wedge b) = (\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge b.$$

Teorema 2.1 *Si S es un álgebra de Boole funcional monádica el operador $\exists$ tiene las propiedades siguientes:*

E0) $\exists 0 = 0$.

E1) $f \leq \exists f$, *cualquiera que sea* $f \in S$.

E2) $\exists (f \wedge \exists g) = \exists f \wedge \exists g$, *cualquiera que sean* $f, g \in S$.

Dem.

E0) En efecto, como $0(x) = 0$ para todo $x \in E$, entonces $\exists 0 = \bigvee_{x \in E} 0(x) = 0$, y por lo tanto $(\exists 0)(x) = \exists 0 = 0 = 0(x)$.

E1) Resulta de la definición de supremo. Esto es $f(x) \leq \bigvee_{x \in E} f(x) = \exists f = (\exists f)(x)$, luego $f \leq \exists f$.

E2) Como f, $g \in S$ entonces existen los elementos de B, $\exists f$, $\exists g$.

$$(\exists (f \wedge \exists g))(x) =_{\text{def.}} \bigvee_{x \in E} (f \wedge \exists g)(x)) = \bigvee_{x \in E} (f(x) \wedge (\exists) g(x)) =$$

$$\bigvee_{x \in E} (f(x) \wedge \exists g) = (\text{por el Lema2.2}) = (\bigvee_{x \in E} f(x)) \wedge \exists g = \exists f \wedge \exists g =$$

$$(\exists f)(x) \wedge (\exists g)(x) = (\exists f \wedge \exists g)(x),$$

y por lo tanto

$$\exists (f \wedge \exists g) = \exists f \wedge \exists g.$$

□

Observemos que si una función $f \in S$ es constante entonces es evidente que $\exists f = f$. Recíprocamente si $f \in S$ es tal que $\exists f = f$, entonces ella es constante. En efecto como $(\exists f)(x) = \bigvee_{x \in E} f(x) = \exists f$ y $f(x) = (\exists f)(x)$ entonces f es constante.

El concepto de álgebra funcional monádica se presenta en lógica en la teoría de la cuantificación.

Sea E un conjunto no vacío de elementos llamados *individuos*, B un álgebra de Boole de proposiciones y f una *función proposicional*; esto es, f es una función que a cada individuo x le hace corresponder la proposición $f(x)$. Si x se considera como una variable libre sobre E, f no es una proposición sino una forma proposicional, en cambio cuando se considera un elemento fijo $a \in E$ tendremos la proposición $f(a) \in B$.

Ejemplo 2.2 *Sea E el conjunto de los números reales y B el conjunto de las proposiciones de las cuales se ocupa la teoría de los números reales. Entonces $x + 2 = 3$ es una forma proposicional, y si reemplazamos x por 1 tendremos 1+2 =3 que es una proposición verdadera, en cambio, si reemplazamos x por 2 tendremos 2+3 = 3 que es una proposición falsa.*

La proposición $f(x)$ se lee del siguiente modo: el individuo x tiene la propiedad f. Si suponemos que el conjunto E tiene un número finito de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces el elemento $(\exists f)(x) = f(a_1) \vee f(a_2) \vee \ldots \vee f(a_n)$ indicará que a_1 tiene la propiedad f, ó que a_2 tiene la propiedad f, ..., ó que a_n tiene la propiedad f. Este enunciado suele indicarse de la siguiente forma: existe un x que tiene la propiedad f y por eso suele escribirse $\exists f = \exists_x f(x)$ y se dice entonces que el operador $\exists_x$ es el *cuantificador existencial*. En forma análoga el elemento $(\forall f)(x) = f(a_1) \wedge f(a_2) \wedge \ldots \wedge f(a_n)$ significa que a_1 tiene la propiedad f, a_2 tiene la propiedad f, ..., y a_n tiene la propiedad f, lo cual suele expresarse abreviadamente: cualquiera que sea x, x tiene la propiedad f, y por eso suele escribirse $\forall_x f(x) = \forall f$, y se dice que el operador $\forall_x$ es el *cuantificador universal*.
Se prueba en el estudio del cálculo proposicional de primer orden de la lógica clásica que las funciones proposicionales de una sola variable forman un álgebra de Boole en la cual el operador $\exists$ tiene las propiedades $E0, E1$ y $E2$.

3 Algebras de Boole monadicas

3.1 Definición

Los dos ejemplos concretos tratados anteriormente sugieren la siguiente:

Definición 3.1 *Daremos el nombre de álgebra de Boole monádica al par $(A, \exists)$ formado por un álgebra de Boole A y por un operador $\exists$ que a cada elemento $a \in A$ hace corresponder un elemento $\exists a \in A$ en forma tal que se cumplan las siguientes condiciones:*

E0) $\exists 0 = 0$.

E1) $a \leq \exists a$, *cualquiera que sea* $a \in A$.

E2) $\exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$, *cualesquiera que sean* $a, b \in A$.

Entre los diversos objetivos del estudio de las álgebras de Boole monádicas, citaremos: estudio de las reglas de cálculo para el operador $\exists$, sus relaciones con las operaciones booleanas, determinación de sus imagenes homomórficas, estudio de las álgebras cocientes. Pero el objetivo principal es el estudio de las relaciones que existen entre el concepto abstracto que acabamos de definir y los ejemplos más concretos que dimos anteriormente de álgebras de equivalencia y de álgebras funcionales. Para precisar esta idea indicaremos la siguiente:

Definición 3.2 *Dadas dos álgebras de Boole monádicas $(A, \exists)$ y $(A', \exists)$ se dice que A' es isomorfa a A si existe una transformación biunívoca h de A sobre A' que cumpla las condiciones siguientes:*

H1) $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$,

H2) $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$,

H3) $h(-a) = -h(a)$

H4) $h(\exists a) = \exists h(a)$

y escribiremos $A' \cong A$.

Se prueba inmediatamente que la relación $\cong$ es una relación de equivalencia. Entonces dada un álgebra de Boole monádica A, el conjunto de todas las álgebras de Boole monádicas isomorfas a A forman una clase de equivalencia y todas esas álgebras tienen las mismas propiedades algebraicas, difiriendo solamente en la naturaleza de sus elementos, visto que en virtud de las propiedades H1 a H4 todas las propiedades algebraicas de A se pueden traducir en propiedades algebraicas de A' y reciprocamente.

Los problemas fundamentales que vamos a estudiar son:

1. Dada un álgebra de Boole monádica abstracta A saber si existe algún álgebra de equivalencia isomorfa a A.

2. Dada un álgebra de Boole monádica abstracta A saber si existe algún álgebra funcional isomorfa a A.

Si las respuestas a los problemas 1 y 2 son afirmativas podremos decir que el concepto de álgebra de Boole monádica es una formulación abstracta adecuada de los conceptos de álgebra de equivalencia y de álgebra funcional.

3.2 Reglas de cálculo

Demostraremos que las siguientes reglas de cálculo son válidas en un álgebra de Boole monádica.

E3) $\exists 1 = 1$.

En efecto, como $\exists 1 \in A$ entonces (i) $\exists 1 \leq 1$ y por la propiedad $E1$ sabemos que (ii) $1 \leq \exists 1$, luego de (i) e (ii) resulta $\exists 1 = 1$.

E4) $\exists\exists a = \exists a$.

En efecto, de E2 y E3 resulta $\exists\exists a = \exists(1 \wedge \exists a) = \exists 1 \wedge \exists a = 1 \wedge \exists a = \exists a$.

E5) Si $a \leq b$ entonces $\exists a \leq \exists b$.

Como por hipótesis $a \leq b$ y sabemos por E1 que $b \leq \exists b$, tenemos que $a \leq b \leq \exists b$ o sea que $a = a \wedge \exists b$, luego por E2 resulta $\exists a = \exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$ y por lo tanto $\exists a \leq \exists b$.

Definición 3.3 *Se dice que un elemento a de un álgebra de Boole monádica A es invariante, saturado o constante si $\exists a = a$.*
Al conjunto de los elementos invariantes de A lo representaremos por $K(A)$ o K.

E6) Si $a, b \in K$ entonces $a \wedge b \in K$.

Supongamos que $\exists a = a$ y $\exists b = b$ entonces por E2 tenemos $\exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$, luego $\exists(a \wedge b) = a \wedge b$, es decir, $a \wedge b \in K$.

E7) Si $a \in K$ entonces $-a \in K$.

Sea $\exists a = a$, luego $0 = \exists 0 = \exists(-a \wedge a) = \exists(-a \wedge \exists a) = \exists - a \wedge \exists a = \exists - a \wedge a$. Por lo tanto,
$-a = -a \vee 0 = -a \vee (\exists - a \wedge a) = (-a \vee \exists - a) \wedge (-a \vee a) = \exists - a \wedge 1 = \exists - a$.

Podemos en base a las reglas E6 y E7 enunciar el siguiente:

Lema 3.1 *El conjunto K de los invariantes de un álgebra de Boole monádica A es una subálgebra del álgebra de Boole A.*

E8) Si $a, b \in K$ entonces $a \vee b \in K$.

Como $a, b \in K$ entonces por E7 tenemos $-a, -b \in K$, luego por E6 $-a \wedge -b \in K$ y teniendo en cuenta nuevamente E7, $-(-a \wedge -b) \in K$ esto es $a \vee b \in K$.

$b) = \exists a \vee \exists b$.

cto, como $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$ entonces por E5 tenemos $\exists a \leq \exists(a \vee b)$ y $\exists(a \vee b)$, luego (i) $\exists a \vee \exists b \leq \exists(a \vee b)$. Por E1 sabemos que $a \leq \exists a$ y que), luego $a \vee b \leq \exists a \vee \exists b$ y por E5 se tiene que (1) $\exists(a \vee b) \leq \exists(\exists a \vee \exists b)$. Por bemos que $\exists a$ y $\exists b$ son invariantes, luego por E8 resulta que $\exists a \vee \exists b$ también es ante y por lo tanto $\exists(\exists a \vee \exists b) = \exists a \vee \exists b$, luego reemplazando en (1) tenemos $\exists(a \vee b) \leq \exists a \vee \exists b$. De (i) e (ii) resulta $\exists(a \vee b) = \exists a \vee \exists b$.

odemos definir un álgebra de Boole monádica del siguiente modo:

1 3.4 *Daremos el nombre de álgebra de Boole monádica al par $(A, \forall)$ formado ebra de Boole A y por un operador $\forall$ que a cada elemento $a \in A$ hace corres- elemento $\forall a \in A$ en forma tal que se cumplan las siguientes condiciones:*

U0) $\forall 1 = 1$.

U1) $\forall a \leq a$, *cualquiera que sea* $a \in A$.

U2) $\forall(a \vee \forall b) = \forall a \vee \forall b$, *cualesquiera que sean* $a, b \in A$.

Todos los lemas y teoremas duales a los dados se demuestran en forma dual.

Lema 3.2 *Si en un álgebra de Boole monádica A existen el supremo de un subconjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ y el supremo del subconjunto $\{\exists a_i\}_{i \in I}$ entonces:* $\exists\Big(\bigvee_{i \in I} a_i\Big) = \bigvee_{i \in I} \exists a_i$

Dem. Sea $a = \bigvee_{i \in I} a_i$, luego $a_i \leq a$ para todo $i \in I$ y por lo tanto como el operador $\exists$ es monótono tenemos que: $a_i \leq \exists a_i \leq \exists a$ para todo $i \in I$. Por lo tanto $a = \bigvee_{i \in I} a_i \leq \bigvee_{i \in I} \exists a_i \leq \exists a$ y en consecuencia $\exists a \leq \exists\Big(\bigvee_{i \in I} \exists a_i\Big) \leq \exists a$ luego $\exists a = \exists\Big(\bigvee_{i \in I} \exists a_i\Big)$. Pero
$\exists a_i \in K(A)$ para todo $i \in I$ y como por hipótesis existe $\bigvee_{i \in I} \exists a_i$ entonces $\bigvee_{i \in I} \exists a_i \in K(A)$, luego $\exists a = \bigvee_{i \in I} \exists a_i$, esto es: $\exists\Big(\bigvee_{i \in I} a_i\Big) = \bigvee_{i \in I} \exists a_i$ □

Corolario 3.1 *En un álgebra de Boole moñadica completa el operador $\exists$ es completamente aditivo esto es*

$$\exists\Big(\bigvee_{i \in I} a_i\Big) = \bigvee_{i \in I} (\exists a_i).$$

4 Algebras de Boole monádicas y álgebras de clausura

Si $(A, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica vimos que se verifican las siguientes propiedades:

C0) $\exists 0 = 0$

C1) $a \leq \exists a$, cualquiera que sea $a \in A$,

C2) $\exists\exists a = \exists a$, cualquiera que sea $a \in A$,

C3) $\exists(a \vee b) = \exists a \vee \exists b$, cualesquiera que sean $a, b \in A$.

Definición 4.1 *Al par $(A, \exists)$ formado por un álgebra de Boole A y un operador $\exists$ que a cada elemento $a \in A$ le hace corresponder un elemento $\exists a \in A$ en forma tal que se verifiquen las propiedades* C0 *a* C3 *se dá el nombre de álgebra de clausura o álgebra de Lewis.*

De acuerdo a la definición anterior toda álgebra de Boole monádica es un álgebra de clausura, pero la recíproca no siempre es verdadera. En efecto consideremos el álgebra de Boole cuyo diagrama se indica en la Figura 4.1

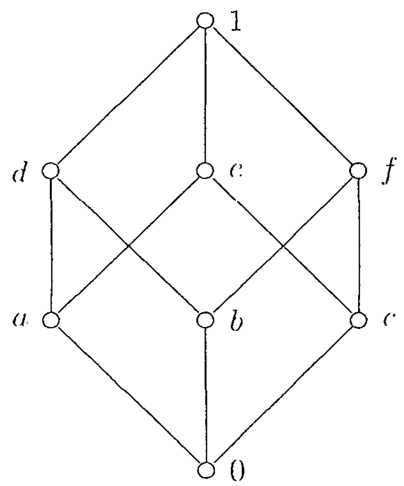


Figura 4.1

y el operador $\exists$ definido del siguiente modo:

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$\exists$ x	0	e	f	c	1	e	f	1

entonces es fácil ver que $\exists$ es un operador de clausura. Pero $\exists$ no es un operador existencial dado que $\exists(a \wedge \exists b) = \exists(a \wedge f) = \exists 0 = 0$ y $\exists a \wedge \exists b = e \wedge f = c \neq 0$.

Indicaremos a continuación condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de clausura sea un álgebra de Boole monádica y de ese modo podremos apreciar la particularización que se obtiene al introducir el concepto de álgebra de Boole monádica. A tal efecto indicaremos el siguiente:

Teorema 4.1 *En un álgebra de clausura A las siguientes condiciones son equivalentes*

1) $\exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$. (Paul Halmos, [9])

2) $\exists(-\exists a) = -\exists a$. (Chandler Davis, [7])

3) *Si* $a \wedge \exists b = 0$ *entonces* $\exists a \wedge \exists b = 0$. (Chandler Davis, [7])

Dem. Observemos en primer lugar que en un álgebra de clausura, se verifica la monotonía del operador $\exists$, es decir, si $a \leq b$ entonces $\exists a \leq \exists b$. En efecto, como $a \leq b$ entonces $b = a \vee b$, luego $\exists(a \vee b) = \exists b$ y por IV $\exists a \vee \exists b = \exists b$, es decir, $\exists a \leq \exists b$.

$1 \Rightarrow 2)$ Por hipótesis se verifica la propiedad 1 entonces A es un álgebra de Boole monádica y como sabemos que $\exists a$ es un invariante de A entonces lo mismo ocurre con $-\exists a$ esto es $\exists(-\exists a) = -\exists a$.

$2 \Rightarrow 3)$ Sea $a \wedge \exists b = 0$, esto es $a \leq -\exists b$ luego por hipótesis $\exists a \leq \exists(-\exists b) = -\exists b$ y por lo tanto $\exists a \wedge \exists b \leq -\exists b \wedge \exists b = 0$, es decir, $\exists a \wedge \exists b = 0$.

$3 \Rightarrow 1)$ En primer lugar vamos a probar que si $\exists a = a$ entonces $\exists(-a) = -a$. Como $0 = -a \wedge a = -a \wedge \exists a$, luego por hipótesis $\exists - a \wedge \exists a = 0$, esto es $\exists a \leq -\exists - a$ y como por II $a \leq \exists a$ entonces $a \leq -\exists - a$ de donde $\exists - a \leq -a \leq \exists - a$, es decir, $\exists - a = -a$.
Si $a \wedge \exists b = 0$ entonces por hipótesis $\exists a \wedge \exists b = 0$ y $\exists(a \wedge \exists b) = \exists 0 = 0$, por lo tanto $\exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$.

Supongamos que $a \wedge \exists b \neq 0$, como $a \leq \exists a$ entonces $a \wedge \exists b \leq \exists a \wedge \exists b$, luego $\exists(a \wedge \exists b) \leq \exists(\exists a \wedge \exists b)$ y como en un álgebra de clausura vale E6 entonces $\exists(\exists a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$ y por lo tanto (i) $\exists(a \wedge \exists b) \leq \exists a \wedge \exists b$.

Como $a = a \wedge 1 = a \wedge (\exists b \vee -\exists b) = (a \wedge \exists b) \vee (a \wedge -\exists b)$ entonces $\exists a = \exists(a \wedge \exists b) \vee \exists(a \wedge -\exists b)$.

Como $\exists(-\exists b) = -\exists b$ y $\exists\exists a = \exists a$ entonces $\exists(\exists a \wedge -\exists b) = \exists a \wedge -\exists b$ y como $a \leq \exists a$ resulta que $a \wedge -\exists b \leq \exists a \wedge -\exists b$.

Luego $\exists a = \exists(a \wedge \exists b) \vee \exists(a \wedge -\exists b) \leq \exists(a \wedge \exists b) \vee (\exists a \wedge -\exists b)$ y por lo tanto $\exists a \wedge \exists b \leq (\exists(a \wedge \exists b) \vee (\exists a \wedge -\exists b)) \wedge \exists b = (\exists(a \wedge \exists b) \wedge \exists b) \vee (\exists a \wedge -\exists b \wedge \exists b) = \exists(a \wedge \exists b) \wedge \exists b \leq \exists(a \wedge \exists b)$, es decir, (ii) $\exists a \wedge \exists b \leq \exists(a \wedge \exists b)$. De (i) e (ii) resulta 1. □

Observación 4.1 *Las álgebras de clausura que verifican cualquiera de las condiciones 1, 2 ó 3 pueden por lo tanto ser identificadas con las álgebras de Boole monádicas.*
En el estudio del álgebra de la lógica se suele dar el nombre de álgebra de clausura S5 a un álgebra de clausura que verifica la condición 2 (otros autores consideran la 3) y por lo tanto las álgebras de clausura S5 coinciden con las álgebras de Boole monádicas.

5 Caracterización de un álgebra de Boole monádica por medio de los invariantes del operador $\exists$

Vamos a comenzar por recordar resultados de A. Monteiro y H. Ribeiro, [22] publicados en 1942.
Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y P un operador unario definido sobre A, que verifica:

(i) $x \leq P(x)$, cualquiera que sea $x \in A$,

(ii) Si $x, y \in A$ son tales que $x \leq y$ entonces $P(x) \leq P(y)$,

(iii) $P(P(x)) = P(x)$, cualquiera que sea $x \in A$.

Representemos con $K(A)$ o con K el conjunto de todos los elementos de A que son invariantes por el operador P, esto es:

$$K(A) = \{x \in A : P(x) = x\}.$$

De la condición (iii) resulta $P(x) \in K(A)$ cualquiera que sea $x \in A$, por lo tanto la imagen $Im\ P$, de este operador verifica $Im\ P \subseteq K(A)$, y por la definición de $K(A)$, tenemos que $K(A) \subseteq Im\ P$.
Dado $t \in A$, sea $K(t) = \{k \in K(A) : t \leq k\}$. Vamos a demostrar que existe el ínfimo, en $K(A)$, de este conjunto y que ese ínfimo es precisamente $P(t)$.
De la condición (i) resulta que $t \leq P(t)$ y por (iii) $P(t) \in K(A)$, luego el conjunto $K(t)$ no es vacío. Por definición $K(t) \subseteq K(A)$.

I1) $\underline{P(t) \leq k \text{ para todo } k \in K(t).}$
De $k \in K(t)$ resulta que $k \in K(A)$ y $t \leq k$, luego por (ii) $P(t) \leq P(k)$, pero vimos que $k \in K(A)$ implica que $P(k) = k$, luego $P(t) \leq k$ cualquiera que sea $k \in K(t)$.

I2) $\underline{\text{Si } x \in K(A) \text{ verifica } x \leq k \text{ para todo } k \in K(t) \text{ entonces } x \leq P(t).}$
En efecto, como $P(t) \in K(t)$ entonces $x \leq P(t)$.

Acabamos así de probar que:

$$\bigwedge\{k \in K(A) : t \leq k\} = P(t).$$

Supongamos ahora que K es un subconjunto, no vacío, del conjunto ordenado A que verifica: <u>(iv) cualquiera que sea $t \in A$ el conjunto $K(t) = \{k \in K : t \leq k\}$ tiene un ínfimo en K.</u> Diremos que K es *relativamente completo*. Bajo esta condición, vamos a demostrar que existe un único operador unario P definido sobre A que verifica las condiciones (i), (ii) y (iii) y que además el conjunto de los invariantes de tal operador es precisamente el conjunto K.
Dado $t \in A$ pongamos por definición: $P(t) = \bigwedge\{k \in K : t \leq k\}$, luego por la hipótesis tenemos que (*) $P(t) \in K$ y

$$(i)\ \ t \leq \bigwedge\{k \in K : t \leq k\} = P(t),$$

Probemos (ii). Supongamos que $t, s \in A$ son tales que $t \leq s$ luego:
$\{k \in K : s \leq k\} \subseteq \{k \in K : t \leq k\}$ y por lo tanto:

$$P(t) = \bigwedge\{k \in K : t \leq k\} \leq \bigwedge\{k \in K : s \leq k\} = P(s).$$

Por (i) sabemos que $P(t) \leq P(P(t))$. Por definición $P(P(t)) = \bigwedge\{k \in K : P(t) \leq k\}$, luego $P(P(t)) \leq k$ para todo $k \in K$ tal que $t \leq k$, luego como por (*) $P(t) \in K$ y $P(t) \leq P(t)$ tenemos que $P(P(t)) \leq P(t)$, lo que demuestra que la propiedad (iii) es verificada.
Probemos que $K(A) = K$. En efecto por definición $P(t) \in K$ y por (iii) $P(t) \in K(A)$. $t \in K(A) \iff P(t) = t$, pero $P(t) \in K$ luego $t \in K$.
Si Q es un operador unario, definido sobre A que verifica (i), (ii), (iii) y tal que $\{x \in A : Q(x) = x\} = K$, entonces $Q = P$. En efecto como $Q(x) \in K$ y $x \leq Q(x)$ entonces $P(x) = \bigwedge\{k \in K : x \leq k\} \leq Q(x)$. Como $x \leq P(x)$ entonces por (ii) $Q(x) \leq Q(P(x))$. Por otro lado $P(x) \in K$ y como por hipótesis $K = \{y \in A : Q(y) = y\}$ tenemos que $Q(P(x)) = P(x)$, luego $Q(x) \leq P(x)$.
Supongamos ahora que K_1 y K_2 son dos subconjuntos relativamente completos de A y que (1) $K_1 \neq K_2$. Por el resultado anterior a K_1 (K_2) le corresponde un operador P_1 (P_2) tal que el conjunto de los invariantes de P_1 (P_2) es precisamente K_1 (K_2.) De (1) resulta que, por ejemplo, existe $k_1 \in K_1$ y $k_1 \notin K_2$, por lo tanto $P_1(k_1) = k_1$ y $P_2(k_1) \neq k_1$, por lo tanto $P_1 \neq P_2$.

Lema 5.1 *Si A es un álgebra de Boole monádica y $a \in A$ entonces $\exists a = a \iff \forall a = a$.*

Dem. En efecto, si $\exists a = a$ sabemos (ver propiedad E7) que $\exists -a = -a$ luego $-\forall - -a = -a$ o sea $-\forall a = -a$ y por lo tanto $\forall a = a$. Recíprocamente si $\forall a = a$ esto es $-\exists - a = a$ entonces $\exists - a = -a$ luego por E7): $\exists a = a$. □

Lema 5.2 *Si K es el conjunto de los invariantes con respecto al operador $\exists$ de un álgebra de Boole monádica A, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

K0) *K no es vacío.*

K1) *Si $a, b \in K$ entonces $a \vee b \in K$.*

K2) *Si $a, b \in K$ entonces $a \wedge b \in K$.*

K3) *Si $a \in K$ entonces $-a \in K$.*

K4) *Dado un elemento fijo $x \in A$ el conjunto $\{k \in K : x \leq k\}$ tiene un ínfimo $\bigwedge\{k \in K: x \leq k\}$ que pertenece a K.*

D) *El ínfimo indicado en la propiedad $K4$ es precisamente $\exists x$.*

Dem. K0) Resulta de $\exists 0 = 0$.
Las propiedades K1, K2 y K3 ya fueron demostradas anteriormente (ver sección 3.1).
K4) Como el operador $\exists$ cumple con las propiedades (i), (ii) y (iii) entonces de acuerdo con los resultados anteriores se verifican K4 y D. □

Las condiciones K0 a K3 expresan que K es una subálgebra booleana de A y la condición K4 expresa que esa subálgebra tiene una propiedad especial. Los resultados anteriores nos llevan a la siguiente:

Definición 5.1 *A toda subálgebra booleana de A que tiene la propiedad* K4 *daremos el nombre de subálgebra relativamente completa en A.*

A efectos de demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre los operadores de cuantificación $\exists$ definidos sobre un álgebra de Boole A y las subálgebras de A relativamente completas en A, probaremos el siguiente:

Teorema 5.1 *Sea A un álgebra de Boole y K un subconjunto de A que verifica las siguientes condiciones:*

0) *K no es vacío.*

I) *Si $a, b \in K$ entonces $a \vee b \in K$.*

II) *Si $a \in K$ entonces $-a \in K$.*

III) *Dado un elemento fijo $x \in A$ el conjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ de todos los elementos de K tales que $x \leq a_i$ tiene un ínfimo $\bigwedge\limits_{i \in I} a_i$ que pertenece a K.*

Entonces existe un único operador de cuantificación definido sobre A que tiene por invariantes al conjunto K.

Dem. Dado $x \in A$ pongamos por definición $\exists x = \bigwedge\limits_{i \in I} a_i$. De las condiciones 0, I y II resulta que K es una subálgebra booleana de A. Además de acuerdo a la definición de $\exists x$ resulta que si $a \in K$ entonces $\exists a = a$. En efecto si $a \in K$ considerando el conjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ de los $a_i \in K$ tales que $a \leq a_i$, este conjunto no es vacío porque $a \in K$ y $a \leq a$, luego $\exists a = \bigwedge\limits_{i \in I} a_i = a$. Esto significa que todos los elementos de K son invariantes para el operador $\exists$. Probemos ahora que el operador $\exists$ tiene las siguientes propiedades:

1) $\exists 0 = 0$.

   Como K es subálgebra de A entonces $0 \in K$ luego $\exists 0 = 0$.

2) $x \leq \exists x$.

   Si $x \leq a_i$ $a_i \in K$ entonces por definición $\exists x = \bigwedge\limits_{i \in I} a_i$, luego $x \leq \exists x$.

3) $\exists\exists x = \exists x$.

   De la definición de $\exists x$ y teniendo en cuenta III resulta que $\exists x \in K$, por lo tanto $\exists\exists x = \exists x$.

4) $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$

   Observemos que $\exists$ es monótono esto es si $a \leq b$ entonces $\exists a \leq \exists b$. En efecto sea $\{a_i\}_{i \in I}$ el conjunto de todos los a_i de K tales que $a \leq a_i$ y sea $\{b_j\}_{j \in J}$ el conjunto de todos los b_j de K tales que $b \leq b_j$, entonces es claro que $\{b_j\}_{j \in J} \subseteq \{a_i\}_{i \in I}$ y por lo tanto $\exists a = \bigwedge\limits_{i \in I} a_i \leq \bigwedge\limits_{j \in J} b_j = \exists b$.

   Entonces de las condiciones $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$ resulta por la monotonía de $\exists$ que $\exists x \leq \exists(x \vee y)$ y $\exists y \leq \exists(x \vee y)$ y por lo tanto $\exists x \vee \exists y \leq \exists(x \vee y)$ (i). Además de $x \leq \exists x$ e $y \leq \exists y$ resulta $x \vee y \leq \exists x \vee \exists y$ y por la monotonía de $\exists$ tenemos que $\exists(x \vee y) \leq \exists(\exists x \vee \exists y)$. Pero como sabemos por 3 que $\exists x$ y $\exists y$ pertenecen a K entonces por I $\exists x \vee \exists y$ pertenece a K y por lo tanto $\exists(\exists x \vee \exists y) = \exists x \vee \exists y$, luego $\exists(x \vee y) \leq \exists x \vee \exists y$ (ii). De (i) e (ii) resulta $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$

5) $\exists(-\exists x) = -\exists x$

Sabemos que $\exists x \in K$ luego por II $-\exists x \in K$ y por lo tanto $\exists(-\exists x) = -\exists x$

De las condiciones 1), 2), 3) y 4) resulta que A es un álgebra de Lewis, en la cuál se verifica 5), luego por el Teorema 4.1 A es un álgebra de Boole monádica.
Observemos que los únicos invariantes son los elementos de K, en efecto si $\exists x = x$ como $\exists x \in K$ entonces $x = \exists x \in K$, luego $x \in K$.

Si dos subálgebras condicionalmente completas K_1 y K_2 son distintas existe un elemento $k_1 \in K_1$ tal que $k_1 \notin K_2$ entonces $\exists_1 k_1 .= k_1$ y $\exists_2 k_1 \neq k_1$ luego los operadores $\exists_1$ y $\exists_2$ son distintos. □

Lema 5.3 *Si en un álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$, un conjunto no vacío de elementos invariantes $\{a_i\}_{i\in I}$ tiene ínfimo $a = \bigwedge_{i\in I} a_i$ entonces a es invariante.*

Dem. Como $a \leq a_i$ entonces $\exists a \leq \exists a_i = a_i$ luego $\exists a \leq \bigwedge_{i\in I} a_i = a$ y como sabemos que $a \leq \exists a$ entonces $\exists a = a$ □
Análogamente:

Lema 5.4 *Si en un álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$, un conjunto no vacío de elementos invariantes $\{a_i\}_{i\in I}$ tiene un supremo $a = \bigvee_{i\in I} a_i$ entonces a es invariante.*

Dem. Como el supremo indicado existe, entonces por el Lema 2.1 se tiene que $-a = \bigwedge_{i\in I} -a_i$ y como de $a_i \in K$ resulta que $-a_i \in K$ entonces por el Lema 5.3 $-a \in K$ y por lo tanto $a \in K$ □

Basándonos en los resultados anteriores podemos enunciar los siguientes Teoremas:

Teorema 5.2 *En un álgebra de Boole mónadica completa todo conjunto no vacío de elementos invariantes tiene un supremo y un ínfimo que también son invariantes.*

Teorema 5.3 *En un álgebra de Boole mónadica completa el conjunto K de los elementos invariantes tiene las siguientes propiedades:*

I) *K es una subálgebra del álgebra de Boole A.*

II) *Todo conjunto $\{a_i\}_{i\in I}$ no vacío de elementos de K tiene un supremo $a = \bigvee_{i\in I} a_i \in K$.*

De las propiedades I) y II) resulta que todo conjunto no vacío de elementos de K tiene un ínfimo que pertenece a K.

Definición 5.2 *Una parte K no vacía de A se dice una subálgebra completa si tiene las propiedades I y II.*

Teorema 5.4 *Dada un álgebra de Boole A y una subálgebra completa K de A, existe un único operador $\exists$ que tiene por invariantes los elementos de K.*

Dem. Dado $a \in A$ como $1 \in K$ y $a \leq 1$ entonces el conjunto $\{k_i\}_{i\in I}$ de todos los elementos $k_i \in K$ tales que $a \leq k_i$ es no vacío y por lo tanto existe el elemento $\exists a = \bigwedge_{i\in I} k_i \in K$. □

Observación 5.1 *Todas las subálgebras finitas de A son subálgebras relativamente completas y por lo tanto a cada subálgebra finita corresponde un operador de cuantificación luego sobre un álgebra de Boole se pueden definir varios operadores de cuantificación entre los cuales figura el llamado cuantificador caótico o simple que es aquel que tiene por invariantes la subálgebra finita* $\{0,1\}$, *a esta subálgebra corresponde el cuantificador dado por:*

a) $\exists 0 = 0$

b) *Si* $x \neq 0$ *entonces* $\exists x = 1$

Este ejemplo muestra que la subálgebra K puede ser completa sin que A lo sea y lo mismo ocurre en el caso en que K es finita.

Ahora bien ¿será posible sobre un álgebra de Boole dada arbitraria infinita definir un cuantificador que tenga un número infinito de invariantes? En efecto basta considerar el cuantificador $\exists x = x$ *al cual se llama cuantificador discreto.*

6 Subálgebras monádicas

Consideremos el álgebra de Boole monádica A cuyo diagrama se indica y cuyo conjunto de constantes es $K(A) = \{0, a, f, 1\}$.

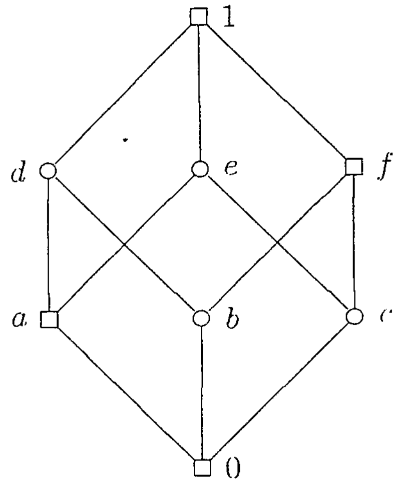


Figura 6.1

Entonces $S = \{0, b, e, 1\}$ es una subálgebra booleana de A y se tiene que $b \in S$ y $\exists b = f \notin S$.
Una parte no vacía S de un álgebra de Boole monádica A, se dice una subálgebra monádica si S es una subálgebra booleana de A que verifica: Si $s \in S$ entonces $\exists s \in S$.
Entre las subálgebras monádicas de A figuran naturalmente el álgebra A y la subálgebra $\{0, 1\}$.

Es claro que la intersección de subálgebras monádicas de A es una subálgebra monádica de A. Dado un subconjunto G de A, siempre existe una subálgebra monádica de A que contiene a G, a saber la propia A. Se denomina subálgebra generada por G a la intersección de todas las subálgebras monádicas de A que contienen G, y notaremos a este conjunto por $SM(G)$. Es claro que $SM(G)$ es la menor (con respecto a la relación de inclusión) subálgebra monádica que contiene a G.
Si el conjunto G verifica $SM(G) = A$ se dice que G es un conjunto de generadores de A.
El siguiente resultado se demuestra fácilmente:

Lema 6.1 *Si A es un álgebra de Boole monádica, $G \subseteq A$ entonces:*

$$SM(G) = \bigcup \{SM(F) : F \subseteq G,\ F \text{ finito}\}.$$

Si S es una subálgebra monádica de A y $a \in A$ notaremos con $SM(S, a)$ la subálgebra monádica generada por el subconjunto $S \cup \{a\}$.
Recordemos que si A es un álgebra de Boole, S es una subálgebra booleana de A, $a \in A$ y $SB(S, a)$ representa la subálgebra booleana generada por el conjunto $S \cup \{a\}$ entonces:

$$SB(S, a) = \{x \in A : x = (s_1 \wedge a) \vee (s_2 \wedge -a),\ \text{donde } s_1, s_2 \in S\}.$$

Lema 6.2 *Si A es un álgebra de Boole monádica, $k \in K = K(A)$ y S es una subálgebra monádica de A entonces $SM(S,k) = SB(S,k)$.*

Dem. Como $SM(S,k)$ es, en particular, una subálgebra booleana que contiene a $S \cup \{k\}$ entonces $SB(S,k) \subseteq SM(S,k)$. Veamos que $SB(S,k)$ es una subálgebra monádica. En efecto si $x \in SB(S,k)$ entonces $x = (s_1 \wedge k) \vee (s_2 \wedge -k)$ donde (1) $s_1, s_2 \in S$. Luego $\exists x = \exists(s_1 \wedge k) \vee \exists(s_2 \wedge -k)$ y como $k, -k \in K$ tenemos que (2) $\exists x = (\exists s_1 \wedge k) \vee (\exists s_2 \wedge -k)$. Como S es una subálgebra monádica, de (1) resulta que (3) $\exists s_1, \exists s_2 \in S$. De (2) y (3) obtenemos $\exists x \in SB(S,k)$.
Como $SB(S,k)$ es una subálgebra monádica que contiene a $S \cup \{k\}$ entonces $SM(S,k) \subseteq SB(S,k)$. □

En forma análoga a lo demostrado en el curso de álgebras de Boole se tiene el siguiente resultado:

Lema 6.3 *Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq A$, y $S_1 = SM(\{g_1\})$, $S_2 = SM(S_1, g_2), \ldots, S_n = SM(S_{n-1}, g_n)$, entonces $S_n = SM(G)$.*

Lema 6.4 *Si S es una subálgebra monádica de A y $\emptyset \subset X \subseteq A$, entonces*

$$SM(S \cup X) = \bigcup \{SM(S \cup F) : F \subseteq X,\ F \text{ finito}\}.$$

Dem. Sea $Z = \bigcup\{SM(S \cup F) : F \subseteq X,\ F \text{ finito}\}$. Dado $b \in S \cup X$ luego (1) $b \in S$ ó (2) $b \in X$. En el primer caso $b \in S = SM(S) = SM(S \cup \emptyset)$ con $\emptyset \subseteq X$, luego $b \in Z$. En el segundo caso $\{b\} \subseteq X$ y por lo tanto $b \in SM(S \cup \{b\}) \subseteq Z$. Acabamos así de probar que $S \cup X \subseteq Z$. Es inmediato ver que Z es una subálgebra de A, luego $SM(S \cup X) \subseteq Z$. Sea $F \subseteq X$, F finito, luego $S \cup F \subseteq S \cup X \subseteq SM(S \cup X)$ y por lo tanto $SM(S \cup F) \subseteq SM(S \cup X)$ para toda parte finita F contenida en X, por lo tanto $Z \subseteq SM(S \cup X)$. □

Los resultados del siguiente lema son de fácil demostración.

Lema 6.5 *Sea A un álgebra de Boole y S una subálgebra de A entonces:*

(1) $SB(S \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = SB(SB(S \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}), x_n\})$.

Sea A un álgebra de Boole monádica y S una subálgebra monádica de A entonces:

(2) $SM(S \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = SM(SM(S \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}), x_n\})$.

Lema 6.6 *Si S es una subálgebra monádica de A y F es un subconjunto finito, no vacío de $K = K(A)$ entonces $SM(S \cup F) = SB(S \cup F)$.*

Dem. Por el Lema 6.2 sabemos que el resultado es válido cuando el conjunto F tiene un elemento. Supongamos ahora que el resultado es verdadero para todo subconjunto $\{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}\}$ de K con n-1 elementos, esto es que:

$$(1) \quad SM(S \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}\}) = SB(S \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}\}).$$

Sea $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subseteq K$ entonces:

$$SB(S \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}) = \text{(por el Lema 6.5, (1))} =$$

$$SB(SB(S \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}\}), k_n) = \text{(por la hipótesis de inducción)} =$$

$$SB(SM(S \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}\}), k_n) = \text{(por el Lema 6.2)} =$$

$$SM(SM(S \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}\}), k_n) = \text{(por el Lema 6.5, (2))} =$$

$$SM(S \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}).$$

□

Lema 6.7 *Si S es una subálgebra monádica de un álgebra de Boole monádica A y $X \subseteq K = K(A)$ entonces $SM(S \cup X) = SB(S \cup X)$.*

Dem. Por el Lema 6.4 sabemos que:

$$SM(S \cup X) = \bigcup\{SM(S \cup F) : F \subseteq X,\ F \text{ finito}\},$$

luego como $X \subseteq K = K(A)$ podemos afirmar usando el Lema 6.6 que

$$\bigcup\{SM(S \cup F) : F \subseteq X,\ F \text{ finito}\} = \bigcup\{SB(S \cup F) : F \subseteq X,\ F \text{ finito}\},$$

y como

$$SB(S \cup X) = \bigcup\{SB(S \cup F) : F \subseteq X,\ F \text{ finito}\},$$

el lema está demostrado. □

De la definición resulta que si A es un álgebra de Boole monádica, no trivial, entonces $SM(\emptyset) = \{0, 1\}$, y si A tiene un sólo elemento $SM(\emptyset) = A$.
A continuación probaremos, de un modo diferente, el siguiente resultado de H. Bass [4].

Teorema 6.1 *Si G es un subconjunto finito, no vacío, de un álgebra de Boole monádica A entonces $SM(G)$ es finita.*

Para ello necesitamos demostrar algunos resultados previos. A los efectos de simplificar la lectura, indicaremos las notaciones necesarias [25] y las demostraciones de resultados que publicáramos en [2], (1994) y en [27]. Algunos de estos resultados serán utilizados en §12.3.

Si X es un conjunto finito con n elementos, notaremos $N[X] = n$.

Definición 6.1 *Sea $(R, \wedge, \vee, 0)$ un reticulado con primer elemento 0, $X \subseteq R$, $N[X] = t$, notaremos:*

$$\mathrm{s}_0(X) = \{0\} \qquad ; \qquad \mathrm{s}_1(X) = X,$$

$$\mathrm{s}_j(X) = \{\bigvee y : y \in Y,\ \ Y \subseteq X, N[Y] = j\},\ \ 1 < j \leq t,$$

$$\mathrm{s}(X) = \bigcup_{j=0}^{t} \mathrm{s}_j(X).$$

Salvo indicación en contrario, en este párrafo sólo consideraremos *álgebras de Boole (y de Boole monádicas) finitas no triviales*, esto es, finitas y con más de un elemento. Si B es un álgebra de Boole, notaremos con $\mathcal{A}(B)$ el conjunto de todos los átomos de B. Si $x \in B, x \neq 0$ sea $\mathcal{A}(x) = \{a \in \mathcal{A}(B) : a \leq x\}$, es bien conocido que: $x = \bigvee\{a : a \in \mathcal{A}(x)\}$.

Si $x, y \in B$, pongamos: $x+y = (-x \wedge y) \vee (x \wedge -y)$. Es claro que $x+0 = x$ y $x+1 = -x$.

Sea $\mathbf{B}(B,n) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) : b_i \in \{0,1\} \subseteq B, 1 \leq i \leq n\}$, esto es, el conjunto $\mathbf{B}(B,n)$ está formado por todas las n-uplas de elementos $0, 1 \in B$. $\mathbf{B}(B,n)$ es el producto cartesiano de n álgebras de Boole iguales a $\{0,1\} \subseteq B$, luego es un álgebra de Boole con n átomos, que son precisamente las n-uplas que tienen una única coordenada igual a 1 y las restantes iguales a 0.

Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq B$ y $b \in \mathbf{B}(B,n)$ notaremos con $m_b(G)$ o mas sencillamente m_b al elemento:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}(g_i + b_i).$$

Observemos que de acuerdo con la definición precedente $g_i + b_i = g_i$ o $g_i + b_i = -g_i$.

Sea $m(G) = \{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n)\}$, como $N[\mathbf{B}(B,n)] = 2^n$ entonces $N[m(G)] \leq 2^n$. Notaremos $\mathbf{B}(B,n,i) = \{b \in \mathbf{B}(B,n) : b_i = 0\}$, $1 \leq i \leq n$.

Lema 6.8 *1) Si $b, c \in \mathbf{B}(B,n)$ y $b \neq c$ entonces $m_b \wedge m_c = 0$.*

2) $\bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n)\} = 1$.

3) Si $b, c \in \mathbf{B}(B,n)$, ; $b \neq c$ y $m_b \leq m_c$ entonces $m_b = 0$.

4) $g_i = \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n,i)\}$, $1 \leq i \leq n$.

Dem. 1) Como $b \neq c$ entonces existe por lo menos una coordenada $i, 1 \leq i \leq n$, tal que $b_i \neq c_i$, y como $b_i, c_i \in \{0,1\} \subseteq B$, entonces "$b_i = 0$ y $c_i = 1$" o "$b_i = 1$ y $c_i = 0$". En el primero de los casos tenemos: $m_b \wedge m_c = (\cdots \wedge g_i \wedge \cdots) \wedge (\cdots \wedge -g_i \wedge \cdots) = 0$. Análogamente en el segundo caso.

2) Por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces : $m(G) = \{m_0 = g_1 + 0, m_1 = g_1 + 1\} = \{g_1, -g_1\}$, luego $\bigvee\{m_b : b \in B(B,1)\} = g_1 \vee -g_1 = 1$.
Supongamos que la propiedad enunciada vale para todo conjunto G con $(n-1)$ elementos, y probemos que vale para todo conjunto G con n elementos.
Observemos que $\mathbf{B}(B,n,i) = \{b \in \mathbf{B}(B,n) : b_i = 0\} = \mathbf{B}(B,n) - \{b \in \mathbf{B}(B,n) : b_i = 1\}$, cualquiera que sea i, $1 \leq i \leq n$. Luego $\bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n)\} = \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n), b_n = 0\} \vee \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n), b_n = 1\} = s_1 \vee s_2$. Como los elementos que aparecen en el primer supremo verifican $b_n = 0$, entonces $m_b = \bigwedge_{i=1}^{n-1}(g_i + b_i) \wedge (g_n + 0) = m_{b'} \wedge g_n$, donde $b' = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbf{B}(B,n-1)$. Observemos que $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{B}(B,n)$ si y solo si $b' = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbf{B}(B,n-1)$ y $b_n \in \{0,1\}$, luego

$$s_1 = g_n \wedge \bigvee\{m_{b'} : b' \in \mathbf{B}(B,n-1)\},$$

y por lo tanto teniendo en cuenta la hipótesis de inducción $s_1 = g_n \wedge 1 = g_n$. Análogamente se prueba que $s_2 = -g_n$, y por lo tanto $s_1 \vee s_2 = 1$.

3) Por hipótesis $m_b = m_b \wedge m_c = [por\ 1)] = 0$.

4) $g_i = g_i \wedge 1 = [por\ 2)] = g_i \wedge \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n)\} =$
$(g_i \wedge \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n),\ b_i = 0\}) \vee (g_i \wedge \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n), b_i = 1\}) =$
$(\bigvee\{g_i \wedge m_b : b \in \mathbf{B}(B,n), b_i = 0\}) \vee (\bigvee\{g_i \wedge m_b : b \in \mathbf{B}(B,n), b_i = 1\})$.
Si $b_i = 0$ entonces $m_b = g_i \wedge (\bigwedge_{j \neq i}(g_j + b_j))$, luego $g_i \wedge m_b = m_b$ y si $b_i = 1$ entonces $m_b = -g_i \wedge (\bigwedge_{j=i}(g_j + b_j))$, luego $g_i \wedge m_b = 0$. Por lo tanto

$$g_i = \bigvee\{m_b : b \in \mathbf{B}(B,n,i)\}.$$

□

Sabemos que $SB(\emptyset) = \{0,1\}$, y es bien conocido el siguiente resultado:

Lema 6.9 *Si G es un subconjunto finito, con n elementos del álgebra de Boole B, entonces:*

a) $SB(G) = s(m(G))$.

b) $\mathcal{A}(SB(G)) = \{m_b : m_b \in m(G), m_b \neq 0\}$.

Luego $N[\mathcal{A}(SB(G))] \leq N[m(G)] \leq 2^n$ y por lo tanto $N[SB(G)] \leq 2^{2^n}$.

Observación 6.1 *Si B es un álgebra de Boole con un conjunto $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ de generadores libres, entonces $m_b \neq 0$, para todo $m_b \in m(G)$, ya que B tiene 2^n átomos.*

Lema 6.10 *Si B es un álgebra de Boole y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq B$ entonces $SB(G) = SB(m(G))$.*

Dem. Supongamos que $N[m(G)] = t$, $0 \leq t \leq 2^n$. Como $m(G) = s_1(m(G)) \subseteq \bigcup_{j=0}^{t} s_j(m(G)) = s(m(G)) = SB(G)$, entonces $SB(m(G)) \subseteq SB(G)$.
Sea $y \in SB(G) = s(m(G))$ entonces $y \in s_j(m(G))$, para algún j, $0 \leq j \leq t$.
Si $j = 0$, ello equivale a $y = 0$, y por lo tanto $y \in SB(m(G))$.
Si $j = 1$, ello equivale a $y = m_b$, $m_b \in m(G)$. Si $2 \leq j \leq t$, entonces $y = \bigvee\{z : z \in Z\}$, donde $Z \subseteq m(G)$, $N[Z] = j$. Como $m(G) \subseteq SB(m(G))$, entonces en todos los casos $y \in SB(m(G))$. □

Definición 6.2 (H. Bass, [4]) *Un subconjunto $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ de un álgebra de Boole B se dice una partición del elemento $1 \in B$, si:*

P1) $p_i \wedge p_j = 0$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq t$.

P2) $\bigvee_{j=1}^{t} p_i = 1$.

Ejemplo 6.1 *1) Los átomos de un álgebra de Boole finita forman una partición de 1.*

2) Si B es un álgebra de Boole con tres átomos $\{a_1, a_2, a_3\}$, $p_1 = a_1$ y $p_2 = a_2 \vee a_3$ entonces $\mathcal{P} = \{p_1, p_2\}$ y $\mathcal{Q} = \{0, p_1, p_2\}$ son particiones de 1.

3) Sea B el álgebra de Boole con cuatro átomos indicada en la Figura 6.2, $\mathcal{A}(B) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $p_1 = b$ y $p_2 = f$ entonces $\mathcal{P} = \{b, f\}$ es una partición de 1, y ninguno de sus elementos es un átomo de B.

4) Si G es un subconjunto finito no vacío de B, entonces de acuerdo con el Lema 6.8 el conjunto $m(G)$ forma una partición de 1, que contiene a los átomos de $SB(G)$.

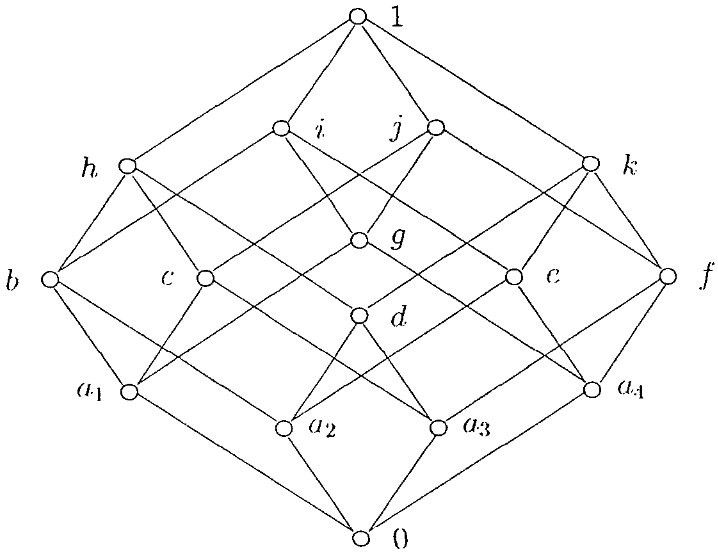


Figura 6.2

Observación 6.2 *a) Sea B un álgebra de Boole. Si $\mathcal{P}$ es una partición de 1 tal que $\mathcal{A}(B) \subset \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}(B) = \{0\}$.*
En efecto, por hipótesis existe $x \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{A}(B)$. Si $x \neq 0$, entonces como $x = \bigvee\{a : a \in \mathcal{A}(x)\}$, cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}(x)$ se tiene $a \wedge x = a \neq 0$, lo que contradice P1.

b) Si $\mathcal{P}$ es una partición de 1, sea $\mathcal{P}_0 = \{p \in \mathcal{P} : p \neq 0\}$. Si p_i, $p_j \in \mathcal{P}_0$, donde $i \neq j$, entonces $p_i \neq p_j$, pues si $p_i = p_j$ entonces $p_i = p_i \wedge p_i = p_i \wedge p_j = 0$. Absurdo.
Observemos además, que el conjunto $\mathcal{P}_0$ es una partición de 1.

Lema 6.11 *Si B es un álgebra de Boole, $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ una partición de 1, y $G_0 = \{g \in G : g \neq 0\}$ entonces $G_0 = \mathcal{A}(SB(G))$.*

Dem. Observemos en primer lugar que $G_0 \neq \emptyset$, pues si $G_0 = \emptyset$, entonces $G = \{0\}$ y este conjunto obviamente no es una partición de 1.
Sabemos que $\mathcal{A}(SB(G)) = \{m_b : m_b \neq 0,\ b \in \mathbf{B}(B, n)\}$. Sea $g_j \in G_0$, esto es $g_j \in G$ y $g_j \neq 0$.
Como $g_j \wedge g_i = 0$, para todo $i \neq j$, entonces $g_j \leq -g_i$ para todo $i \neq j$, en consecuencia $g_j \leq \bigwedge_{i=1}^{n}\{-g_i : i \neq j\}$, esto es $g_j = g_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}\{-g_i : i \neq j\}$.
Si $b \in \mathbf{B}(B, n)$ verifica $b_j = 0$ y $b_i = 1$, para todo $i \neq j$, entonces:

$$m_b = g_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}\{-g_i : i \neq j\} = g_j.$$

Acabamos así de probar que $G_0 \subseteq \mathcal{A}(SB(G))$.

Sea $m_b \in \mathcal{A}(SB(G))$, luego $m_b \neq 0$ y $m_b = \bigwedge_{i=1}^{n}(g_i + b_i)$. Si $b_i = b_j = 0$ para algún par de índices i, j tales que $i \neq j$, entonces $m_b = g_i \wedge g_j \wedge \bigwedge_{h=1}^{n} \{(g_h + b_h) : h \neq i, j\} = 0$. Absurdo. Por lo tanto si $m_b \neq 0$, no puede existir más de una coordenada b_i de b, igual a cero, luego $b_i = 1$ para todo i o $b_j = 0$ para algún j, $1 \leq j \leq n$ y $b_i = 1$ cualquiera que sea i, $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$.

En el primer caso $m_b = \bigwedge_{i=1}^{n} -g_i = -\bigvee_{i=1}^{n} g_i = -1 = 0$. Absurdo. Luego sólo puede ocurrir el otro caso, y por lo tanto $m_b = \bigwedge_{i=1}^{n}(g_i + b_i) = g_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}\{-g_i : i \neq j\} =$ (por lo visto precedentemente) $= g_j$, con $g_j \in G$. Observemos que $g_j \neq 0$, esto es $g_j \in G_0$, pues $g_j = m_b \neq 0$. □

Observación 6.3 $SB(G) = SB(G_0)$. *Si $G_0 = G$, es obvio. Supongamos que $G_0 \subset G$, luego $SB(G_0) \subseteq SB(G)$. Como $G_0 \subseteq SB(G_0)$ y $\{0\} \subseteq SB(G_0)$, entonces $G = G_0 \cup \{0\} \subseteq SB(G_0)$, y por lo tanto $SB(G) \subseteq SB(G_0)$.*

Lema 6.12 *Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t, g_{t+1}, g_{t+2}, \ldots, g_{2t}\}$ es un subconjunto de un álgebra de Boole B, tal que:*

a) $g_i \leq g_{i+t}$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

b) $G_t = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ es una partición del elemento 1 de B.

Si $1 \leq k \leq t$, notaremos

$\mathbf{B}(B, 2t, k, k+t) = \{b \in \mathbf{B}(B, 2t) : b_k = 0, b_j = 1, 1 \leq j \leq t, j \neq k, b_{k+t} = 0\}$,

$\mathcal{P} = \{m_b(G) : b \in \bigcup_{k=1}^{t} \mathbf{B}(B, 2t, k, k+t)\}$, *y*

si $b \in \mathbf{B}(B, 2t)$, $m_b^*(G) = \bigwedge_{i=t+1}^{2t} (g_i + b_i)$, entonces:

1) $\mathcal{A}(SB(G)) \subseteq \mathcal{P}$.

2) $\mathcal{P}$ es una partición de 1.

3) $N[\mathcal{A}(SB(G))] \leq t \times 2^{t-1}$.

4) $g_i = \bigvee\{g_i \wedge m_b(G) : b \in \mathbf{B}(B, 2t, i, i+t)\}$, $1 \leq i \leq t$.

5) $m_b^*(G) = \bigvee\{g_i \wedge m_b^*(G) : 1 \leq i \leq t \ , \ b_{t+i} = 0\}$.

Dem. Por Lema 6.9, b), sabemos que:

$$\mathcal{A}(SB(G)) = \{m_b(G) \ : \ m_b(G) \neq 0, \ b \in \mathbf{B}(B, 2t)\}.$$

Sea $a \in \mathcal{A}(SB(G))$, es decir, $a = m_b(G)$, $b \in \mathbf{B}(B, 2t)$, $m_b(G) \neq 0$. Como G_t es una partición de 1, entonces por lo visto en Lema 6.11, debe verificarse $b_k = 0$, $1 \leq k \leq t$ y $b_j = 1$, cualquiera que sea j, $1 \leq j \leq t$, $j \neq k$, luego $m_b(G) = g_k \wedge m_b^*(G)$, donde

$b \in \mathbf{B}(B, 2t, k)$. Como $g_j \leq g_{j+t}$, $1 \leq j \leq t$, equivale a $g_j \wedge -g_{j+t} = 0$, $1 \leq j \leq t$, entonces de $b_k = 0$ resulta que debe ser $b_{k+t} = 0$, pues caso contrario $m_b(G) = g_k \wedge -g_{k+t} \wedge \cdots = 0$. Absurdo. Luego $a = m_b$, donde $b \in \bigcup_{k=1}^{t} \mathbf{B}(B, 2t, k, k+t)$.

De 1) resulta que

$$1 = \bigvee\{x : x \in \mathcal{A}(SB(G))\} \leq \bigvee\{m_b(G) : m_b(G) \in \mathcal{P}\},$$

y por lo tanto $\bigvee\{m_b(G) : m_b(G) \in \mathcal{P}\} = 1$. Como $\mathcal{P} \subseteq m(G)$, entonces $m_b \wedge m_c = 0$ para $b, c \in \bigcup_{k=1}^{t} \mathbf{B}(B, 2t, k, k+t)$, $b \neq c$. Por lo tanto $\mathcal{P}$ es una partición de 1.

De acuerdo a la definición de $\mathcal{P}$, sus elementos son los $m_b(G)$, donde los b verifican: *una de sus primeras t coordenadas es igual a 0 y las otras iguales a 1, y en las restantes una debe ser igual a 0 y las otras iguales a 0 ó 1*, luego es claro que $N[\mathcal{P}] \leq t \times 2^{t-1}$, y por lo tanto $N[\mathcal{A}(SB(G))] \leq t \times 2^{t-1}$.

Como $\bigvee\{m_b(G) : b \in \mathbf{B}(B, 2t)\} = 1$, fijado i, $1 \leq i \leq t$, tenemos $g_i = \bigvee\{g_i \wedge m_b(G) : b \in \mathbf{B}(B, 2t)\}$. Pero vimos que si $b_j = 0$, donde $1 \leq j \leq t$, $j \neq i$ entonces $g_i \wedge m_b(G) = g_i \wedge g_j \wedge \cdots = 0$, si $b_i = 1$, $g_i \wedge m_b(G) = g_i \wedge -g_i \wedge \cdots = 0$ y si $b_{t+i} = 1$, luego $g_i \wedge m_b(G) = g_i \wedge -g_{t+i} \wedge \cdots = 0$, luego $g_i = \bigvee\{g_i \wedge m_b(G) : b \in \mathbf{B}(B, 2t, i, t+i)\}$. Como $\bigvee_{i=1}^{t} g_i = 1$, entonces $m_b^*(G) = \bigvee_{i=1}^{t} (g_i \wedge m_b^*(G))$ cualquiera que sea $b \in \mathbf{B}(B, 2t)$. Ahora bien si $b_{t+i} = 1$ entonces $g_i \wedge m_b^*(G) = g_i \wedge -g_{t+i} \wedge \cdots = 0$, luego $m_b^*(G) = \bigvee\{g_i \wedge m_b^*(G) : 1 \leq i \leq t \ , \ b_{t+i} = 0\}$. □

Estos resultados generalizan los indicados por H. Bass [4] en los Corolarios 1 y 2.

Ejemplo 6.2 *Sea B el álgebra de Boole indicada en la Figura 6.2, y consideremos los elementos $g_1 = b = a_1 \vee a_2$, $g_2 = f = a_3 \vee a_4$, $g_3 = j = a_1 \vee a_2 \vee a_4$, $g_4 = i = a_1 \vee a_3 \vee a_4$, luego tenemos que $g_1 \leq g_3$, $g_2 \leq g_4$ $\{g_1, g_2\}$ es una partición de 1,*

$$\bigcup_{k=1}^{2} \mathbf{B}(B, 4, k, k+t) = \mathbf{B}(B, 4, 1, 3) \cup \mathbf{B}(B, 4, 2, 4)$$

donde

$$\mathbf{B}(B, 4, 1, 3) = \{b_1 = (0, 1, 0, 0),\ b_2 = (0, 1, 0, 1)\}, \quad \text{y}$$
$$\mathbf{B}(B, 4, 2, 4) = \{b_3 = (1, 0, 0, 0), b_4 = (1, 0, 1, 0)\},$$

luego $m_{b_1} = a_1$, $m_{b_2} = a_2$, $m_{b_3} = a_4$, $m_{b_4} = a_3$. En este caso $\mathcal{A}(SB(G)) = \mathcal{P}$. consideremos los siguientes elementos a_1, $k = a_2 \vee a_3 \vee a_4$, $b = a_1 \vee a_2$ y 1. Luego tenemos $a_1 \leq b$, $k \leq 1$ y $\{a_1 , k\}$ es una partición de 1. En este caso $m_{b_1} = a_1$, $m_{b_2} = 0$, $m_{b_3} = a_2$ y $m_{b_4} = f$, luego $\mathcal{A}(SB\{a_1, k, b, 1\}) = \{a_1, a_2, f\} \subset \mathcal{P}$.

Lema 6.13 *Si B es un álgebra de Boole monádica y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\} \subseteq B$, es una partición de 1 sea:*

$$H = G \ \cup \ \exists G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t, \exists g_1, \exists g_2, \ldots, \exists g_t\},$$

entonces $SM(G) = SB(H) = SB(G \cup \exists G)$.

Dem. Pongamos $h_i = g_i$, $1 \leq i \leq t$ y $h_i = \exists g_{i-t}$, $t+1 \leq i \leq 2t$. Entonces el conjunto H verifica las condiciones a) y b) del Lema 6.12.
Como $SM(G)$ es una subálgebra booleana de B, probando que $H \subseteq SM(G)$, tendremos (i) $SB(H) \subseteq SM(G)$.
Como $G \subseteq SM(G)$ entonces $\exists G \subseteq \exists SM(G)$, y como $SM(G)$ es una subálgebra monádica, entonces $\exists SM(G) \subseteq SM(G)$, luego $\exists G \subseteq SM(G)$ y por lo tanto $H = G \cup \exists G \subseteq SM(G)$.
Como $G \subseteq G \cup \exists G = H \subseteq SB(H)$, si probamos que la subálgebra booleana $SB(H)$ es monádica, tendremos (ii) $SM(G) \subseteq SB(H)$.
Por el Lema 6.12, $SB(H)$ es finita, entonces para probar que es monádica, basta demostrar que: "*Si* $a \in \mathcal{A}(SB(H))$, entonces $\exists a \in SB(H)$".

Por el Lema 6.12, si $a \in \mathcal{A}(SB(H))$ entonces $a = m_b$, donde $b \in \bigcup_{k=1}^{t} \mathbf{B}(B, 2t, k, k+t)$,

esto es: $a = h_i \wedge \bigwedge_{j=t+1}^{2t} (h_j + b_j) = g_i \wedge \bigwedge_{j=t+1}^{2t} (\exists g_{j-t} + b_j)$, para algún i , $1 \leq i \leq t$.

Como $\exists g_{j-t} + b_j = \exists g_{j-t}$ ó $\exists g_{j-t} + b_j = -\exists g_{j-t}$, entonces $\exists g_{j-t} + b_j \in K(B) = \exists B$, $t+1 \leq j \leq 2t$, y por lo tanto $r = \bigwedge_{j=t+1}^{2t} (\exists g_{j-t} + b_j) \in K(B) = \exists B$. Luego $\exists a = \exists g_i \wedge r$.

Como $b_{t+i} = 0$, entonces $\exists g_{(t+i)-t} + b_{t+i} = \exists g_i$, luego $r \leq \exists g_i$ y en consecuencia $\exists a = r$.

Por otro lado $\exists g_j \in \exists G \subseteq SB(G \cup \exists G) = SB(H)$, $1 \leq j \leq t$, luego $-\exists g_j \in SB(H)$, $1 \leq j \leq t$, de donde resulta que $r \in SB(H)$, esto es $\exists a \in SB(H)$. □

Lema 6.14 *Si B es un álgebra de Boole monádica y $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ entonces $SM(G) = SM(m(G))$.*

Dem. Como $SM(G)$ es una subálgebra monádica de B, si probamos que $m(G) \subseteq SM(G)$, entonces: (i) $SM(m(G)) \subseteq SM(G)$.
Sea $m_b \in m(G)$, esto es :

$$m_b = \bigwedge_{i=1}^{t} (g_i + b_i), \quad \text{donde } b = (b_1, b_2, \ldots, b_t) \in \mathbf{B}(B, t).$$

Como $G \subseteq SM(G)$ entonces si $g \in G$, resulta $-g \in SM(G)$, luego $g_i + b_i \in SM(G)$, $1 \leq i \leq t$, por lo tanto $m_b \in SM(G)$.
Probemos (ii) $SM(G) \subseteq SM(m(G))$. Por el Lema 6.8, 4) sabemos que:

$$g_j = \bigvee \{m_b : b \in \mathbf{B}(B, t), \; b_j = 0\}, \quad 1 \leq j \leq t.$$

Luego como $m_b \in m(G) \subseteq SM(m(G))$, tenemos que $G \subseteq SM(m(G))$, de donde resulta (ii). □

Lema 6.15 *Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ es un subconjunto de un álgebra de Boole monádica B, entonces:*

a) $SM(G) = SB(m(G) \cup \exists m(G))$.

b) $N[\mathcal{A}(SM(G))] \leq 2^t \times 2^{2^t} - 1$.

Dem. Sea $H = m(G) \cup \exists m(G)$.
Sabemos que el conjunto $m(G)$ es una partición de 1. Entonces por el Lema 6.13 : $SM(m(G)) = SB(m(G) \cup \exists m(G))$, luego aplicando el Lema 6.14 se concluye a) .
Como $N[m(G)] \leq 2^t$ entonces aplicando el Lema 6.12, se concluye b). □

Este lema generaliza los resultados indicados por H.Bass [4] en la página 261, y del mismo resulta que toda álgebra de Boole monádica finitamente generada es finita.

Si B_n representa un álgebra de Boole con n átomos, $n \in \mathbf{N}$, entonces es bien conocido que el número de subálgebras booleanas es igual al número de particiones de un conjunto con n elementos.
Es natural plantearse el siguiente problema: *Si B_n es un álgebra de Boole monádica, ¿Cuántas subálgebras monádicas tiene B_n?*
L. Monteiro, M. Abad, S. Savini, J. Sewald y M. Zander [28], caracterizaron las subálgebras monádicas de un álgebra de Boole monádica finita y determinaron la cardinalidad del conjunto de tales subálgebras.

7 Homomorfismos y filtros monádicos

7.1 Homomorfismos monádicos

El concepto de homomorfismo monádico se define en la forma habitual esto es:

Definición 7.1 *Sea $(A, \exists)$ un álgebra de Boole monádica y sea A' en el cual están definidas dos operaciones binarias $\wedge$, $\vee$, y dos operaciones unarias $-$, $\exists$, que no obligamos a verificar ninguna condición. Supongamos que existe una transformación h de A sobre A' que verifica las condiciones siguientes:*

H1) $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$

H2) $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$

H3) $h(-a) = -h(a)$

H4) $h(\exists a) = \exists h(a)$

Diremos entonces que A' es una imagen homomórfica de A, y que h es un homomorfismo monádico.

Como h es en particular un homomorfismo booleano entonces H0) $h(0) = 0'$ y H5) $h(1) = 1'$, donde $0', 1'$ son el primer y último elemento de A'

Teorema 7.1 *Toda imagen homomórfica de un álgebra de Boole monádica es un álgebra de Boole monádica.*

Dem. De las condiciones H1, H2 y H3 resulta que A' es una imagen homomórfica del álgebra de Boole A, lo cual implica que A' es un álgebra de Boole con respecto a las operaciones $\wedge$, $\vee$ y $-$. Por lo tanto resta verificar que el sistema $(A', \exists)$ es un álgebra de Boole monádica. Para ello probemos:

E0) Si $0' \in A'$ entonces $\exists 0' = 0'$.

En efecto como h transforma A sobre A' existe un elemento $0'$ de A' tal que $h(0) = 0'$, y por lo tanto $\exists(0') = \exists(h(0)) = h(\exists 0) = h(0) = 0'$, esto es $\exists(0') = 0'$.

E1) Si $a' \in A'$ entonces $a' \leq \exists a'$.

Si $a' \in A'$ existe un elemento $a' \in A$ tal que $h(a) = a'$, y como $a \leq \exists a$ entonces $a = a \wedge \exists a$, luego $h(a) = h(a \wedge \exists a) = h(a) \wedge h(\exists a) = h(a) \wedge \exists h(a)$, esto es $h(a) \leq \exists h(a)$ o sea $a' \leq \exists a'$.

E2) Si $a', b' \in A'$ entonces $\exists(a' \wedge \exists b') = \exists a' \wedge \exists b'$.

Si $a', b' \in A'$ existen elementos a y b de A tales que $h(a) = a'$ y $h(b) = b'$, luego $\exists(a' \wedge \exists b') = \exists(h(a) \wedge \exists h(b)) = \exists(h(a) \wedge h(\exists b)) = \exists(h(a \wedge \exists b)) = h(\exists(a \wedge \exists b)) = h(\exists a \wedge \exists b) = h(\exists a) \wedge h(\exists b) = \exists h(a) \wedge \exists h(b) = \exists a' \wedge \exists b'$.

Como se verifican E0, E1, y E2 entonces el sistema $(A', \exists)$ es un álgebra de Boole monádica. □

Se plantea naturalmente el problema de saber como es posible determinar todas las imagenes homomórficas de un álgebra de Boole monádica A dada. Si A' es una imagen homomórfica del álgebra de Boole monádica A, en particular A' es un álgebra de Boole, imagen homomórfica del álgebra de Boole A, entonces A' queda completamente determinada por medio del núcleo de homomorfismo, esto es por medio del conjunto $F = Nuc(h) = \{x \in A : h(x) = 1'\}$, donde $1'$ es el último elemento de A'.
Sabemos que F es un filtro. Vamos a demostrar que este filtro tiene la siguiente propiedad: Si $a \in F$ entonces $\forall a \in F$.
En primer lugar observemos que de las condiciones H3 y H4 resulta H5) $h(\forall a) = \forall h(a)$, en efecto $h(\forall a) = h(-\exists - a) =$ (por H3) $= -h(\exists - a) =$ (por H4) $= -\exists h(-a) =$ (por H3) $= -\exists - h(a) = \forall h(a)$. Análogamente se prueba que las condiciones H3 y H5 implican la condición H4. Por lo tanto H4 es equivalente a H5.
Probemos que si $a \in F$ entonces $\forall a \in F$. Por hipótesis $a \in F$, luego $h(a) = 1'$, entonces $h(\forall a) = \forall h(a) = \forall 1' = 1'$ o sea $\forall a \in F$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 7.2 *Se dice que un filtro F de un álgebra de Boole monádica A es un filtro monádico si se verifica la siguiente condición: Si $a \in F$ entonces $\forall a \in F$*

No todo filtro de un álgebra de Boole monádica es monádico. En efecto consideremos el álgebra de Boole monádica indicada en la Figura 6.1. Entonces los operadores $\exists$ y $\forall$ están dados por la siguiente tabla:

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$\exists x$	0	a	f	f	1	1	f	1
$\forall x$	0	a	0	0	a	a	f	1

Tabla 7.1

El filtro $F(d) = \{d, 1\}$ evidentemente no es monádico ya que $d \in F(d)$ y $\forall d = a \notin F(d)$.
Se verifica fácilmente que los únicos filtros monádicos son $F(0)$, $F(1)$, $F(a)$ y $F(f)$.
Si h es un homomorfismo monádico de $(A, \exists)$ sobre $(A', \exists)$ y F es su núcleo, esto es $F = \{x \in A : h(x) = 1'\}$, donde $1'$ es el último elemento de A'. Sabemos que el álgebra de Boole A' es isomorfa al álgebra cociente A/F que se obtiene en la forma conocida, esto es dos elementos a y b de A son equivalentes (módulo F), si existe un elemento $f \in F$ tal que $a \wedge f = b \wedge f$ y escribimos $a \equiv b(\text{mód } F)$, esta relación de equivalencia es como sabemos compatible con las operaciones booleanas $\wedge$, $\vee$ y $-$, esto es una congruencia para las álgebras de Boole.
Representemos por $|a|$ la clase de equivalencia que contiene al elemento a. El conjunto de todas las clases de equivalencia se algebriza por medio de las siguientes fórmulas:

$$|a| \vee |b| = |a \vee b|; \quad |a| \wedge |b| = |a \wedge b|; \quad -|a| = |-a|$$

Se prueba sin dificultad que las clases $|a \vee b|$, $|a \wedge b|$ y $|-a|$ no dependen de los elementos elegidos en las clases $|a|$ y $|b|$.

Para transformar el álgebra de Boole $A' = A/F$ en un álgebra de Boole monádica definiremos un operador $\exists$ sobre las clases de equivalencia del siguiente modo:

$$\exists|a| = |\exists a|.$$

Debemos probar que la clase lateral $|\exists a|$ así obtenida queda unívocamente determinada, esto es que si $a \equiv b$ (mód. F) entonces $\exists a \equiv \exists b$ (mód. F). En efecto por hipótesis existe un elemento f de F tal que $a \wedge f = b \wedge f$, luego tendremos que $a \wedge f \wedge \forall f = b \wedge f \wedge \forall f$, esto es (1) $a \wedge \forall f = b \wedge \forall f$. Además como F es un filtro monádico, de $f \in F$ resulta que (2) $\forall f \in F$. De (1) resulta que:

$$\exists(a \wedge \forall f) = \exists(b \wedge \forall f)$$

y como $\forall f \in K$ tenemos que

$$(3)\ \ \exists a \wedge \forall f = \exists b \wedge \forall f$$

De (3) y (2) se concluye que $\exists a \equiv \exists b$ (mód. F).

Entonces $A' = A/F$ es un álgebra de Boole sobre la cual está definida univocamente un operador $\exists$. El homomorfismo natural de A sobre A' $h(a) = |a|$ verifica la condición $h(\exists a) = \exists h(a)$ esto es que $|\exists a| = \exists|a|$ dado que esta es precisamente la definición del operador $\exists$ sobre A' y por lo tanto como se verifican las condiciones H1, H2, H3 y H4 resulta que h es un homomorfismo monádico de $(A, \exists)$ sobre $(A', \exists)$, o sea que $(A', \exists)$ es un álgebra de Boole monádica.

Los siguientes resultados se prueban en la forma habitual:

Lema 7.1 *Sean A, A' y A" álgebras de Boole monádicas, $h' : A \to A'$ un epimorfismo, $h" : A \to A"$ un homomorfismo. Si Nuc $(h') \subseteq$ Nuc $(h")$, entonces existe un único homomorfimo $h : A' \to A"$ tal que $h" = h \circ h'$. Además:*

1) Si $h"$ es un epimorfismo entonces h un epimorfismo.

2) Si $h"$ es un epimorfismo y Nuc $(h') =$ Nuc $(h")$, entonces h es un isomorfismo.

Corolario 7.1 *Si A y A' son álgebras de Boole monádicas y $h : A \to A'$ es un homomorfismo entonces $h(A)$ es isomorfa a $A/Nuc\ (h)$.*

Luego todas las imágenes homomórficas de un álgebra de Boole monádica se obtienen, a menos de isomorfismos, por la construcción indicada anteriormete. En efecto si A y A' son álgebras de Boole monádicas y $h : A \to A'$ es un epimorfismo, entonces $Nuc\ (h)$ es un filtro monádico de A , luego por el Corolario 7.1 concluímos que $A' = h(A) \cong A/Nuc\ (h)$.

Lema 7.2 *Para que un filtro principal $F(a)$ sea monádico es necesario y suficiente que a sea una constante esto es $\exists a = a$ o lo que es equivalente $\forall a = a$.*

Dem. Condición necesaria: Por hipótesis $F(a)$ es un filtro monádico, entonces como $a \in F(a)$ podemos afirmar que $\forall a \in F(a)$ esto es $a \leq \forall a$ y como $\forall a \leq a$ entonces $\forall a = a$.
Condición suficiente: Supongamos que $\forall a = a$ y probemos que el filtro principal $F(a)$ es monádico, para ello sea $x \in F(a)$ esto es $a \leq x$ luego $\forall a \leq \forall x$ y como $a = \forall a$ entonces

$a \leq \forall x$ esto significa que $\forall x \in F(a)$. Acabamos de probar que si $x \in F(a)$ entonces $\forall x \in F(a)$ luego $F(a)$ es un filtro monádico. □

Sabemos que si p, u son elementos de un álgebra de Boole A tales que $p \leq u$, entonces el conjunto $S = [p, u] = \{x \in A : p \leq x \leq u\}$ es un álgebra de Boole, con primer elemento p, último elemento u, donde las operaciones $\vee$ y $\wedge$ coinciden con las operaciones de A y el complemento de un elemento $x \in S$ se define del siguiente modo $x' = p \vee (-x \wedge u)$. Si $p = 0$ entonces $x' = -x \wedge u$. Si consideramos la transformación $h : A \to S = [0, u]$ definida por $h(x) = x \wedge u$, entonces el conjunto de los elementos invariantes por esta transformación es precisamente el conjunto S. Además h es un epimorfismo booleano de A en S, cuyo núcleo $Nuc\ (h) = \{x \in A : h(x) = u\} = \{x \in A : x \wedge u = u\} = \{x \in A : u \leq x\} = F(u)$, coincide con el núcleo del epimorfismo booleano natural φ de A en $A/F(u)$ y por lo tanto las álgebras de Boole $A/F(u)$ y $S = [0, u]$ son isomorfas.

Si A es un álgebra de Boole monádica y $p, u \in K(A)$ son tales que $p \leq u$ entonces $S = [p, u]$ es un álgebra de Boole monádica dado que si $x \in S$ esto es $p \leq x \leq u$ entonces $p = \exists p \leq \exists x \leq \exists u = u$.

Si (1) $u \in K(A)$ entonces la función $h : A \to S = [0, u] = (u]$ definida anteriormente es un homomorfismo booleano y verifica además, teniendo en cuenta (1), $\exists h(x) = \exists(x \wedge u) = \exists x \wedge u = h(\exists x)$. Luego h es un epimorfismo monádico de A en S cuyo núcleo es $F(u)$ coincide con el núcleo del epimorfismo monádico natural φ de A en $A/F(u)$ y por lo tanto las álgebras de Boole monádicas $A/F(u)$ y $S = [0, u] = (u]$ son isomorfas, (ver Lema 7.1, 2).

Si F es un filtro monádico de un álgebra de Boole monádica A, notaremos $C_F(a)$ en vez de $|a|$. Acabamos de ver que si $u \in K$ entonces las álgebras de Boole monádicas $A/[u)$ y $(u]$ son isomorfas. En el curso de álgebras de Boole demostramos el siguiente resultado: si $x \in (u]$ entonces $C_{|x|}^{u} = [x, x \vee -u]$. Por lo tanto si conocemos el diagrama de Hasse de A se determina en forma inmediata las clases de equivalencia.

Ejemplo 7.1 *Sea A el álgebra de Boole monádica indicada en la Figura 6.1, entonces existen 4 filtros monádicos, a saber $F(0) = A$, $F(a)$, $F(f)$, $F(1) = \{1\}$. Las imágenes homomórficas de A son: $A/F(0) = A/A \cong \{0\}$, $A/F(1) \cong A$ y*

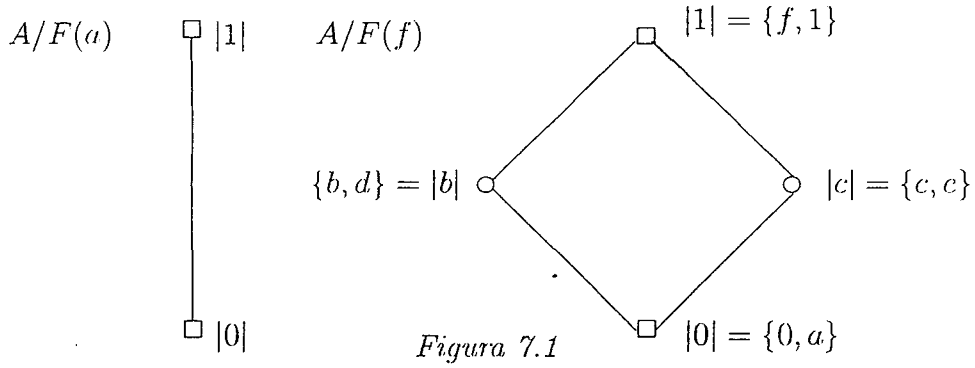


Figura 7.1

7.2 Filtros monádicos

Definición 7.3 *Si X es un subconjunto de un álgebra de Boole monádica A llamaremos filtro monádico generado por X a la intersección de todos los filtros monádicos que contienen a X, y lo notaremos $FM(X)$.*

De esta definición resulta inmediatamente que $X \subseteq FM(X)$ y que $FM(X)$ es el menor filtro monádico que contiene a X. Además es claro que $FM(\emptyset) = \{1\}$.

Si representamos por $F(X)$ el filtro generado por el conjunto $X \subseteq A$ entonces es claro que: $F(X) \subseteq FM(X)$. Recordemos el siguiente resultado:

Lema 7.3 *Si $X \neq \emptyset$ entonces:*

1) $F(X) = \{y \in A : \text{ existen } x_1, x_2, \ldots, x_t \in X \text{ tales que } \bigwedge_{i=1}^{t} x_i \leq y\}$

2) Si X verifica "$x_1 \wedge x_2 \in X$ cualesquiera que sean $x_1, x_2 \in X$" entonces:
$F(X) = \{y \in A : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } x \leq y\}$

Lema 7.4 *Si $X \subseteq K = K(A)$ entonces $F(X)$ es un filtro monádico de A.*

Dem. Sea $y \in F(X)$ luego por el Lema 7.3,1) existen (1) $x_1, x_2, \ldots, x_t \in X$ tales que (2) $a = \bigwedge_{i=1}^{t} x_i \leq y$. De (1) y $X \subseteq K$ resulta que $\forall a = a$. Por (2) tenemos $a = \forall a \leq \forall y$ y por lo tanto $\forall y \in F(X)$. □

Si X es un subconjunto de A notaremos:

$$\exists X = \{\exists x : x \in X\}, \quad \forall X = \{\forall x : x \in X\}, \quad -X = \{-x : x \in X\}.$$

Luego un filtro F es monádico si y solamente si $\forall F \subseteq F$.

Lema 7.5 $FM(X) = F(\forall X)$, *cualquiera que sea $X \subseteq A$.*

Dem. Si $X = \emptyset$ entonces $FM(X) = \{1\}$ y $\forall X = \emptyset$ luego $F(\forall X) = F(\emptyset) = \{1\}$.
Sea $X \neq \emptyset$. Como $X \subseteq FM(X)$ entonces $\forall X \subseteq \forall FM(X) \subseteq FM(X)$ y como $FM(X)$ es un filtro tenemos que $F(\forall X) \subseteq FM(X)$.
Si probamos que $X \subseteq F(\forall X)$, como $\forall X \subseteq K$ y por el Lema 7.4 $F(\forall X)$ es un filtro monádico entonces $FM(X) \subseteq F(\forall X)$.
Sea $x \in X$ luego $\forall x \in \forall X \subseteq F(\forall X)$, por lo tanto como $F(\forall X)$ es un filtro y $\forall x \leq x$ tenemos que $x \in F(\forall X)$. Acabamos asi de probar que $X \subseteq F(\forall X)$. □

Notaremos por $FM(a)$ al filtro monádico generado por el conjunto $\{a\}$, al cual denominaremos filtro monádico principal generado por a. Luego por el Lema 7.5 tenemos que:

$$FM(a) = F(\forall a) = [\forall a).$$

Si $X \subseteq A$ y $a \in A$, notaremos $FM(X, a)$ al filtro monádico generado por el conjunto $X \cup \{a\}$.

Lema 7.6 *1)* $FM(X, a) = \{y \in A : \forall a \to y \in FM(X)\}$, *donde* $x \to y = -x \vee y$.

2) $FM(a) = \{y \in A : \forall a \to y = 1\}$.

3) Si X es un filtro monádico $FM(X, a) = F(X, \forall a)$.

4) $FM(X) = \{y \in A :$ existen $x_1, x_2, \ldots, x_t \in X$ tales que $(\bigwedge_{i=1}^{t} \forall x_i) \rightarrow y = 1\}$.

Dem.

1) Por el Lema 7.5 sabemos que:
$FM(X, a) = F(\forall X, \forall a) = \{y \in A : \forall a \rightarrow y \in F(\forall X)\} =$
$\{y \in A : \forall a \rightarrow y \in FM(X)\}$.

2) Por 1) tenemos que $FM(a) = FM(\emptyset, a) = \{y \in A : \forall a \rightarrow y \in FM(\emptyset) = \{1\}\}$.

3) Resulta inmediatamente de 1) y que por hipótesis $FM(X) = X$.

4) Es una consecuencia de los Lemas 7.3, 1) y 7.5.

□

Lema 7.7 *Si F es un filtro monádico de A entonces $\forall F$ es un filtro de $K = K(A)$, $\forall F = F \cap K$ y si F es propio entonces $\forall F$ es un filtro propio de K.*

Dem.

1) $\forall F \neq \emptyset$.

En efecto como $1 \in F$ entonces $1 = \forall 1 \in \forall F$ luego $\forall F \neq \emptyset$.

2) Si $k_1, k_2 \in \forall F$ entonces $k_1 \wedge k_2 \in \forall F$.

Como F es monádico $\forall F \subseteq F$, luego de $k_1, k_2 \in \forall F \subseteq F$ resulta $k_1, k_2 \in F$ y como F es un filtro tenemos $k_1 \wedge k_2 \in F$, luego $\forall(k_1 \wedge k_2) \in \forall F$. Pero $\forall(k_1 \wedge k_2) = k_1 \wedge k_2$ luego $k_1 \wedge k_2 \in \forall F$.

3) Si $k_1 \in \forall F$ y $k_2 \in K$ es tal que $k_1 \leq k_2$ entonces $k_2 \in \forall F$

Por hipótesis $k_1 \in \forall F$ esto es $k_1 = \forall f_1$ donde $f_1 \in F$, y como F es monádico $k_1 \in F$, luego de $k_1 \leq k_2$ se deduce que $k_2 \in F$, por lo tanto $k_2 = \forall k_2 \in \forall F$.

Probemos que $\forall F = F \cap K$. Si $x \in \forall F$ entonces $x = \forall f$ con $f \in F$ luego $x \in K$ y como F es monádico $x = \forall f \in F$, luego $x \in F \cap K$. Recíprocamente si $x \in F \cap K$, entonces $x \in F$ y $\forall x = x$. Luego $x = \forall x \in \forall F$.
Si $\forall F = K$ entonces $0 \in \forall F$ esto es $0 = \forall f$ con $f \in F$ y como F es monádico tendríamos $0 = \forall f \in F$, absurdo. □

Observación 7.1 *Sea $F = F(c)$ el filtro del álgebra de Boole monádica A indicada en la Figura 6.1, entonces $\forall F = \{a, 1\}$ <u>no es un filtro de</u> $K(A)$.*

Lema 7.8 *Si F es un filtro de A entonces $\exists F$ es un filtro de $K = K(A)$ y si F es propio entonces $\exists F$ es propio. Ademas $\exists F = F \cap K$.*

Dem.

1) $\exists F \neq \emptyset$.
Como $1 \in F$ entonces $\exists 1 = 1 \in F$, luego $\exists 1 \in \exists F$.

2) Si $k_1, k_2 \in \exists F$ entonces $k_1 \wedge k_2 \in \exists F$.
Por hipótesis $k_1 = \exists f_1$ donde (1) $f_1 \in F$ y $k_2 = \exists f_2$, donde (2) $f_2 \in F$. Luego (3) $k_1 \wedge k_2 = \exists f_1 \wedge \exists f_2 = \exists(f_1 \wedge \exists f_2)$. Por otro lado de (2) y $f_2 \leq \exists f_2$ resulta por ser F un filtro, que (4) $\exists f_2 \in F$. Luego de (1) y (4) resulta por ser F un filtro que (5) $f_1 \wedge \exists f_2 \in F$. Finalmente de (3) y (5) tenemos que $k_1 \wedge k_2 \in \exists F$.

3) Si $k_1 \in \exists F$ y $k_2 \in K$ verifica $k_1 \leq k_2$ entonces $k_2 \in \exists F$.
Por hipótesis (1) $k_1 = \exists f_1$ donde (2) $f_1 \in F$, (3) $\exists k_2 = k_2$ y (4) $k_1 \leq k_2$. Como (5) $f_1 \leq \exists f_1$, entonces de (2) y (5) resulta por ser F un filtro que (6) $\exists f_1 \in F$. Luego teniendo en cuenta (1) y (4) tenemos (7) $k_1 = \exists f_1 \leq k_2$, de (6) y (7) se deduce por ser F un filtro que $k_2 \in F$ luego por (3) $\exists k_2 \in F$ y como $k_2 \in F$ entonces $k_2 = \exists k_2 \in \exists F$.

4) Si F es propio entonces $\exists F$ es un filtro propio de K.
Supongamos que $\exists F = K$. Como $0 \in K$ entonces $0 = \exists f$ donde $f \in F$, y como $f \leq \exists f$ resulta que $f = 0$ y por lo tanto $F = A$, absurdo.

5) Si $x \in F \cap K$ entonces $x \in F$ y $\exists x = x$, esto es $\exists x \in F$, donde $x \in F$ luego $x \in \exists F$.
Recíprocamente si $x \in \exists F$ entonces (1) $x = \exists f$ con (2) $f \in F$, luego de (1) resulta que $x \in K$, y de (2) y $f \leq \exists f$ resulta que $x = \exists f \in F$.

□

Ejemplo 7.2 *Consideremos el álgebra de Boole monádica A indicada en la Figura 6.1, cuyo conjunto de constantes es $K = \{0, a, f, 1\}$. Consideremos los siguientes filtros de A esta álgebra:*

1) $F(b) = \{b, d, f, 1\}$ entonces $\exists F(b) = \{f, 1\}$ y $F(\exists F(b)) = \{f, 1\}$.

2) $F(a) = \{a, e, d, 1\}$ entonces $\exists F(a) = \{a, 1\}$ y $F(\exists F(a)) = F(a)$.

Lema 7.9 *Para que un filtro F sea monádico es necesario y suficiente que exista $X \subseteq K$ tal que $F(X) = F$.*

Dem. $\Longrightarrow$) Sea F un filtro monádico. Por el Lema 7.5 $F(\forall F) = FM(F)$, y como F es monádico $FM(F) = F$, luego $F(\forall F) = F$, donde $\forall F \subseteq K$. Ademas por el Lema 7.7 sabemos que $\forall F = F \cap K$.
$\Longleftarrow$) Sea (1) $X \subseteq K$ tal que $F(X) = F$. De (1) resulta por el Lema 7.4 que $F = F(X)$ es monádico. □

Lema 7.10 *Si Q es un filtro de K entonces $\forall F(Q) = Q$.*

Dem. Como $Q \subseteq K$ resulta por el Lema 7.4 que $F(Q)$ es un filtro monádico, luego por el Lema 7.7 $\forall F(Q) = F(Q) \cap K$. Pero $F(Q) \cap K = Q$. En efecto como $Q \subseteq F(Q)$ y $Q \subseteq K$ entonces $Q \subseteq F(Q) \cap K$. Sea $x \in F(Q) \cap K$ entonces (1) $x \in F(Q)$ y (2) $x \in K$. Como Q es un filtro de K entonces verifica la condición indicada en el Lema 7.3, 2) y por lo tanto de (1) resulta que existe (3) $q \in Q$ tal que (4) $q \leq x$. Luego como Q es un filtro de K, de (2), (3) y (4) se concluye que $x \in Q$. □

Lema 7.11 *Si Q es un filtro de K entonces $F(\exists Q)$ es un filtro monádico.*

Dem. Es una consecuencia inmediata de $\exists Q \subseteq K$ y el Lema 7.4. □

Representaremos por $\mathcal{FM}(A)$ el conjunto de todos los filtros monádicos de A y por $\mathcal{F}(K)$ el conjunto de todos los filtros de K. Sabemos que $(\mathcal{FM}(A), \subseteq)$ y $(\mathcal{F}(K), \subseteq)$ son conjuntos ordenados.

Lema 7.12 *La transformación $\alpha(F) = \forall F$ establece un isomorfismo entre los conjuntos ordenados $\mathcal{FM}(A)$ y $\mathcal{F}(K)$.*

Dem. En efecto sabemos por el Lema 7.7 que si F es un filtro monádico, entonces $\forall F = F \cap K$ es un filtro de K, y como F es un filtro entonces por el Lema 7.8 $F \cap K = \exists F$, luego $\exists F = \forall F$.
(i) *Si F_1, F_2 son filtros monádicos tales que $F_1 \subseteq F_2$ entonces $\alpha(F_1) \subseteq \alpha(F_2)$.*
De $F_1 \subseteq F_2$ resulta inmediatamente que $\alpha(F_1) = F_1 \cap K \subseteq F_2 \cap K = \alpha(F_2)$.
(ii) *Si F_1, F_2 son filtros monádicos tales que $\alpha(F_1) \subseteq \alpha(F_2)$ entonces $F_1 \subseteq F_2$.*
En efecto sea $f \in F_1$ luego como F_1 es monádico $\forall f \in F_1 \cap K = \alpha(F_1)$ y como $\alpha(F_1) \subseteq \alpha(F_2) = F_2 \cap K$ tenemos que $\forall f \in F_2$, luego como $\forall f \leq f$ concluímos que $f \in F_2$.
(iii) *Dado un filtro Q de K existe un filtro monádico F de A tal que $\alpha(F) = Q$.*
Por el Lema 7.4 sabemos que $F(Q)$ es un filtro monádico de A, luego $\alpha(F(Q)) = F(Q) \cap K$.
En el Lema 7.10 vimos que $F(Q) \cap K = Q$, luego $\alpha(F(Q)) = Q$.
De (i), (ii) y (iii) resulta que α es un isomorfismo de orden. □

Observación 7.2 *1) Si Q es un filtro de $K(A)$ entonces $\alpha^{-1}(Q) = F(Q) = F(\forall Q) = FM(Q)$.*
2) Si P es un filtro monádico sabemos por el Lema 7.8 que $\alpha(P) = \exists P$ es un filtro de K entonces $P = \alpha^{-1}(\exists P) = F(\exists P)$.

Lema 7.13 *Si F es un filtro monádico de A y $h : A \to A/F$ el homomorfismo natural, entonces la restricción de h al conjunto $K(A)$ es un epimorfismo booleano de $K(A)$ en $K(A/F)$ que tiene por núcleo a $\exists F = \forall F$, y por lo tanto $K(A)/\exists F$ y $K(A/F)$ son álgebras de Boole isomorfas.*

7.3 Filtros ultramonádicos

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los filtros monádicos propios de un álgebra de Boole monádica, no trivial, A. Es claro que $(\mathcal{P}, \subseteq)$ es un conjunto ordenado.

Lema 7.14 *El conjunto ordenado $(\mathcal{P}, \subseteq)$ es inductivo superiormente.*

Dem. Sea $C = \{M_i\}_{i \in I}$ una cadena de $\mathcal{P}$. Vamos a probar que $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ es un elemento de $\mathcal{P}$. En el curso de álgebras de Boole, probamos que la unión de filtros propios es un filtro propio, luego M lo es. Probemos qué M es monádico. En efecto si $m \in M$, entonces existe $i \in I$ tal que $m \in M_i$ y como M_i es un filtro monádico tenemos que $\forall m \in M_i \subseteq M$, y por lo tanto $\forall m \in M$. □

Del Lema precedente resulta por el lema de Zorn que el conjunto ordenado $\mathcal{P}$ tiene por lo menos un elemento máximo. Esto nos conduce a la siguiente definición:

Definición 7.4 *A los elementos máximos de $\mathcal{P}$, esto es a los filtros monádicos maximales, daremos el nombre de filtros ultramonádicos.*

Noteremos con $\mathcal{M}$ o $\mathcal{M}(A)$ al conjunto de todos los filtros ultramonádicos de A.

Lema 7.15 *Todo filtro monádico propio F está contenido en un filtro ultramonádico.*

Dem. Sea $\mathcal{P}(F)$ el conjunto de todos los filtros monádicos propios que contienen a F. Es claro que toda cadena de $\mathcal{P}(F)$ tiene un supremo que pertenece a $\mathcal{P}(F)$. Luego $\mathcal{P}(F)$ es inductivo superiormente y en consecuencia, por el lema de Zorn, este conjunto ordenado tiene por lo menos un elemento máximo, esto es existe $M \in \mathcal{P}(F)$ tal que $F \subseteq M$. Probemos que $M \in \mathcal{M}$. En efecto como $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}$ entonces $M \in \mathcal{P}$ ademas si $P \in \mathcal{P}$ es tal que $M \subseteq P$ entonces como $F \subseteq M$ tendremos que $F \subseteq P$, donde $P \in \mathcal{P}$ luego $P \in \mathcal{P}(F)$ y por lo tanto $P = M$. Esto prueba que $M \in \mathcal{M}$. □

Lema 7.16 *Si M es un filtro ultramonádico de un álgebra de Boole monádica entonces $M = F(\exists M)$.*

Dem. Como M es un filtro entonces $\exists M \subseteq M$ y por lo tanto $F(\exists M) \subseteq F(M) = M$. Recíprocamente sea $m \in M$ luego como M es monádico entonces $\forall m \in M$ luego $\forall m = \exists \forall m \in \exists M \subseteq F(\exists M)$, luego como $\forall m \leq m$ y $F(\exists M)$ es un filtro tenemos que $m \in F(\exists M)$. Observemos que M es en particular un filtro propio de A entonces por el Lema 7.8 $\exists M$ es un filtro propio de $K = K(A)$. □

Teorema 7.2 *Si U es un ultrafiltro del álgebra de Boole monádica A, $F(\exists U)$ es un filtro ultramonádico, $F(\exists U) \subseteq U$ y es el único filtro ultramonádico contenido en U.*

Dem. Sabemos por el Lema 7.8 que $\exists U$ es un filtro propio de $K = K(A)$, luego por el Lema 7.11 $F(\exists U)$ es un filtro monádico. Probemos que $M = F(\exists U)$ es propio. En efecto si $F(\exists U) = A$ entonces $0 \in F(\exists U)$ luego por el Lema 7.3 existen (1) $x_1, x_2, \ldots, x_t \in \exists U$ tales que (2) $\bigwedge_{i=1}^{t} x_i = 0$, pero como $\exists U$ es un filtro de $K(A)$, por (1) resulta que (3) $\bigwedge_{i=1}^{t} x_i \in \exists U$. De (2) y (3) resulta $0 \in \exists U$ y por lo tanto $\exists U = K(A)$, absurdo.
Supongamos que existe un filtro monádico propio M_1 tal que (4) $M \subset M_1$ y sea $x \in M_1 \setminus M$. Como M_1 es un filtro monádico entonces (5) $\forall x \in M_1$ y como $\forall x \leq x$ es claro que $\forall x \notin M$. Como $\forall x \in K \setminus M$ entonces $\forall x \notin U$ y por lo tanto como U es un ultrafiltro de A, $-\forall x \in U$. Ademas como $-\forall x \in K$ tenemos que $-\forall x \in K \cap U = \exists U \subseteq F(\exists U) = M$ luego (6) $-\forall x \in M$. Por lo tanto de (4) y (6) resulta (7)$-\forall x \in M_1$. De (5) y (7) tenemos que $0 = \forall x \wedge -\forall x \in M_1$, luego $M_1 = A$, absurdo.
Como U es un filtro entonces $\exists U \subseteq U$ y por lo tanto $F(\exists U) \subseteq F(U) = U$.
Sea M_1 un filtro ultramonádico tal que $M_1 \subseteq U$, entonces $F(\exists M_1) \subseteq F(\exists U) = M$. Pero como M_1 es un filtro ultramonádico entonces por el Lema 7.16, $M_1 = F(\exists M_1)$. □

Vamos a demostrar que todos los filtros ultramonádicos de un álgebra de Boole monádica A pueden obtenerse en la forma indicada en el teorema anterior.

Lema 7.17 *Si M es ultramonádico existe un ultrafiltro U tal que $M \subseteq U$ y $F(\exists U) = M$.*

Dem. Como M es un filtro ultramonádico de A, en particular M es un filtro propio, y por lo tanto existe un ultrafiltro U tal que $M \subseteq U$. Por lo tanto $\exists M \subseteq \exists U$ y en consecuencia $F(\exists M) \subseteq F(\exists U)$. Por el Lema 7.16, sabemos que $F(\exists M) = M$ luego (1) $M \subseteq F(\exists U)$. Pero por el Teorema 7.2, $F(\exists U)$ es un filtro ultramonádico. De (1) y (2) resulta que $M = F(\exists U)$. □

Observación 7.3 *Consideremos el álgebra de Boole monádica A indicada en la Figura 6.1. $M = F(f)$ es un filtro ultramonádico y $F(b)$ y $F(c)$ son dos ultrafiltros de A diferentes, ninguno de ellos contenidos en $F(f)$ tales que $\exists F(b) = M = \exists F(c)$ y por lo tanto $F(\exists F(b)) = M = F(\exists F(c))$.*

Observación 7.4 *Si M es un filtro ultramonádico de un álgebra de Boole monádica A entonces $\alpha(M) = \exists M$ es un ultrafiltro del álgebra de Boole $K(A)$, dado que α es un isomorfismo de orden* (ver Lema 7.12).

Lema 7.18 *En un álgebra de Boole monádica A las siguientes condiciones son equivalentes:* ver L. Monteiro ([23])

1) *M es un filtro ultramonádico.*

2) *Si $a \notin M$ existe $m \in M$ tal que $\forall a \wedge m = 0$.*

3) *Si $\forall a \vee b \in M$ entonces $a \in M$ ó $b \in M$.*

4) *Si $a \notin M$ entonces $-\forall a \in M$.*

5) *Si $a, b \notin M$ entonces $\forall a \to b, \forall b \to a \in M$.*

Dem. $1 \Longrightarrow 2$) Teniendo en cuenta el Lema 7.6, 3) $M' = FM(M,a) = F(M,\forall a) = \{x \in A : m \wedge \forall a \leq x, \text{ con } m \in M\}$. Luego $M \subseteq M' = FM(M,a)$ y como por hipótesis $a \notin M$ tenemos más precisamente que $M \subset M' = FM(M,a)$. Si $m \wedge \forall a \neq 0$ para todo $m \in M$, entonces M' sería un filtro propio que contiene propiamente a M absurdo.
$2 \Longrightarrow 3$) Si $a \notin M$ entonces por 2) existe $m \in M$ tal que $\forall a \wedge m = 0$. Luego $(\forall a \vee b) \wedge m \in M$. Pero $(\forall a \vee b) \wedge m = (\forall a \wedge m) \vee (b \wedge m) = 0 \vee (b \wedge m) = b \wedge m$. Por lo tanto $b \wedge m \in M$ y como $b \wedge m \leq b$ y M es un filtro tenemos $b \in M$.
$3 \Longrightarrow 4$) Como $\forall a \vee -\forall a = 1 \in M$ y $a \notin M$ entonces $\forall a \notin M$ luego por 3) $-\forall a \in M$.
$4 \Longrightarrow 5$) De $a \notin M$ resulta por 4) que $-\forall a \in M$ y por lo tanto $\forall a \to b = -\forall a \vee b \in M$. Análogamente se prueba que $\forall b \to a \in M$.
$5 \Longrightarrow 1$) Supongamos que M no es ultramonádico, entonces existe un filtro ultramonádico M^* tal que $M \subset M^* \subset A$. Sean $a \in M^* \setminus M$ y (i) $b \in A \setminus M^*$, luego $a, b \notin M$, luego por la hipótesis hecha $\forall a \to b \in M$ y en consecuencia (ii) $\forall a \to b \in M^*$. Como $a \in M^*$ entonces (iii) $\forall a \in M^*$. De (ii) y (iii) se deduce que

$$\forall a \wedge b = (\forall a \wedge -\forall a) \vee (\forall a \wedge b) = \forall a \wedge (\forall a \to b) \in M^*$$

luego como $\forall a \wedge b \leq b$ y M^* es un filtro tenemos que $b \in M^*$, lo que contradice (i). □

Lema 7.19 *Si M es un filtro ultramonádico entonces $(M \cap K) \cup (-M \cap K) = K$ y $(M \cap K) \cap (-M \cap K) = \emptyset$.*

Dem. Sea $X = (M \cap K) \cup (-M \cap K)$. Es claro que $X \subseteq K$. Sea $k \in K$ si $k \in M$ entonces $k \in M \cap K$ y por lo tanto $k \in X$. Si $k \notin M$ entonces por el Lema 7.18, 4) $-\forall k \in M$ pero como $k \in K$ entonces $-k \in M$ y por lo tanto $k \in -M$ y en consecuencia $k \in -M \cap K$, luego $k \in X$.
Supongamos que existe $k \in (M \cap K) \cap (-M \cap K)$, esto es (i) $k \in K$, (ii) $k \in M$ y (iii) $k \in -M$. De (iii) resulta (iv) $k = -m$ con (v) $m \in M$ y por lo tanto (vi) $-k = m \in M$. De (ii) y (vi) resulta $0 = -k \wedge k \in M$, lo que contradice que M es un filtro propio. □

Corolario 7.2 *Si M es un filtro ultramonádico de A y $k \in K$ entonces $k \in M$ ó $k \in -M$.*

Observación 7.5 *Consideremos el filtro monádico $F(1)$ del álgebra A indicada en la figura 2 entonces existen constantes de A que no pertenecen a $F(1)$ y tampoco a $-F(1)$, por ejemplo $a \in K$ y $a \notin F(1)$ y $a \notin -F(1)$.*

Teorema 7.3 *Todo filtro monádico propio es intersección de filtros ultramonádicos.*

Dem. Sea F un filtro monádico propio del álgebra de Boole monádica A y $a \notin F$. Como A es en particular un álgebra de Boole y en toda álgebra de Boole se verifica *"todo filtro propio es intersección de ultrafiltros"*, luego como F es un filtro propio de A existe un ultrafiltro U tal que $F \subseteq U$ y además $a \notin U$. Sabemos por el Teorema 7.2 que $M = F(\exists U)$ es un filtro ultramonádico. Ademas $F \subseteq F(\exists U) \subseteq U$, luego $a \notin M$. □

Corolario 7.3 *Si A es un álgebra de Boole monádica, no trivial, entonces la intersección de todos los filtros ultramonádicos de A es igual al conjunto $\{1\}$.*

Dem. Basta observar que $F(1) = \{1\}$ es un filtro monádico propio, luego intersección de filtros ultramonádicos, y en particular de todos los filtros ultramonádicos. □

Recordemos el siguiente resultado:

En toda álgebra de Boole A para que U sea un ultrafiltro principal, esto es $U = F(a)$, con $a \in A$ es necesario y suficiente que a sea un átomo de A.

Sea A un álgebra de Boole monádica, y U un ultrafiltro principal, esto es $U = F(a)$, $a \in A$ y a átomo de A. Por el Teorema 7.2 sabemos que $\exists U$ es un ultrafiltro de $K = K(A)$. Si $k \in K$ vamos a notar $F_K(k)$ el filtro principal, generado en el álgebra de Boole K por el elemento k. Probemos que $\exists U$ es un filtro principal de K, mas precisamente vamos a demostrar que $\exists U = F_K(\exists a)$. Como $a \in U$ entonces $\exists a \in \exists U$. Sea $x \in F_K(\exists a)$, entonces (1) $\exists a \leq x$, (2) $x \in K$. Como $\exists a \in \exists U$, $\exists U$ es un filtro de K, de (1) y (2) resulta $x \in \exists U$. Recíprocamente si $x \in \exists U$ entonces $x = \exists u$ con $u \in U = F(a)$ luego $a \leq u$ y por lo tanto $\exists a \leq \exists u = x$, esto es $x \in F_K(\exists a)$. Luego como $\exists U$ es un ultrafiltro de K, $\exists a$ es un átomo de K.

Acabamos así de probar que:

Lema 7.20 *Si a es un átomo del álgebra de Boole monádica A entonces $\exists a$ es un átomo del álgebra de Boole $K(A)$.*

Observación 7.6 *La recíproca de este Lema no es verdadera. En efecto, si A es un álgebra de Boole, con más de dos elementos, sobre la cual está definida el cuantificador existencial simple, entonces $K(A) = \{0, 1\}$ y por lo tanto el único átomo de $K(A)$ es el elemento $\exists 1 = 1$, y como A tiene más de dos elementos 1 no es átomo de A.*
Observemos ademas que si A es un álgebra de Boole sin átomos y sobre A está definida el cuantificador existencial simple, entonces $K(A)$ tiene átomos y A no los tiene.

Si A es un álgebra de Boole monádica finita y $b \in \mathcal{A}(K(A))$ entonces $b = \exists a$ cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}(A)$ tal que $a \leq b$. En efecto como $b \in \mathcal{A}(K(A))$ entonces $b \neq 0$, luego

$b = \bigvee_{i=1}^{t} a_i$ con $a_i \in \mathcal{A}(A)$ para $1 \leq i \leq t$, luego

$$b = \exists b = \exists(\bigvee_{i=1}^{t} a_i) = \bigvee_{i=1}^{t} \exists a_i,$$

y como $0 \leq \exists a_i \leq b$ y b es un átomo de $K(A)$ entonces (1) $\exists ai = 0$ ó (2) $\exists a_i = b$. Pero si se verificara (1) entonces como $a_i \leq \exists a_i$ tendríamos que $a_i = 0$, absurdo.

7.4 Algebras de Boole monádicas simples

Como $F(0) = A$ y $F(1) = \{1\}$ son filtros monádicos entonces $A/F(0) = A/A$ es un álgebra con un solo elemento y $A/F(1) \cong A$, son imágenes que se denominan *imágenes homomórficas triviales.*

Definición 7.5 *Un álgebra de Boole monádica se dice simple si contiene más de un elemento y si sus únicas imágenes homomórficas son isomorfas a A ó a un álgebra con un solo elemento.*

Teorema 7.4 *Para que un álgebra de Boole monádica A con más de un elemento sea simple es necesario y suficiente que el cuantificador $\exists$ sea simple (caótico).*

Dem. $\Longrightarrow$) Sea A con más de un elemento y simple. Esto significa que los únicos filtros monádicos son $F(0)$ y $F(1)$. Por lo tanto $F(1)$ es un filtro ultramonádico de A. Por el Corolario 7.2 sabemos que si $k \in K$ entonces $k \in F(1)$ ó $k \in -F(1)$, esto es $k = 1$ ó $k = -1 = 0$, por lo tanto $K = \{0, 1\}$ luego $\exists$ es el cuantificador caótico.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $\exists$ es simple, esto es $\exists(0) = 0$ y si $x \neq 0$ $\exists x = 1$, luego $K = \{0, 1\}$. Sabemos $F(1)$ es un filtro monádico. Sea F un filtro monádico de A, supongamos que $F \neq F(1)$ entonces existe $x \in F$ $(x \neq 1)$, luego $\forall x = 0$ y como F es monádico entonces $0 \in F$ esto es $F = F(0)$. Por lo tanto los dos únicos filtros monádicos de esta álgebra son $F(0) = A$ y $F(1)$, luego sus dos únicas imágenes homomórficas son $A/F(0) \cong \{0\}$ y $A/F(1) \cong A$, lo que prueba que A es simple. □
Podríamos haber elaborado la teoría de homomorfismos tomando como núcleo los *ideales monádicos*, esto es los ideales I tales que " Si $a \in I$ entonces $\exists a \in I$".

Lema 7.21 *Si F es un filtro monádico de A entonces $I = -F$ es un ideal monádico.*

Dem. Sabemos que I es un ideal. Sea $a \in I$, esto es $a = -f$ con $f \in F$, luego $-a = f$. Como F es un filtro monádico entonces $\forall f \in F$, y por lo tanto $\exists a = -\forall - a = -\forall f \in -F = I$. □

Análogamente se puede demostrar que :

Lema 7.22 *Si I es un ideal monádico de A entonces $F = -I$ es un filtro monádico.*

Si F es un filtro monádico del álgebra A, sea $h : A \to A' = A/F$ el homomorfismo natural, sabemos que $F = h^{-1}(1)$. Se prueba sin dificultad que $I = -F = h^{-1}(0')$.

Teorema 7.5 *Si A es un álgebra de Boole monádica, no trivial. Para que $A' = A/F$ sea un álgebra de Boole monádica simple es necesario y suficiente que F sea un filtro ultramonádico de A.*

Dem. $\Longrightarrow$) Supongamos que A' es simple, esto es A' es no trivial, y en consecuencia F es propio y $K(A') = \{0', 1'\}$. Sea $h : A \to A'$ el homomorfismo monádico natural (o canónico). Como $h(\exists a) = \exists h(a)$ entonces h transforma constantes de A en constantes de A'. Ademas $F = h^{-1}(1')$ e $I = h^{-1}(0')$ luego las constantes de A estan en F o en I. Sabemos por el Lema 7.8 que el conjunto de las constantes del filtro propio F, esto es $\exists F = K \cap F$, es un filtro de propio de K. Analogamente a lo demostrado en el Lema 7.8 se prueba que *el conjunto de las constantes de un ideal propio de A es un ideal propio de propio de K.* Por lo tanto el conjunto de las constantes de I, esto es $\exists I = K \cap I$, es un ideal de propio de K. Además este filtro y este ideal son complementarios en K, esto es $\exists F \cup \exists I = K$ y $\exists F \cap \exists I = \emptyset$, luego $\exists F$ es un filtro primo del álgebra de Boole K y en consecuencia un ultrafiltro de K. Luego por Teorema 7.2 el filtro generado por $\exists F$ en A es un filtro ultramonádico. Pero además, ver Observación 7.2, 2 $F(\exists F) = F$.
$\Longleftarrow$) Sea F un filtro ultramonádico de A y probemos que $A' = A/F$ es simple, como F es propio entonces A' tiene más de un elemento. Probemos que si $a' \in A'$, $a' \neq 0'$ entonces $\exists a' = 1'$. Sea $h : A \to A'$ el homomorfismo monádico natural y $a \in A$ tal que $h(a) = a'$, luego como $a' \neq 0'$ entonces $a \notin I = h^{-1}(0')$. Como F es ultramonádico, (ver Corolario 7.2) cualquier constante de A está en F o en $I = -F$, entonces $\exists a \in F$ pues si $\exists a \in I$, como $a \leq \exists a$ entonces $a \in I$. De $\exists a \in F$ resulta que $\exists a' = \exists h(a) = h(\exists a) = 1'$. □

Si (1) $F(a)$ es un filtro ultramonádico, en particular $F(a)$ es monádico luego por el Lema 7.2, $a \in K$. De (1) resulta por el Teorema 7.5, que $A/F(a)$ es un álgebra de Boole monádica simple y vimos que $A/F(a) \cong [0, a]$. Por el Lema 7.13, $K(A/F(a))$ y $K/\exists F(a)$ son álgebras de Boole isomorfas. Pero por la Observación 7.4, $\exists F(a)$ es un ultrafiltro de K, luego $K/\exists F(a)$ es un álgebra de Boole simple, esto es tiene 2 elementos y por lo tanto $K[A/F(a)] \cong K([0, a])$ tiene dos elementos. Por lo tanto $K([0, a]) = \{0, a\}$, y en consecuencia a es un átomo de K.
Acabamos así de probar:

Lema 7.23 *Si $F(a)$ es un filtro ultramonádico entonces a es un átomo de K.*

Lema 7.24 *Si A es un álgebra monádica simple y G un subconjunto de A tal que $SM(G) = A$ entonces $SB(G) = A$.* (L. Monteiro, [24]).

Dem. Por definición $G \subseteq SB(G)$. Para probar que $SB(G) = A$ es suficiente demostrar que $SB(G)$ es una subálgebra monádica, esto es que "*si $a \in SB(G)$ entonces $\exists a \in SB(G)$.*" Como por hipótesis $K(A) = \{0, 1\}$ entonces $K(A) \subseteq SB(G)$ y como $\exists a \in K(A)$ tenemos que $\exists a \in SB(G)$. □

Corolario 7.4 *Si A es un álgebra monadica simple, $G \subseteq A$, $N[G] = n$ y $SM(G) = A$ entonces A es finita.* (L. Monteiro, [24])

Dem. Por el Lema 7.24, $SB(G) = A$ y es bien conocido que como $N[G] = n$ entonces $N[SB(G)] \leq 2^{(2^n)}$. □

Lema 7.25 *Si A es un álgebra monadica, $G \subseteq A$, $N[G] = n$, $SM(G) = A$ y M es un filtro ultramonádico entonces el álgebra cociente $A' = A/M$ es finita.* (L. Monteiro, [24])

Dem. Sea $h : A \to A' = A/M$ el homomorfismo natural de A sobre A', entonces sabemos que $A' = h(A) = h(SM(G))$ y que A' es simples, luego por el Lema 7.24 tenemos que $A' = SB(h(G))$. Luego como $1 \leq N[h(g)] \leq n$ tenemos finalmente:

$$1 \leq N[A'] \leq 2^{(2^n)}.$$

□

8 Producto subdirecto de álgebras de Boole Monádicas

Dada una familia $\{(A_i, \exists)\}_{i\in I}$ no vacía de álgebras de Boole monádicas, sabemos que el conjunto $A = \prod_{i\in I} A_i$ es un álgebra de Boole. Si $a \in A$ entonces $a = (a_i)_{i\in I}$ donde $a_i \in A_i$. Si ponemos por definición $\exists a = (\exists a_i)_{i\in I}$, entonces:

Teorema 8.1 *El sistema $(A, \exists)$ que acabamos de definir es un álgebra de Boole monádica.*

El álgebra de Boole monádica que acabamos de definir se denomina producto directo o cartesiano de las álgebras de Boole monádicas $\{(A_i, \exists)\}_{i\in I}$ y se nota $A = \prod_{i\in I} A_i$.

Consideremos la proyección Π_i de A sobre A_i definida por $\Pi_i(a) = a_i \in A_i$. Sabemos que Π_i es un homomorfismo booleano de A sobre A_i; probemos que Π_i es un homomorfismo monádico. En efecto, $\Pi_i(\exists a) = \Pi_i((\exists a_i)_{i\in I}) = \exists a_i = \exists \Pi_i(a)$.

Definición 8.1 *Si A' es una subálgebra del álgebra A tal que $\Pi_i(A') = A_i$ para todo $i \in I$, diremos que A' es producto subdirecto de las álgebras monádicas A_i.*

Ejemplo 8.1 a) *Sean A_1 y A_2 las álgebras de Boole monádicas indicadas en la figura y consideremos el producto directo $A = A_1 \times A_2$.*

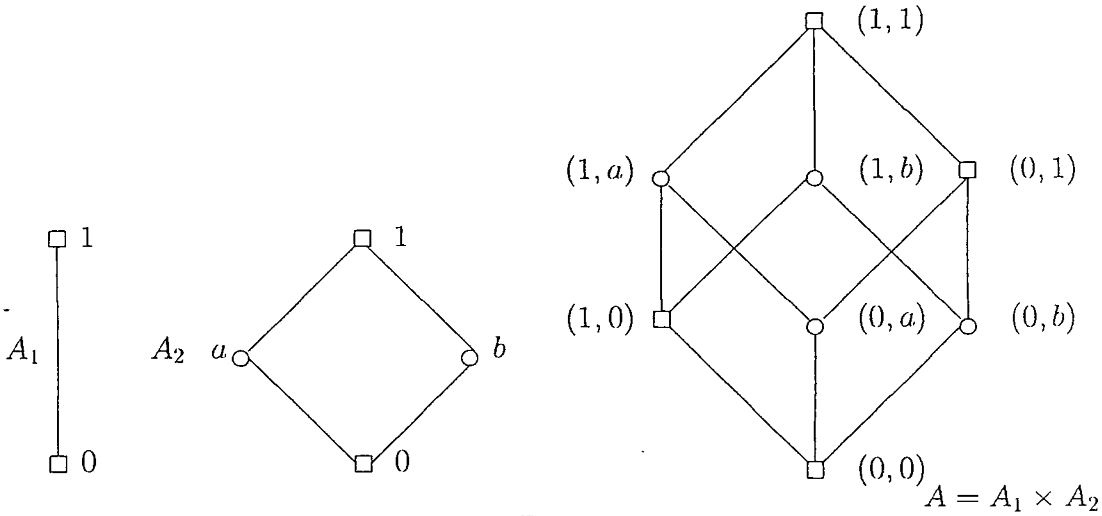


Figura 8.1

Como se reconoce de la definición de producto directo, un elemento de $A = \prod_{i\in I} A_i$ es constante si y solo si todas sus coordenadas son constantes, y por lo tanto, las constantes del álgebra $A_1 \times A_2$ son: $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$.
Las subálgebras de $A = A_1 \times A_2$ son: A, $\{(0,0), (1,1)\}$ y el álgebra formada por las constantes, esto es: $K = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.
Solamente A es producto subdirecto de las álgebras dadas. En este caso no hay subálgebras propias que sean producto subdirecto.
Indicaremos ahora un ejemplo de un producto directo P de álgebras de Boole monádicas tal que P contiene una subálgebra propia que es producto subdirecto de las álgebras dadas.

b) *Dada el álgebra de Boole monádica A_1 indicada en la Figura 8.1, sean $B_1 = B_2 = B_3 = A_1$. Consideremos el álgebra de Boole monádica $P = B_1 \times B_2 \times B_3 = A_1^3$, que tiene el siguiente diagrama:*

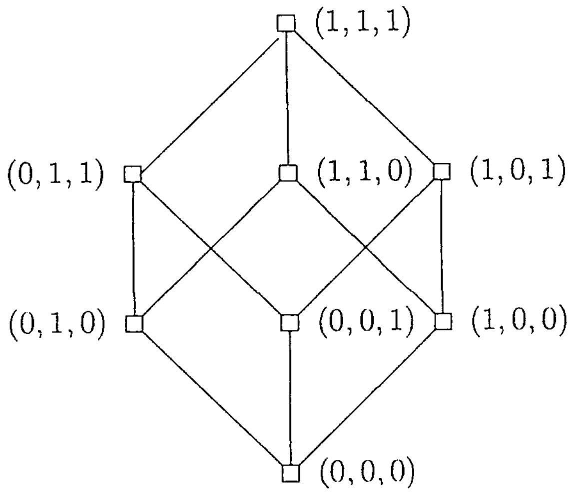


Figura 8.2

Todos los elementos de P son constantes, esto es, $\exists$ es discreto. Por lo tanto, toda subálgebra booleana de P es un álgebra monádica. Consideremos la subálgebra monádica: $A' = \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ y encontremos sus proyecciones sobre los respectivos ejes. Así tendremos: $\Pi_1(A') = B_1$, $\Pi_2(A') = B_2$, $\Pi_3(A') = B_3$. Luego A' es una subálgebra propia de P que es un producto subdirecto de tres álgebras iguales a A_1.

Observación 8.1 *La condición $\Pi_i(A') = A_i$ significa que sobre el eje A_i ninguna de las coordenadas es inútil. Pero esto no significa que no existan ejes en exceso.*

Hemos visto que el álgebra A' indicada en la Figura 8.2 es un producto subdirecto de $P = A_1^3$, pero es fácil ver que A' es un producto subdirecto de dos álgebras iguales a A_1. En efecto, sea $P_2 = B_1 \times B_2$. Entonces es evidente que $A' \cong P_2$; esto significa que la representación de un álgebra de Boole monádica como producto subdirecto de álgebras simples no está en general unívocamente determinada.

Se plantea el problema de la economía en el número de ejes coordenados. Observemos también que un álgebra de Boole monádica A puede ser representada como producto subdirecto de un número arbitrario de álgebras todas iguales a A. En efecto, sea $\{A_i\}_{i \in I}$, con $A_i = A$, y $P = \prod_{i \in I} A_i = A^I$. Consideremos la diagonal A' de P, esto es, el conjunto de todos los elementos de P que tienen todas las coordenadas iguales, esto es, los elementos de la forma $\alpha = (a_i)_{i \in I}$, con $a_i = a$ para todo $i \in I$.
Es evidente que:

1. A es isomorfa a A'. El isomorfismo es la transformación β que a cada elemento $a \in A$ le hace corresponder el elemento $\beta(a) = (a_i)_{i \in I}$, con $a_i = a$ para todo $i \in I$.

2. $\Pi_i(A') = A_i = A$, y por lo tanto A es isomorfa a un producto subdirecto de P.

Observación. En este caso cada una de las proyecciones es un isomorfismo. Esto indica que sería suficiente tomar un solo eje.

Definición 8.2 *Se dice que un álgebra A es subdirectamente reducible si A es isomorfa a una subálgebra A' de un producto directo $P = \prod_{i \in I} A_i$, en forma tal que:*

1. $\Pi_i(A') = A_i$, *cualquiera que sea $i \in I$.*
2. *Ninguna de las proyecciones es un isomorfismo.*

Un álgebra se dice subdirectamente irreducible en caso contrario.

Vamos a demostrar los siguientes resultados:

1. Las únicas álgebras de Boole monádicas subdirectamente irreducibles son las álgebras simples.
2. Para que un álgebra de Boole monádica, con más de un elemento, sea subdirectamente reducible es necesario y suficiente que ella no sea simple.

Definición 8.3 *Dado un filtro ultramonádico M de un álgebra de Boole monádica A, al álgebra A/M, que es simple, se le da el nombre de modelo del álgebra A.*

Teorema 8.2 *Toda álgebra de Boole monádica A con más de un elemento, es isomorfa a un producto subdirecto A' de todos sus modelos.*

Dem. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ la familia de todos los filtros ultramonádicos de A. Si ponemos $A/M_i = A_i$, entonces $\{A_i\}_{i \in I}$ es la familia de todos los modelos de A. Sea $P = \prod_{i \in I} A_i$ y m_i el homomorfismo natural de A sobre A_i. A cada elemento $f \in A$, hagamos corresponder la función F definida sobre I en la siguiente forma: $F(i) = m_i(f) = f_i$, $f_i \in A_i$.
F es un elemento de P, visto que para cada $i \in I$, $F(i) = f_i \in A_i$.
Queda así definida una transformación $\beta : \beta(f) = F \in P$.
Vamos a probar que el conjunto $A' = \beta(A)$ es una subálgebra monádica de P isomorfa a A. Probemos que β es un homomorfismo monádico.

1. $\beta(f \vee g) = \beta(f) \vee \beta(g)$.
   Pongamos $h = f \vee g$; $\beta(h) = H$, $\beta(f) = F$, $\beta(g) = G$.
   $H(i) = m_i(h) = m_i(f \vee g) = m_i(f) \vee m_i(g) = F(i) \vee G(i)$, para todo $i \in I$. Luego $\beta(h) = \beta(f) \vee \beta(g)$.
2. Análogamente se demuestra que $\beta(f \wedge g) = \beta(f) \wedge \beta(g)$.
3. $\beta(-f) = -\beta(f)$.
   Sea $h = -f$, $\beta(h) = H$, $\beta(f) = F$.
   $H(i) = m_i(h) = m_i(-f) = -m_i(f) = -F(i)$, para todo $i \in I$.
   Luego $H = -F$, esto es, $\beta(-f) = -\beta(f)$.

4. $\beta(\exists f) = \exists\beta(f)$.
   Sean $h = \exists f$, $H = \beta(h)$, $F = \beta(f)$,
   luego $H(i) = m_i(h) = m_i(\exists f) = \exists(m_i(f)) = \exists F(i)$, para todo $i \in I$.
   Luego $H = \exists F$, o sea, $\beta(\exists f) = \exists\beta(f)$.

Luego β es un homomorfismo monádico de A en P.

Observemos que de los resultados anteriores $A' = \beta(A)$ es una subálgebra monádica de P. Para probar que β es un isomorfismo basta probar que β es biunívoca.
Sean $f, g \in A$, $f \neq g$. Entonces, o bien $f \not\leq g$ ó $g \not\leq f$. Supongamos que $f \not\leq g$. Entonces existe un ultrafiltro U de A que contiene a f sin contener a g. Sea M_i el filtro ultramonádico engendrado por las constantes de U, esto es, $M_i = F(\exists U)$.
Para probar que $F = \beta(f) \neq \beta(g) = G$, basta probar que $F(i) \neq G(i)$. Pero $F(i) = m_i(f)$; $G(i) = m_i(g)$. Como m_i es el homomorfismo natural de A sobre $A/M_i = A_i$, $m_i(f)$ es la clase lateral (mod M_i) que contiene a f, esto es, $m_i(f) = |f|$. Análogamente, $m_i(g) = |g|$. Tenemos entonces que probar que $|f| \neq |g|$, o sea, que $f \not\equiv g$ (mod M_i). Para que $f \equiv g$ (mod M_i) es necesario y suficiente que $f \to g \in M_i$ y $g \to f \in M_i$. Pero como $f \in U$, $-f \notin U$, y como $g \notin U$ resulta entonces $-f \vee g = f \to g \notin U$, y por lo tanto, como $M_i \subseteq U$, entonces $f \to g \notin M_i$. Luego β es un isomorfismo.
Observemos ahora que como el homomorfismo natural m_i de A sobre $A_i = A/M_i$ hace corresponder a cada elemento $f \in A$ el elemento $m_i(f) = f_i \in A_i$ que es la coordenada de $F = \beta(f)$ en el eje A_i, esto es, $F(i) = m_i(f)$, podemos decir que la transformación m_i es la proyección de A sobre el eje A_i, y como m_i es un homomorfismo de A sobre A_i, esta proyección es una proyección de A' sobre A_i, y por lo tanto, A' es un producto subdirecto de los modelos A_i, lo que termina la demostración del teorema. □

Ejemplo 8.2 *Consideremos el álgebra de Boole monádica indicada en la Figura 6.1. Determinemos los modelos del álgebra A y representemos a A como producto subdirecto de sus modelos. Como el álgebra es finita, todos los filtros son principales y los filtros monádicos son generados por las constantes de K.*
$F(0) = A$; $F(a) = \{a, d, e, 1\}$; $F(f) = \{f, 1\}$; $F(1) = \{1\}$.
Los filtros ultramonádicos son engendrados por los átomos de K, y por lo tanto, $M_1 = F(a)$; $M_2 = F(f)$, entonces los modelos de A son:

$$A_1 = A/M_1 \qquad ; \qquad A_2 = A/M_2$$

Para el filtro ultramonádico M_1 las clases de equivalencia son: $M_1 = \{a, d, e, 1\}$; $O_1 = \{0, b, c, f\}$.
Para el filtro ultramonádico M_2 las clases de equivalencia son: $M_2 = \{f, 1\}$, $C_2 = \{c, e\}$, $B_2 = \{b, d\}$, $O_2 = \{0, a\}$.
Los homomorfismos naturales m_1 y m_2 de A sobre A_1 y de A sobre A_2 están indicados en la tabla siguiente:

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$m_1(x)$	O_1	M_1	O_1	O_1	M_1	M_1	O_1	M_1
$m_2(x)$	O_2	O_2	B_2	C_2	C_2	B_2	M_2	M_2

Sea $P = A_1 \times A_2$ cuyo diagrama es:

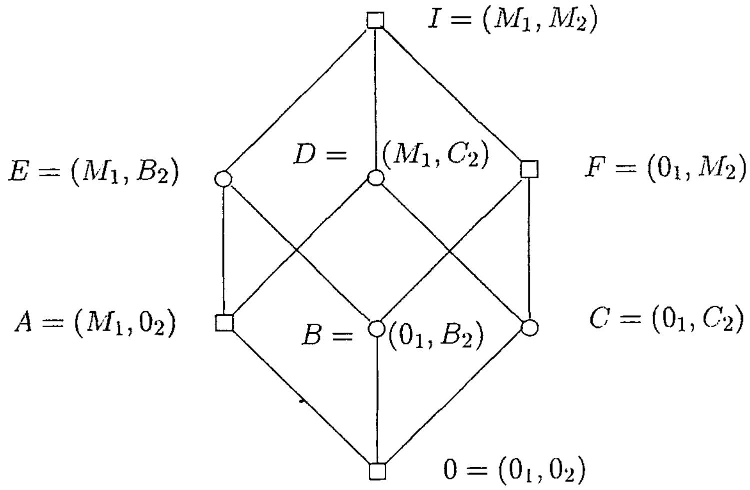


Figura 8.3

y sea β la representación de A:

Funciones	1	2
$\beta(0) = 0$	$0(1) = m_1(0) = O_1$	$0(2) = m_2(0) = O_2$
$\beta(a) = A$	$A(1) = m_1(a) = M_1$	$A(2) = m_2(a) = O_2$
$\beta(b) = B$	$B(1) = m_1(b) = O_1$	$B(2) = m_2(b) = B_2$
$\beta(c) = C$	$C(1) = m_1(c) = O_1$	$C(2) = m_2(c) = C_2$
$\beta(d) = D$	$D(1) = m_1(d) = M_1$	$D(2) = m_2(d) = C_2$
$\beta(e) = E$	$E(1) = m_1(e) = M_1$	$E(2) = m_2(e) = B_2$
$\beta(f) = F$	$F(1) = m_1(f) = O_1$	$F(2) = m_2(f) = M_2$
$\beta(1) = I$	$I(1) = m_1(1) = M_1$	$I(2) = m_2(1) = M_2$

Obsérvese que en este caso el álgebra A es isomorfa al producto directo de sus dos modelos.

Problema. Dada un álgebra de Boole monádica A tal que la familia K de las constantes sea finita. Probar que A es isomorfa al producto directo de todos sus modelos.

Observación 8.2 *En el Teorema 8.2, P es un producto directo de álgebras simples, esto es $P = \prod_{i \in I} A_i$ donde A_i es un álgebra simple para cada $i \in I$. Sabemos que un elemento de P es constante si y solo si todas sus coordenadas son constantes. Pero como las álgebras A_i son simples, las únicas constantes de A_i son 0_i y 1_i. Luego las constantes de P son las funciones que en cada uno de los puntos i toman solamente los valores 0_i y 1_i. Sabemos que $K(P)$ es una subálgebra de P, pero en este caso particular es importante observar que $K(P)$ es una subálgebra completa. En efecto, si $\{F^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de elementos de $K(P)$, esto es $F^{(\lambda)}(i) \in \{0_i, 1_i\}$, para cada $i \in I$ y para todo $\lambda \in \Lambda$. Para cada i_0 fijo, $i_0 \in I$, es claro que existe (1), $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} F^{(\lambda)}(i_0)$ en virtud de que las funciones $F^{(\lambda)}$ en el punto i_0 no pueden tomar más que los valores 0_{i_0} ó 1_{i_0}. Además (2), $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} F^{(\lambda)}(i_0) \in \{0_{i_0}, 1_{i_0}\}$. Sea $G \in P$ definida por $G(i) = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} F^{(\lambda)}(i)$, luego por (2) $G \in K(P)$, además $G \leq F^{(\lambda)}$*

para todo $\lambda \in \Lambda$, *pués* $G(i) = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F^{(\lambda)}(i) \leq F^{(\lambda)}(i)$.

Sea $H \in K(P)$, *esto es* $H(i) \in \{0_i, 1_i\}$, *tal que* $H \leq F^{(\lambda)}$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$, *luego para cada* $i \in I$ *tenemos que* $H(i) \leq F^{(\lambda)}(i)$, *para todo* $\lambda \in \Lambda$, *y en consecuencia* $H(i) \leq \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F^{(\lambda)}(i) = G(i)$. *Por lo tanto* $G = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F^{(\lambda)}$.
Como A *es isomorfa a una subálgebra* A' *de* P, *entonces se puede probar que existe un álgebra de Boole monádica* $\overline{P}$ *isomorfa a* P *que contiene a* A, *lo que muestra que toda álgebra de Boole monádica admite como extensión una álgebra monádica* $\overline{P}$ *en la cual las constantes forman una subálgebra completa.*

En la demostración del Teorema 8.2 hemos representado a A *como producto subdirecto de todos los modelos de* A, *pero en general no es necesario hacer intervenir todos ellos para obtener el Teorema indicado.*

Definición 8.4 *Se dice que una familia de filtros ultramonádicos es monádicamente separadora si su intersección es igual a* $\{1\}$.

Sea $\{M_i\}_{i\in S}$ una familia de filtros ultramonádicos, monádicamente separadora, sea $A_i = A/M_i$, $i \in S$, y $P_I = \prod_{i\in S} A_i$; es claro que $P_I \subseteq P$.

Toda la primera parte del Teorema 8.2 se demuestra en forma análoga. El punto esencial es la demostración de que $\beta(f) = F$ es biunívoca.

Probemos que esta propiedad también vale si la familia es monádicamente separadora.

Sean $f, g \in A$ y $\beta(f) = F$; $\beta(g) = G$; y supongamos que $F = G$, esto es, $F(i) = G(i)$ para todo $i \in S$; pero $F(i) = m_i(f)$, $G(i) = m_i(g)$, entonces $m_i(f) = m_i(g)$ para todo $i \in S$, esto es, $f \equiv g$ (mod. M_i) para todo $i \in S$, esto es, $(f \to g) \wedge (g \to f) \in M_i$ para todo $i \in S$, o sea, $f \to g \in M_i$ y $g \to f \in M_i$ para todo $i \in S$. Por lo tanto, $f \to g \in \bigcap_{i\in S} M_i = \{1\}$ y $g \to f \in \bigcap_{i\in S} M_i = \{1\}$. Luego $f \to g = 1$ y $g \to f = 1$. Por lo tanto $f \leq g$ y $g \leq f$, esto es, $f = g$. Luego β es biunívoca.

Observemos ahora que los filtros ultramonádicos están en correspondencia biunívoca con los ultrafiltros de K. Luego, dar una familia de filtros ultramonádicos monádicamente separadora, es equivalente a dar una familia de ultrafiltros de K que sea separadora en K. Por lo tanto, si el álgebra K es atómica entonces los ultrafiltros engendrados en A por los átomos de K forman una familia separadora en K, y los filtros ultramonádicos de A forman una familia monádicamente separadora. Esta circunstancia se presenta necesariamente si K es un álgebra finita (luego K es atómica).
Por ejemplo: sea A un álgebra de Boole infinita. Sea $k \in K$, $k \neq 0$, $k \neq 1$, y consideremos la subálgebra $K = \{0, k, -k, 1\}$. K es una subálgebra completa, y por lo tanto, da origen a un cuantificador $\exists$. Consideremos el álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$ cuya familia de constantes es K; en este caso existen solamente dos filtros ultramonádicos, que son $M_1 = F(k)$ y $M_2 = F(-k)$. Si K es finita, hay una sola familia de filtros ultramonádicos separadora, que es aquella formada por los filtros engendrados por los átomos de K.

Observación 8.3 *Sea* $\{U_i\}_{i\in S}$ *una familia separadora de ultrafiltros del álgebra de Boole monádica* B, *esto es,* $\bigcap_{i\in S} U_i = \{1\}$. *Cada* U_i *contiene uno y solo un filtro ultramonádico*

M_i que es el filtro engendrado por las constantes de U_i, y por lo tanto $\bigcap_{i\in S} M_i = \{1\}$, o sea, la familia $\{M_i\}_{i\in S}$ es monádicamente separadora. En particular, si el álgebra B es atómica y si $\Lambda = \mathcal{A}(B)$ es la familia de todos los átomos de B, entonces la familia $\{U(a)\}_{a\in\Lambda}$ de los filtros principales, es una familia separadora de B. Recordemos que el filtro ultramonádico contenido en $U(a)$ es el filtro engendrado por $\exists a$, $M = F(\exists a)$. Luego si B es atómica, la familia $M = \{F(\exists a)\}_{a\in\Lambda}$ es una familia monádicamente separadora; de aquí resulta en particular que si A es atómica, K es atómica, y los átomos de K son de la forma $\exists a$, donde $a \in \Lambda$.

Consideremos el caso particular de un álgebra de Boole monádica $(B, \exists)$, donde $\exists$ es el cuantificador discreto. Es evidente que como todos los elementos de B son constantes, todos los filtros son monádicos y, por lo tanto los filtros ultramonádicos coinciden con los ultrafiltros. Los modelos de B serán las álgebras de Boole monádicas de la forma $B/M_i = B/U_i = B_i$, donde U_i es un ultrafiltro. Luego los B_i son las álgebras de Boole con dos elementos, que son álgebras de Boole monádicas discretas.

Teorema 8.3 *Toda álgebra de Boole monádica discreta es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras de Boole simples con dos elementos. (Obtenemos así el caso particular indicado en la teoría de las álgebras de Boole).*

Luego podemos identificar bajo este punto de vista la teoría de las álgebras de Boole discretas con la teoría de las álgebras de Boole monádicas discretas.

Toda álgebra de Boole monádica B es isomorfa a un producto subdirecto B' de modelos de B. Podemos suponer sin inconvenientes que $B = B'$. Supongamos que la proyección de B sobre uno de los ejes es un isomorfismo; como B_i es simple, B será simple, y por lo tanto, *las únicas álgebras subdirectamente irreducibles son las álgebras simples.*

9 Representación de un álgebra de Boole monádica por un álgebra de equivalencia

Sabemos que toda álgebra de equivalencia es un álgebra de Boole monádica. Se plantea en forma natural el siguiente problema: *¿Dada un álgebra de Boole monádica* $(A, \exists)$ *existirá algún álgebra de equivalencia isomorfa a ella?* La respuesta es afirmativa y se debe a P. Halmos [9] . Para ello vamos a demostrar previamente algunos resultados.

Sea A un álgebra de Boole monádica. Podemos dejar de lado el caso trivial en que A tiene un solo elemento. Representaremos con $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$ el conjunto de todos los filtros de A y con $\mathcal{E} = \mathcal{E}(A)$ el conjunto de todos los ultrafiltros de A, conjunto al que se denomina *espacio de Stone.*

Si $F \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$, sea $\varphi(F)$ el conjunto de todos los ultrafiltros de A que contienen a F, esto es:

$$\varphi(F) = \{U \in \mathcal{E} = \mathcal{E}(A) : F \subseteq U\}$$

Si $F = A$ entonces $\varphi(F) = \varphi(A) = \emptyset$, y si F es propio el conjunto $\varphi(F)$ no es vacío porque todo filtro propio está contenido en un ultrafiltro.

Sea $\Phi(a) = \varphi(F(a))$, donde $a \in A$, entonces en particular $\Phi(1) = \varphi(\{1\}) = \mathcal{E}$.

Si $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 2^{\mathcal{E}}$ es el conjunto de todas las partes de $\mathcal{E}$, sabemos que $(2^{\mathcal{E}}, \cap, \cup, \mathcal{C}, \emptyset, \mathcal{E})$ es un álgebra de Boole, donde $\mathcal{C}X = \mathcal{E} \setminus X$, cualquiera que sea $X \subseteq \mathcal{E}$. Además:

Lema 9.1 Φ *establece un isomorfismo (booleano) entre el álgebra de Boole* A *y la subálgebra booleana* $A' = \Phi(A)$ *de* $2^{\mathcal{E}}$.

Vamos a definir una partición del conjunto $\mathcal{E}$ la que nos permitirá definir un operador $\exists$ sobre $2^{\mathcal{E}}$ y construir un álgebra de Boole monádica de conjuntos. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$ el conjunto de todos los filtros ultramonádicos de A. Observemos que:

1) $\varphi(M) \neq \emptyset$, cualquiera que sea $M \in \mathcal{M}$.
En efecto como $M \in \mathcal{M}$, en particular M es un filtro propio y por lo tanto existe $U \in \mathcal{E}$ tal que $M \subseteq U$, luego $U \in \varphi(M)$.

2) Si $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, $M_1 \neq M_2$ entonces $\varphi(M_1) \cap \varphi(M_2) = \emptyset$.
Sabemos por la Observación 7.4 que $\exists M_1$ y $\exists M_2$ son ultrafiltros de K y como la función α definida en el Lema 7.12 por $\alpha(M) = \exists M$, para $M \in \mathcal{M}$, es biunívoca entonces $\exists M_1 \neq \exists M_2$. Luego existe por ejemplo $t \in \exists M_1 \setminus \exists M_2$, entonces (1) $t = \exists m$ con $m \in M_1$ y (2) $t \notin \exists M_2$. Como $\exists M_2$ es un ultrafiltro del álgebra de Boole K de (2) resulta (3) $-t \in \exists M_2$. Además como M_1, M_2 son filtros tenemos que (4) $\exists M_1 \subseteq M_1$ y (5) $\exists M_2 \subseteq M_2$. De (1) y (4) resulta que $t \in M_1$ y de (3) y (5) $-t \in M_2$. Luego si existiera $U \in \varphi(M_1) \cap \varphi(M_2)$, entonces $U \in \mathcal{E}$, $M_1 \subseteq U$ y $M_2 \subseteq U$, y en consecuencia $t, -t \in U$, absurdo.

3) $\mathcal{E} = \bigcup\{\varphi(M) : M \in \mathcal{M}\}$.
Como $\varphi(M) \subseteq \mathcal{E}$, cualquiera que sea $M \in \mathcal{M}$ entonces $\bigcup\{\varphi(M) : M \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{E}$. Si $U \in \mathcal{E}$, por el Teorema 7.2, sabemos que existe un único $M \in \mathcal{M}$ tal que $M \subseteq U$, más precisamente $M = F(\exists U)$, luego $U \in \varphi(M)$ y por lo tanto $\mathcal{E} \subseteq \bigcup\{\varphi(M) : M \in \mathcal{M}\}$.

Acabamos asi de demostrar que la familia $\{\varphi(M)\}_{M\in\mathcal{M}}$ es una partición del conjunto $\mathcal{E}$. Entonces si definimos para cualquier parte de $\mathcal{E}$ un operador del siguiente modo:

1) $\exists\emptyset = \emptyset$,

2) Si $U \in \mathcal{E}$ entonces $\exists\{U\} = \varphi(F(\exists U)) = \{U' \in \mathcal{E} : F(\exists U) \subseteq U'\}$,

3) Si $X \subseteq \mathcal{E}$ es un conjunto no vacío, entonces $\exists X = \bigcup_{U\in X} \exists\{U\}$,

sabemos (ver párrafo 1) que $(2^{\mathcal{E}}, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica.

Vamos a probar que el álgebra de Boole monádica A es isomorfa a una subálgebra monádica del álgebra de Boole monádica $2^{\mathcal{E}}$.

Lema 9.2 *Si* $k \in K = K(A)$ *entonces* $\Phi(k) = \exists\Phi(k)$.

Dem. Si $k = 0$ entonces $\Phi(0) = \varphi(F(0)) = \varphi(A) = \emptyset$ Luego $\exists\Phi(0) = \exists\emptyset = \emptyset = \Phi(0)$.
Si $k \in K$ es tal que (1) $\Phi(k) = \{U\}$, donde $U \in \mathcal{E}$, esto significa que U es el único ultrafiltro que verifica (2) $F(k) \subseteq U$. De (1) resulta que $\exists\Phi(k) = \exists\{U\} = \varphi(F(\exists U))$. Probemos que $\varphi(F(\exists U)) = \{U\}$, esto es que si $U' \in \mathcal{E}$ verifica (3) $F(\exists U) \subseteq U'$ entonces $U' = U$.
Como $U' \in \mathcal{E}$ entonces (4) $F(\exists U') \subseteq U'$, y como $F(\exists U')$ es el único ultramonádico contenido en U', de (3) y (4) resulta $F(\exists U) = F(\exists U')$.
Probemos que $F(k) \subseteq U'$. Sea $x \in F(k)$, como $F(k)$ es monádico entonces $\forall x \in F(k) \subseteq U$, luego $\forall x \in U$ y por lo tanto $\forall x = \exists\forall x \in \exists U \subseteq F(\exists U) = F(\exists U') \subseteq U'$. Luego $\forall x \in U'$ y como $\forall x \leq x$ tenemos que $x \in U'$. Luego como U es el único ultrafiltro que contiene a $F(k)$ tenemos que $U' = U$.
Si $\Phi(k) \in 2^{\mathcal{E}}$ es diferente de $\emptyset$ y contiene más de un elemento entonces

$$\exists\Phi(k) = \bigcup_{U'\in\Phi(k)} \exists\{U'\}.$$

Sabemos que $\Phi(k) \subseteq \exists\Phi(k)$.
Sea $U \in \exists\Phi(k)$ luego existe (i) $U' \in \Phi(k)$ tal que (ii) $U \in \exists\{U'\} = \varphi(F(\exists U'))$. De (i) resulta $U' \in \varphi(F(k))$, esto es $U' \in \mathcal{E}$ y (iii) $F(k) \subseteq U'$, y de (ii) $U \in \mathcal{E}$ y (iv) $F(\exists U') \subseteq U$.
Por (iii) $k \in U'$, luego teniendo en cuenta (iv) $k = \exists k \in \exists U' \subseteq F(\exists U') \subseteq U$, luego $k \in U$ y por lo tanto $F(k) \subseteq U$ esto es $U \in \Phi(k)$.
Acabamos así de probar que $\exists\Phi(k) \subseteq \Phi(k)$. □

Lema 9.3 *Si* $x \in A$ *entonces* $\Phi(\exists x) = \exists\Phi(x)$.

Dem. Si $x = 0$ entonces $\Phi(\exists 0) = \Phi(0) = \emptyset = \exists\emptyset = \exists\Phi(0)$. Supongamos que $x \neq 0$ entonces $\Phi(x) \neq \emptyset$. De $x \leq \exists x$ resulta (1) $\Phi(x) \subseteq \Phi(\exists x)$, por lo tanto tambien $\Phi(\exists x) \neq \emptyset$. De (1) resulta por ser $\exists$ monótono que $\exists\Phi(x) \subseteq \exists\Phi(\exists x)$. Como $\exists x \in K$ por el Lema 9.2 $\Phi(\exists x) = \exists\Phi(\exists x)$. Luego $\exists\Phi(x) \subseteq \Phi(\exists x)$.
Sea $U \in \Phi(\exists x) = \varphi(F(\exists x))$, esto es $U \in \mathcal{E}$ tal que $F(\exists x) \subseteq U$, luego (2) $\exists x \in U$. Queremos probar que $U \in \exists\Phi(x) = \bigcup_{U'\in\Phi(x)} \exists\{U'\}$, esto es que existe (3) $U' \in \Phi(x)$ tal que (4) $U \in \exists\{U'\} = \varphi(F(\exists U'))$.
Sea $\mathcal{F} = \{U' \in \mathcal{E} : F(\exists U) \subseteq U'\}$, luego $F(\exists U) = \bigcap\{U' \in \mathcal{F}\}$. Si $x \notin U'$ cualquiera que

sea $U' \in \mathcal{F}$, entonces como los U' son ultrafitros tenemos que $-x \in U'$ cualquiera que sea $U' \in \mathcal{F}$, y por lo tanto $-x \in F(\exists U)$. Luego como $F(\exists U)$ es monádico tenemos que $\forall - x \in F(\exists U)$ y como se verifica (2) tenemos $0 = -\exists x \wedge \exists x = \forall - x \wedge \exists x \in F(\exists U)$, absurdo.
Por lo tanto existe $U' \in \mathcal{E}$ tal que $F(\exists U) \subseteq U'$ y $x \in U'$, luego $F(x) \subseteq U'$. Pero $F(\exists U') \subseteq U'$ entonces $F(\exists U)$ y $F(\exists U')$ serían filtros ultramonádicos contenidos en U', luego por el Teorema 7.15 $F(\exists U) = F(\exists U')$, y en consecuencia $\varphi(F(\exists U)) = \varphi(F(\exists U'))$. Luego como $U \in \varphi(F(\exists U))$ tenemos que $U \in \varphi(F(\exists U')) = \exists\{U'\}$. □

De los Lemas 9.1 y 9.2 resulta que $(A, \exists)$ y $(A' = \Phi(A), \exists)$ son álgebras de Boole monádicas isomorfas. Tenemos asi el siguiente resultado de P. Halmos.

Teorema 9.1 *Toda álgebra de Boole monádica es isomorfa a un álgebra de equivalencia.*

Ejemplo 9.1 *Dada el álgebra de Boole monádica indicada en la Figura 6.1, tenemos que $K(A) = \{0, a, f, 1\}$ y como A es finita no trivial es atómica. Los ultramonádicos son $F(a)$ y $F(f)$, $\mathcal{E} = \{F(a), F(b), F(c)\}$ y la partición de $\mathcal{E}$ es $\{\varphi(F(a)), \varphi(F(b))\} = \{\{F(a)\}, \{F(b), F(c)\}\}$. Luego el operador $\exists$, está dado por:*

$X \subseteq \mathcal{E}$	$\exists X$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{F(a)\}$	$\{F(a)\}$
$\{F(b)\}$	$\{F(b), F(c)\}$
$\{F(c)\}$	$\{F(b), F(c)\}$
$\{F(a)\} \cup \{F(b)\}$	$\exists\{F(a)\} \cup \exists\{F(b)\} = \mathcal{E}$
$\{F(a)\} \cup \{F(c)\}$	$\exists\{F(b)\} \cup \exists\{F(c)\} = \mathcal{E}$
$\{F(b)\} \cup \{F(c)\}$	$\exists\{F(b)\} \cup \exists\{F(c)\} = \{F(b), F(c)\}$
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$

Recordemos que un conjunto $\mathcal{E}$ de ultrafiltros de un álgebra de Boole A se dice *separador* si dados $a, b \in A$, $a \neq b$, existe $U \in \mathcal{E}$ que contiene a uno de los elementos sin contener al otro.

Lema 9.4 *Dado un conjunto $\mathcal{E}$, no vacío, de ultrafiltros de un álgebra de Boole A las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U = \{1\}$.

2) Dado $a \in A$, $a \neq 1$ existe $U \in \mathcal{E}$ tal que $a \notin U$.

3) Dado $a \in A$, $a \neq 0$ existe $U \in \mathcal{E}$ tal que $a \in U$.

4) Todo filtro principal $F(a)$, donde $a \neq 0$ es intersección de ultrafiltros del conjunto $\mathcal{E}$, esto es $F(a) = \bigcap\{U : U \in \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}\}$.

5) $\mathcal{E}$ es un conjunto separador.

Observación 9.1 *Para demostrar el Teorema 9.1 no hace falta que $\mathcal{E}$ sea el conjunto de todos los ultrafiltros de A. Basta considerar un conjunto separador de filtros ultramonádicos $\mathcal{M}^* = \{M_i\}_{i\in I}$ y tomar como espacio de representación un conjunto de ultrafiltros $\mathcal{E}^* = \{U_j\}_{j\in J}$ tal que cualquiera de los filtros ultramonádicos $M \in \mathcal{M}^*$ sea intersección de ultrafiltros del conjunto $\mathcal{E}^*$. Bajo estas condiciones $\mathcal{E}^*$ es un conjunto separador. En efecto: es claro que $\{1\} \subseteq \bigcap_{U\in\mathcal{E}^*} U$. Probemos que $\bigcap_{U\in\mathcal{E}^*} U \subseteq \{1\}$ lo que es equivalente a probar que $A\backslash\{1\} \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{E}^*}(A\backslash U)$. Si $x \in A\backslash\{1\}$, esto es $x \neq 1$ como $\bigcap_{i\in I} M_i = \{1\}$, entonces existe $M_i \in \mathcal{M}^*$ tal que $x \notin M_i$. Pero por hipótesis $M_i = \bigcap\{U_h : U_h \in \mathcal{E}^*,\ h \in H \subseteq J\}$, donde $H \neq \emptyset$ luego existe $U = U_h \in \mathcal{E}^*$ tal que $x \notin U$, y por lo tanto $x \in \bigcup_{U\in\mathcal{E}^*}(A \setminus U)$.*

Observación 9.2 *En particular si el álgebra de Boole monádica A es atómica y $\mathcal{A}$ es el conjunto de los átomos de A, considerando el conjunto $E^* = \{F(a)\}_{a\in\mathcal{A}}$, entonces $\mathcal{E}^*$ es un conjunto separador. Además los filtros principales $F(\exists a)$ donde a es un átomo de A son ultramonádicos.*
Como $\exists a$ es supremo de átomos esto es $\exists a = \bigvee\{p \in A : p \text{ átomo de } A,\ p \leq \exists a\}$ entonces $F(\exists a) = \bigcap\{F(p) : p \text{ átomo de } A, p \leq \exists a\}$.
Luego si $\mathcal{M}^* = \{F(\exists a) : a \text{ átomo de } A\}$, entonces $\mathcal{M}^*$ y $\mathcal{E}^*$ verifican las condiciones indicadas en la Observación 9.1. Por lo tanto en el caso de que el álgebra A sea atómica se obtiene una representación de A, tomando como espacio de representación el conjunto de todos los ultrafiltros principales.

Ejemplo 9.2 *Sea E un conjunto sobre el cual está definido una relación de equivalencia. Esta relación da origen a un álgebra de Boole monádica $(2^E, \exists)$. Esta álgebra de Boole es obviamente atómica, por lo tanto un posible espacio de representación es el propio E.*
Todo conjunto separador S de ultrafiltros tiene que contener los ultrafiltros generados por los átomos, y por lo tanto cualquier espacio de representación de ésta álgebra tiene que contener a E. Pero pueden en general agregarse a E ultrafiltros no principales, que siempre existen, por ejemplo en el caso que E es infinito.
En efecto dado un conjunto infinito E, las partes finitas de E forman un ideal propio y los complementos de las partes finitas forman un filtro propio F , que puede extenderse a un ultrafiltro U. Si este ultrafiltro fuese principal, esto es $U = U(p)$, donde p es un átomo de E, entonces tendríamos $-p \in F \subseteq U$ y como $p \in U$ entonces $0 = p\wedge -p \in U$, absurdo.

Ejercicio 9.1 *Probar que si $(A, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica atómica y completa, existe un conjunto E y una partición de E tal que el álgebra $(A, \exists)$ es isomorfa al álgebra de Boole monádica $(2^E, \exists)$ donde $\exists$ es el operador definido a partir de la partición.*

Teorema 9.2 *Toda álgebra de Boole monádica, no trivial, A es isomorfa a una subálgebra A' de un álgebra de Boole monádica $\mathcal{A}$ completa y atómica.*

Dem. Probamos que si $\mathcal{E}$ es el conjunto de todos los ultrafiltros de A y $\mathcal{M}$ es el conjunto de todos los filtros ultramonádicos de A, entonces la partición de $\mathcal{E}$: $\{\varphi(M)\}_{M\in\mathcal{M}}$ dá origen a un cuantificador $\exists$ sobre el álgebra de Boole $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{E}}$, y por lo tanto $\mathcal{A}$ es un álgebra completa y atómica. Además hemos demostrado que A es isomorfa a una subálgebra A' de $\mathcal{A}$. □

10 Representación funcional de un álgebra de Boole monádica

En este párrafo nos abocaremos a la demostración del siguiente:

Teorema 10.1 *Toda álgebra de Boole monádica es isomorfa a un álgebra funcional monádica.* (P. Halmos [9])

La demostración que indicaremos se debe a A. Monteiro [21]. Para ello debemos introducir nuevos conceptos. En primer lugar recordemos la definición de álgebra de Boole funcional monádica que fuera indicada en el §2. Sea B un álgebra de Boole, E un conjunto no vacío y $A = B^E$ el conjunto de todas las funciones definidas sobre E y que toman sus valores en B. Algebrizando las funciones punto por punto, sabemos que A es un álgebra de Boole. El primer elemento de A es la función $\mathbf{0}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in E$, y el último elemento de A es la función $\mathbf{1}$ definida por $\mathbf{1}(x) = 1$ para todo $x \in E$.

Si $R(f) = \{f(x) : x \in E\}$, entonces en cualquiera de los siguientes casos: (1) B completa, (2) E finito, (3) $R(f)$ finito, podemos afirmar que existe el supremo (ínfimo) del conjunto $R(f)$, que notamos $\exists f = \bigvee\limits_{x\in E} f(x)$, ($\forall f = \bigwedge\limits_{x\in E} f(x)$).
Si $f \in A$ y existe el supremo (ínfimo) del conjunto $R(f)$ entonces podemos considerar las siguientes funciones de E en B:

$$(\exists f)(x) = \exists f \ \text{ y } \ (\mathbf{\forall} f)(x) = \forall f, \ \text{ para todo } x \in E.$$

De acuerdo con esta definición las funciones $\exists$ y $\mathbf{\forall}$ son ambas funciones constantes.
Se denomina álgebra de Boole funcional monádica a toda subálgebra booleana S de A que verifica:

M1) Para toda $f \in S$, existen los elementos $\exists f$ y $\forall f$,

M2) Si $f \in S$, entonces $\mathbf{\exists} f, \mathbf{\forall} f \in S$.

Definición 10.1 *Un álgebra funcional monádica $\mathcal{F} \subseteq B^E$ se dice rica si dada $f \in \mathcal{F}$, existe un punto x_0 de su campo de definición E, tal que $f(x_0) = \exists f = \bigvee\limits_{x\in E} f(x)$.*

Esto es las álgebras funcionales monádicas ricas son aquellas en que cada elemento del álgebra alcanza su extremo superior, por lo menos en un punto de su campo de definición.

Introduzcamos ahora una nueva definición de álgebra funcional monádica rica.

Definición 10.2 *Un álgebra funcional monádica $\mathcal{F} \subseteq B^E$ se dice rica si dada $f \in \mathcal{F}$ existe un punto x_0 de su campo de definición E, tal que $f(x_0) = \forall f = \bigwedge\limits_{x\in E} f(x)$.*

Según esta definición las álgebras funcionales monádicas ricas son aquellas en que cada elemento del álgebra alcanza su extremo inferior, por lo menos en un punto de su campo de definición.

Probemos ahora que estas dos definiciones son equivalentes. En efecto:

I) Sea $\mathcal{F}$ un álgebra funcional monádica rica según la Definición 10.1, y $f \in \mathcal{F}$, entonces también $-f \in \mathcal{F}$ luego existe $x_0 \in E$ tal que $(-f)(x_0) = \exists - f = \bigvee_{x \in E} (-f)(x)$ y por lo tanto $f(x_0) = -\exists - f = -\bigvee_{x \in E} -f(x)$ esto es $f(x_0) = \forall f = \bigwedge_{x \in E} f(x)$ luego $\mathcal{F}$ es un álgebra funcional monádica rica según la Definición 10.2.

II) Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ sea un álgebra funcional monádica rica según la Definición 10.2 y sea $f \in \mathcal{F}$, entonces también $-f \in \mathcal{F}$ luego existe un punto $x_0 \in E$ tal que $(-f)(x_0) = \forall - f = \bigwedge_{x \in E} -f(x)$ por lo tanto $f(x_0) = -\forall - f = -\bigwedge_{x \in E} -f(x)$ esto es $f(x_0) = \exists f = \bigvee_{x \in E} f(x)$ luego $\mathcal{F}$ es un álgebra funcional monádica rica según la Definición 10.1.

Observación 10.1 *Si B es un álgebra de Boole completa con más de dos elementos y E un conjunto con por lo menos dos puntos, entonces el álgebra funcional monádica $(\mathcal{F} = B^E, \exists)$ no es rica.*

En efecto sea k un elemento de B diferente de 0 y 1, y p un punto fijo de E. Consideremos la función $f : E \to B$ definida del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = p, \\ -k & \text{si } x \neq p. \end{cases}$$

Entonces $(\exists f)(x) = \bigvee_{x \in E} f(x) = k \vee -k = 1$ y como este valor no es alcanzado en ningún punto de E, el álgebra no es rica.

Luego en general las álgebras funcionales no son ricas, pero existen álgebras funcionales ricas.

Teorema 10.2 *Toda álgebra de Boole monádica es isomorfa a un álgebra funcional monádica rica.* (P. Halmos [12])

Es evidente que el Teorema 10.1 es una consecuencia del Teorema 10.2. En particular si un álgebra funcional monádica no es rica ella es representable isomórficamente por un álgebra funcional monádica rica.

Todo filtro de un álgebra de Boole monádica contiene por lo menos una constante a saber el elemento 1, esta circunstancia sugiere considerar aquellos filtros que son "*tan libres*" de constantes cuanto sea posible.

Definición 10.3 *Un filtro F se dice libre si contiene solamente la constante 1, esto es si $F \cap K = \{1\}$.*

Lema 10.1 *Para que un filtro F sea libre es necesario y suficiente que si $f \in F$ entonces $\exists f = 1$.*

Dem. $\Longrightarrow$) Supongamos que F es libre, y sea $f \in F$, como $\exists f$ es una constante y $f \leq \exists f$ entonces $\exists f$ es una constante de F esto es $\exists f = 1$.
$\Longleftarrow$) Supongamos que si $f \in F$ entonces $\exists f = 1$ y sea k un constante de F esto es $\exists k = k$ luego por hipótesis $\exists k = 1$, entonces la única constante de F es 1 luego F es libre. □

Si denominamos elemento libre de un álgebra a todo elemento f que verifica $\exists f = 1$ entonces por el Lema 10.1 podemos decir que un filtro es libre si todos sus elementos son libres.

De la Definición 10.3 resulta que todo filtro libre de un álgebra de Boole monádica, no trivial, es propio visto que $\exists 0 = 0$.

Lema 10.2 *Si f es un elemento libre entonces el filtro $F(f)$ es libre.*

Dem. Sea $x \in F(f)$, esto es $f \leq x$ y por lo tanto $\exists f \leq \exists x$, y como por hipótesis $\exists f = 1$ tenemos finalmente que $\exists x = 1$. □

Teorema 10.3 *La familia de los filtros libres ordenados por la relación de inclusión es inductiva superiormente.*

Dem. Basta probar que la reunión de una cadena de filtros libres es un filtro libre. Sea entonces $\Phi = \{F_i\}_{i\in I}$ una cadena de filtros libres y $F = \bigcup_{i\in I} F_i$. Luego si $f \in F$ existe un índice $i \in I$ tal que $f \in F_i$ y como F_i es libre tenemos que $\exists f = 1$. □

Corolario 10.1 *Todo filtro libre está contenido en un filtro libre máximo.*

A todo filtro libre máximo daremos el nombre de *filtro ultralibre*.

Ejemplo 10.1 *Sea K un álgebra de Boole completa e I un conjunto con más de dos elementos a los cuales llamaremos individuos. Consideremos el álgebra funcional monádica $(\mathcal{F} = K^I, \exists)$.*
Dado un punto fijo j de I y consideremos el conjunto $J = \{f \in \mathcal{F} : f(j) = 1\}$. Es claro que el conjunto J no es vacío y que J es un filtro de $\mathcal{F}$, además para cada $f \in J$ se tiene que $(\exists f)(x) = \bigvee_{x\in I} f(x) = 1$, por lo tanto $\exists f = 1$ luego J es un filtro libre. Probemos que J es ultralibre. Supongamos que J no es ultralibre, entonces J se puede prolongar a un filtro ultralibre $J_1 \supset J$. Sea $g \in J_1 \setminus J$, entonces como $g \notin J$, $g(j) = \alpha \neq 1$, con $\alpha \in K$. Consideremos la función $h : I \to K$ definida de la siguiente forma:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = j, \\ 0 & si\ x \neq j. \end{cases}$$

Luego $h \in J$ y por lo tanto $h \in J_1$. Como $h, g \in J_1$, entonces como J_1 es un filtro $f = h \wedge g \in J_1$, luego $f(x) = h(x) \wedge g(x)$, y por lo tanto

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & si\ x = j, \\ 0 & si\ x \neq j. \end{cases}$$

Luego $(\exists f)(x) = 0 \vee \alpha = \alpha \neq 1$, y en consecuencia J_1 no es libre dado que $f \in J_1$ y $\exists f \neq 1$.

Ejemplo 10.2 *Dada un álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$, supongamos que existe un epimomorfismo booleano $j : A \to K$ que deja invariante los elementos de K. A un tal epimomorfismo daremos el nombre de carácter del álgebra A.*

Sea $J = Nuc\ (j)$. Probaremos que J es un filtro ultralibre. Es claro que J es un filtro,

dado que J es el núcleo de un epimomorfismo $j : A \to K$. Sea $x \in J$, entonces $j(x) = 1$. Ahora bien si k es una constante de J entonces $j(k) = 1$ y como j deja invariante los elementos de K entonces $j(k) = k$, luego $k = 1$ esto es la única constante de J es 1 por lo tanto J es un filtro libre.
Supongamos que J no es un filtro ultralibre, entonces existe un filtro ultralibre J_1 tal que $J_1 \supset J$. Sea $f \in J_1 \setminus J$ entonces $j(f) = k \in K$ y como J es el núcleo del homomorfismo entonces $j(k) = k \neq 1$, luego $f \equiv k \pmod{J}$ y por lo tanto existe un $y \in J$ tal que $f \wedge y = k \wedge y$ luego $\exists(f \wedge y) = \exists(k \wedge y) = \exists k \wedge \exists y = k \wedge \exists y = k \wedge 1 = k$. Pero de $f, y \in J_1$ resulta que $f \wedge y \in J_1$, luego como J_1 es libre $\exists(f \wedge y) = 1$ tendríamos $k = 1$ lo que contradice la hipótesis hecha, luego J es ultralibre.

Es natural introducir la siguiente definición: Se denomina <u>*Radical Libre*</u> de un álgebra de Boole monádica A a la intersección de todos los filtros ultralibres de A, y se nota $RL(A)$.

Lema 10.3 *Toda álgebra de Boole monádica A es libremente semisimple esto es $RL(A) = \{1\}$.*

Dem. Sea $\mathcal{U} = \{J_i\}_{i \in I}$ la familia de todos los filtros ultralibres de A, luego $RL(A) = \bigcap_{i \in I} J_i$ es claro que $\{1\} \subseteq RL(A)$. Probemos que $RL(A) \subseteq \{1\}$ esto es equivalente a probar que $A \setminus \{1\} \subseteq A \setminus RL(A)$. Sea $a \in A \setminus \{1\}$ esto es $a \neq 1$ y probemos que existe $J_0 \in \mathcal{U}$ tal que $a \notin J_0$. Consideremos el elemento $l = a \to \forall a = -a \vee \forall a$, entonces $\exists l = \exists(-a \vee \forall a) = \exists - a \vee \forall a = -\forall a \vee \forall a = 1$ esto es l es libre luego por el Lema 10.2, $F(l)$ es libre y en consecuencia $F(l)$ puede prolongarse a un filtro ultralibre J_0, probemos que $a \notin J_0$. En efecto si $a \in J_0$ como $l \in J_0$, entonces $l \wedge a \in J_0$ pero $l \wedge a = (-a \vee \forall a) \wedge a = (-a \wedge a) \vee (a \wedge \forall a) = \forall a$, esto es $\forall a \in J_0$, luego $\forall a = 1$ y como $\forall a \leq a$ entonces $a = 1$ lo que contradice la hipótesis. □

Ejemplo 10.3 *Sea A el álgebra de Boole monádica cuyo diagrama se indica a continuación y cuyo conjunto de constantes es $K(A) = \{0, b, e, 1\}$.*

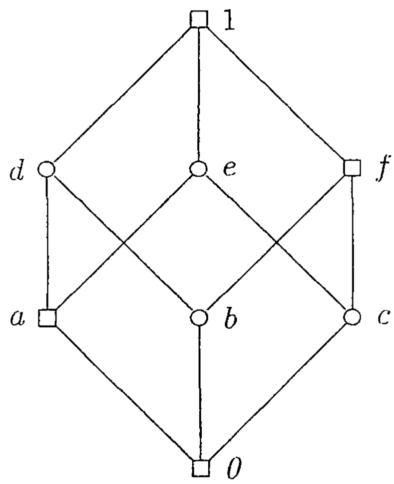


Figura 10.1

los elementos libres de A son d, e y 1, luego los filtros libres son $F(d)$, $F(e)$ y $F(1)$ y los ultralibres son $J_1 = F(d)$ y $J_2 = F(e)$.

Vamos a demostrar el siguiente:

Teorema 10.4 *Si A es un álgebra de Boole monádica finita, con más de un elemento, y J un filtro ultralibre existe un carácter ψ que tiene por núcleo a J.*

Para ello probemos primero los siguientes lemas:

Lema 10.4 *Si J es un filtro libre entonces en cada clase de equivalencia (mód. J) existe a lo sumo una constante.*

Dem. Supongamos que $k_1, k_2 \in K(A)$ son tales que $k_1 \equiv k_2$ (mód. J) luego existe un elemento $j \in J$ tal que $k_1 \wedge j = k_2 \wedge j$ y por lo tanto $\exists(k_1 \wedge j) = \exists(k_2 \wedge j)$ esto es $\exists k_1 \wedge \exists j = \exists k_2 \wedge \exists j$. Pero como J es libre entonces $\exists j = 1$ por lo tanto tenemos que $\exists k_1 \wedge 1 = \exists k_2 \wedge 1$ luego $k_1 \wedge 1 = k_2 \wedge 1$ esto es $k_1 = k_2$. □

Lema 10.5 *Si un álgebra de Boole monádica A es finita, con más de un elemento, y J es un filtro ultralibre de A entonces en cada clase de equivalencia (mód. J) existe una constante.*

Dem. Sea C una clase de equivalencia módulo J. Observemos que C es cerrada con respecto a la operación de ínfimo esto es si $a, b \in C$ entonces $a \wedge b \in C$. En efecto si $a, b \in C$ existe un elemento $j \in J$ tal que $a \wedge j = b \wedge j$, luego $a \wedge j \wedge b = b \wedge j \wedge b$ esto es $(a \wedge b) \wedge j = b \wedge j$ o sea $a \wedge b \equiv b$ (mód. J) y por lo tanto $a \wedge b \in C$.

De un modo análogo se prueba que si $a, b \in C$ entonces $a \vee b \in C$ esto es C es un subreticulado del álgebra A. Además como A es finita entonces C es un conjunto finito.

Sea c_0 el ínfimo de todos los elementos de C, esto es si $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ entonces $c_0 = c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_n$, $c_0 \in C$ y c_0 es el primer elemento de C.

La observación de la Figura 10.1 sugiere que la constante que está en C es precisamente $\exists c_0$, por lo tanto se trata de probar que $c_0 \equiv \exists c_0$ (mód. J) esto es que:

$$(c_0 \to \exists c_0) \wedge (\exists c_0 \to c_0) \in J.$$

Observemos que como $c_0 \leq \exists c_0$ entonces $c_0 \to \exists c_0 = 1 \in J$, por lo tanto sólo nos resta probar que $\exists c_0 \to c_0 \in J$. Sea j el generador del filtro J y observemos que como $j \wedge c_0 = (c_0 \wedge j) \wedge j$ entonces $c_0 \equiv c_0 \wedge j$ (mód. J) esto es $j \wedge c_0 \in C$ y por lo tanto como c_0 es el primer elemento de C, $c_0 \leq j \wedge c_0$ y como $j \wedge c_0 \leq c_0$ tenemos $c_0 = j \wedge c_0$.

Probemos ahora que el elemento $c = j \wedge (\exists c_0 \to c_0)$ es libre. En efecto:

$$j \wedge (\exists c_0 \to c_0) = j \wedge (-\exists c_0 \vee c_0) = (j \wedge -\exists c_0) \vee (j \wedge c_0) = (j \wedge -\exists c_0) \vee c_0$$

luego

$$\exists(j \wedge (\exists c_0 \to c_0)) = \exists(j \wedge -\exists c_0) \vee \exists c_0 = (\exists j \wedge -\exists c_0) \vee \exists c_0 = -\exists c_0 \vee \exists c_0 = 1,$$

por lo tanto el elemento $c = j \wedge (\exists c_0 \to c_0)$ es libre. Entonces como c es un elemento libre tal que $c \leq j$, se tiene que $F(c)$ es libre y contiene a $F(j) = J$ que es ultralibre, esto es $F(c) = J$ o sea $c = j \leq \exists c_0 \to c_0$ luego $\exists c_0 \to c_0 \in J$.
Por lo tanto la clase de equivalencia C contiene la constante $\exists c_0$.

Este resultado tambien se puede probar del siguiente modo (L. Monteiro): Sea F el filtro generado por el conjunto $J \cup \{\exists c_0 \to c_0\}$, luego si $x \in F$ existe $j \in J$ tal que $j \wedge (\exists c_0 \to c_0) \leq x$, luego $\exists(j \wedge (\exists c_0 \to c_0)) \leq \exists x$. Por lo visto anteriormente $\exists(j \wedge (\exists c_0 \to c_0)) = 1$ y en consecuencia $\exists x = 1$. Acabamos así de probar que F es un filtro libre y como por construcción $J \subseteq F$ y J es un ultralibre tenemos que $J = F$ y en consecuencia $\exists c_0 \to c_0 \in J$. □

De los Lemas 10.4 y 10.5 resulta el siguiente:

Corolario 10.2 *Si A es un álgebra de Boole monádica finita, con más de un elemento, y J es un filtro ultralibre de A, cada clase de equivalencia (mód. J) contiene una constante y sólo una.*

Lema 10.6 *Si A es un álgebra de Boole monádica y J es un filtro ultralibre tal que cada clase de equivalencia (mód. J) contiene una constante y sólo una, entonces existe un carácter que tiene por núcleo a J y por lo tanto A/J es isomorfa a K.*

Dem. Sea $A' = A/J$ y $j : A \to A'$ el epimorfismo booleano natural, que tiene, como sabemos, por núcleo a J.
Observemos que como en cada clase de equivalencia C existe una única constante, podemos definir una transformación φ que a cada clase clase de equivalencia C hace corresponder la única constante que pertenece a C, esto es $\varphi(C) = k$, donde $k \in C \cap K$. Probemos que φ es un isomorfismo (booleano) de A' sobre K, esto es que se verifica:

1) $\varphi(C_1 \vee C_2) = \varphi(C_1) \vee \varphi(C_2)$, cualesquiera que sean $C_1, C_2 \in A'$,

2) $\varphi(C_1 \wedge C_2) = \varphi(C_1) \wedge \varphi(C_2)$, cualesquiera que sean $C_1, C_2 \in A'$,

3) $\varphi(-C) = -\varphi(C)$, cualesquiera que sea $C \in A'$,

4) φ es una transformación biunívoca de A' sobre K.

En efecto:

1) Sean C_1, C_2 dos clases de equivalencia, k_1 la única constante de C_1 y k_2 la única constante de C_2, luego $\varphi(C_1) = k_1$, $\varphi(C_2) = k_2$ y $C_1 = |k_1|$, $C_2 = |k_2|$, por lo tanto $C_1 \vee C_2 = |k_1| \vee |k_2| = |k_1 \vee k_2|$ esto significa que la constante $k_1 \vee k_2$ pertenece a $C_1 \vee C_2$ y por lo tanto $\varphi(C_1 \vee C_2) = k_1 \vee k_2 = \varphi(C_1) \vee \varphi(C_2)$.

2) Como $C_1 \wedge C_2 = |k_1| \wedge |k_2| = |k_1 \wedge k_2|$ esto significa que la constante $k_1 \wedge k_2$ pertenece a $C_1 \wedge C_2$, luego $\varphi(C_1 \wedge C_2) = k_1 \wedge k_2 = \varphi(C_1) \wedge \varphi(C_2)$.

3) Sea C una clase de equivalencia que contiene la constante k luego $\varphi(C) = k$ y $C = |k|$ por lo tanto $-C = -|k| = |-k|$ lo cual significa que la constante $-k$ pertenence a $-C$ luego $\varphi(-C) = -k = -\varphi(C)$.

4) Sean C_1, C_2 clases de equivalencia y $k_1 \in C_1 \cap K$, $k_2 \in C_2 \cap K$. Si $\varphi(C_1) = \varphi(C_2)$ esto es $k_1 = k_2$ entonces $C_1 = |k_1| = |k_2| = C_2$, lo que prueba que φ es biunívoca. Si $k \in K$ sea $C = |k|$ luego $\varphi(C) = k$, y por lo tanto φ es suryectiva.

Como 1 es la única constante de J entonces el núcleo de isomorfismo φ es precisamente la clase J.
Consideremos la transformación $\psi : A \to K$ definida del siguiente modo:

$$\text{Si } a \in A \text{ entonces } \psi(a) = \varphi(j(a)).$$

Como $j : A \to A' = A/J$ y $\varphi : A' \to K$ son epimorfismos booleanos entonces $\psi : A \to K$ es un epimorfismo booleano.

Probemos que ψ deja invariante los elementos de K. En efecto si $k \in K$ entonces $\psi(k) = \varphi(j(k)) = \varphi(|k|) = k$.
Acabamos así de probar que $\psi : A \to K$ es un epimorfismo booleano que deja invariante los elementos de K esto es ψ es un carácter del álgebra A.
Probemos finalmente que J es el núcleo del carácter ψ esto es queremos probar que $\psi^{-1}(1) = J$.
En efecto $\psi^{-1}(1) = j^{-1}(\varphi^{-1}(1)) = \psi^{-1}(|1|) = j^{-1}(J) = J$. □

Observación 10.2 *1) De los Lemas 10.4, 10.5 y 10.6 resulta el Teorema 10.4.*
2) El hecho de que el álgebra sea finita interviene solamente en la demostración del Lema 10.5.

Se dice que un filtro ultralibre J de un álgebra de Boole monádica A es *un individuo* de A si cada clase de equivalencia (mód. J) contiene una constante y sólo una.

De acuerdo a esta definición el Lema 10.6 puede enunciarse del siguiente modo: Todo individuo es núcleo de un carácter.

Teorema 10.5 *Si ψ es un carácter de un álgebra de Boole monádica A, su núcleo es un individuo.*

Dem. Por hipótesis $\psi : A \to K$ es un epimorfismo booleano que deja invariante los elementos de K. En el Ejemplo 10.2 probamos que el núcleo J de ψ es un filtro ultralibre. Probemos que cada clase de equivalencia C, módulo J contiene una constante y sólo una. Si $c \in C$ entonces por hipótesis $\psi(c) = k \in K$ y además $\psi(k) = k$, luego $\psi(c) = \psi(k)$ esto es $c \equiv k$ (mód. J) y como $c \in C$ tenemos que $k \in C$. Además ya demostramos que tal constante es única. □

Para obtener una representación de un álgebra de Boole monádica como un álgebra funcional somos llevados a considerar la familia $\mathcal{I}$ de todos los individuos de A, la dificultad principal consiste en que en general un álgebra de Boole monádica no contiene individuos, esto no ocurre en las álgebras finitas como demostramos anteriormente visto que en ellas todo filtro ultralibre es un individuo.

Supongamos que la familia $\mathcal{I} = \{J\}_{J \in \mathcal{J}}$ de los individuos de A no es vacía y para cada individuo J representaremos por j el carácter correspondiente, esto es $j : A \to K$ es un epimorfismo booleano que deja fijos los elementos de K.
Vamos a representar cada elemento $f \in A$ por una función $F : \mathcal{I} \to K$ la cual será definida de la siguiente forma:

$$(*) \quad F(J) = j(f) \in K, \text{ cualquiera que sea } J \in \mathcal{I}.$$

Sea $\varphi : A \to K^{\mathcal{I}}$ definida por:

$$\varphi(f) = F$$

donde F es la función definida en (*) y probemos que φ es un homomorfismo booleano.

1) $\varphi(f_1 \wedge f_2) = \varphi(f_1) \wedge \varphi(f_2)$.
   Sea $f = f_1 \wedge f_2$ y $\varphi(f) = F$, entonces $F(J) = j(f) = j(f_1 \wedge f_2) = j(f_1) \wedge j(f_2) = F_1(J) \wedge F_2(J)$, por lo tanto $F = F_1 \wedge F_2$, esto es $\varphi(f_1 \wedge f_2) = \varphi(f_1) \wedge \varphi(f_2)$.

2) $\varphi(f_1 \vee f_2) = \varphi(f_1) \vee \varphi(f_2)$.
   Sea $f = f_1 \vee f_2$ y $\varphi(f) = F$, entonces $F(J) = j(f) = j(f_1 \vee f_2) = j(f_1) \vee j(f_2) = F_1(J) \vee F_2(J)$, luego $F = F_1 \vee F_2$ o sea $\varphi(f_1 \vee f_2) = \varphi(f_1) \vee \varphi(f_2)$.

3) $\varphi(-f) = -\varphi(f)$.
   Sea $g = -f$ y $\varphi(g) = G$, entonces $G(J) = j(g) = j(-f) = -j(f) = -F(J)$ luego $G = -F$, por lo tanto $\varphi(g) = -\varphi(f)$, esto es $\varphi(-f) = -\varphi(f)$.

Acabamos así de probar que φ es un homomorfismo booleano de A en $K^{\mathcal{I}}$. Sea $\varphi(A) = A' \subseteq K^{\mathcal{I}}$, como A' es una imagen homomórfica del álgebra de Boole A, entonces A' es un álgebra de Boole que es una subálgebra booleana de $K^{\mathcal{I}}$, obtenemos así una representación homomórfica del álgebra de Boole A por un álgebra de funciones.

Veamos cuando este homomorfismo es un isomorfismo.

Lema 10.7 *Si $\{J\}_{J\in\mathcal{J}}$ es una familia de individuos cuya intersección es igual a $\{1\}$, entonces la transformación φ definida anteriormente es biunívoca.*

Dem. Sean $f_1, f_2 \in A$ y $F_1 = \varphi(f_1)$, $F_2 = \varphi(f_2)$. Supongamos que $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ esto es $F_1 = F_2$ lo cual significa que $F_1(J) = F_2(J)$ para todo $J \in \mathcal{J}$, esto es $j(f_1) = j(f_2)$ para todo carácter j correspondiente al individuo J. Pero como todo j es un epimorfismo de A en K que tiene por núcleo J entonces $f_1 \equiv f_2$ (mód. J) para todo $J \in \mathcal{J}$, esto es $(f_1 \to f_2) \wedge (f_2 \to f_1) \in J$ para todo $J \in \mathcal{J}$, luego $(f_1 \to f_2) \wedge (f_2 \to f_1) \in \bigcap_{J\in\mathcal{J}} J = \{1\}$ esto es $(f_1 \to f_2) \wedge (f_2 \to f_1) = 1$ por lo tanto tenemos que $f_1 \to f_2 = 1$ y $f_2 \to f_1 = 1$ esto es $f_1 \leq f_2$ y $f_2 \leq f_1$ luego $f_1 = f_2$. □

Recordemos que si A es un álgebra de Boole, una subálgebra booleana S de A se dice completa en A si existe el ínfimo de cualquier subconjunto de S y ese ínfimo pertenece a S.

Lema 10.8 (Lema fundamental) *Si A es un álgebra de Boole monádica tal que el álgebra de Boole K de todas las constantes de A es completa en A entonces todo filtro ultralibre es un individuo.*

Dem. Sea J un filtro ultralibre. Queremos probar que J es un individuo, esto es que cada clase de equivalencia contiene una constante. Esta afirmación es evidente para la clase J visto que $1 \in J$.
Sea $C = \{a_i\}_{i\in I}$ una clase de equivalencia diferente de J, y consideremos el elemento $c = \bigwedge_{i\in I} \exists a_i$, el cual existe por hipótesis y es una constante. Queremos probar que $c \in C$.
Sea a_0 un elemento fijo de C y probemos que $a_0 \equiv c$ (mód. J) esto es que:

$$b = (a_0 \to c) \wedge (c \to a_0) = (-a_0 \vee c) \wedge (-c \vee a_0) = (-a_0 \wedge -c) \vee (a_0 \wedge c) \in J.$$

Sea J_1 el filtro generado por $J \cup \{b\}$ esto es

$$J_1 = F(J, b) = \{x \in A : b \wedge j \leq x,\ j \in J\}.$$

Supongamos probado que $\exists(b \wedge j) = 1$ para todo $j \in J$. Como los elementos de la forma $b \wedge j$ $(j \in J)$ pertenecen a J_1, resulta que J_1 es un filtro libre visto que si $x \in J_1$ entonces $b \wedge j \leq x$ para algún $j \in J$ luego $\exists(b \wedge j) = 1 \leq \exists x$ esto es $\exists x = 1$. Por lo tanto J_1 es un filtro libre que contiene a J y a b y como J es ultralibre entonces $J = J_1$ y por lo tanto $b \in J$.

Probemos que $\exists(b \wedge j) = 1$ para todo $j \in J$. Para ello consideremos el elemento:

$$\alpha = \exists(((-a_0 \wedge -c) \vee (a_0 \wedge c)) \wedge j) =$$

$$\exists((-a_0 \wedge j \wedge -c) \vee (a_0 \wedge c \wedge j)) = \exists(-a_0 \wedge j \wedge -c) \vee \exists(a_0 \wedge c \wedge j).$$

Teniendo en cuenta que c y $-c$ son constantes tendremos

$$\alpha = (\exists(-a_0 \wedge j) \wedge -c) \vee (\exists(a_0 \wedge j) \wedge c).$$

Observemos que: $a_0 \wedge j \in C$, para todo $j \in J$ visto que $a_0 \wedge j = (a_0 \wedge j) \wedge j$, para todo $j \in J$ entonces $a_0 \equiv a_0 \wedge j$ (mód. J) luego $a_0 \wedge j \in C$, para todo $j \in J$, por lo tanto $\exists(a_0 \wedge j) \in \{\exists a_i\}$ y como $c = \bigwedge_{i \in I} \exists a_i \leq \exists(a_0 \wedge j)$, para todo $j \in J$, entonces tendremos que:

$$\alpha = (\exists(-a_0 \wedge j) \wedge -c) \vee c = ((\exists(-a_0 \wedge j) \vee c) \wedge (-c \vee c) = \exists(-a_0 \wedge j) \vee c =$$

$$\exists(-a_0 \wedge j) \vee (\bigwedge_{i \in I} \exists a_i) = \bigwedge_{i \in I}(\exists(-a_0 \wedge j) \vee \exists a_i) = \bigwedge_{i \in I} \exists((-a_0 \wedge j) \vee a_i) =$$

$$\bigwedge_{i \in I} \exists((-a_0 \vee a_i) \wedge (j \vee a_i)) = \bigwedge_{i \in I} \exists((a_0 \rightarrow a_i) \wedge (j \vee a_i)).$$

Además:

1) $a_0 \rightarrow a_i \in J$, para todo índice $i \in I$ visto que $a_0 \equiv a_i$ (mód. J).

2) Como $j \in J$, entonces $j \vee a_i \in J$, para todo índice $i \in I$.

Luego de 1) y 2) resulta que $(a_0 \rightarrow a_i) \wedge (j \vee a_i) \in J$, para todo índice $i \in I$ y por lo tanto $\exists((a_0 \rightarrow a_i) \wedge (j \vee a_i)) = 1$, para todo índice $i \in I$ esto es $\alpha = 1$. □

Corolario 10.3 *Si en un álgebra de Boole monádica A el conjunto K de las constantes es un álgebra de Boole completa en A entonces la intersección de todos los individuos es igual al conjunto $\{1\}$.*

Dem. Basta observar que la intersección de todos los los filtros ultralibres es igual a $\{1\}$ y que todo ultralibre es un individuo. □

Teorema 10.6 *Si un álgebra de Boole monádica A es tal que el conjunto K de las constantes es un álgebra de Boole completa en A, entonces A es isomorfa a un álgebra funcional rica.* (P. Halmos)

Dem. Sea $\mathcal{I} = \{J\}_{J \in \mathcal{J}}$ el conjunto de todos los ultralibres y sea j el carácter correspondiente a J, esto es $j : A \to K$ es un epimorfismo booleano que deja invariante los elementos de K.
Consideremos el conjunto $\mathcal{F} = K^{\mathcal{I}}$ de todas las funciones definidas sobre $\mathcal{I}$ y que toman sus valores en K. Como K es completa, $(\mathcal{F}, \exists)$ es un álgebra de Boole funcional monádica. Vimos que si a cada elemento $f \in A$ le hacemos corresponder la función $\varphi(f) = F \in \mathcal{F}$ definida por:

$$F(J) = j(f) \in K \cong A/J,$$

entonces φ es un homomorfismo booleano de A en $\mathcal{F}$, y como en este caso $\bigcap_{J \in \mathcal{J}} J = \{1\}$ (ver Corolario 10.3) entonces φ es un isomorfismo booleano de A en $\varphi(A) \subseteq \mathcal{F}$.
Probemos que φ es un isomorfismo monádico, esto es que se verifica:

$$\varphi(\exists f) = \exists \varphi(f).$$

Sea $F = \varphi(f)$, $g = \exists f$ y $G = \varphi(g)$. Queremos probar que $G = \exists F$, esto es que $G(J) = (\exists F)(J)$ para todo $J \in \mathcal{I}$.
En efecto como $f \leq \exists f$ tenemos que $\varphi(f) \leq \varphi(\exists f)$, entonces $F \leq G$ esto es $F(J) \leq G(J)$, para todo $J \in \mathcal{I}$. Pero $G(J) = j(g) = j(\exists f) = \exists f$, esto significa que G es una función constante que toma en todos los puntos el valor $\exists f$, luego tenemos $F(J) \leq \exists f$ para todo $J \in \mathcal{I}$ y por lo tanto

$$(1) \quad (\exists F)(J) = \bigvee_{J \in I} F(J) \leq \exists f = G(J),$$

Esto es $\exists F \leq G$.
Probemos ahora que existe un punto $J_0 \in \mathcal{I}$ tal que $F(J_0) = \exists f$. En efecto observando que $\exists f \leftrightarrow f = (\exists f \to f) \wedge (f \to \exists f) = \exists f \to f = -\exists f \vee f$, entonces:

$$\exists(\exists f \leftrightarrow f) = \exists(-\exists f \vee f) = -\exists f \vee \exists f = 1,$$

por lo tanto el elemento $l = \exists f \leftrightarrow f$ es libre, $F(l)$ es libre y existe un filtro $J_0 \in \mathcal{I}$ que contiene $F(l)$ esto es $l \in J_0$ y por lo tanto $f \equiv \exists f$ (mód. J_0) esto es f y $\exists f$ están en la misma clase de equivalencia C y como el carácter j_0 hace corresponder a cada elemento de la clase de equivalencia C la única constante que está en esa clase tendremos $j_0(f) = \exists f$ esto es $F(J_0) = \exists f$, luego:

$$(2) \quad G(J) = \exists f = F(J_0) \leq \bigvee_{J \in \mathcal{I}} F(J) = (\exists F)(J)$$

y por lo tanto de (1) y (2) resulta $\exists F = G$. Además la función F alcanza su extremo superior en el punto J_0 que acabamos de indicar, dado que

$$\bigvee_{J \in \mathcal{I}} F(J) = (\exists F)(J) = G(J) = \exists f = F(J_0).$$

□

Ejercicio 10.1 *Representar el álgebra de Boole monádica indicada en la Figura 10.1, por un álgebra de funciones y verificar que esta álgebra es rica. Los filtros ultralibres son*

$J_1 = F(d) = \{d, 1\}$, $J_2 = F(e) = \{e, 1\}$, *luego* $\mathcal{I} = \{J_1, J_2\}$ *y el álgebra de Boole de las constantes es* $K = \{0, a, f, 1\}$. *Entonces* $\mathcal{F} = K^{\mathcal{I}} = K \times K$ *tiene el diagrama indicado en la Figura 10.2. Sean* $\mathbf{0} = (0,0), \mathbf{a} = (a,a), \mathbf{b} = (f,0), \mathbf{c} = (0,f), \mathbf{d} = (1,a), \mathbf{e} = (a,1)$, $\mathbf{f} = (f,f), \mathbf{g} = (1,0), \mathbf{h} = (f,a)$, $\mathbf{l} = (a,0), \mathbf{m} = (0,a), \mathbf{n} = (a,f), \mathbf{p} = (0,1)$, $\mathbf{q} = (1,f), \mathbf{r} = (f,1), \mathbf{1} = (1,1)$.
Los caracteres de A estan indicados en la siguiente tabla:

	x	0	a	b	c	d	e	f	1
caracteres	$j_1(x)$	0	a	f	0	1	a	f	1
	$j_2(x)$	0	a	0	f	a	1	f	1

La representación de los elementos de A estan indicados en la tabla siguiente:

F	$F(J_1)$	$F(J_2)$	$\exists F$
$\varphi(0) = \mathbf{0}$	0	0	0
$\varphi(a) = \mathbf{a}$	a	a	$\mathbf{a}$
$\varphi(b) = \mathbf{b}$	f	0	$\mathbf{f}$
$\varphi(c) = \mathbf{c}$	0	f	$\mathbf{f}$
$\varphi(d) = \mathbf{d}$	1	a	1
$\varphi(e) = \mathbf{e}$	a	1	1
$\varphi(f) = \mathbf{f}$	f	f	$\mathbf{f}$
$\varphi(1) = \mathbf{1}$	1	1	1

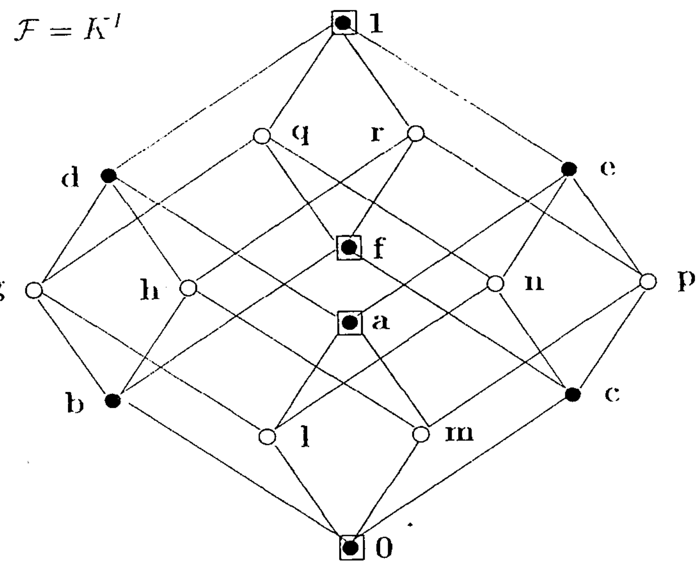


Figura 10.2

Observemos que el álgebra $\mathcal{F}$ *no es rica. En efecto* $\mathbf{h}(J_1) \vee \mathbf{h}(J_2) = f \vee a = 1$ *y no existe ningún* $J \in \mathcal{I}$ *tal que* $\mathbf{h}(J) = 1$.

Ejercicio 10.2 *Representar el álgebra $\mathcal{F} = K^I$ indicada anteriormente, que no es rica, como un álgebra funcional rica. Observemos que los ultralibres de $\mathcal{F}$ son:*

$$F(\mathbf{g}),\ F(\mathbf{h}),\ F(\mathbf{n}),\ F(\mathbf{p}).$$

Teorema 10.7 *Toda álgebra de Boole monádica A es isomorfa a un álgebra funcional rica.* (P. Halmos [12])

Dem. Dada el álgebra A existe un álgebra de Boole monádica A'' que verifica las condiciones siguientes:

1) A es isomorfa a una subálgebra A' de A'',

2) $K(A'')$ es una subálgebra completa en A''.

Dos ejemplos de álgebras A'' que verifican las condiciones 1) y 2) fueron indicadas anteriormente ver Observación 8.2 y Teorema 9.2. Por el Teorema 10.6 el álgebra A'' es representable isomórficamente por un álgebra funcional rica y lo mismo ocurre por lo tanto con A' y en consecuencia con A. $\square$

11 Extensión de un álgebra de Boole monádica a un álgebra de Boole monádica completa

La construcción que indicaremos a continuación se debe a A. Monteiro y nunca fue publicada.

Definición 11.1 *Sean A y A' álgebras de Boole, una función $d : A \to A'$ se dirá un semi-homomorfismo si d verifica las siguientes condiciones:*

S1) $d(1) = 1$,

S2) $d(x \vee y) = d(x) \vee d(y)$.

Observación 11.1 *De la condición S2) resulta que d es una función isótona y tambien que $-d(a) \leq d(-a)$ cualquiera que sea $a \in A$.*

Recordemos los siguientes resultados de A. Monteiro, [19].

Lema 11.1 *Si A es un álgebra de Boole, $f \in A$, S una sub-álgebra de A, C un álgebra de Boole completa, d un semi-homomorfismo de A en C, h un homomorfismo de S en C, tal que:*

D) $h(s) \leq d(s)$ *para todo* $s \in S$

entonces existe un homomorfismo $H : SB(S, f) \to C$ tal que:

I) H *prolonga a* h, *esto es* $H(s) = h(s)$ *cualquiera que sea* $s \in S$,

II) $H(b) \leq d(b)$, *para todo* $b \in SB(S, f)$.

Recordemos como se construye un tal homomorfismo. Sabemos que:

$$SB(S, f) = \{a \in A : a = (s' \wedge f) \vee (s'' \wedge -f),\ \ s', s'' \in S\}.$$

Sean

$$m_1 = \bigvee\{h(s_1) : s_1 \leq f,\ s_1 \in S\} \quad ; \quad m_2 = \bigvee\{h(s_2) \wedge -d(s_2 \wedge -f) : s_2 \in S\}$$

$$M_1 = \bigwedge\{h(s_3) : f \leq s_3,\ s_3 \in S\} \quad ; \quad M_2 = \bigwedge\{-h(s_4) \vee d(s_4 \wedge f) : s_4 \in S\}.$$

Se prueba que $m_1 \vee m_2 \leq M_1 \wedge M_2$ y que si se define para todo $b \in SB(S, f)$

$$H(b) = [h(s') \wedge H(f)] \vee [h(s'') \wedge -H(f)]$$

donde $m_1 \vee m_2 \leq H(f) \leq M_1 \wedge M_2$, entonces H es un homomorfismo que verifica las condiciones indicadas en el Lema precedente.
Como consecuencia se tiene, usando inducción transfinita, que:

Teorema 11.1 *Si A es un álgebra de Boole, S una sub-álgebra de A, C un álgebra de Boole completa, d un semi-homomorfismo de A en C, h un homomorfismo de S en C, tal que:*

D) $h(s) \leq d(s)$ para todo $s \in S$

entonces existe un homomorfismo $H : A \to C$ tal que:

I) H prolonga a h,

II) $H(a) \leq d(a)$, para todo $a \in A$.

Dada un álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$ sabemos que $K = \exists A$ es una subálgebra booleana de A. Es bien conocido que toda álgebra de Boole puede extenderse a un álgebra de Boole completa, esto es si A es un álgebra de Boole, existe un álgebra de Boole completa C y una subálgebra $A^{'}$ de C que es isomorfa a A. Para simplicar las notaciones identificaremos $A^{'}$ con A.
Por lo tanto K puede extenderse a un álgebra de Boole completa C.

Como el operador $\exists$, verifica $\exists 1 = 1$, $\exists(x \vee y) = \exists(x) \vee \exists(y)$, entonces $\exists$ es un semi-homomorfismo de A en C, que verifica además $\exists 0 = 0$.

Sea h la aplicación de $K \subseteq A$ en C definida por $h(k) = k$ cualquiera que sea $k \in K$, luego h es un homomorfismo booleano de la subálgebra K de A en C que verifica:

$$h(k) = k = \exists k \text{ cualquiera que sea } k \in K,$$

luego como h verifica la condición D) del Teorema 11.1 podemos afirmar que existe un homomorfismo booleano $j : A \to C$ tal que:

I) j prolonga a h, esto es $j(k) = h(k) = k$, cualquiera que sea $k \in K$,

II) $j(a) \leq \exists a$, para todo $a \in A$.

De I) resulta por la definición dada en el Ejemplo 10.2 que j es un carácter de A. Luego el conjunto J de los caracteres de A no es vacío. Sea $\mathcal{F} = C^J$ el conjunto de todas las funciones de J en C. Es bien conocido que si algebrizamos este conjunto *punto por punto* entonces $\mathcal{F}$ es un álgebra de Boole completa. Además si $F \in \mathcal{F}$ y ponemos por definición:

$$(\exists F)(j) = \bigvee_{j \in J} F(j)$$

entonces $(\mathcal{F}, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica.

Si $f \in A$ pongamos por definición $\varphi(f) = F$ donde F es la función dada por $F(j) = j(f)$ para todo $j \in J$. Luego como $j(f) \in C$, cualquiera que sea $f \in A$ tenemos que $F : J \to C$, esto es $F \in \mathcal{F}^J$, y en consecuencia $\varphi : A \to \mathcal{F}$. Es facil ver que:

$$\varphi(0) = \mathbf{0},\ \varphi(1) = \mathbf{1},\ \varphi(f \vee g) = \varphi(f) \vee \varphi(g),\ \varphi(f \wedge g) = \varphi(f) \wedge \varphi(g).$$

por lo tanto:

Lema 11.2 *φ es un homomorfismo booleano de A en $\mathcal{F}$.*

Ademas:

$$\text{Si } f \in K \text{ y } F = \varphi(f) \text{ entonces } F(j) = f, \text{ cualquiera que sea } j \in J.$$

En efecto si $j \in J$, como j deja invariantes los elementos de K, entonces $F(j) = j(f) = f$.

Lema 11.3 *Si $f \in A$, $f \neq 1$, existe $j_0 \in J$ tal que $j_0(f) \neq 1$.*

Dem. Si $f \in K$ entonces cualquiera que sea $j \in J$ se tiene que $j(f) = f \neq 1$.
Supongamos que $f \notin K$, consideremos $S = SB(K, f)$ y $h : K \to K \subseteq C$ definida por $h(k) = k$. Entonces es claro que h es un homomorfismo booleano de la subálgebra booleana K de A en C.
Como $\exists$ es un semi-homomorfismo de A en C que verifica $h(k) = \exists k$ cualquiera que sea $k \in K$, entonces por el Lema 11.1 existe un homomorfismo $H : SB(K, f) \to C$ que prolonga a h.
Vimos que si $b = (k' \wedge f) \vee (k'' \wedge -f) \in SB(K, f)$ entonces H se define del siguiente modo:

$$H(b) = [h(k') \wedge H(f)] \vee [h(k'') \wedge -H(f)]$$

donde

$$m_1 \vee m_2 \leq H(f) \leq M_1 \wedge M_2$$

$$m_1 = \bigvee\{h(k_1) : k_1 \leq f,\ k_1 \in K\} \quad ; \quad m_2 = \bigvee\{h(k_2) \wedge -\exists(k_2 \wedge -f) : k_2 \in K\},$$

$$M_1 = \bigwedge\{h(k_3) : f \leq k_3,\ k_3 \in K\} \quad ; \quad M_2 = \bigwedge\{-h(k_4) \vee \exists(k_4 \wedge f) : k_4 \in K\},$$

y dada la definición de h tenemos:

$$H(b) = [k' \wedge H(f)] \vee [k'' \wedge -H(f)].$$

Como

$$m_1 = \bigvee\{k_1 : k_1 \leq f,\ k_1 \in K\} = \forall f$$

$$m_2 = \bigvee\{k_2 \wedge -(k_2 \wedge \exists - f) : k_2 \in K\} = \bigvee\{k_2 \wedge (-k_2 \vee \forall f) : k_2 \in K\} =$$

$$\bigvee\{k_2 \wedge \forall f : k_2 \in K\} = \bigvee\{k_2 : k_2 \in K\} \wedge \forall f = \forall f$$

y en consecuencia $m_1 \vee m_2 = \forall f$. Ademas

$$M_1 = \bigwedge\{k_3 : f \leq k_3,\ k_3 \in K\} = \exists f$$

$$M_2 = \bigwedge\{-k_4 \vee (k_4 \wedge \exists f) : k_4 \in K\} = \bigwedge\{-k_4 \vee \exists f : k_4 \in K\} =$$

$$(\bigwedge\{-k_4 : k_4 \in K\}) \vee \exists f = \exists f$$

y en consecuencia $M_1 \wedge M_2 = \exists f$.

Por lo tanto $H(f)$ debe verificar:

$$\forall f \leq H(f) \leq \exists f$$

Sea $H(f) = \forall f$, entonces por el Lema 11.1, H es un homomorfismo booleano de $BS(K, f) \to C$, que extiende a h, esto es $H(k) = h(k) = k$, cualquiera que sea $k \in K$, y $H(b) \leq \exists b$ cualquiera que sea $b \in SB(K, f)$. Como $f \neq 1$ entonces $H(f) = \forall f \neq 1$
Si $SB(K, f) = A$ la demostración está terminada, con $j_0 = H$. Caso contrario mediante la aplicación del Teorema 11.1, se concluye demostración por inducción transfinita.
Observemos que si definimos $H(f) = f$, tambien H es un homomorfismo booleano de $BS(K, f) \to C$, que extiende a h, $H(b) \leq \exists b$ cualquiera que sea $b \in SB(K, f)$, y $H(f) = f \neq 1$. □

Observación 11.2 *Si en el Lema anterior definimos $H(f) = \exists f$, el homomorfismo H extiende a h y verifica $H(b) \leq \exists b$ cualquiera que sea $b \in SB(K, f)$. Luego existe $j_0 \in J$ tal que $j_0(f) = \exists f$ y $j_0(a) \leq \exists a$ cualquiera que sea $a \in A$.*

Lema 11.4 *φ es inyectiva.*

Dem. Sean $f, g \in A$ tales que $f \neq g$, luego $f \to g \neq 1$ ó $g \to f \neq 1$. Supongamos que $f \to g \neq 1$, entonces por el Lema 11.3 existe $j_0 \in J$ tal que $j_0(f \to g) \neq 1$. Sean $\varphi(f) = F$ y $\varphi(g) = G$ luego $(F \to G)(j_0) = F(j_0) \to G(j_0) = j_0(f) \to j_0(g) = j_0(f \to g) \neq 1$. Luego $\varphi(f) = F \neq G = \varphi(g)$. □

De los Lemas 11.2 y 11.4 resulta que φ es un isomorfismo booleano de A en $\mathcal{A} = \varphi(A) \subseteq \mathcal{F}$.

Lema 11.5 *Si $f \in A$ y $F = \varphi(f)$, entonces:*

1) *Existe $j_0 \in J$ tal que $F(j_0) = \exists f$.*

2) $\bigvee_{j \in J} F(j) = \exists f$.

Dem.

1) Si $f \in K$ entonces cualquiera que sea $j \in J$ tenemos que $F(j) = j(f) = f = \exists f$. Supongamos que $f \notin K$, entonces por lo indicado en el Lema 11.3 y en la Observación 11.2 existe un homomorfismo $j_0 : A \to C$ tal que:

$$\text{(i)} \quad j_0(f) = \exists f, \qquad \text{(ii)} \quad j_0(a) \leq \exists a \ \text{ para todo } a \in A,$$

y que verifica $j_0(k) = k$, para todo $k \in K$, por lo tanto $j_0 \in J$. Ademas por (i) resulta que $F(j_0) = j_0(f) = \exists f$.

2) $F(j) = j(f) \leq j(\exists f) = \exists f = F(j_0)$ cualquiera que sea $j \in J$, luego $\bigvee_{j \in J} F(j) = F(j_0) = \exists f$.

□

Sea $\mathcal{A} = \varphi(A)$, ya demostramos que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole isomorfa a A. Vamos a demostrar que:

$$\varphi(\exists f) = \exists \varphi(f).$$

Sean $g = \exists f$, $G = \varphi(g)$, $F = \varphi(f)$. Queremos probar que $G = \exists F$, esto es que $G(j) = (\exists F)(j)$ cualquiera que sea $j \in J$. En efecto como $\exists f \in K$, tenemos $G(j) = j(g) = j(\exists f) = \exists f$, cualquiera que sea $j \in J$. Ademas teniendo en cuenta el Lema 11.5, 2) $(\exists F)(j) = \bigvee_{j \in J} F(j) = \exists f$.

Entonces si $F \in \mathcal{A}$, esto es $F = \varphi(f)$, con $f \in A$, por lo demostrado precedentemente $\exists F = \exists \varphi(f) = \varphi(\exists f)$, con $\exists f \in A$, luego $\exists F \in \mathcal{A}$.

Acabamos asi de probar que el álgebra de Boole monádica $(A, \exists)$ es isomorfa a $(\mathcal{A}, \exists)$ y que $(\mathcal{A}, \exists)$ es una subálgebra monádica del álgebra de Boole monádica completa $(\mathcal{F}, \exists)$.

12 Algebras de Boole monádicas libres

12.1 Algebras de Boole monádicas libres I

El primer trabajo sobre la determinación de Algebras de Boole Monádicas libres se debe a Carnap [6], en 1946 y utiliza el cálculo proposicional, pero en su trabajo no incluye las demostraciones para obtener la cardinalidad. Luego H. Bass [4] en 1958 utiliza otro método para su determinación. Posteriormente P. Halmos [11], también en 1958, indica otra construcción, (ver también [9]). En 1963, Héng-Shan Gao [8] indica una nueva construcción, (trabajo publicado en chino). En 1970, A. Masse [14] expone en un Seminario sobre Lógica Algebraica, realizado en la Universidad de Lyon, un trabajo denominado *Anneaux monadiques libres sur un ensemble fini (I) et (II)*, en el cuál esencialmente reproduce el trabajo de Bass. En 1971, L. Henkin, D. Monk y A. Tarski, en el libro *Algebras cilíndricas*, [13] determinan las álgebras de Boole Poliádicas libres.
L. Monteiro durante la realización de su tesis doctoral [23], sobre Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas, generalización del concepto de Algebras de Boole monádicas, determinó las Algebras de Boole Monádicas libres por un método diferente a los indicados en los trabajos previamente citados. Su tesis fue presentada en 1970, y aprobada en 1971. En 1973 L. Monteiro, en un seminario dirigido por el Dr. Antonio Monteiro [20], hace una exposición diferente de las anteriores sobre este tema. En 1978, aparece publicado en *Algebra Universalis* [24] el trabajo de L. Monteiro, que fuera expuesto en 1973, pero con demostraciones totalmente diferentes a las indicadas en ese Seminario. El referee de este trabajo hace el siguiente comentario: *Monteiro gives a new determination of the cardinalities of the finitely-generated, free monadic algebras. There are at least four different proofs of this result already in the literature (haciendo referencia a* [4], [8], [11], [13]*). All of them, including Monteiro's, are based on some kind of detailed analysis of the structure of free monadic algebras (by metalogical, topological, or combinatorial algebraic methods). It is the nature of the particular analysis that is the focal point of all these proofs, and Monteiro's is definitely novel. It is much closer to the spirit of universal algebra than the others, and is in my opinion the most natural and perspicous.* El referee agrega *The cardinality was apparently first obtained by Carnap.*
En este párrafo incluiremos las construcciones indicadas por L. Monteiro [24] en 1978, I. Viglizzo [35] en 1993 y L. Monteiro, M. Abad, S. Savini y J. Sewald [2] en 1994, y en ese orden.

Vimos en el párrafo 8, que si A es un álgebra de Boole monádica, no trivial, A es isomorfa a una subálgebra A^*, del producto cartesiano $P = \prod_{i\in I} A/M_i$, donde $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de todos los filtros monádicos maximales (esto es filtros ultramonádicos) de A. El isomorfimo H se define del siguiente modo: si $m_i : A \to A/M_i$ es el homomorfismo natural, entonces si $x \in A$ ponemos por definición:

$$H(x) = (m_i(x))_{i\in I} \in P.$$

La subálgebra A^* es precisamente $H(A)$.
En el caso en que A es finita entonces H es una función suryectiva. En efecto supongamos que $\mathcal{M}$ tiene m elementos, entonces dado $p \in P$, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, donde $p_i \in A_i = A/M_i$, para $i = 1, 2, \ldots, m$. Entonces para cada $p_i \in A_i$, existe $a_i \in A$ tel que $m_i(a_i) = p_i$. Como A es finita, todos los filtros de A son principales, y los filtros monádicos son

filtros principales generados por elementos de $K = K(A)$. Además vimos que los filtros monádicos máximos son generados por átomos del álgebra de Boole $K = K(A)$, luego $M_i = F(k_i)$ donde k_i es un átomo de K. Sea $a = \bigvee_{j=1}^{m} (a_j \wedge k_j)$, luego $a \in A$. Como $k_j \in K(A)$,$m_j(k_i) \in K(A_j) = \{0,1\}$, entonces $m_j(k_i) = 0$ para $j \neq i$ y $m_i(k_i) = 1$, entonces $m_i(a) = \bigvee_{j=1}^{m} (m_i(a_j) \wedge m_i(k_j)) = m_i(a_i) \wedge m_i(k_i) = m_i(a_i) \wedge 1 = m_i(a_i) = p_i$. Por lo tanto $H(a) = p$. Tenemos asi el siguiente resultado:

Lema 12.1 *Si A es un álgebra de Boole monádica, no trivial y finita, entonces*

$$A \cong \prod_{i=1}^{m} A/M_i,$$

donde m indica el número de átomos del álgebra de Boole $K(A)$.

Identificaremos álgebras de Boole monadicas isomorfas.

La noción de álgebra de Boole monádica $\mathcal{L}(\alpha)$ con α generadores libres , (α es un número cardinal $\alpha \geq 1$), se define de la manera habitual. Como las álgebras de Boole monádicas estan definidas por igualdades, la existencia y unicidad, a menos de isomorfismos, de $\mathcal{L}(\alpha)$ es consecuencia de un teorema de G. Birkhoff [5]. Vamos a determinar la estructura del álgebra de Boole monádica $\mathcal{L}(n)$ con un conjunto finito G de generadores libres, donde $N[G] = n$ y n es un número entero, $n > 0$.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los filtros monádicos maximales de $\mathcal{L}(n)$, sabemos que $\mathcal{L}(n)$ es isomorfa a una subálgebra de $P = \prod_{M \in \mathcal{M}} \mathcal{L}(n)/M$. Vimos en el Lema 7.25 que todas las álgebras cociente $\mathcal{L}(n)/M$ son finitas, luego si probamos que $\mathcal{M}$ es finito, entonces P es finita y en consecuencia $\mathcal{L}(n)$ es finita.
Si k es un número natural, representaremos por B_k el álgebra de Boole con k átomos y por $B_k^* = (B_k, \exists)$ el álgebra de Boole monádica, donde $\exists B_k = \{0,1\}$. Entonces teniendo en cuenta el Lema 7.25 tenemos que:

$$\text{Si } M \in \mathcal{M}, \ \ \mathcal{L}(n)/M \cong B_k^*, \ \text{ donde } 1 \leq k \leq 2^n.$$

Si $k = 2^n$ notaremos B^* en vez de $B_{2^n}^*$. Sabemos que B_k, $1 \leq k \leq 2^n$, es isomorfa a una subálgebra del álgebra de Boole B_{2^n}. Entonces podemos suponer que las álgebras de Boole monádicas B_k^*, $1 \leq k \leq 2^n$ son subálgebras del álgebra de Boole monádica simples B^*. Tenemos asi el siguiente resultado:

Lema 12.2 *Si $M \in \mathcal{M}$ entonces $S_M = \mathcal{L}(n)/M$ es una subálgebra monádica de B^*.*

Sea G el conjunto de generadores libres de $\mathcal{L}(n)$ y $(B^*)^G$ el conjunto de todas las funciones de G en B^*.

Si $f \in (B^*)^G$, como $\mathcal{L}(n)$ es un álgebra libre, existe un único homomorfismo:

$$h_f : \mathcal{L}(n) \to B^*$$

tal que $h_f(g) = f(g)$, para todo $g \in G$. Sabemos que el núcleo de h_f, esto es el conjunto $N(h_f) = \{x \in \mathcal{L}(n) : h_f(x) = 1\}$ es un filtro monádico de $\mathcal{L}(n)$. Veamos que es maximal.

En efecto $S = h_f(\mathcal{L}(n))$ es una subálgebra monádica del álgebra de Boole monádica *simples* B^*, luego S es simples. Como $\mathcal{L}(n)/N(h_f) \cong h_f(\mathcal{L}(n))$ entonces y como $\mathcal{L}(n)/N(h_f)$ es simples y por lo tanto, por el Teorema 7.5, $N(h_f) \in \mathcal{M}$.

Tenemos asi una función de $(B^*)^G$ en $\mathcal{M}$, definida por $\varphi(f) = N(h_f)$, donde $f \in (B^*)^G$. Vamos a probar que φ es suryectiva. Dado $M \in \mathcal{M}$, sea h el homomorfismo natural de $\mathcal{L}(n)$ sobre el álgebra cociente $S_M = \mathcal{L}(n)/N(h_f)$, como S_M es una sub-álgebra de B^*, entonces por el Lema 12.2, h es un homomorfismo de $\mathcal{L}(n)$ en B^*. Sea f la restricción de h al conjunto $G \subseteq \mathcal{L}(n)$, luego $f \in (B^*)^G$. Como $\mathcal{L}(n)$ es libre, la función f se puede prolongar a un único homomorfismo $h_f : \mathcal{L}(n) \to B^*$. Entonces h_f y h son homomorfismos que prolongan a f, por lo tanto $h_f = h$ y en consecuencia $N(h_f) = N(h) = M$. Por lo tanto $\varphi(f) = M$.
Entonces el conjunto $(B^*)^G$ es finito, dado que tiene $\left(2^{(2^n)}\right)^n$ elementos. Luego de acuerdo con lo visto precedentemente $\mathcal{M}$ es finito y en consecuencia:

$$\mathcal{L}(n) \cong \prod_{i=1}^{t} \mathcal{L}(n)/M_i, \quad \text{donde } t = N[\mathcal{M}]$$

Vimos que si $M \in \mathcal{M}$ entonces $L(n)/M \cong B_k^*$, $1 \leq k \leq 2^n$. Sea $\mathcal{M}_k = \{M \in \mathcal{M} : L(n)/M \cong B_k^*\}$, $1 \leq k \leq 2^n$. Entonces $\mathcal{M}$ es la unión disjunta de los conjuntos $\mathcal{M}_k$,$1 \leq k \leq 2^n$. Vamos a demostrar que $\mathcal{M}_k \neq \emptyset$ cualquiera que sea $1 \leq k \leq 2^n$, y vamos a determinar su número de elementos.

Lema 12.3 *Si G es un conjunto de generadores libres de $\mathcal{L}(n)$ y $B(n) = SB(G)$ entonces G es un conjunto de generadores libres del álgebra de Boole $B(n)$.*

Dem. Para ello basta demostrar que si A es un álgebra de Boole y f una función de G en A, entonces f se puede prolongar a un homomorfismo booleano de $B(n)$ en A. En efecto sea A un álgebra de Boole y f una función de G en A. Consideremos el álgebra de Boole monádica $A^* = (A, \exists)$, donde $\exists x = x$ cualquiera que sea $x \in A$, entonces f es una función de $G \subseteq \mathcal{L}(n)$ en A^* y como $\mathcal{L}(n)$ es un álgebra libre f se puede extender a un homomorfismo monádico $h_f : \mathcal{L}(n) \to A^*$. Sea h la restricción de h_f al subconjunto $B(n)$ de $\mathcal{L}(n)$, entonces h es un homomorfismo booleano que prolonga a f. □

Lema 12.4 *Dada B_k^*, k número natural fijo, $1 \leq k \leq 2^n$ existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{L}(n)/M \cong B_k^*$.*

Dem. Sabemos que el álgebra de Boole $B(n)$ tiene 2^n átomos. Como B_k es un álgebra de Boole con k átomos, $1 \leq k \leq 2^n$, entonces por los resultados de R. Sikorski ([29, 30, 31]) existen epimorfismos booleanos de $B(n)$ en B_k. Sea h un tal epimorfismo y r su restricción a G, luego $r : G \to B_k^*$. Entonces esta función se puede prolongar a un homomorfismo monádico $h_r : \mathcal{L}(n) \to B_k^*$. Como h y h_r coinciden sobre el conjunto $B(n)$ entonces h_r es un epimorfismo. Sea $M = N(h_r)$, luego por el Corolario 7.1 $\mathcal{L}(n)/M \cong B_k^*$, y por lo tanto $M \in \mathcal{M}$. □
Acabamos asi de probar que todos los conjuntos $\mathcal{M}_k$, $1 \leq k \leq 2^n$ no son vacíos y por lo tanto si $m_k = N[\mathcal{M}_k]$, $1 \leq k \leq 2^n$, entonces:

$$\mathcal{L}(n) \cong \prod_{k=1}^{2^n} (B_k^*)^{m_k}.$$

Vamos ahora a determinar los números m_k.
Dado k, $1 \leq k \leq 2^n$, sea $H_k^* = Hom^*(\mathcal{L}(n) : B_k^*)$ el conjunto de todos los epimorfismos monádicos de $\mathcal{L}(n)$ en B_k^* y $Aut(B_k^*)$ el conjunto de todos los automorfismos monádicos de B_k^*.
Si $H \in H_k^*$ pongamos $s(H) = Nuc(H)$, entonces s es una función de $H_k^* \to \mathcal{M}_k$, dado que $\mathcal{L}(n)/Nuc(H) \cong B_k^*$. Si $M \in \mathcal{M}_k$, esto es $\mathcal{L}(n)/M \cong B_k^*$, entonces el homomorfismo monádico natural de $\mathcal{L}(n)$ sobre $\mathcal{L}(n)/M$ pertenece a H_k^*. Por lo tanto s es una función suryectiva de H_k^* en $\mathcal{M}_k$.
Es fácil ver que si $H \in H_k^*$ y $h \in Aut(B_k^*)$ entonces $h \circ H \in H_k^*$ y que $s(h \circ H) = s(H)$. Como si $H_1, H_2 \in H_k^*$ son tales que $Nuc(H_1) = Nuc(H_2)$ entonces existe $h \in Aut(B_k^*)$ tal que $H_1 = h \circ H_2$ entonces $s^{-1}(M) = \{h \circ H : h \in Aut(B_k^*)\}$, donde $M \in \mathcal{M}_k$ y por lo tanto:

$$N[\mathcal{M}_k] = \frac{N[Hom^*(\mathcal{L}(n) : B_k^*)]}{N[Aut(B_k^*)]}.$$

Sea $H_k = Hom(B(n) : B_k)$, $1 \leq k \leq 2^n$ el conjunto de todos los epimorfismos booleanos de $B(n)$ en B_k, vamos a probar que $N[H_k^*] = N[H_k]$.
Dado $H \in H_k^*$ sea h la restricción de H al conjunto $B(n)$, luego h es un homomorfismo booleano de $B(n)$ en B_k. Teniendo en cuenta el Lema 7.24 podemos afirmar que $h(B(n)) = SB(h(G)) = SB(H(G)) = SM(H(G)) = H(\mathcal{L}(n)) = B_k$, luego $h \in H_k$. Recíprocamente si $h \in H_k$ sea f la restricción de h a G, luego $f : G \to B_k^*$ y como $\mathcal{L}(n)$ es un álgebra libre, f se puede extender a un homomorfismo monádico $h_f : \mathcal{L}(n) \to B_k^*$. Sea h_1 la restricción de h_f a $B(n)$, entonces como h_1 y h coinciden sobre G tenemos que $h_1 = h$.
Si $H_1, H_2 \in H_k^*$ y si sus respectivas restricciones a $B(n)$, h_1 y h_2 verifican $h_1 = h_2$, entonces en particular $h_1(g) = h_2(g)$ para todo $g \in G$, esto es $h_1 = h_2$ sobre G y como el homomorfismo extensión es único tenemos que $H_1 = H_2$.
Es bien conocido ([30, 26]) que

$$N[Hom(B(n) : B_k)] = V_{2^n,k} = \frac{(2^n)!}{(2^n - k)!}.$$

Lema 12.5 *Si S es un álgebra de Boole monádica simple, entonces h es un automorfismo monádico de S si y solamente si h es un automorfismo booleano de S.*

Dem. Es evidente que la condición es necesaria. Para ver que ella es suficiente debemos probar que $h(\exists x) = \exists h(x)$, para todo $x \in S$. Si $x = 0$ entonces $h(\exists 0) = h(0) = \exists 0 = \exists h(0)$. Si $x \neq 0$ como h es injectiva entonces $h(x) \neq 0$ entonces $\exists h(x) = 1$. Por otro lado $h(\exists x) = h(1) = 1$. □

Si representamos por $Aut(B_k)$ el conjunto de todos los automorfismos booleanos del álgebra de Boole B_k entonces por el Lema 12.5 podemos afirmar que $N[Aut(B_k^*)] = N[Aut(B_k)]$ y como sabemos que $N[Aut(B_k)] = k!$, acabamos asi de probar que:

$$N[\mathcal{M}_k*] = \frac{V_{2^n,k}}{k!} = \binom{2^n}{k}, \qquad 1 \leq k \leq 2n$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}(n) \cong \prod_{k=1}^{2^n} (B_k^*)^{\binom{2^n}{k}},$$

y en consecuencia:

$$N[\mathcal{L}(n)] = \prod_{k=1}^{2^n} (N[B_k^*])^{\binom{2^n}{k}} = \prod_{k=1}^{2^n} (2^k)^{\binom{2^n}{k}} = 2^{[2^n . 2^{(2^n - 1)}]}.$$

Los ejes de $L(n)$, son los cocientes $\mathcal{L}(n)/M$ donde $M \in \mathcal{M}$. Entonces el número de ejes de $L(n)$ con k átomos, $1 \leq k \leq 2^n$, es $\binom{2^n}{k}$, y por lo tanto el número total de ejes de $\mathcal{L}(n)$ es

$$\sum_{k=1}^{2^n} \binom{2^n}{k} = 2^{(2^n)} - 1,$$

que es igual al número de átomos del álgebra de Boole $K(\mathcal{L}(n))$.

Este trabajo fué el punto de partida para determinar en nuestra tesis [23] las álgebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas libres con un número finito de generadores.

12.2 Algebras de Boole monádicas libres II.

12.2.1 Introducción

P. Halmos en su trabajo [10] indica una construcción del álgebra de Boole monádica con un conjunto arbitrario de generadores libres, para lo cual utiliza nociones de topología. Aquí presentamos una exposición de los resultados de Halmos para el caso el caso en que el conjunto de generadores libres es finito, caso en que no son necesarias las nociones topológicas. De este modo ampliamos el espectro de posibles lectores e indicamos simplificaciones que se introducen al considerar el caso de un conjunto de generadores finito.

En esta primera parte vamos a introducir la noción de *hemimorfismo*. En la segunda parte se define el concepto de *extensión monádica libre* de un álgebra de Boole debida a P. Halmos y se indica una construcción de la misma para el caso finito. Finalmente, en la tercera parte se hace uso de esta construcción para mostrar cuál es el álgebra de Boole monádica libre con n generadores.

Una aplicación h de un álgebra de Boole A en un álgebra de Boole A' se dirá un *hemimorfismo* si:

H0) $h(0) = 0'$,

H2) $h(p \vee q) = h(p \vee h(q)$, cualesquiera que sean $p, q \in A$.

Si además se verifica H5) $h(1) = 1'$ diremos que h es un *1-hemimorfismo*. Esto es un 1-hemimorfismo es un semihomorfismo (ver §11) que verifica $h(0) = 0'$.
Si $(A, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica, entonces $\exists$ es un 1-hemimorfismo de $A \to A$, dado que $\exists 0 = 0$, $\exists 1 = 1$ y $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$, (ver Lema 3.1)

Con $\mathbf{2}$ notaremos el álgebra de Boole con un átomo. Si X es un conjunto no vacío notaremos con $\mathbf{2}^X$ el conjunto de todas las funciones de X en $\mathbf{2}$. Este conjunto algebrizado en la forma natural es un álgebra de Boole.

Lema 12.6 *Si A es un álgebra de Boole finita no trivial, un hemimorfismo h de A en un álgebra de Boole B está determinado por los valores que h toma en los átomos de A.*

Dem. Sea $\mathcal{A}(A) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de los átomos de A, y supongamos conocidos los $h(a_i), 1 \leq i \leq n$.
Si $x \in A$, y $x = 0$, por $H_1), h(x) = 0$; si $x \neq 0$, como A es un álgebra de Boole finita, x puede ser expresado (de una única manera) como supremo de elementos en $\mathcal{A}(A)$:

$$x = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(A) : a \leq x\}.$$

De esta manera

$$h(x) = h(\bigvee\{a \in \mathcal{A}(A) : a \leq x\}) = \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(A), a \leq x\}.$$

□

Lema 12.7 *Si B es un álgebra de Boole finita no trivial, y h es un hemimorfismo de B en $\mathbf{2}$, entonces h es un homomorfismo si y solamente si existe un único átomo a_h de B tal que $h(a_h) = 1$.*

Dem. Sea h un homomorfismo y supongamos que para todo $a \in \mathcal{A}(B), h(a) = 0$. Entonces, por el Lema 12.6, $h(1) = 0$, absurdo pues h es un homomorfismo. Luego, existe al menos un elemento $a_h \in \mathcal{A}(B)$ tal que $h(ah) = 1$. Supongamos ahora que existen a_h y $a'_h \in \mathcal{A}(B), a_h \neq a'_h$ y tales que $h(a_h) = 1 = h(a'_h)$. Como $a_h, a'_h \in \mathcal{A}(B)$ y $a_h \neq a'_h, a_h \wedge a'_h = 0$, luego $0 = h(a_h \wedge a'_h) = h(a_h) \wedge h(a'_h) = 1 \wedge 1 = 1$. Absurdo.
Sea h un hemimorfismo y a_h el único átomo de B tal que $h(a_h) = 1$, luego $h(a) = 0$ cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}(B) \setminus \{a_h\}$. Veamos que h es un homomorfismo. Para ello nos basta probar que $h(1) = 1$ y $h(p \wedge q) = h(p) \wedge h(q)$.

$$h(1) = h(\bigvee\{a : a \in \mathcal{A}(B)\}) = \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(B)\} =$$

$$h(a_h) \vee \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(B) \setminus \{a_h\}\} = 1 \vee \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(B) \setminus \{a_h\}\} = 1.$$

Sean $x, y \in B$, y distingamos los siguientes casos:

- $a_h \leq x$ y $a_h \leq y$.
  En este caso, $a_h \leq x \wedge y$, y por lo tanto, $h(x \wedge y) = 1 = 1 \wedge 1 = h(x) \wedge h(y)$.

- $a_h \leq x$ y $a_h \not\leq y$.
  a_h no precede a $x \wedge y$ pues en este caso $a_h \leq x \wedge y \leq y$, luego $h(x \wedge y) = 0$
  $1 \wedge 0 = h(x) \wedge h(y)$.

- $a_h \not\leq x$ y $a_h \leq y$.
  Este caso es igual al anterior.

- $a_h \not\leq x$ y $a_h \not\leq y$.
  Es claro que $a_h \not\leq x \wedge y$, y por lo tanto, $h(x \wedge y) = 0 = 0 \wedge 0 = h(x) \wedge h(y)$.

□

Lema 12.8 *Si B es un álgebra de Boole finita no trivial y h es un 1-hemimorfismo de B en $\mathbf{2}$, entonces existe un homomorfismo que lo precede.*

Dem. Como h es un 1-hemimorfismo de B en $\mathbf{2}$, existe un $a \in \mathcal{A}(B)$ tal que $h(a) = 1$. En efecto, si para todo $a \in \mathcal{A}(B), h(a) = 0$ entonces $h(1) = h(\bigvee\{a : a \in \mathcal{A}(B)\}) = \bigvee\{h(a) : a \in \mathcal{A}(B)\} = 0$. Absurdo.
Sea $a \in \mathcal{A}(B)$ tal que $h(a) = 1$ y definamos una función $y_a : B \to \mathbf{2}$ del siguiente modo:

$$y_a(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \{0\} \cup \mathcal{A}(B) \setminus \{a\}, \\ 1 \text{ si } x = a, \\ \bigvee\{y_a(b) : b \in \mathcal{A}(B), b \leq x\} \text{ si } x \in B \setminus (\mathcal{A}(B) \cup \{0\}). \end{cases}$$

Es claro que y_a es un homomorfismo. Veamos que $y_a \leq h$.
En efecto $y_a(0) = 0 \leq h(0), y_a(a) = 1 \leq h(a) = 1$, si $y_a(b) = 0 \leq h(b)$ cualquiera que sea $b \in \mathcal{A}(B) \setminus \{a\}$.
Si $p \in B \setminus \mathcal{A}(B)$ y $a \leq p$ entonces por definición $y_a(p) = 1$.
$h(p) = h(a) \vee \bigvee\{h(b) : b \in \mathcal{A}(B) \setminus \{a\}, b \leq p\} = 1 \vee \bigvee\{h(b) : b \in \mathcal{A}(B) \setminus \{a\}, b \leq p\} = 1$.
Si $p \in B \setminus \mathcal{A}(B)$ y $a \notin \{b \in \mathcal{A}(B) : b \leq p\}$, luego $y_a(p) = 0 \leq h(p)$. □

Lema 12.9 *Si B es un álgebra de Boole finita no trivial e $Y = Hom(B,\mathbf{2})$ el conjunto de todos los homomorfismos de B en $\mathbf{2}$, entonces B es isomorfa al álgebra de Boole $\mathbf{2}^Y$.*

Dem. Dado $p \in B$, pongamos por definición $\varphi(p) = P$, donde P es la función de Y en $\mathbf{2}$ definida del siguiente modo: $P(y) = y(p)$, cualquiera que sea $y \in Y, p \in B$ (p fijo). Probemos que φ es un isomorfismo de B en $\mathbf{2}^Y$.

1. $\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) \wedge \varphi(q)$.
   Sean $h = p \wedge q, \varphi(h) = H, \varphi(p) = P, \varphi(q) = Q$. Luego $H(y) = y(h) = y(p \wedge q) = y(p) \wedge y(q) = P(y) \wedge Q(y) = (P \wedge Q)(y)$. Es decir, $H = P \wedge Q$, como queríamos demostrar.

   Análogamente se prueba:

2. $\varphi(p \vee q) = \varphi(p) \vee \varphi(q)$.

   Representaremos con $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ las funciones de Y en $\mathbf{2}$ definidas del siguiente modo: $\mathbf{0}(y) = 0$, $\mathbf{1}(y) = 1$ cualquiera que sea $y \in Y$. Es fácil ver que:

3. $\varphi(0) = \mathbf{0}$, y

4. $\varphi(1) = \mathbf{1}$. Acabamos así de probar que φ es un homomorfismo.

5. φ es inyectiva. Sean $p, q \in B$, tales que $\varphi(p) = \varphi(q)$, esto es $P(y) = Q(y)$ cualquiera que sea $y \in Y$, luego $y(p) = y(q)$ cualquiera que sea $y \in Y$. Por lo tanto $y(p \vee -q) = 1 = y(q \vee -p)$ cualquiera qua sea $y \in Y$, y en consecuencia $p \vee -q, q \vee -p \in Nuc(y)$ cualquiera que sea $y \in Y$. Luego $p \vee -q = q \vee -p = 1$ de donde resulta $p = q$.

6. φ es sobreyectiva. Sea $Q \in \mathbf{2}^Y$. Por el Lema 12.7 sabemos que para cada $z \in Hom(B,\mathbf{2})$ existe un único $a_z \in \mathcal{A}(B)$ tal que $z(a_z) = 1$. Sean $U = Q^{-1}(1)$, y $p = \bigvee\{a_z : z \in U\} = \bigvee\{a_z : Q(z) = 1\}(*)$. Pongamos $\varphi(p) = P$ y probemos que $P = Q$, i.e. $P(w) = Q(w)$ cualquiera que sea $w \in Y = Hom(B,\mathbf{2})$.

   Si $w \notin U, Q(w) = 0$ y $P(w) \overset{def.}{=} w(p) \overset{(*)}{=} \bigvee\{w(a_z) : z \in U\}$. Como el único átomo a de B tal que $w(a) = 1$ es a_w, y $w \notin U$ entonces $w(a_z) = 0$, luego $P(w) = 0$.

   Si $w \in U$, entonces $Q(w) = 1, P(w) = w(p) = \bigvee\{w(a_z) : z \in U\} = w(a_w) \vee \bigvee\{w(a_z) : z \in U \setminus \{w\}\} = 1 \vee \bigvee\{w(a_z) : z \in U \setminus \{w\}\} = 1$.

□

Al conjunto $Y = Hom(B,\mathbf{2})$ se lo denomina espacio dual del álgebra de Boole B. De acuerdo con el Lema 12.9, podemos indicar un elemento de B mostrando cuánto vale cada homomorfismo del espacio dual en dicho elemento. Si X es el espacio dual de un álgebra de Boole A y f una función de Y en X, entonces se define la función dual de $f, f^* : A \to \mathbf{2}^Y \cong B$ como sigue :

$$f^*(p)(y) = \bigvee\{x(p) : f(y) = x\} \text{ para todo } y \in Y, p \in A, \tag{1}$$

y se prueba que f^* es un homomorfismo. También se prueba que f^* es epimorfismo si y sólo si f es inyectiva y que f^* es monomorfismo si y sólo si f es sobreyectiva. (Es interesante ver que esta definición coincide con la de Sikorski de homomorfismo inducido por una función puntual [29] en el caso en que se considera al conjunto $\mathcal{A}(B)$ como espacio dual, o espacio de representación del álgebra B.)

Lema 12.10 *Todo 1-hemimorfismo de un álgebra de Boole finita no trivial A en $\mathbf{2}$ es supremo de los homomorfismos que lo preceden.*

Dem. En vista del resultado del Lema 12.6, bastará con probar que para cada $a \in \mathcal{A}(A)$.

$$h(a) = \bigvee\{y(a) : y \in Hom(B,\mathbf{2}), y(x) \leq h(x) \text{ para todo } x \in A\}.$$

Supongamos que $h(a)$ es 1. Sea y_a el homomorfismo tal que a es el único átomo tal que $y_a(a) = 1$. Es claro que $y_a \leq h$,y por lo tanto $\bigvee\{y(a) : y \in Hom(B,\mathbf{2}), y \leq h\} = 1$.
Si $h(a) = 0$ entonces para todo $y \leq h, y(a) \leq h(a) = 0$, luego

$$\bigvee\{y(a) : y \in Hom(B,\mathbf{2}), y \leq h\} = 0.$$

□

12.2.2 Extensiones monádicas libres

Diremos que un álgebra de Boole monádica A es una *extensión monádica libre* (P. Halmos, [11]) de un álgebra de Boole B si:

(i) B es una subálgebra booleana de A,

(ii) A es la subálgebra monádica generada por B, i.e. $A = SM(B)$,

(iii) todo homomorfismo booleano g de B en un álgebra de Boole monádica arbitraria C se extiende a un homomorfismo monádico (necesariamente único) f de A en C.

A continuación daremos una construcción de la extensión monádica libre para el caso en que el álgebra B sea finita, siguiendo los pasos indicados en el trabajo de P. Halmos.
Supongamos que B es el álgebra de Boole con t átomos, lo que nos permitirá calcular el número de elementos de A.

- **Primer paso.** Sea $W = \mathbf{2}^B$, es decir el conjunto de funciones de B en $\mathbf{2}$. Es claro que el número de elementos en W es $2^{(2^t)}$.

- **Segundo paso.** Sea $Y = Hom(B,\mathbf{2})$, el conjunto de los homorfismos de B en $\mathbf{2}$, y consideremos el conjunto $Y \times W$; este conjunto tiene $t \cdot 2^{(2^t)}$ elementos.

- **Tercer paso.** Sea V el conjunto de los 1-hemimorfismos de B en $\mathbf{2}$. $h \in W$ será un 1-hemimorfismo si y sólo si h aplica alguno de los átomos de B en 1 (Ver Lema 12.8). Luego, V tiene $2t-1$ elementos, e $Y \times V, t \cdot (2t-1)$ elementos.

  Sea $X \subseteq Y \times V, X = \{(y,v) : y \in Y, v \in V, y \leq v\}$.
  De los Lemas 12.6, 12.7 y 12.8, se desprende que para cada homorfismo en Y, hay $2t-1$ hemimorfismos que lo dominan. En consecuencia, X tiene $t \cdot (2t-1)$ elementos.

- **Cuarto paso.** Sea A el álgebra de Boole de todas las funciones de X en $\mathbf{2}$, y definamos para todo $p \in A$,

$$(\exists p)(y,v) = \bigvee \{p(u,v) : u \in Y, u \leq v\} \tag{2}$$

Para ver que $(A, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica bastará probar las siguientes propiedades:

E0) $\exists 0 = 0$ resulta inmediato de la definición 2

E1) Para todo $p \in A, p \leq \exists p$.
Es claro que para todo par $(y,v) \in X$,

$$p(y,v) \leq \bigvee \{p(u,v) : u \leq v\} = (\exists p)(y,v).$$

E2) Para todo $p, q \in A$, vale que para cada par $(y,v) \in X$,

$$\exists(p \wedge \exists q)(y,v) = \bigvee_{u \leq v} (p \wedge \exists q)(u,v) = \bigvee_{u \leq v} [p(u,v) \wedge (\exists q)(u,v)] =$$

$$[\bigvee_{u \leq v} p(u,v)] \wedge [\bigvee_{u \leq v} (\exists q)(u,v)] = (\exists p)(y,v) \wedge [\bigvee_{u \leq v} (\bigvee_{w \leq v} q(w,v))] =$$

$$(\exists p)(y,v) \wedge (\bigvee_{w \leq v} q(w,v)) = (\exists p)(y,v) \wedge (\exists q)(y,v) = (\exists p \wedge \exists q)(y,v).$$

Luego $\exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q$ para todo $p, q \in \mathbf{2}^X$.

Lo que probaremos en realidad no es que el álgebra de Boole monádica A es la extensión monádica libre de B, sino de una subálgebra de A que es isomorfa a B.
Esta inmersión de B en A se hará de la siguiente manera: si consideramos a los elementos de X como el espacio dual de A, se ve que hay una proyección natural $c : X \mapsto Y$ definida por $c(y,v) = y$.
c es una función sobreyectiva: si $y \in Y$, es claro que el par (y,y) está en X y $c(y,y) = y$. Luego h, el homomorfismo dual de c, es un monomorfimo, de manera que B es isomorfa a $h(B)$.
Es claro que $h(B)$ es una subálgebra de A, y es en este sentido que se verifica (i).
De acuerdo a la definición indicada en (2),

$$(hp)(y,v) \;=\; \bigvee \{x(p) : c(y,v) = x\} = \bigvee \{y(p) : c(y,v) = y\} = y(p). \tag{3}$$

De (3) y el Lema 12.10, se obtiene:

$$(\exists hp)(y,v) = \bigvee_{u \leq v} (hp)(u,v) = \bigvee_{u \leq v} u(p) = v(p). \tag{4}$$

Veamos ahora que se verifica (ii), es decir, que $SM(h(B)) = A$. Por el Lema 6.15 sabemos que $SM(h(B)) = SB(m(h(B)) \cup \exists m(h(B)))$, luego como $h(B)$ es una subálgebra booleana y h un homomorfismo:

$$SM(h(B)) = SB(\mathcal{A}(h(B)) \cup \exists \mathcal{A}(h(B))) = SB(h(\mathcal{A}(B)) \cup \exists h(\mathcal{A}(B))).$$

Como A es un álgebra finita, bastará probar que sus átomos estan en $SM(h(B))$ para probar que $SM(h(B)) = A$. Los átomos de A son funciones de la forma:

$$f_{y,v}(u,w) = \begin{cases} 0 & \text{si } (u,w) \neq (y,v), \\ 1 & \text{si } (u,w) = (y,v). \end{cases} \qquad (y,v),(u,w) \in X.$$

Veamos que

$$f_{y,v} = ha_y \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 1} \exists ha_z \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 0} -\exists ha_z \Big), \tag{5}$$

con lo que quedará probado que $\mathcal{A}(A) \subseteq SB(h(\mathcal{A}(B) \cup h(\mathcal{A}(B)))$. Sea

$$\begin{aligned} q(u,w) &= ha_y \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 1} \exists ha_z \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 0} -\exists ha_z \Big) \\ &= ua_y \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 1} wa_z \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 0} -wa_z \Big) \text{ (por (3) y (4))}. \end{aligned}$$

Si $(u,w) = (y,v)$,

$$q(y,v) = ya_y \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 1} va_z \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 0} -va_z \Big) = 1.$$

Si $(u,w) \neq (y,v)$, entonces $u \neq y$ ó $w \neq v$. En el primer caso, es decir si $u \neq y$, entonces $ua_y = 0$ y

$$q(u,w) = ua_y \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 1} wa_z \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{va_z = 0} -wa_z \Big) = 0.$$

Si $w \neq v$, entonces (Lema 12.6) existe j tal que $wa_j \neq va_j$. Si, por ejemplo $va_j = 0$, entonces $wa_j = 1$ y $-wa_j = 0$, por lo tanto $\bigwedge_{va_z = 0} -wa_z = 0$ y $q(u,w) = 0$. Acabamos así de probar que $q = f_{y,v}$.

Sea ahora C un álgebra de Boole monádica arbitraria, y g un homomorfismo booleano de $h(B)$ en C. Si probamos que existe un homomorfismo monádico de A en C, habremos probado que A es la extensión monádica libre de $h(B)$.
Consideremos en C la subálgebra monádica generada por $g(h(B))$, esto es

$$S = SM(g(h(B))).$$

Como $S = SB(g(h(B)) \cup \exists g(h(B)))$, es claro que S es finita y podemos considerar su espacio dual $Z = Hom(S, \mathbf{2})$. Si probamos que g tiene por extensión a f, un homomorfismo monádico de A en S, como $S \subseteq C, f$ será un homomorfismo monádico de A en C. Construyamos para eso una función $r : Z \to Y$ de la siguiente manera: Sean $a : Z \to Y$ definida por

$$(az)p = zghp;$$

y $b : Z \to V$ definida por

$$(bz)p = z\exists ghp \text{ (donde el cuantificador corresponde al álgebra } C.)$$

Que az es un homomorfismo de B en $\mathbf{2}$ resulta inmediatamente de la forma en que está definido (es composición de homomorfismos). Análogamente, bz es un hemimorfismo de B en $\mathbf{2}$. (Notemos aquí que $\exists$ es un hemimorfismo de C en C). Sea $r(z) = (az, bz)$.

$(az, bz) \in X$ pues para todo $p \in B, ghp \leq \exists ghp$, y luego $zghp \leq z\exists ghp$, es decir $(az)p \leq (bz)p$.
Sea f el homomorfismo dual de la función r. Es decir, si $q \in A, fq \in S$ es el elemento tal que para todo $z \in Z$,

$$z(fq) = q(az, bz).$$

Para demostrar que se verifica (iii) queda por probar que f restringida a $h(B)$ es igual a g, y que f es un homomorfismo monádico.
En primer lugar, si $q \in h(B), q = h(p)$ para algún $p \in B$ y

$$zfq = q(az, bz) = h(p)(az, bz) \stackrel{3}{=} (az)(p) \stackrel{def}{=} zghp = zgq, \text{ para todo } z \in Z,$$

es decir que $fq = gq$.
Resta ahora ver que para todo $q \in A \exists fq = f\exists q$, i.e. para todo $q \in A, z \in Z, z\exists fq = zf\exists q$.
Si $q = h(p)$ para algún $p \in B$,

$$\begin{aligned} zf\exists q &= zf\exists hp = (\exists hp)(az, bz) = (bz)p = z\exists ghp = \\ &= z\exists fhp = z\exists fq. \end{aligned}$$

Si $q \in \mathcal{A}(A)$, entonces para algún $(y, v) \in X$,

$$q = ha_y \wedge (\bigwedge_{va_w = 1} \exists ha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w = 0} -\exists ha_w).$$

Luego

$$\begin{aligned} zf\exists q &= (\exists q)(az, bz) = \\ &= \exists[ha_y \wedge (\bigwedge_{va_w = 1} \exists ha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w = 0} -\exists ha_w)](az, bz) = \\ &= [\exists ha_y \wedge (\bigwedge_{va_w = 1} \exists ha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w = 0} -\exists ha_w)](az, bz) = \\ &= (\exists ha_y)(az, bz) \wedge [\bigwedge_{va_w = 1} (\exists ha_w)(az, bz)] \wedge [\bigwedge_{va_w = 0} -(\exists ha_w)(az, bz)] = \\ &= (bz)a_y \wedge [\bigwedge_{va_w = 1} (bz)a_w] \wedge [\bigwedge_{va_w = 0} -(bz)a_w] = \\ &= z\exists gha_y \wedge [\bigwedge_{va_w = 1} z\exists gha_w] \wedge [\bigwedge_{va_w = 0} -z\exists gha_w)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z\exists[fha_y \wedge (\bigwedge_{va_w=1} \exists fha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w=0} -\exists fha_w)] = \\
&= z\exists[fha_y \wedge (\bigwedge_{va_w=1} f\exists haw) \wedge (\bigwedge_{va_w=0} -f\exists ha_w)] = \\
&= z\exists f[ha_y \wedge (\bigwedge_{va_w=1} \exists ha_w) \wedge (\bigwedge_{va_w=0} -\exists ha_w)] = \\
&= z\exists fq.
\end{aligned}$$

Como todo elemento en A es supremo de elementos en $\mathcal{A}(A)$ (A es finita), y $\exists$ es un hemimorfismo, podemos concluir que para todo $p \in A$, $f\exists p = \exists fp$.

12.2.3 El álgebra de Boole monádica con n generadores libres

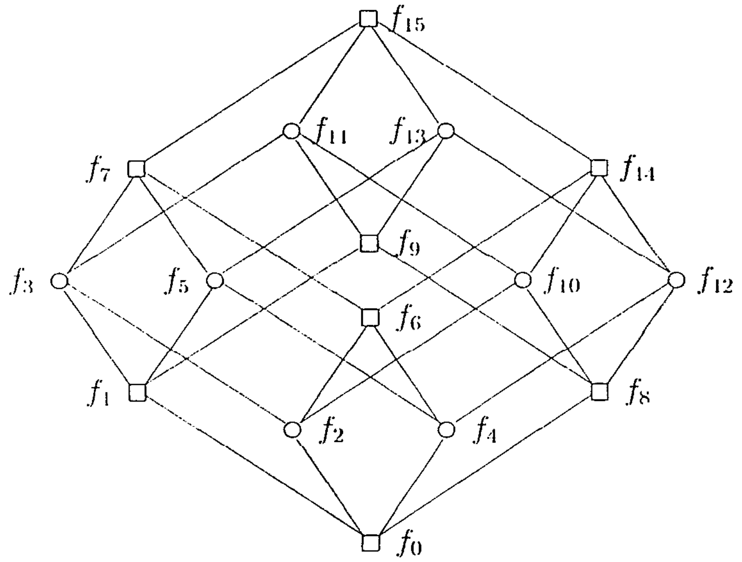
Si G es un conjunto finito arbitrario, los resultados precedentes pueden ser aplicados al álgebra de Boole libre generada por G. Una aplicación arbitraria de G en un álgebra de Boole monádica C tiene una extensión (necesariamente única) a un homomorfismo booleano g que aplica B en C. El homomorfismo booleano g tiene, a su vez una extensión monádica (única) f que aplica A en C. De esto se concluye que la extensión monádica libre de un álgebra de Boole libre es un álgebra de Boole monádica libre.
Es bien sabido que el álgebra de Boole con n generadores libres es aquella que tiene 2^n átomos. Entonces, de acuerdo a lo dicho en la segunda parte, el álgebra monádica libre con n generadores tendrá $2^n \cdot 2^{(2^n-1)}$ átomos, y por lo tanto, $2^{|2^n \cdot 2^{(2^n-1)}|}$ elementos.
Este álgebra libre es única (a menos de isomorfismos). Conocemos ya la unicidad del álgebra de Boole libre B. Si A_1 y A_2 son extensiones monádicas libres de B y g_1, g_2 las inyecciones naturales de B en A_1 y A_2 respectivamente, entonces existen homomorfismos monádicos $f_1 : A_2 \to A_1$ y $f_2 : A_1 \to A_2$ que extienden a g_1 y g_2. Como $f_1 \circ f_2$ es un endomorfismo monádico de A_1 que coincide con la identidad en B, debe ser igual a la identidad sobre todo A_1 y, similarmente, $f_2 \circ f_1$ debe ser la identidad sobre A_2. Luego, f_1 es un isomorfismo de A_2 sobre A_1, con inversa f_2.
Tomemos como ejemplo el caso en que $n = 1$. Si $G = \{g\}$, sabemos que el álgebra de Boole libre generada por G tiene como átomos a g y $-g$; $B = \{0, g, -g, 1\}$.

	0	g	$-g$	1
h_1	0	1	0	1
h_2	0	0	1	1
h_3	0	1	1	1

Los homomorfismos de B en $\mathbf{2}$ son las funciones h_1, h_2 indicadas en la tabla anterior. Los 1-hemimorfismos son h_1, h_2, h_3; $X = \{(h_1, h_1), (h_1, h_3), (h_2, h_2), (h_2, h_3)\}$.

	(h_1, h_1)	(h_1, h_3)	(h_2, h_2)	(h_2, h_3)
f_0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1
f_2	0	0	1	0
f_3	0	0	1	1
f_4	0	1	0	0
f_5	0	1	0	1
f_6	0	1	1	0
f_7	0	1	1	1
f_8	1	0	0	0
f_9	1	0	0	1
f_{10}	1	0	1	0
f_{11}	1	0	1	1
f_{12}	1	1	0	0
f_{13}	1	1	0	1
f_{14}	1	1	1	0
f_{15}	1	1	1	1

La tabla anterior muestra los elementos del álgebra $\mathbf{2}^X$; usando la fórmula (2) indicada en el Párrafo 13.1, podemos calcular $\exists f_i, 0 \leq i \leq 15$.



Ya sabemos que $(A, \exists)$ es el álgebra de Boole monádica con un generador libre. ¿Cuál es ese generador? Para saberlo bastará con ver cuál es $h(g)$ ya que h es la inmersión de B en A y g el generador libre de B.

$$h(g)(h_1, h_1) = h_1 g = 1,$$
$$h(g)(h_1, h_3) = h_1 g = 1,$$
$$h(g)(h_2, h_2) = h_2 g = 0,$$
$$h(g)(h_2, h_3) = h_2 g = 0.$$

Luego, $h(g) = f_{12}$.

Digamos que si $f : Y \times V \to \mathbf{2}$ es tal que $f(y,v) = f(y,v')$, cualesquiera que sean y, v, v', entonces la función f es *independiente* de V. Análogamente, si $f(y,v) = f(y',v)$ cualesquiera que sean y, y', v, f se dirá *independiente* de Y.

Observando (3), resulta claro que las funciones en $h(B)$ son independientes de V. Recíprocamente, si $q \in A$ y q es independiente de V, q puede considerarse como la restricción de una función $r : Y \times V \to \mathbf{2}$ independiente de V. Por el Lema 12.9, existe $p \in B$ tal que $r(y,v) = yp$ para todo par (y,v), y por lo tanto $q = h(p)$. Así hemos demostrado que $h(B)$ consiste exactamente en aquellas funciones en A que son independientes de V.
En forma similar se ve, a partir de (4) que las funciones en $\exists h(B)$ son independientes de Y, y se puede probar además que todas las constantes en A son independientes de Y. Como V tiene (2^{2^n-1}) elementos, la subálgebra booleana de las constantes de A tiene $2^{(2^{2^n-1})}$ elementos.

12.3 Algebras de Boole monádicas libres III

12.3.1 Introducción

Vamos a reproducir los resultados obtenidos por L. Monteiro, M. Abad, S. Savini y J. Sewald, ([2] y [27]).
Los mismos están inspirados en un trabajo de H. Bass [4], pero se diferencian del mismo, en notaciones y demostraciones más acordes con la teoría del álgebra universal. Además se indican otros resultados, se generalizan algunos de los indicados por Bass, y esencialmente la construcción de las álgebras de Boole monádicas con un número finito de generadores libres es a nuestro entender mucho más sencilla que la indicada por Bass. Si designamos con $FB(2^n-1)$ el álgebra de Boole con 2^n-1 generadores libres y con $\mathbf{P}(2^n)$ el producto cartesiano de 2^n álgebras de Boole iguales a $FB(2^n-1)$ entonces $\mathbf{P}(2^n)$ es un álgebra de Boole. Sobre $\mathbf{P}(2^n)$ se define un cuantificador existencial $\exists$ vía una subálgebra de Boole de $\mathbf{P}(2^n)$ relativamente completa. Se prueba que $(\mathbf{P}(2^n), \exists)$ es el álgebra de Boole monádica con n generadores libres. Cada elemento de $\mathbf{P}(2^n)$ es una 2^n-upla cuyas coordenadas son elementos de $FB(2^n-1)$, en particular los n generadores de $\mathbf{P}(2^n)$ son 2^n-uplas cuyas coordenadas son elementos de $FB(2^n-1)$. En este trabajo indicamos las coordenadas de cada uno de los n generadores de $\mathbf{P}(2^n)$. En ninguno de los trabajos citados anteriormente se indican las coordenadas de los generadores del álgebra de Boole monádica con n generadores libres.

Observación 12.1 *Por conveniencia consideremos numerados los elementos de* $\mathrm{B}(B,t)$ *y esta numeración fija,* $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(2^t)}$. *Entonces poniendo* $h_i = m_{b^{(i)}}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^t$ *y* $h_i = \exists m_{b^{(i)}}$, $i = 2^t+1, 2^t+2, \ldots, 2^{t+1}$ *tenemos que:*

$$m(G) \cup \exists m(G) = \{h_1, h_2, \ldots, h_{2^t}, h_{2^t+1}, \ldots, h_{2^{t+1}}\}.$$

Entonces los posibles átomos de $SM(G)$ *son (ver Lema 6.12) los elementos:*

$$m_c = \bigwedge_{i=1}^{2^{t+1}} (h_i + c_i), \quad donde\ c \in \bigcup_{k=1}^{2^{t+1}} \mathrm{B}(B, 2^{t+1}, k, k+2^t).$$

Esto es, son los elementos de la forma:

$$m_{b(i)} \wedge \bigwedge_{j=2^t+1}^{2^{t+1}} (\exists m_{b(j-2^t)} + c_j), \ 1 \le i \le 2^t,$$

donde $m_{b(i)} \neq 0$ *y* $c_{2^t+i} = 0$.

Sea $t \in \mathbf{N}$, $t \geq 2$, y $FB(t-1)$ el álgebra de Boole con $t-1$ generadores libres, luego $FB(t-1)$ tiene 2^{t-1} átomos. Sea $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}$ un conjunto de generadores libres de $FB(t-1)$ y $\mathbf{P}(t)$ el siguiente producto cartesiano de t álgebras de Boole:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{P}(t) = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_t \ , \\ \\ \text{donde } \ E_i = FB(t-1), \ 1 \le i \le t. \end{array}}$$

Como los átomos de $\mathbf{P}(t)$ son las t-uplas tales que una de sus coordenadas es un átomo de $FB(t-1)$ y las restantes son todas iguales a cero, tenemos así que $\mathbf{P}(t)$ es un álgebra de Boole con $t \times 2^{t-1}$ átomos y por lo tanto:

$$N[\mathbf{P}(t)] = 2^{(t \times 2^{t-1})}.$$

Si $\mathbf{x} \in \mathbf{P}(t)$, notaremos $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_t)$, donde $\mathbf{x}_i \in FB(t-1)$, $1 \le i \le t$. Representemos con $\mathbf{0}$ (respectivamente $\mathbf{1}$) el primer (último) elemento de $\mathbf{P}(t)$, esto es $\mathbf{0}$ (respectivamente $\mathbf{1}$) es la t-upla cuyas coordenadas son todas iguales a $0 \in FB(t-1)$ (respectivamente $1 \in FB(t-1)$).

Sean $\mathbf{v}^{(i)} = (\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)}, \ldots, \mathbf{v}_t^{(i)})$, $1 \le i \le t$, los elementos de $\mathbf{P}(t)$ definidos del siguiente modo:

$$\mathbf{v}_h^{(i)} = \begin{cases} 1 & si \ \ h = i \\ \\ 0 & si \ \ h \neq i \end{cases} \quad , \qquad 1 \le h \le t \ ,$$

y sea $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}^{(i)} : 1 \le i \le t\}$.

Como $1 \in FB(t-1)$ es supremo de 2^{t-1} átomos de $FB(t-1)$, entonces cada $\mathbf{v}^{(i)}$ es supremo de 2^{t-1} átomos de $\mathbf{P}(t)$.

Consideremos ahora los siguientes elementos de $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{w}^{(i)} = (\mathbf{w}_1^{(i)}, \mathbf{w}_2^{(i)}, \ldots, \mathbf{w}_t^{(i)}), \ \ 1 \le i \le t$$

definidos del siguiente modo:

$$\mathbf{w}_h^{(i)} = \begin{cases} g_{t-(i-h)} & si \ \ h < i \\ 1 & si \ \ h = i \\ g_{h-i} & si \ \ i < h \end{cases} \quad , \qquad 1 \le h \le t \ .$$

Observación 12.2 *Si* $h < i$ *entonces* $1 \leq i - h$, *y por lo tanto* $t - (i - h) \leq t - 1$. *De* $1 \leq i \leq t$ *y* $1 \leq h \leq t$ *resulta que* $i - h \leq t - h \leq t - 1$ *luego* $1 \leq t - (i - h)$, *y por lo tanto* $1 \leq t - (i - h) \leq t - 1$.
Si $i < h$ *entonces* $1 \leq h - i$. *Como* $1 \leq h \leq t$, *entonces* $h - i \leq t - i$, *luego como* $1 \leq i \leq t$ *tenemos* $t - i \leq t - 1$, *y por lo tanto* $1 \leq h - i \leq t - 1$.

Lema 12.11 *a) Si* i *es un elemento fijo,* $1 \leq i \leq t$, *entonces:*

$$\{\mathbf{w}_h^{(i)} : 1 \leq h \leq t\} = \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}.$$

b) Si h *es una coordenada fija,* $1 \leq h \leq t$, *entonces:*

$$\{\mathbf{w}_h^{(i)} : 1 \leq i \leq t\} = \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}.$$

Dem.

a) De la definición de $\mathbf{w}_h^{(i)}$ y la observación 12.2:

$$\mathbf{w}_h^{(i)} \in \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\} = X, \quad \text{para } 1 \leq h \leq t.$$

Sea $x \in X$. Si $x = 1$ entonces $1 = \mathbf{w}_i^{(i)}$. Supongamos que $x = g_j$, $1 \leq j \leq t - 1$.

a1) Si $i = t$, entonces $j < i = t$ y de acuerdo con la definición $\mathbf{w}_j^{(t)} = g_{t-(t-j)} = g_j$.

a2) Si $1 \leq i < t$. Sea $r = t - i$, luego $r > 0$.

a21) Si $j \leq r = t - i$, entonces $1 \leq i < j + i = h \leq t$, esto es, $i < h$ y por lo tanto $\mathbf{w}_h^{(i)} = g_j$.

a22) Si $j > r = t - i$ entonces $h = j + i - t \geq 1$. Por otro lado $2 \leq j + i \leq 2t$ y por lo tanto $h = j + i - t \leq t$. Como $j \leq t - 1 < t$ entonces $j - t < 0$, por lo tanto $h = j + i - t < i$, luego $\mathbf{w}_h^{(i)} = g_j$.

b) Por lo visto en la observación 12.2:

$$\mathbf{w}_h^{(i)} \in \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\} = X, \quad \text{para } 1 \leq i \leq t.$$

Sea $x \in X$. Si $x = 1$, entonces $\mathbf{w}_h^{(h)} = 1$. Supongamos ahora que $x = g_j$, $1 \leq j \leq t - 1$.

b1) Si $j = h$, como $h \leq t - 1 \leq t$ entonces $\mathbf{w}_h^{(t)} = g_j$.

b2) Si $j < h$, entonces $1 \leq h - j \leq h \leq t$ y por lo tanto $\mathbf{w}_h^{(h-j)} = g_j$.

b3) Si $h < j$, sea $i = t + h - j$. Como $1 \leq j \leq t - 1 < t$ entonces $t - j > 0$ y por lo tanto $h < i = t + h - j$. De $h < j$ resulta $h - j < 0$ y en consecuencia

$i = t + h - j < t$. Tenemos así que $\mathbf{w}_h^{(i)} = g_j$.

$\square$

Vimos en el párrrafo 5, que:

1) Una subálgebra S de un álgebra de Boole B se denomina *relativamente completa* si para todo $p \in B$ el conjunto $\{s \in S : p \leq s\}$ tiene un ínfimo en S.

2) Si $K(B) = \{x \in B : \exists x = x\} = \{x \in B : \forall x = x\}$, entonces $K = \exists B$ es una subálgebra booleana de B que es relativamente completa, esto es, si $x \in B$, $\{k \in K(B) : x \leq k\}$ tiene un ínfimo en $K(B)$; y además $\exists x = \bigwedge\{k \in K(B) : x \leq k\}$.

3) Si S es una subálgebra relativamente completa de un álgebra de Boole B entonces existe un único cuantificador existencial $\exists$ en B, denominado *cuantificador existencial inducido por* S, tal que $\exists B = S$. El mismo se define del siguiente modo: *Si* $x \in B$, $\exists x = \bigwedge\{s \in S : x \leq s\}$.

Sea $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}^{(i)} : 1 \leq i \leq t\}$ y $\mathbf{K} = SB(\mathbf{W})$ la subálgebra booleana de $\mathbf{P}(t)$ generada por $\mathbf{W}$.
Como $\mathbf{K}$ es finita, es relativamente completa, y por lo tanto induce un cuantificador existencial $\exists$ sobre $\mathbf{P}(t)$ tal que $\exists\mathbf{P}(t) = \mathbf{K}$.

De acuerdo con la notación introducida previamente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t) = \{\mathbf{b} = (\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}^{(t)}) : \mathbf{b}^{(h)} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \subseteq \mathbf{P}(t),\ 1 \leq h \leq t\}.$$

Como $\mathbf{b}^{(h)} \in \mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{b}^{(h)} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ entonces cada $\mathbf{b}^{(h)}$ es a su vez una t-upla $(\mathbf{b}_1^{(h)}, \mathbf{b}_2^{(h)}, \ldots, \mathbf{b}_t^{(h)})$ cuyas coordenadas son todas iguales al primer elemento de $FB(t-1)$ o al último elemento de $FB(t-1)$.
Representemos con $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Gamma}$ al primer y último elemento del álgebra de Boole $\mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t)$.

Lema 12.12 $N[\mathcal{A}(SB(\mathbf{W}))] = 2^t - 1$.

Dem. De acuerdo con el Lema 6.9,

$$\mathcal{A}(SB(\mathbf{W})) = \{m_{\mathbf{b}} : m_{\mathbf{b}} \in m(\mathbf{W}),\ m_{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}\}.$$

Como $N[\mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t)] = 2^t$, si probamos que existe un único elemento $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t)$ tal que $m_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$, el lema quedará probado. Si $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t)$ es tal que $\mathbf{b}^{(h)} = \mathbf{1}$, para todo h, $1 \leq h \leq t$, entonces:

$m_{\mathbf{b}} = \bigwedge\limits_{i=1}^{t}(\mathbf{w}^{(i)} + \mathbf{b}^{(i)}) = \bigwedge\limits_{i=1}^{t} -\mathbf{w}^{(i)} = (\bigwedge\limits_{i=1}^{t} -\mathbf{w}_1^{(i)}, \bigwedge\limits_{i=1}^{t} -\mathbf{w}_2^{(i)}, \ldots, \bigwedge\limits_{i=1}^{t} -\mathbf{w}_t^{(i)})$, y como $-\mathbf{w}_i^{(i)} = 0$, $1 \leq i \leq t$, tenemos que $m_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$.

Si $\mathbf{b} = (\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}^{(t)}) \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t) - \{\mathbf{\Gamma}\}$, entonces existe h, $1 \leq h \leq t$, tal que $\mathbf{b}^{(h)} = \mathbf{0}$, y por lo tanto $\mathbf{b}_j^{(h)} = 0$ para todo j, $1 \leq j \leq t$. Probemos que la coordenada h-ésima de $m_{\mathbf{b}}$ es diferente de $0 \in FB(t-1)$, de donde resultará que $m_{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}$.

Como $m_{\mathbf{b}} = \bigwedge\limits_{i=1}^{t}(\mathbf{w}^{(i)} + \mathbf{b}^{(i)}) = (\bigwedge\limits_{i=1}^{t}(\mathbf{w}_1^{(i)} + \mathbf{b}_1^{(i)}), \bigwedge\limits_{i=1}^{t}(\mathbf{w}_2^{(i)} + \mathbf{b}_2^{(i)}), \ldots, \bigwedge\limits_{i=1}^{t}(\mathbf{w}_t^{(i)} + \mathbf{b}_t^{(i)}))$, entonces la coordenada h-ésima, de $m_{\mathbf{b}}$ es $(m_{\mathbf{b}})_h = \bigwedge\limits_{i=1}^{t}(\mathbf{w}_h^{(i)} + \mathbf{b}_h^{(i)})$. Como $\mathbf{b}_j^{(h)} = 0 \in FB(t-1)$, para todo j, $1 \leq j \leq t$, y $\mathbf{w}_h^{(h)} = 1$, entonces $\mathbf{w}_h^{(h)} + \mathbf{b}_h^{(h)} = 1 + 0 = 1$ y por lo tanto $(m_{\mathbf{b}})_h = \bigwedge\{\mathbf{w}_h^{(i)} + \mathbf{b}_h^{(i)} : 1 \leq i \leq t,\ i \neq h\}$. Por el Lema 12.11, b) $\{\mathbf{w}_h^{(i)} : 1 \leq i \leq t,\ i \neq h\} = \{g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}$, y como los elementos $\mathbf{b}_h^{(i)} \in \{0, 1\} \subseteq FB(t-1)$, $1 \leq i \leq t$, $i \neq h$, entonces $(m_{\mathbf{b}})_h \in m(G)$. Luego como $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}$ es un conjunto de generadores libres de $FB(t-1)$, entonces por lo visto en la Observación 6.1 todos los elementos de $m(G)$ son diferentes de $0 \in FB(t-1)$, y por lo tanto $m_{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}$. □

Observación 12.3 *Vamos a precisar algo más sobre el resultado anterior. Sea* $T = \{1, 2, \ldots, t\}$ *y* $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t)$. *Pongamos* $T_0(\mathbf{b}) = \{h \in T : \mathbf{b}^{(h)} = 0\}$ *y* $T_1(\mathbf{b}) = T - T_0(\mathbf{b})$, *luego si* $N[T_0(\mathbf{b})] = k$, *entonces* $N[T_1(\mathbf{b})] = t - k$.
Observemos que $T_0(\mathbf{b}) = \emptyset$, *equivale a* $\mathbf{b} = \mathbf{\Gamma}$, *y entonces por lo visto precedentemente* $m_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$. *Supongamos que* $T_0(\mathbf{b}) \neq \emptyset$. *Si* $T_0(\mathbf{b}) = T$, *esto es* $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi}$ *entonces* $m_{\mathbf{\Phi}} = \bigwedge_{i=1}^{t} \mathbf{w}^{(i)}$, *y por lo tanto* $(m_{\mathbf{\Phi}})_j = \bigwedge_{i=1}^{t} \mathbf{w}_j^{(i)}$, $1 \leq j \leq t$.
Por el Lema 12.11 : $\{\mathbf{w}_h^{(i)} : 1 \leq i \leq t\} = \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{t-1}\}$, *y como* $\mathbf{w}_j^{(j)} = 1$ *tenemos que* $(m_{\mathbf{\Phi}})_j = \bigwedge_{i=1}^{t-1} g_i$, *cualquiera que sea* j, $1 \leq j \leq t$.
Por lo tanto todas las coordenadas de $m_{\mathbf{\Phi}}$ *son iguales a un mismo átomo de* $FB(t-1)$.
Supongamos ahora que $T_0(\mathbf{b}) \neq \emptyset$, $T_1(\mathbf{b}) \neq \emptyset$, *y* $N[T_0(\mathbf{b})] = k$. *Luego* $N[T_1(\mathbf{b})] = t - k$, *y* $m_{\mathbf{b}} = \bigwedge\{\mathbf{w}^{(h)} : h \in T_0(\mathbf{b})\} \wedge \bigwedge\{-\mathbf{w}^{(h)} : h \in T_1(\mathbf{b})\}$ *y por lo tanto* $(m_{\mathbf{b}})_j = \bigwedge\{\mathbf{w}_j^{(h)} : h \in T_0(\mathbf{b})\} \wedge \bigwedge\{-\mathbf{w}_j^{(h)} : h \in T_1(\mathbf{b})\}$, $1 \leq j \leq t$.
Como $h \in T_1(\mathbf{b})$ *equivale a* $\mathbf{b}^{(h)} = \mathbf{1}$ *y* $\mathbf{w}_h^{(h)} = 1$, *entonces para todo* $j \in T_1(\mathbf{b})$ *se tiene que* $-\mathbf{w}_j^{(j)} = 0$ *y por lo tanto* $m_{\mathbf{b}}$ *tiene* $t - k$ *coordenadas iguales a* $0 \in FB(t-1)$ *y si* $j \in T_0(\mathbf{b})$ *entonces* $(m_{\mathbf{b}})_j \in \mathcal{A}(FB(t-1))$, *como vimos en el Lema 12.12.*

Es claro que si $1 \leq k \leq t$ *existen* $\binom{t}{k} = \dfrac{t!}{k!(t-k)!}$ *elementos* $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t)$ *tales que* $N[T_0(\mathbf{b})] = k$, *y como los átomos de* $\mathbf{P}(t)$ *son las* t*-uplas tales que una de sus coordenadas es un átomo de* $FB(t-1)$ *y las restantes son todas iguales al elemento* $0 \in FB(t-1)$, *entonces es claro que cada* $m_{\mathbf{b}}$, *donde* $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t) - \{\mathbf{\Gamma}\}$ *y* $N[T_0(\mathbf{b})] = k$, *es supremo de* k *átomos de* $\mathbf{P}(t)$.

El resultado indicado por H. Bass [4], *en la página 267, es un caso particular cuando* $t = 2^n$, $n \in \mathbf{N}$, *de lo explicado precedentemente. También lo es el resultado indicado por* M. Abad y L. Monteiro [1], *en la página 532, con el número 3.5.*

Lema 12.13 *Si* B *es un álgebra de Boole monádica, tal que* $K(B) = \exists B$ *es un álgebra de Boole finita y* $x \in B$, $x \neq 0$ *entonces:*
$\exists x = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(K(B)) : a \wedge x \neq 0\}$. [4], [14].

Dem. Como $K(B)$ es un álgebra de Boole finita y $\exists x \neq 0$ entonces $\exists x = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(K(B)) : a \leq \exists x\}$.
Sean $X_1 = \{a \in \mathcal{A}(K(B)) : a \wedge x \neq 0\}$ y $X_2 = \{a \in \mathcal{A}(K(B)) : a \leq \exists x\}$, entonces para probar el Lema nos basta demostrar que $X_1 = X_2$.
Sea $a \in X_1$, luego (1) $a \in \mathcal{A}(K(B))$ y (2) $a \wedge x \neq 0$. De (1) resulta $\exists a = a$. Como $a, \exists x \in K(B)$ entonces $b = a \wedge \exists x \in K(B)$. Como $b \leq a$, $b \in K(B)$ y a es un átomo de $K(B)$ entonces (3) $b = 0$ ó (4) $b = a$. Si ocurre (3) entonces $a \wedge x \leq a \wedge \exists x = b = 0$ y por lo tanto $a \wedge x = 0$, lo que contradice (2). Luego $b = a \wedge \exists x = a$, esto es, $a \leq \exists x$ y por lo tanto $a \in X_2$.

Sea $a \in X_2$, luego (1) $a \in \mathcal{A}(K(B)) \subseteq K(B)$ y (2) $a \leq \exists x$. De (1) resulta (3) $\exists a = a$.

De (2) resulta que $a = a \wedge \exists x$ y por lo tanto $\exists a = \exists(a \wedge \exists x) = \exists a \wedge \exists x = \exists(\exists a \wedge x)$. De donde resulta por (3) que $0 \neq a = \exists(a \wedge x)$, y por lo tanto $a \wedge x \neq 0$, esto es $a \in X_1$. □

Lema 12.14 $\exists \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{w}^{(i)}$, $1 \leq i \leq t$.

Dem. Sabemos que $\mathbf{v}^{(i)} \leq \mathbf{w}^{(i)}$, $\mathbf{w}^{(i)} \in \mathbf{W} \subseteq SB(\mathbf{W}) = \mathbf{K}$, $1 \leq i \leq t$ y que $\exists \mathbf{v}^{(i)} = \bigwedge\{k \in \mathbf{K} : \mathbf{v}^{(i)} \leq k\}$, $1 \leq i \leq t$. Luego $\exists \mathbf{v}^{(i)} \leq \mathbf{w}^{(i)}$, $1 \leq i \leq t$.
Como $\exists \mathbf{P}(t) = \mathbf{K}$, entonces por el Lema 12.13 podemos escribir $\exists \mathbf{v}^{(i)} = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(\mathbf{K}) : a \wedge \mathbf{v}^{(i)} \neq 0\}$, y por el Lema 12.12 $\mathcal{A}(\mathbf{K}) = \{m_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t) - \{\mathbf{\Gamma}\}\}$.
Sea $m_{\mathbf{b}} \in m(\mathbf{W})$ tal que $\mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t) - \{\mathbf{\Gamma}\}$ y por lo tanto $m_{\mathbf{b}} \in \mathcal{A}(\mathbf{K})$. Probemos que $m_{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{v}^{(i)} \neq \mathbf{0}$. Vimos que $m_{\mathbf{b}} = (\bigwedge\{\mathbf{w}^{(j)} : j \in T_0(b)\}) \wedge (\bigwedge\{-\mathbf{w}^{(j)} : j \in T_1(b)\})$ y como $\mathbf{v}_i^{(i)} = 1$ y $\mathbf{v}_h^{(i)} = 0$ cualquiera sea $h \neq i$, $1 \leq h \leq t$, entonces la componente i-ésima de $m_{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{v}^{(i)}$ es $(\bigwedge\{\mathbf{w}_i^{(j)} : j \in T_0(b) - \{i\}\}) \wedge (\bigwedge\{-\mathbf{w}_i^{(j)} : j \in T_1(b)\}) \wedge 1 = a \wedge 1 = a$, donde $a \in \mathcal{A}(FB(t-1))$, pues por hipótesis $i \in T_0(b)$. Luego $m_{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{v}^{(i)} \neq 0$.
Como por el Lema 6.8, (4):

$$\mathbf{w}^{(i)} = \bigvee\{m_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(t), t),\ \mathbf{b}^{(i)} = \mathbf{0}\},$$

resulta entonces $\mathbf{w}^{(i)} \leq \bigvee\{a \in \mathcal{A}(\mathbf{K}) : a \wedge \mathbf{v}^{(i)} \neq \mathbf{0}\} = \exists \mathbf{v}^{(i)}$. □
Este Lema generaliza los resultados de H. Bass [4] indicados en la página 266 de su trabajo (Lema 5).

12.3.2 Construcción del álgebra con n generadores libres

Sea $n \in \mathbf{N}$, $t = 2^n$ y

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{P}(2^n) = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{2^n}\ , \\[2ex] \text{donde } E_i = FB(2^n - 1),\ 1 \leq i \leq 2^n. \end{array}}$$

Luego por lo visto anteriormente:

$$N[\mathcal{A}(\mathbf{P}(2^n))] = 2^n \times 2^{2^n - 1}.$$

Consideremos los subconjuntos $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ de $\mathbf{P}(2^n)$ definidos como en el párrafo anterior.
Sea $H = \{1, 2, \ldots, 2^n\}$, luego si $h \in H$ entonces:

$$h = 1 + \sum_{r=1}^{n} h_r 2^{r-1}, \quad \text{donde } h_r \in \{0, 1\} \subseteq \mathbf{Z}.$$

Sean $\mathbf{g}^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, los elementos de $\mathbf{P}(2^n)$ definidos del siguiente modo:

$$\mathbf{g}_h^{(i)} = \begin{cases} 0 \in FB(2^n - 1), & si\ h_i = 0 \in \mathbf{Z}, \\ \\ 1 \in FB(2^n - 1), & si\ h_i = 1 \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad , \quad 1 \leq h \leq 2^n,$$

y $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}^{(i)} : 1 \leq i \leq n\}$.

Observemos que de acuerdo a la definición anterior:

$$1 + \sum_{r=1}^{n} g_h^{(r)} 2^{r-1} = 1 + \sum_{r=1}^{n} h_r 2^{r-1} = h$$

Lema 12.15 *El álgebra de Boole $SB(\mathbf{G})$, tiene 2^n átomos, por lo tanto es isomorfa al álgebra de Boole con n generadores libres.*

Dem. Dado que $SB(\mathbf{G}) = \mathrm{s}(m(\mathbf{G}))$, nos basta probar que: $m(\mathbf{G}) = \mathbf{V}$.

Sea $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), n)$ y $T = \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Si $\mathbf{b} = \mathbf{\Phi}$ entonces $m_{\mathbf{\Phi}} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)}$. Como $(m_{\mathbf{\Phi}})_{2^n} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{g}_{2^n}^{(i)} = 1$, y si $h \in H - \{2^n\}$ entonces existe un índice i, $1 \leq i \leq n$, tal que $\mathbf{g}_h^{(i)} = 0$ luego $(m_{\mathbf{\Phi}})_h = 0$, para todo $h \neq 2^n$, luego $m_{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{v}^{(2^n)}$.

b) Si $\mathbf{b} = \mathbf{\Gamma}$ entonces $m_{\mathbf{\Gamma}} = \bigwedge_{i=1}^{n} -\mathbf{g}^{(i)}$, y como $\mathbf{g}_1^{(i)} = 0$, cualquiera que sea i, $1 \leq i \leq n$, entonces $(m_{\mathbf{\Gamma}})_1 = 1$. Si $h \in H - \{1\}$ entonces existe un índice i, $1 \leq i \leq n$ tal que $\mathbf{g}_h^{(i)} = 1$ luego $(m_{\mathbf{\Gamma}})_h = 0$, para todo $h \neq 1$, luego $m_{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{v}^{(1)}$.

c) Si $\mathbf{b} \notin \{\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}\}$, entonces existen $t', t^* \in H$, $t' \neq t^*$, tales que $\mathbf{b}^{(t')} = 0$, $\mathbf{b}^{(t^*)} = 1$. Sean $T_0(\mathbf{b}) = \{t \in T : \mathbf{b}^{(t)} = 0\}$ y $T_1(\mathbf{b}) = \{t \in T : \mathbf{b}^{(t)} = 1\}$, luego $t' \in T_0(\mathbf{b})$, $t^* \in T_1(\mathbf{b})$.
Sea $h = 1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{b})} 2^{j-1}$, luego $h \in H$ y $h = 1 + \sum_{r=1}^{n} h_r 2^{r-1}$, donde $h_r = 1$ si $r \in T_0(\mathbf{b})$ y $h_r = 0$ si $r \in T_1(\mathbf{b})$.
Vamos a probar que $(m_{\mathbf{b}})_h = 1 \in FB(2^n - 1)$, y que $(m_{\mathbf{b}})_j = 0 \in FB(2^n - 1)$, para todo $j \neq h$.
Para ello basta observar que las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $(m_{\mathbf{b}})_k = (\bigwedge\{\mathbf{g}_k^{(i)} : i \in T_0(\mathbf{b})\}) \wedge (\bigwedge\{-\mathbf{g}_k^{(i)} : i \in T_1(\mathbf{b})\}) = 1$.

ii) $\bigwedge\{\mathbf{g}_k^{(i)} : i \in T_0(\mathbf{b})\} = 1$ y $\bigwedge\{-\mathbf{g}_k^{(i)} : i \in T_1(\mathbf{b})\} = 1$.

iii) $\mathbf{g}_k^{(i)} = 1$ para todo $i \in T_0(\mathbf{b})$ y $-\mathbf{g}_k^{(i)} = 1$ para todo $i \in T_1(\mathbf{b})$.

iv) $k_i = 1$, para todo $i \in T_0(\mathbf{b})$, y $k_i = 0$, para todo $i \in T_1(\mathbf{b})$.

v) $k = h$.

Acabamos así de probar que $m_{\mathbf{b}} \in \mathbf{V}$ cualquiera que sea $\mathbf{b} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), n)$, luego $m(\mathbf{G}) \subseteq \mathbf{V}$.
Sean $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), n)$ y $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$. Si $\mathbf{b}$ o $\mathbf{c}$ son elementos de $\{\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}\}$, entonces es claro que $m_{\mathbf{b}} \neq m_{\mathbf{c}}$. Si $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), n) - \{\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma}\}$, entonces vimos en el Lema 6.8, 1) que $m_{\mathbf{b}} \wedge m_{\mathbf{c}} = 0$.
Como $(m_{\mathbf{b}})_h = 1$, con $h = 1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{b})} 2^{j-1}$, y $(m_{\mathbf{b}})_j = 0$ para todo j, $j \neq h$, $(m_{\mathbf{c}})_k = 1$, con $k = 1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{c})} 2^{j-1}$, y $(m_{\mathbf{c}})_j = 0$ para todo j, $j \neq k$, entonces si $h = k$, esto es

$1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{b})} 2^{j-1} = 1 + \sum_{j \in T_0(\mathbf{c})} 2^{j-1}$, resulta $T_0(\mathbf{b}) = T_0(\mathbf{c})$, y por lo tanto $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, absurdo.
Luego $m_{\mathbf{b}} \neq m_{\mathbf{c}}$. Por lo tanto $m(\mathbf{G}) = \mathbf{V}$. □

Lema 12.16 $SM(\mathbf{G}) = SB(\mathbf{V} \cup \mathbf{W})$.

Dem. Aplicando sucesivamente los Lemas 6.14, 6.13, 12.15 y 12.14 podemos escribir: $SM(\mathbf{G}) = SM(m(\mathbf{G})) = SB(m(\mathbf{G}) \cup \exists m(\mathbf{G})) = SB(\mathbf{V} \cup \exists \mathbf{V}) = SB(\mathbf{V} \cup \mathbf{W})$. □

Observación 12.4 *Si S es una subálgebra de un álgebra de Boole finita B, con r átomos, $r \geq 1$, tal que $\mathcal{A}(S) \subseteq \mathcal{A}(B)$, entonces $S = B$. En efecto, sean $s_1, s_2, \ldots, s_u$, $u \leq r$ los átomos de S y $C_i = \{a \in \mathcal{A}(B) : a \leq s_i\}$, $1 \leq i \leq u$. Es bien conocido que $Q = \{C_1, C_2, \ldots, C_u\}$ es una partición del conjunto $\mathcal{A}(B)$. Como $\mathcal{A}(S) \subseteq \mathcal{A}(B)$, cada C_i, $1 \leq i \leq u$, está formado por un solo elemento (un átomo de B), luego $u = r$ y por lo tanto $S = B$.*

Lema 12.17 $SB(\mathbf{V} \cup \mathbf{W}) = \mathbf{P}(2^n)$.

Dem. Por construcción $\mathbf{V}$ es una partición de $\mathbf{1} \in \mathbf{P}(2^n)$ y vimos que $\mathbf{v}^{(i)} \leq \mathbf{w}^{(i)}$ y $\exists \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{w}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$. Entonces por el Lema 6.12

$$\mathcal{P} = \{m_b(\mathbf{V} \cup \mathbf{W}) : \mathbf{b} \in \bigcup_{k=1}^{2^n} \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), 2.2^n, k, k + 2^n)\}$$

es una partición de $\mathbf{1} \in \mathbf{P}(2^n)$ tal que $\mathcal{A}(SB(\mathbf{V} \cup \mathbf{W})) \subseteq \mathcal{P}$.
Pero si $\mathbf{b} \in \bigcup_{k=1}^{2^n} \mathbf{B}(\mathbf{P}(2^n), 2.2^n, k, k + 2^n)$, entonces $\mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{0}$, para un cierto j, $1 \leq j \leq 2^n$, y $\mathbf{b}^{(j')} = \mathbf{1}$, para todo j', $1 \leq j' \leq 2^n$, $j \neq j'$, y además $\mathbf{b}^{(j+2^n)} = \mathbf{0}$, luego

$$p = m_{\mathbf{b}}(\mathbf{V} \cup \mathbf{W}) = \mathbf{v}^{(j)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^n} (\mathbf{w}^{(i)} + \mathbf{b}^{(i+2^n)}).$$

Por lo tanto su coordenada h-ésima, $1 \leq h \leq 2^n$, es

$$p_h = \mathbf{v}_h^{(j)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{2^n} (\mathbf{w}_h^{(i)} + \mathbf{b}_h^{(i+2^n)}).$$

Pero vimos que $\mathbf{v}_h^{(j)} = 0$, para $h \neq j$ y $\mathbf{v}_j^{(j)} = 1$, luego $p_h = 0$, para $h \neq j$ y $p_j = \bigwedge_{i=1}^{2^n} (\mathbf{w}_j^{(i)} + \mathbf{b}_j^{(i+2^n)})$.
Pero por Lema 12.11, b) $\{\mathbf{w}_j^{(i)} : 1 \leq i \leq 2^n\} = \{1, g_1, g_2, \ldots, g_{2^n-1}\}$, y como $\mathbf{w}_j^{(j)} = 1$ y $\mathbf{b}^{(j+2^n)} = \mathbf{0}$ entonces $p_j \in \mathcal{A}(FB(2^n - 1))$ y en consecuencia $p \in \mathcal{A}(\mathbf{P}(2^n))$.
Acabamos así de probar que $\mathcal{A}(SB(\mathbf{V} \cup \mathbf{W})) \subseteq \mathcal{A}(\mathbf{P}(2^n))$ de donde resulta por la Observación 12.4 que $SB(\mathbf{V} \cup \mathbf{W}) = \mathbf{P}(2^n)$. □

De los Lemas 12.16 y 12.17 resulta que $\mathbf{G}$ es un conjunto de generadores del álgebra de Boole monádica $\mathbf{P}(2^n)$, esto es

$$SM(\mathbf{G}) = \mathbf{P}(2^n).$$

Sea $FMB(n)$ el álgebra de Boole monádica con n generadores libres, G un conjunto de

n generadores libres de $FMB(n)$ y f una biyección de G en $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{P}(2^n)$, entonces f se puede extender a un único homomorfismo monádico h de $FMB(n)$ en $\mathbf{P}(2^n)$.
Luego $h(FMB(n)) = SM(h(G)) = SM(\mathbf{G}) = \mathbf{P}(2^n)$, y por lo tanto h es un homomorfismo monádico suryectivo. Además h es biunívoca pues $FMB(n)$ y $\mathbf{P}(2^n)$ tienen el mismo número de elementos. Por lo tanto h establece una biyección entre ambos conjuntos y en consecuencia h es un isomorfismo.

Referencias

[1] Abad M. and Monteiro L., *Number of epimorphisms between finite symmetric Boolean algebras*, Reports on Mathematical Logic, 10 (1976), 3-7.

[2] Abad M., Monteiro L., Savini S. y Sewald J., *Sobre álgebras de Boole monádicas libres*, Informes Técnicos Internos 36 (1994), 1-17 Instituto de Matemática, INMABB-CONICET-UNS.

[3] Abad M. and Monteiro L., *Monadic epimorphisms and applications*, Portugaliae Mathematica, 39 (1980), 525-538.

[4] Bass H., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 258-268.

[5] Birkhoff G., *Lattice Theory*, Proc. Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 25, 3rd. ed., Providence (1967).

[6] Carnap R., *Modalities and quantification*, J. Symbolic Logic 11 (1946), 33-64.

[7] Davis C., *Modal operators, equivalence relations and projective algebras*, American Journal of Mathematics 76 (1954), 217-249.

[8] Héng-Shan Gao, *A simple proof of a theorem of H. Bass*, Shuxue Jinzhan 6 (1963), 92-95; errata 6 (1963), 306, in chinese.

[9] Halmos Paul R., *Algebraic logic I. Monadic Boolean algebras*, Compositio Mathematica, 12 (1955), 217-249.

[10] Halmos Paul R., *The representation of monadic Boolean algebras*, Duke Mathematical Journal, 26 (1959), 447-454.

[11] Halmos P.R., *Free monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 219-227.

[12] Halmos P.R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[13] Henkin L., Monk D. and Tarski A., *Cylindric Algebras*, Part I, North-Holland Publishing Co., (1971).

[14] Masse A., *Anneaux monadiques libres sur un ensemble fini, (I) et (II)*, Seminaire de Logique Algèbrique . Faculté des Sciences, Université de Lyon, (1970).

[15] Monteiro A., *Sobre el teorema de Halmos de representación de álgebras monádicas*, Rev. U.M.A. 17 (1955), 149-160.

[16] Monteiro A., *Algebras monádicas*, Atas del Segundo Colóquio Brasileiro de Ciências,(1960), 33-52.

[17] Monteiro A., *Algebra de la Lógica II*, Curso dictado en el Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, (1960).

[18] Monteiro A., Notas del curso *Algebra de la Lógica III*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, (1962).

[19] Monteiro A., *Généralisation d'un théorème de R. Sikorski sur les algèbres de Boole*, Bull. Sc. Math., 2e. série (1965), 65-74, Notas de Lógica Matemática 10, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1974).

[20] Monteiro A., *Seminario sobre álgebras de Boole monádicas*, Universidad Nacional del Sur, (1973).

[21] Monteiro A., *Algèbres Monadiques*, Notas de Lógica Matemática 7, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1974).

[22] Monteiro A. et Ribeiro H., *L'opération de fermeture et ses invariants dans les systèmes partiellement ordonnés*, Portugaliae Mathematicae 3 (1942), 171-184.

[23] Monteiro L., *Algebras de Lukasiewicz trivalentes monádicas*. Notas de Lógica Matemática 32, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina, (1974).

[24] Monteiro L., *Algèbres de Boole monadiques libres*. Algebra Universalis, 8 (1978), 374-380.

[25] Monteiro L., *Cursos sobre álgebras de Boole y álgebras de Boole monádicas*. Universidad Nacional del Sur, (1973-1997).

[26] Monteiro L., *Algebras de Boole*, Informes Técnicos Internos 66 (1998), 201 pág. INMABB-CONICET-UNS.

[27] Monteiro L., Abad M., Savini S. and Sewald J. *Notes on free monadic Boolean algebras*, Order 16 (1999),277-278.

[28] Monteiro L., Abad M., Savini S., Sewald J. y Zander M., *Subálgebras monádicas de un ĺgebra de Boole monádica finita*, Informes Técnicos Internos 80 (2002), 31 pág. INMABB-CONICET-UNS.

[29] Sikorski R., *On the inducing of homomorphisms by mappings*, Fund. MAth. 36 (1949), 7-22.

[30] Sikorski R., *Boolean algebras*, Springer-Verlag, 2nd. ed. (1964)

[31] Sikorski R., *Algebras de Boole*, Notas de Lógica Matemática 4, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1968).

[32] Stone M. H., *The theory of representation of Boolean algebras*, Transactions of the Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37-111.

[33] Stone M. H., *Applications of Boolean rings to general topology*, Transactions of the Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37-111.

[34] Varsavsky O., *Quantifiers and equivalence relations*, Notas de Lógica Matemática 3, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1974) .

[35] Viglizzo I.D. *Algebras de Boole monádicas libres*, Informes Técnicos Internos 43 (1995), Instituto de Matemática, INMABB-CONICET-UNS.