INFORME TECNICO INTERNO

N°. 72

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

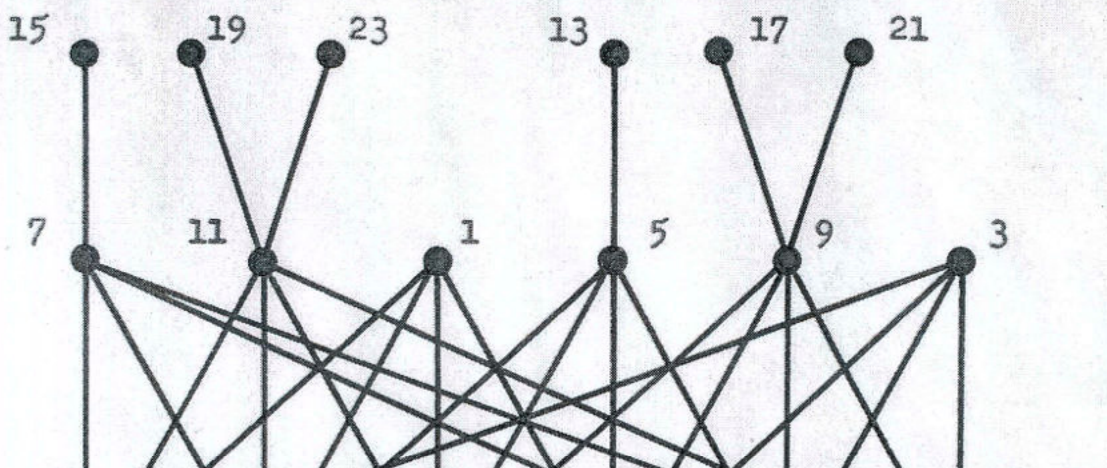


Diagrama de Hasse de un conjunto ordenado simétrico que no es completamente simétrico construido por Antonio Diego.

Copia del original que Diego entregó a Antonio Monteiro

(ver páginas 32 y 33 de este Informe Técnico Interno)

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 72

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE BAHÍA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - B8000CPB - BAHIA BLANCA

- 2000 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 72

ÁLGEBRAS DE MORGAN

António A. Monteiro y Luiz F. Monteiro

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2000

ALGEBRAS de DE MORGAN

Antonio A. R. Monteiro y Luiz F. Monteiro

Estas notas estan basadas, fundamentalmente, en partes de diversos cursos, que dictara en la Universidad Nacional del Sur, entre 1962 y 1966, el Dr. Antonio A. R. Monteiro. En las mismas hemos introducido algunas modificaciones que fueron incluídas en sucesivos cursos que dictaramos en la misma Universidad, así como resultados propios y de otros autores.
Agradecemos la colaboración de los siguientes docentes del Departamento de Matemática de la U.N.S.: Licenciados Sonia Savini y Julio Sewald.

INMABB - CONICET -UNS

2.000

Índice General

1 Definiciones y Ejemplos

1.1 Reticulados de De Morgan

La noción de álgebra de De Morgan que definiremos en el próximo párrafo es una generalización del concepto de álgebra de Boole.

Definición 1.1.1 *Sea $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, \sim)$ un sistema formado por un conjunto no vacío A, dos operaciones binarias $\wedge$, $\vee$ definidas sobre A y una opareración unaria $\sim$ definida sobre A a la que llamaremos* **negación fuerte**, *en forma tal que se verifiquen:*

M1) $(A, \wedge, \vee)$ *es un reticulado distributivo,*

M2) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y, \ \forall\, x, y \in A,$

M3) $\sim\sim x = x, \ \forall\, x \in A.$

Diremos que $\mathcal{A}$ es un reticulado de De Morgan. Para abreviar diremos que A es un reticulado de De Morgan.

De esta definición se deduce la siguiente regla de cálculo:
M4) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y, \ \forall\, x, y \in A.$
En efecto de M2 y M3 resulta $\sim (\sim x \vee \sim y) = \sim\sim x \wedge \sim\sim y = x \wedge y$ luego $\sim\sim (\sim x \vee \sim y) = \sim (x \wedge y)$ esto es $(\sim x \vee \sim y) = \sim (x \wedge y)$.

Ejemplo 1.1.1 *Sea $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales con su orden natu- ral, luego $\mathbf{R}$ es una cadena y en consecuencia un reticulado distributivo. Para cada $r \in \mathbf{R}$ pongamos $\sim r = -r$, donde $-r$ indica el simétrico del número real r. Entonces $\sim\sim r = --r = r$. Como $\mathbf{R}$ es una cadena dados $r, s \in \mathbf{R}$: $r \leq s$ ó $s \leq r$. Supongamos que $r \leq s$ luego tenemos que (1) $r \vee s = s$ y (2) $\sim s = -s \leq -r = \sim r$. De (1) resulta (3) $\sim (r \vee s) = \sim s$ y de (2) se deduce (4) $\sim s = \sim s \wedge \sim r$ de (3) y (4) se concluye: $\sim (r \vee s) = \sim r \wedge \sim s$. En este ejemplo el reticulado no posee ni primer ni último elemento.*

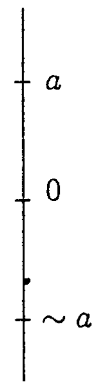


Figura 1.1.1

La noción de reticulado de De Morgan, según las referencias que tenemos, fue introducida por Gr. C. Moisil [16], pág. 91. Pero Moisil no desarrolló el estudio de esta noción. Ella fue estudiada por J. Kalman [13] bajo el nombre de *Distributive i-lattices* .
Veremos más adelante que un caso particular de esta noción fue estudiada por St. Kleene [14] en el año 1938.
Se reconoce de inmediato que vale el principio de dualidad: *Dada una igualdad de un reticulado de De Morgan arbitrario, la igualdad que se obtiene intercambiando las operaciones $\wedge$ y $\vee$, y dejando fijo el operador $\sim$, también es válida.* Este principio es una consecuencia inmediata de las dos leyes de De Morgan anteriormente mencionadas.

1.2 Otras axiomáticas para los reticulados de De Morgan

R. Maronna [15], en 1964 definió la noción de reticulado de De Morgan como un sistema $(A, \wedge, \sim)$ en el que se verifican los dos postulados siguientes:

Ma1) $a = a \wedge \sim (\sim a \wedge \sim b)$,

Ma2) $a \wedge \sim (\sim b \wedge \sim c) = \sim (\sim (c \wedge a) \wedge \sim (b \wedge a))$,

los cuales son independientes.

Es bien conocido que en un álgebra de Boole todas las operaciones pueden definirse a partir del operador de Scheffer $a \setminus b = -a \wedge -b$, donde $-a$ es el complemento booleano de a. L. Monteiro y D. Picco [31] en 1962 probaron que un resultado análogo vale en los reticulados de De Morgan. Si A es un álgebra de De Motgan pongamos por definición $a \setminus b = \sim a \wedge \sim b$. Para simplificar la notación escribiremos $a \setminus b = a.b = ab$. Entonces (I) $\sim a = aa = a^2$, (II) $a \wedge b = a^2b^2$, (III) $a \vee b = (ab)^2$ y se verifican:

A) $a^2(ab) = a$,

B) $(a(bc))^2 = (b^2a)(c^2a)$.

Entonces si $(A, .)$ es un sistema formado por un conjunto no vacío A y una operación binaria que verifica los axiomas A) y B), donde escribimos ab en vez de $a.b$ y adoptamos las definiciones (I), (II) y (III) el sistema $(A, \wedge, \vee, \sim)$ es un reticulado de De Morgan y además $ab = \sim a \wedge \sim b$. Observemos que los axiomas indicados son independientes.

Estos hechos nos muestran la proximidad entre esta noción y la de álgebra de Boole.

1.3 Implicación fuerte

Por analogía con las álgebras de Boole, en un reticulado de De Morgan podemos introducir el siguiente operador binario:

Definición 1.3.1 $a \twoheadrightarrow b = \sim a \vee b$ (*a* **implica fuertemente** *b*).

La implicación fuerte verifica las siguientes propiedades:

1) Leyes distributivas:

i) $a \twoheadrightarrow (b \vee c) = (a \twoheadrightarrow b) \vee (a \twoheadrightarrow c)$.

ii) $a \twoheadrightarrow (b \wedge c) = (a \twoheadrightarrow b) \wedge (a \twoheadrightarrow c)$.

En efecto:
$a \twoheadrightarrow (b \vee c) = \sim a \vee (b \vee c) = (\sim a \vee b) \vee (\sim a \vee c) = (a \twoheadrightarrow b) \vee (a \twoheadrightarrow c)$.
$a \twoheadrightarrow (b \wedge c) = \sim a \vee (b \wedge c) = (\sim a \vee b) \wedge (\sim a \vee c) = (a \twoheadrightarrow b) \wedge (a \twoheadrightarrow c)$.

2) Leyes antidistributivas:

i) $(a \vee b) \twoheadrightarrow c = (a \twoheadrightarrow c) \wedge (b \twoheadrightarrow c)$.

ii) $(a \wedge b) \twoheadrightarrow c = (a \twoheadrightarrow c) \vee (b \twoheadrightarrow c)$.

En efecto:
$(a \vee b) \twoheadrightarrow c = \sim (a \vee b) \vee c = (\sim a \wedge \sim b) \vee c = (\sim a \vee c) \wedge (\sim b \vee c) = (a \twoheadrightarrow c) \wedge (b \twoheadrightarrow c)$.
$(a \wedge b) \twoheadrightarrow c = \sim (a \wedge b) \vee c = (\sim a \vee \sim b) \vee c = (\sim a \vee c) \vee (\sim b \vee c) = (a \twoheadrightarrow c) \vee (b \twoheadrightarrow c)$.

3) Ley de contraposición: $a \twoheadrightarrow b = \sim b \twoheadrightarrow \sim a$.

$\sim b \twoheadrightarrow \sim a = \sim \sim b \vee \sim a = \sim a \vee b = a \twoheadrightarrow b$.

4) Ley de importación y exportación: $(a \wedge b) \twoheadrightarrow c = a \twoheadrightarrow (b \twoheadrightarrow c)$.

$(a \wedge b) \twoheadrightarrow c = \sim (a \wedge b) \vee c = (\sim a \vee \sim b) \vee c = \sim a \vee (b \twoheadrightarrow c) = a \twoheadrightarrow (b \twoheadrightarrow c)$.

5) Ley de Pierce: $(a \twoheadrightarrow b) \twoheadrightarrow a = a$.

$(a \twoheadrightarrow b) \twoheadrightarrow a = \sim (a \twoheadrightarrow b) \vee a = \sim (\sim a \vee b) \vee a = (a \wedge \sim b) \vee a = a$.

Observemos que valen las siguientes reglas de cálculo:

$$a \wedge b = \sim (a \twoheadrightarrow \sim b) \quad ; \quad a \vee b = \sim a \twoheadrightarrow b,$$

y por lo tanto todas las operaciones de un reticulado de De Morgan se pueden determinar a partir de los operadores $\twoheadrightarrow$ y $\sim$. M. L. Gastaminza y S. Gastaminza [11] en 1968 obtuvieron un conjunto de postulados para un reticulado de De Morgan en términos de $\twoheadrightarrow$ y $\sim$. Al respecto ver la caracterización de las álgebras de Boole dada por A. Diego y A. Suarez [31] en 1963 en términos de implicación y negación.

Lema 1.3.1 *Si A es una cadena y existe una operación $\sim$ sobre A tal que si $a \leq b$ entonces $\sim b \leq \sim a$, y $\sim\sim x = x$, $\forall x \in A$ entonces A es un reticulado de De Morgan.*

Dem. Como A es una cadena, entonces A es un reticulado distributivo. Como $\sim \sim x = x$, resta probar que $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.
Sean $x, y \in A$ entonces $x \leq y$ ó $y \leq x$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \leq y$.
Como $x \vee y = y$ se tiene que $\sim y = \sim (x \vee y)$ y $\sim y \leq \sim x$ luego $\sim x \wedge \sim y = \sim y$, con lo que concluimos que $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$. ∎

1.4 Algebras de De Morgan

Un caso particular de la noción de reticulado de De Morgan es el que se indica a continuación.

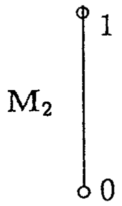
Definición 1.4.1 *Un reticulado de De Morgan se dice un álgebra de De Morgan si tiene primer elemento* 0.

Lema 1.4.1 *Toda álgebra de De Morgan tiene último elemento 1 y además* $1 = \sim 0$.

Dem. $0 \wedge \sim x = 0$ para todo x, por lo tanto $\sim (0 \wedge \sim x) = \sim 0$ para todo x, y en consecuencia $\sim 0 \vee x = \sim 0$ para todo x. Poniendo $1 = \sim 0$ se tiene que $1 \vee x = 1$ para todo x, luego $1 = \sim 0$ es el último elemento del reticulado de De Morgan y $\sim 1 = 0$. ∎

Observación 1.4.1 *Todo reticulado de De Morgan finito es un álgebra de De Morgan.*

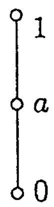
Ejemplo 1.4.1 *1) Consideremos el siguiente reticulado distributivo:*



Este reticulado tambien es un álgebra de Boole y claramente la única negación de De Morgan que se puede definir sobre este conjunto coincide con el complemento booleano, por lo tanto $\sim 0 = 1$ *y* $\sim 1 = 0$. *A esta álgebra de De Morgan la notaremos* M_2.

Figura 1.4.1

2) El ejemplo más simple de un álgebra de De Morgan que no es un álgebra de Boole es el siguiente: Considerenos el reticulado distributivo indicado a continución:

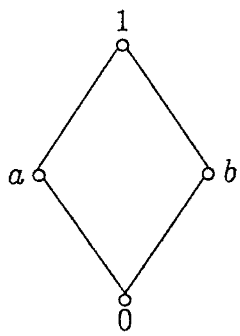


Pongamos por definición:

x	0	a	1
$\sim x$	1	a	0

Figura 1.4.2
A esta álgebra de De Morgan la notaremos M_3.

3) Consideremos ahora el reticulado distributivo:



x	0	a	b	1
$\sim x$	1	a	b	0
$-x$	1	b	a	0

Figura 1.4.3
Es facil ver que el reticulado distributivo con la negación indicada en primer lugar es un álgebra de De Morgan. La notaremos M_4. *Con la segunda negación es un álgebra de Boole.*

A. Monteiro denominó a las álgebras M_2, M_3 y M_4 *diada, triada* y *tetrada* respectivamente.

En el Ejemplo 1.4.1, 2): $a\wedge\sim a\neq 0$ y $a\vee\sim a\neq 1$, es decir no valen los *principios de contradicción y tercero excluído*, a saber: $x\wedge\ \sim x=0$ para todo x y $x\vee\ \sim x=1$ para todo x.

1) Si en un álgebra de De Morgan A vale que $x\wedge\sim x=0$, para todo $x\ \in A$ entonces A es un álgebra de Boole y $-x=\sim x$.
   En efecto, A es un reticulado distributivo con primer y último elemento. Como $x\wedge\sim x=0$, para todo x, entonces $x\vee\sim x=1$, para todo x, luego todo elemento es complementado y A es un álgebra de Boole. Como el complemento es único se tiene que $\sim x=-x$.

2) Si en un álgebra de De Morgan A vale que $x\vee\sim x=1$, para todo $x\ \in A$ entonces A es un álgebra de Boole y $-x=\sim x$.
   Es consecuencia de $\sim(x\wedge\sim x)=\sim 0$, esto es $\sim x\vee x=1$, para todo $x\ \in A$.

En los párrafos siguientes nos vamos a ocupar de las álgebras de De Morgan, pero muchos de los resultados son válidos para los reticulados de De Morgan, lo que indicaremos en cada caso.
La noción de álgebra de De Morgan fue considerada y estudiada por primera vez por A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa [3] bajo el nombre de *álgebras casi booleanas*. En el reticulado indicado en el Ejemplo 1.4.1,3) tenemos que M_4 es simultáneamente un álgebra de Boole (con la operación "$-$") y un álgebra de De Morgan (con la operación "$\sim$"). Luego en la terminología de Rasiowa este álgebra sería boolena y casi booleana.

2 Subálgebras, generadores

2.1 Subreticulados de De Morgan

Una parte S de un reticulado de De Morgan A se dice un **subreticulado de De Morgan** de A si el sistema $(S,\wedge,\vee,\ \sim)$ es un reticulado de De Morgan, donde $\wedge,\vee,\ \sim$ son las operaciones definidas sobre A.

Proposición 2.1.1 *Si A es un reticulado de De Morgan para que $S\subseteq A$ sea un subreticulado de De Morgan de A es necesario y suficiente que:*

1) $S\neq\emptyset$,

2) Si $a,b\in S$ entonces $a\wedge b\in S$,

3) Si $a\in S$ entonces $\sim\ a\in S$.

Ejemplo 2.1.1 *1) Consideremos el reticulado de De Morgan A indicado en la Figura 1.1.1, entonces $S=\{a\}$ es un subreticulado de De Morgan de A.*

2) Consideremos el reticulado de De Morgan A indicado en la Figura 1.4.3, entonces $S_1=\{a\}$, $S_2=\{b\}$, $S_3=\{0,1\}$ son subreticulados de De Morgan de A. Observemos que en este caso $S_1\cap S_2=\emptyset$.

Lema 2.1.1 *Si $\{S_i\}_{i\in I}$ es una familia de subreticulados de De Morgan de un reticulado de De Morgan A tal que $S=\bigcap\limits_{i\in I}S_i\neq\emptyset$ entonces S es un subreticulado de De Morgan de A.*

Definición 2.1.1 *Si G es una parte de un reticulado de De Morgan A notaremos con $S(G)$ la intersección de todos los subreticulado de De Morgan de A que contienen a G. Si $S(G) \neq \emptyset$ diremos que $S(G)$ es el* **subreticulado de De Morgan de A engendrado** *por G.*

Es claro que si $G \neq \emptyset$ como $G \subseteq S(G)$ entonces $S(G) \neq \emptyset$. Pero si $G = \emptyset$ puede ocurrir que $S(G) = \emptyset$. En efecto consideremos el reticulado de De Morgan A indicado en la Figura 1.4.3 la familia de todos los subreticulados de De Morgan de A es: $S_1 = \{a\}$, $S_2 = \{b\}$, $S_3 = \{0,1\}$ $S_4 = A$ luego $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \emptyset$.
Toda álgebra de Boole A es en particular un reticulado de De Morgan, donde se verifica $a \wedge \sim a = 0$ luego $\sim 0 = 1 \in S$ para todo subreticulado de De Morgan S de A, luego siempre se verifica $\bigcap\limits_{i \in I} S_i \neq \emptyset$ cualquiera que sea la familia $\{S_i\}_{i \in I}$ de subreticulados de De Morgan de A. Luego siempre existe el subreticulado de De Morgan engendrado por el conjunto $\emptyset$.

La Definición 2.1.1 no es constructiva pues dado un subconjunto G de un reticulado de De Morgan A, necesitamos determinar la familia de todos los los subreticulados de De Morgan de A que continen a G y luego determinar su intersección.

Si R es un reticulado distributivo y G un conjunto no vacío de R representemos con $i(G)$ el conjunto de todos los elementos que son ínfimo de un número finito de elementos de G esto es:

$$i(G) = \{\bigwedge_{x \in F} x : F \subseteq G, \ \ F \ \text{ finito, } \ \text{no vacío}\}.$$

Análogamente definamos

$$s(G) = \{\bigvee_{x \in F} x : F \subseteq G, \ \ F \ \text{ finito, } \ \text{no vacío}\}.$$

Si representamos con $\overline{G}$ el subreticulado de R generado por G se prueba (ver por ejemplo [33]) que:

$$\overline{G} = s(i(G)) = i(s(G)).$$

Si X es un subconjunto de un reticulado de De Morgan, notaremos $\sim X = \{\sim x : x \in X\}$.

Lema 2.1.2 *Si G es un subconjunto de un reticulado de De Morgan R tal que $\sim G = G$ entonces $S(G) = \overline{G}$.*

Dem.

1) $\underline{\overline{G} \subseteq S(G).}$
Como $S(G)$ es un subreticulado de R tal que $G \subseteq S(G)$ entonces $\overline{G} \subseteq S(G)$.

2) $\underline{S(G) \subseteq \overline{G}.}$
Por definición (2a) $G \subseteq \overline{G}$. Probemos que (2b) $\overline{G}$ es un subreticulado de De Morgan. Para ello basta demostrar que si $x \in \overline{G}$ entonces $\sim x \in \overline{G}$. De $x \in \overline{G} = s(i(G))$ resulta que $x = \bigvee\limits_{j=1}^{n} x_j$ donde $x_j \in i(G)$ para $1 \leq j \leq n$ y por lo tanto $x_j = \bigwedge\limits_{k=1}^{n_j} y_k^j$ donde $y_k^j \in G$ para todo j y todo k, luego

$$\sim x = \bigwedge_{j=1}^{n} \sim x_j = \bigwedge_{j=1}^{n} (\bigvee_{k=1}^{n_j} \sim y_k^j).$$

Como $\sim G = G$ entonces $\bigvee_{k=1}^{n_j} \sim y_k^j \in \sim G$ y por lo tanto:

$$\sim x = \bigwedge_{j=1}^{n} (\bigvee_{k=1}^{n_j} \sim y_k^j) \in i(s(G)) = \overline{G}.$$

De (2a) y (2b) resulta 2).

■

Como $\sim (G \cup \sim G) = G \cup \sim G$ entonces:

Lema 2.1.3 $S(G \cup \sim G) = S(G)$.

Por lo tanto para determinar el subreticulado de De Morgen generado por un conjunto no vacío G basta determinar el subreticulado generado por el conjunto $G \cup \sim G$. El siguiente teorema es un caso particular de un resultado de álgebra universal:

Teorema 2.1.1 *Si G es una parte no vacía de un reticulado de De Morgan A entonces $S(G)$ es la reunión de los subreticulados de De Morgan $S(F)$ donde F es una parte finita, no vacía, de G esto es*

$$S(G) = \bigcup \{S(F) : F \subseteq G,\ F \text{ finita}\}.$$

2.2 Subálgebras de De Morgan

Definición 2.2.1 *Una parte S de un álgebra de De Morgan se dice una* subálgebra *si:*

S1) $0 \in S$

S2) *Si $a, b \in S$ entonces $a \wedge b \in S$,*

S3) *Si $a \in S$ entonces $\sim a \in S$.*

De esta definición resulta claramente que si S es subálgebra entonces $1 \in$ y que si $x, y \in S$ entonces $x \vee y \in S$. Luego toda subálgebra de un álgebra de De Morgan es un álgebra de De Morgan.
Observemos que si A es un álgebra de De Morgan entonces el conjunto $S = \{0, 1\}$ es una subálgebra de A y que es ademas la menor (con respecto a la relación $\subseteq$) de todas las subálgebras de A.

Lema 2.2.1 *La intersección de cualquier familia de subálgebras de un álgebra de De Morgan A es una subálgebra.*

Definición 2.2.2 *Si G es una parte de un álgebra de De Morgan A notaremos con $SM(G)$ a la intersección de todas las subálgebras de A que contienen a G. Diremos que $SM(G)$ es la subálgebra* engendrada por *G.*

Claramente siempre existe $SM(G)$ cualquiera que sea $G \subseteq A$ y teniendo en cuenta el Lema 2.2.1 resulta que $SM(\emptyset) = \{0, 1\}$.

Teorema 2.2.1 *Si G es una parte no vacía de un álgebra de De Morgan A entonces $SM(G)$ es la reunión de las subálgebras de De Morgan $SM(F)$ donde F es una parte finita de G esto es*

$$SM(G) = \bigcup\{SM(F) : F \subseteq G,\ F \text{ finita}\}.$$

Si R es un reticulado distributivo acotado y $X \subseteq R$, notaremos con $SR(X)$ el subreticulado generado por X. Se prueba (ver por ejemplo [33]) que $SR(G) = S(G) \cup \{0, 1\}$.

Lema 2.2.2 *Si A es un álgebra de De Morgan y $G \subseteq A$ entonces*

$$SM(G) = SR(G \cup \sim G).$$

Dem.

1) $\underline{SR(G \cup \sim G) \subseteq SM(G)}$.
Como $G \subseteq SM(G)$ entonces tambien $\sim G \subseteq SM(G)$ luego $G \cup \sim G \subseteq SM(G)$ y como $SM(G)$ es en particular un $(0, 1)$-subreticulado de A tenemos que $SR(G \cup \sim G) \subseteq SM(G)$.

2) $\underline{SM(G) \subseteq SR(G \cup \sim G)}$.
Para ello vamos a demostrar que:

   2a) $\underline{G \subseteq SR(G \cup \sim G)}$.
   $G \subseteq G \cup \sim G \subseteq SR(G \cup \sim G)$.

   2b) $\underline{T = SR(G \cup \sim G) \text{ es una subálgebra de De Morgan.}}$
   Vimos que $T = SR(G \cup \sim G) = \overline{G \cup \sim G} \cup \{0, 1\}$. Sea $x \in T$ luego $x \in \overline{G \cup \sim G}$ ó $x \in \{0, 1\}$. En primer caso como $\overline{G \cup \sim G}$ es el subreticulado de De Morgan generado por G tenemos que $\sim x \in \overline{G \cup \sim G} \subseteq T$, y en el segundo caso tenemos que $\sim x \in \{0, 1\} \subseteq T$.

■

Por lo tanto si G es un subconjunto no vacío de un álgebra de De Morgan A entonces $SM(G)$ se puede obtener determinando en primer lugar $S(G)$ luego agregar, eventualmente, los elementos 0 y 1 a $S(G)$.

Ejemplo 2.2.1 *1) Consideremos el álgebra de De Morgan A indicada en la Figura 1.4.2. Si $G = \{a\}$ entonces $S(G) = G$ y por lo tanto $SM(G) = G \cup \{0, 1\} = A$.*

2) Consideremos el reticulado de De Morgan A indicado en la Figura 1.4.3. Si $G = \{a, b\}$ entonces $S(G) = \{0, a, b, 1\} = SM(G)$.

Si S es un $(0, 1)$-subreticulado de un reticulado distributivo acotado R y $g \in R$, notaremos $SR(S \cup \{g\}) = SR(S, g)$. Vimos en [33] que:

$$SR(S, g) = \{s \vee (t \wedge g) : s, t \in S\}.$$

Dada un álgebra de De Morgan M, una subálgebra S de M y $g \in M$ notaremos con $SM(S, g)$ la subálgebra generada por el conjunto $S \cup \{g\}$.

Lema 2.2.3 $SM(S,g) = SR(SR(S,g), \sim g)$ (L. Monteiro, 1975).

Dem. Sea $T = SR(SR(S,g), \sim g)$.

1) $T \subseteq SM(S,g)$.
Sea $y \in T$ luego $y = m \vee (n \wedge \sim g)$ donde $m, n \in SR(S,g)$ y por lo tanto $n = n_1 \vee (n_2 \wedge g)$ y $m = m_1 \vee (m_2 \wedge g)$ donde $n_1, n_2, m_1, m_2 \in S$. Como $S \subseteq SM(S,g)$ y $g \in SM(S,g)$ entonces $n, m \in SM(S,g)$. Además como $g \in SM(S,g)$ tambien $\sim g \in SM(S,g)$ luego $y \in SM(S,g)$.

2) $S \cup \{g\} \subseteq SR(SR(S,g), \sim g) = T$.
$S \cup \{g\} \subseteq SR(S,g) \subseteq T$.

3) Si $x \in SR(S,g)$ entonces $\sim x \in SR(SR(S,g), \sim g)$.
En efecto de $x \in SR(S,g)$ resulta $x = s \vee (t \wedge g)$ donde $s, t \in SR(S,g)$ luego $\sim x = \sim s \wedge (\sim t \vee g)$. Como $\sim s, \sim t \in S \subseteq SR(R,g) \subseteq SR(SR(S,g), \sim g)$ entonces $\sim s \vee \sim g \in SR(SR(S,g), \sim g)$ y $\sim x = \sim s \wedge (\sim t \vee \sim g) \in SR(SR(S,g), \sim g)$.

4) T es una subálgebra de M.
Sabemos que T es un subreticulado de M, luego sólo nos falta probar que "Si $x \in T$ entonces $\sim x \in T$." Por hipótesis $x = s \vee (t \wedge \sim g)$ donde $s, t \in SR(S,g)$ luego por 3) $\sim s, \sim t \in T$ y como $g \in SR(S,g)$ entonces $\sim x = \sim s \wedge (\sim t \vee g) \in T$.

■

Corolario 2.2.1

$$SM(S,g) = \{s_1 \vee (s_2 \wedge g) \vee (s_3 \wedge \sim g) \vee (s_4 \wedge g \wedge \sim g) : s_1, s_2, s_3, s_4 \in S\}.$$

Dem. Si $y \in SM(S,g)$ entonces por el lema anterior:

$$y = (s_1 \vee (s_2 \wedge g)) \vee ((s_3 \vee (s_4 \wedge g)) \wedge \sim g) =$$
$$s_1 \vee (s_2 \wedge g) \vee (s_3 \wedge \sim g) \vee (s_4 \wedge g \wedge \sim g),$$

donde $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$.
Es claro que si y es un elemento de la forma indicada entonces $y \in M(S,g)$.

■

Consideremos el álgebra de De Morgan indicada en la figura siguiente:

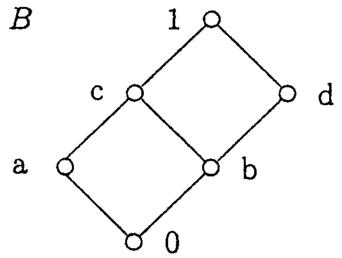


Figura 2.2.1

x	0	a	b	c	d	1
$\sim x$	1	d	c	b	a	0

Vimos en [33] que este reticulado distributivo tiene 37 subreticulados y 12 $(0,1)$-subreticulados. De ellos $S_1 = \{0,1\}$, $S_2 = \{b,c\}$, $S_3 = \{0,a,d,1\}$, $S_4 = \{0,b,c,1\}$ y $S_5 = A$ son subreticulados de De Morgan y S_1, S_3, S_4 y S_5 son subálgebras.

3 Homomorfismos, Producto Cartesiano, Subproducto directo

3.1 Homomorfismos

Definición 3.1.1 *Sean A, A' reticulados de De Morgan, a toda función $h : A \to A'$ tal que:*

H2) $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$,

H3) $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$,

H4) $h(\sim a) = \sim h(a)$.

cualesquiera que sean $a, b \in A$, se denomina homomorfismo *de A en A'. Si h es suryectiva, se denomina* epimorfismo *y si h es biyectiva se denomina* isomorfismo *y se dice que A es* isomorfa *a A' y se nota $A \cong A'$. Si A y A' son álgebras de De Morgan se denomina homomorfismo de A en A' a toda función $h : A \to A'$ que verifica H2), H3), H4 y H1) $h(1) = 1'$.*

Es claro que si A y A' son álgebras de De Morgan y $h : A \to A'$ un homomorfismo entonces $h(0) = 0'$, pues $h(0) = h(\sim 1) = \sim h(1) = \sim 1' = 0'$.
Observemos que el álgebra de De Morgan $\mathbf{M}_4$ tiene tres subálgebras propias a saber $\{0,1\}$, $\{0,a,1\}$, $\{0,b,1\}$ la primera es isomorfa a $\mathbf{M}_2$ y las restantes son isomorfas a $\mathbf{M}_3$.

Si h es suryectiva se dice que A' es una **imagen homomórfica** de A. Mas adelante veremos como se determinan todas las imagenes homomórficas de un álgebra de De Morgan A por medio de una construcción intrínsica efectuada sobre A.

Observemos que el subconjunto $S_1 = \{0,1\}$ del álgebra de De Morgan $\mathbf{M}_4$ es una subálgebra de $\mathbf{M}_4$ que es isomorfa a $\mathbf{M}_2$ y que los subconjuntos $S_2 = \{0,a,1\}$ y $S_3 = \{0,b,1\}$ de $\mathbf{M}_4$ son subálgebras de $\mathbf{M}_4$, ambas isomorfas a $\mathbf{M}_3$.

3.2 Producto Cartesiano

Dada una familia de álgebras de De Morgan $\{A_i\}_{i \in I}$, sea $A = \prod_{i \in I} A_i$ el producto cartesiano de la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$, esto es el conjunto de todas las funciones $x : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tales que en cada elemento $i \in I$ toman un valor $x(i) = x_i \in A_i$. Se dice que x_i es la coordenada de indice i del elemento $x \in A$ y se nota $x = [x_i]_{i \in I}$, $x = [x_i]$, $x = (x_i)_{i \in I}$ o $x = (x_i)$.
Representemos con 0_i y 1_i el primer y último elemento respectivamente de las álgebras A_i, $i \in I$. Sean $0 = (0_i)_{i \in I}, 1 = (1_i)_{i \in I}$ y dados $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, $y = (y_i)_{i \in I} \in A$, pongamos por definición: $\sim x = (\sim x_i)_{i \in I}$, $\forall\ i \in I$,

$$x \wedge y = (x_i \wedge y_i)_{i \in I}, \quad x \vee y = (x_i \vee y_i)_{i \in I} \ \forall \ i \in I.$$

Se prueba sin dificultad que $(A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ es un álgebra de De Morgan a la que se denomina **producto cartesiano** o **directo** de la familia de álgebras de De Morgan $\{A_i\}_{i \in I}$. Cada uno de los conjuntos A_i recibe el nombre de **i-ésimo eje de coordenadas ó i-ésimo** eje . Si $A_i = C$, $\forall\, i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es el conjunto de todas las funciones de I en C. En este caso se nota C^I en vez de $\prod_{i\in I} A_i$. Si el conjunto I es finito, por ejemplo $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces se utiliza cualquiera de las notaciones siguientes:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{ó} \qquad A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

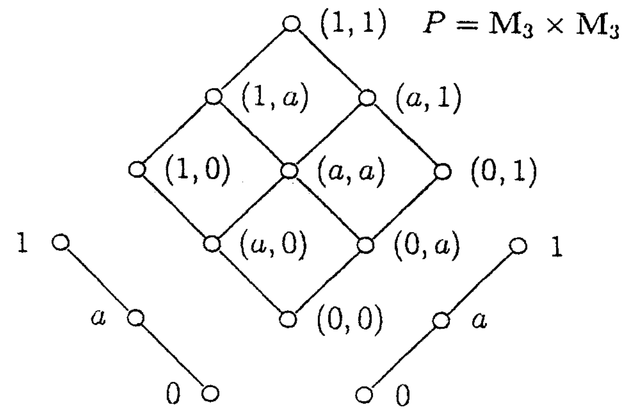
En este caso si $x \in \prod_{i=1}^{n} A_i$ entonces: $x = (x(1), x(2), \ldots, x(n)) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Es claro que $A_1 \times A_2 \neq A_2 \times A_1$, pero $A_1 \times A_2$ y $A_2 \times A_1$ son álgebras de De Morgan isomorfas. Tambien se prueba sin dificultad que $A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3$.
Observemos que si A, B son álgebras de De Morgan y a es un elemento fijo de A entonces el subconjunto C_a de $A \times B$ definido $C_a = \{(a, y) : y \in B\}$ es un álgebra de De Morgan isomorfa a B, definiendo $\sim\ (a, y) = (a, \sim\ y)$ y si b es un elemento fijo de B entonces $C_b = \{(x, b) : x \in A\} \subseteq A \times B$ es un álgebra de De Morgan isomorfa a A definendo $\sim\ (x, b) = (\sim\ x, b)$.

3.3 Producto subdirecto de álgebras de De Morgan

Dada una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ no vacía de álgebras de De Morgan, consideremos el álgebra de De Morgan $P = \prod_{i\in I} A_i$. Dado $i \in I$ consideremos la proyección Π_i (**proyección** i-**ésima**) de P sobre A_i definida por $\Pi_i(a) = a_i \in A_i$. Sabemos [33] que Π_i es un homomorfismo de reticulado de P sobre A_i tal que $\Pi(1) = 1_i$ y $\Pi(0) = 0_i$. Además si $a \in P$ entonces $\sim\ \Pi_i(a) =\sim\ a_i = \Pi((\sim\ a_i)) = \Pi(\sim\ a)$ por lo tanto cada proyección i-ésima es un epimomorfismo de P en $\Pi(A_i)$.

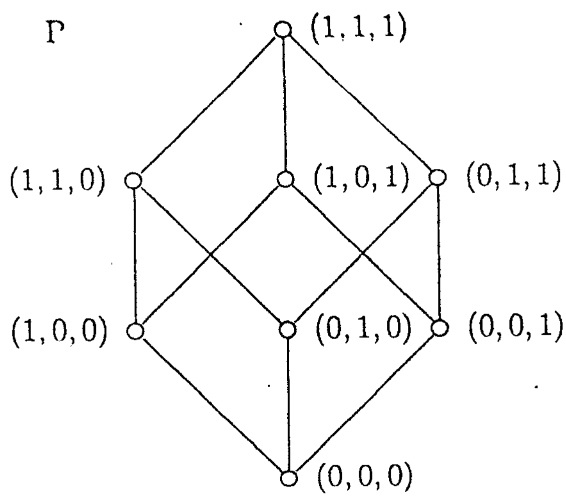
Definición 3.3.1 *Si S es una subálgebra del álgebra de De Morgan $P = \prod_{i\in I} A_i$ tal que $\Pi_i(S) = A_i$, para todo $i \in I$, entonces diremos que S es un* **producto subdirecto** *de los álgebras de De Morgan A_i.*

Ejemplo 3.3.1 *Sean $A_1 = A_2 = \mathrm{M}_3$ y $P = \mathrm{M}_3 \times \mathrm{M}_3$ el álgebra de De Morgan indicada en la figura:*



El subconjunto $S = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ es una subálgebra del álgebra P y $\Pi_1(S) = \{0,1\} \neq A_1$ y $\Pi_2(S) = \{0,1\} \neq A_2$, luego S no es subproducto directo de las álgebras de De Morgan A_1 y A_2. Observemos que ninguno de los homomorfismos Π_i, $i = 1,2$ es un isomorfismo. Claramente la propia P es un producto subdirecto de A_1 y A_2, mas precisamente es producto directo de las álgebras de De Morgan A_1 y A_2. El subconjunto $T = \{(0,0),(a,a),(1,1)\}$ de P es una subálgebra de P y $\Pi_1(T) = \{0,a,1\} = A_1$ y $\Pi_2(T) = \{0,a,1\} = A_2$. Por lo tanto T es producto subdirecto de las álgebras de De Morgan A_1 y A_2. En este caso los homomorfismos Π_i, $i = 1,2$ son isomorfismos.

Ejemplo 3.3.2 *Dada el álgebra de De Morgan* $\mathbf{M}_2$ *indicada anteriormente consideremos el álgebra de De Morgan* $P = \mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_2$, *que tiene el siguiente diagrama:*



Consideremos la siguiente subálgebra de P,

$$S = \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}.$$

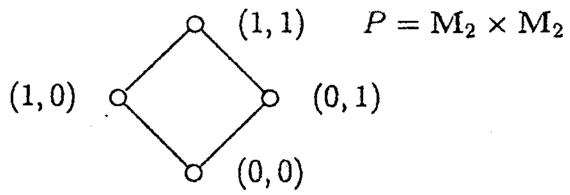
Luego las proyecciones sobre los ejes verifican: $\Pi_1(S) = \Pi_2(S) = \Pi_3(S) = \mathbf{M}_2$, y en consecuencia S es una subálgebra propia de P, que es producto subdirecto de tres álgebras de De Morgan iguales a $\mathbf{M}_2$.

Lema 3.3.1 *Toda subálgebra S del producto cartesiano $P = \prod_{i\in I} A_i$ de álgebras de De Morgan es un producto subdirecto de álgebras de De Morgan.*

Dem. Para cada $i \in I$ sea $A'_i = \Pi_i(S)$. Dado que las proyecciones son homomorfismos de P en A_i entonces A'_i es una subálgebra de A_i. Sea $P' = \prod_{i\in I} A'_i$ y Π'_i la proyección i-ésima de P' en A'_i. Probemos que S es producto subdirecto de P', esto es que 1) S una subálgebra de P' y 2) $\Pi'_i(S) = A'_i$ cualquiera que sea $i \in I$. Por la definición de P' es obvio que se verifica 2). Dado $s = (s_i)_{i\in I} \in S$, como $s_i = \Pi_i(s) \in A'_i$, entonces $s = (a_i)_{i\in I} \in P' = \prod_{i\in I} A'_i$. Por lo tanto S es un subconjunto de P', y en consecuencia S es una subálgebra de P'. ■

La condición $\Pi_i(A') = A_i$ indicada en la Definición 3.3.1 significa que sobre el eje A_i ninguna de las coordenadas es *inútil*. Pero esto no significa que no existan ejes en *exceso*. Cuando S es producto subdirecto de un álgebra de De Morgan $P = \prod_{i\in I} A_i$ puede ocurrir que alguna de las proyecciones Π_i sea un isomorfismo. En el Ejemplo 3.3.1 ambas proyecciones de la subálgebra T son isomorfismos.

Ejemplo 3.3.3 *Consideremos el álgebra* $Q = \mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_2$.



entonces Q es producto subdirecto de dos álgebras iguales a $\mathbf{M}_2$. En el Ejemplo 3.3.2 indicamos un álgebra P y vimos que la subálgebra S de P es producto subdirecto de tres álgebras de De Morgan iguales a $\mathbf{M}_2$ y acabamos de ver que Q, que es isomorfa a S también es producto subdirecto de dos álgebras de De Morgan iguales a $\mathbf{M}_2$. Luego la representación de un álgebra de De Morgan como producto subdirecto de álgebras de De Morgan no está en general unívocamente determinada.

Se plantea el problema de la economía en el número de ejes coordenados. Observemos también que un álgebra de De Morgan A puede representarse como producto subdirecto de un número arbitrario de álgebras de De Morgan todos iguales a A. En efecto, sea $\{A_i\}_{i\in I}$, con $A_i = A$, y $P = \prod_{i\in I} A_i = A^I$. Consideremos la diagonal A' de P, esto es, el conjunto de todos los elementos $(a_i)_{i\in I}$ de P tales que $a_i = a$ para todo $i \in I$.
Es evidente que:

1. A es isomorfo a A'. El isomorfismo es la transformación β que a cada elemento $a \in A$ le hace corresponder el elemento $\beta(a) = (a_i)_{i\in I}$, con $a_i = a$ para todo $i \in I$.

2. $\Pi_i(A') = A_i = A$, y por lo tanto A es isomorfa a un producto subdirecto de P.

3. En este caso todas las proyecciones son isomorfismos. Esto indica que sería suficiente tomar un solo eje.

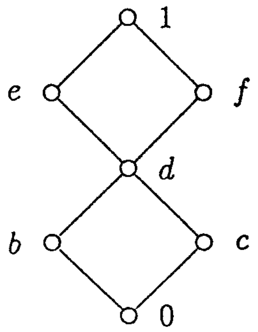
Definición 3.3.2 *Se dice que un álgebra de De Morgan A es* **subdirectamente reducible** *si A es isomorfa a una subálgebra A' de un producto directo $P = \prod_{i\in I} A_i$, en forma tal que:*

1. $\Pi_i(A') = A_i$, *cualquiera que sea $i \in I$.*

2. *Ninguna de las proyecciones es un isomorfismo.*

Un álgebra de De Morgan se dice **subdirectamente irreducible** *si no es subdirectamente reducible.*

Ejemplo 3.3.4 *Sea R' el álgebra de De Morgan indicada a continuación:*



x	0	b	c	d	c	f	1
$\sim x$	1	f	e	d	c	b	0

El álgebra de De Morgan R' es isomorfa a la subálgebra

$$S = \{(0,0),(a,0),(0,a),(a,a),(1,a),(a,1),(1,1)\}$$

del álgebra de De Morgan P indicada en el Ejemplo 3.3.1. S es claramente producto subdirecto de las álgebras de De Morgan $A_1 = A_2$ indicados en el mismo ejemplo y ninguna de las proyecciones (que son funciones suryectivas) de S sobre los ejes son isomorfismos. Por lo tanto R' es subdirectamente reducible.

Probaremos mas adelante que las únicas álgebras de De Morgan subdirectamente irreducibles son isomorfas a M_2, M_3 ó M_4 y que toda álgebra de De Morgan es producto subdirecto de estas álgebras.

4 Construcción de álgebras de De Morgan

4.1 Las contrucciones de Moisil y de Kalman

Gr. C. Moisil [16] indicó la siguiente forma de obtener un álgebra de De Morgan. Dada un álgebra de Boole arbitraria B consideremos el reticulado distributivo acotado $P = B \times B$. Dado $p = (b_1, b_2) \in P$ pongamos por definición $\sim\ p = (-b_2, -b_1)$ donde "$-$" indica el complemento booleano del álgebra de Boole B. Se verifica sin dificultad que P es un álgebra de De Morgan. Claramente si B es un álgebra de De Morgan aplicando la misma construcción se obtiene un álgebra de De Morgan. Si aplicamos esta construción al álgebra de Boole $B = \{0, 1\}$ se obtiene un álgebra de De Morgan isomorfa a M_4.

Vamos a indicar otra construcción de álgebras de De Morgan. Dado un reticulado distributivo acotado $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$, y un elemento $a \in L$, sea

$$L(a) = \{(x, y) \in L \times L : x \wedge y \leq a \leq x \vee y\}.$$

Es claro que:

K1) $(0,1), (1,0) \in L(a)$.

J. Kalman [13] define las siguientes operaciones en $L(a)$:

K2) $(x_1, x_2) \cup (y_1, y_2) = (x_1 \vee y_1, x_2 \wedge y_2)$;

K3) $(x_1, x_2) \cap (y_1, y_2) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \vee y_2)$;

K4) $\sim (x_1, x_2) = (x_2, x_1)$;

y prueba que $(L(a), \cap, \cup, (1,0))$ es un álgebra de De Morgan. Mas precisamente prueba que $L(a)$ es un álgebra de Kleene (noción que definiremos mas adelante). La siguiente construcción de álgebras de De Morgan, indicada por L. Monteiro e I. Viglizzo [35], es una generalización de la indicada por J. Kalman.

Dado un ideal I y un filtro F de un reticulado distributivo acotado $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$, consideremos el siguiente conjunto:

$$M(L, I, F) = \{(a, b) \in L \times L : a \wedge b \in I \text{ and } a \vee b \in F\}.$$

Es claro que si $(a, b) \in M(L, I, F)$ entonces $(b, a) \in M(L, I, F)$. Como $0 \wedge 1 = 0 \in I$ y $0 \vee 1 = 1 \in F$, entonces $(0,1), (1,0) \in M(L, I, F)$. Veamos que $M(L, I, F)$ es cerrado con respecto a las operaciones $\cup$ y $\cap$ definidas por K2) y K3).

Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in M(L, I, F)$, entonces:

(1) $a_1 \wedge a_2 \in I$ (2) $a_1 \vee a_2 \in F$ (3) $b_1 \wedge b_2 \in I$ (4) $b_1 \vee b_2 \in F$.

Como $a_1 \wedge a_2 \wedge b_2 \leq a_1 \wedge a_2$, por (1) obtenemos (5) $a_1 \wedge a_2 \wedge b_2 \in I$. Analogamente, de (3) resulta (6) $b_1 \wedge b_2 \wedge a_2 \in I$. Luego, por (5) y (6):

$$(a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \wedge b_2) = (a_1 \wedge a_2 \wedge b_2) \vee (b_1 \wedge a_2 \wedge b_1) \in I.$$

En forma análoga, de (2) y (4), resulta:

$$(a_1 \vee b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) = (a_1 \vee a_2 \vee b_1) \wedge (a_1 \vee b_1 \vee b_2) \in F.$$

Entonces $(a_1 \vee b_1, a_2 \wedge b_2) = (a_1, a_2) \cup (b_1, b_2) \in M(L, I, F)$.

De un modo similar se prueba que $(a_1 \wedge b_1, a_2 \vee b_2) = (a_1, a_2) \cap (b_1, b_2) \in M(L, I, F)$.

Probemos ahora que $(M(L, I, F), \cap, \cup, (0,1), (1,0))$ es un reticulado distributivo acotado. Para ello usaremos los axiomas indicados por M. Scholander [37].

S1) $(a, b) \cup (1, 0) = (a \vee 1, b \wedge 0) = (1, 0)$.

S2) $(a, b) \cap ((a, b) \cup (c, d)) = (a, b) \cap (a \vee c, b \wedge d) = (a \wedge (a \vee c), b \vee (b \wedge d)) = (a, b)$.

S3) $(a, b) \cap ((c, d) \cup (e, f)) = ((e, f) \cap (a, b)) \cup ((c, d) \cap (a, b))$.
En efceto, $(a, b) \cap ((c, d) \cup (e, f)) = (a, b) \cap (c \vee e, d \wedge f) = (a \wedge (c \vee e), b \vee (d \wedge f))$, y por otro lado, $((e, f) \cap (a, b)) \cup ((c, d) \cap (a, b)) = (e \wedge a, f \vee b) \cup (c \wedge a, d \vee b) = ((e \wedge a) \vee (c \wedge a), (f \vee b) \wedge (d \vee b)) = (a \wedge (c \vee e), b \vee (d \wedge f))$.

Si definimos la operación $\sim$ en $M(L, I, F)$ por K4) entonces $(M(L, I, F), \cap, \cup, \sim)$ es un álgebra de De Morgan. En efecto:

M2) $\sim\sim(a,b) = \sim(b,a) = (a,b)$.

M3) $\sim((a,b)\cap(c,d)) = \sim(a\wedge c, b\vee d) = (b\vee d, a\wedge c) = (b,a)\cup(d,c) = \sim(a,b)\cup\sim(c,d)$.

Definición 4.1.1 *Un elemento c de un álgebra de De Morgan se dice* **un centro** *si $c = \sim c$.*

Observación 4.1.1 *Si $c = (x,y) \in M(L,I,F)$ es un centro: $(x,y) = \sim(x,y) = (y,x)$, luego $x = y$ y como $x\wedge y \in I, x\vee y \in F$, entonces $x \in I, x \in F$ y por lo tanto $x \in I\cap F$. Admás si $x \in I\cap F$, entonces $(x,x) \in M(L,I,F)$ es un centro.*

Observación 4.1.2 *La relación de orden "$\leq$" inducida en $M(L,I,F)$ por la operación $\cap$ es tal que:*

$$(a_1,a_2) \leq (b_1,b_2) \iff a_1 \leq b_1 \text{ y } b_2 \leq a_2.$$

Si notamos con L^* el reticulado dual de L, es claro que $M(L,I,F) \subseteq L\times L^*$.

4.2 Algebras de De Morgan de conjuntos

Vamos a indicar un ejemplo importante de álgebras de De Morgan. La construcción fué obtenida por A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa [3] en 1957.

Observación 4.2.1 *Dado un conjunto no vacío I, toda función $f : I \to I$ que verifica $f(f(x)) = x, \forall\ x \in I$ se denomina* **una involución** *de I. Claramente toda involución es una biyección y además verifica $f^{-1} = f$. Tambien toda biyección f de I que verifica $f^{-1} = f$ es una involución.*
Es bien conocido que si f es una función de I en I entonces:

$$\text{(i)}\ f^{-1}(X\cup Y) = f^{-1}(X)\cup f^{-1}(Y), \quad \text{(ii)}\ f^{-1}(X\cap Y) = f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)$$

y

$$\text{(iii)}\ f^{-1}(\complement X) = \complement f^{-1}(X).$$

Por lo tanto si f es una involución de I tenemos que $\complement f(X) = \complement f^{-1}(X) = f^{-1}(\complement X) = f(\complement X.)$

Proposición 4.2.1 *Sea I un conjunto no vacío, φ una involución de I y $A = 2^I$ el conjunto de todas las partes de I, algebrizado por las operaciones de unión e intersección. Para cada $X \subseteq I$, pongamos $\sim X = \complement\varphi(X) = \complement\varphi^{-1}(X)$, entonces el sistema $(A, I, \cap, \cup, \sim)$ es un álgebra de De Morgan, [3].*

Dem. Es claro que $(A, I, \cap, \cup)$ es un reticulado distributivo con último elemento I. Probemos que la operación $\sim$ verifica:

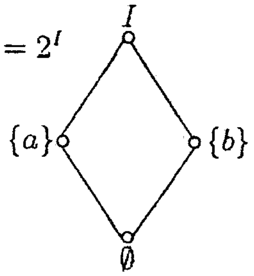
M2) $\underline{\sim(X\cup Y) = \sim X\cap\sim Y.}$
$\sim(X\cup Y) = \complement\varphi^{-1}(X\cup Y) = \complement(\varphi^{-1}(X)\cup\varphi^{-1}(Y)) = \complement\varphi^{-1}(X)\cap\complement\varphi^{-1}(Y) = \sim X\cap\sim Y$.

M3) $\underline{\sim\sim X = X.}$
$\sim\sim X = \complement\varphi^{-1}\complement\varphi^{-1}(X) = \complement\complement\varphi^{-1}\varphi^{-1}(X) = \varphi^{-1}\varphi(X) = X$.

Además $\sim I = \emptyset$ y $\sim\emptyset = I$. ∎

Ejemplo 4.2.1 *Sea $I = \{a,b\}$ y la involución de I definida por $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$ entonces:*

$A = 2^I$



X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	I
$\varphi(X)$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{a\}$	I
$\sim X = \complement\varphi(X)$	I	$\{a\}$	$\{b\}$	$\emptyset$

Figura 4.2.1

luego esta álgebra de De Morgan es isomorfa a M_4.

Definición 4.2.1 *Toda subálgebra del álgebra de De Morgan indicada en la proposición 4.2.1 se dice un* **álgebra de De Morgan de conjuntos.**

Esta noción es importante porque permite indicar ejemplos de álgebras de De Morgan y porque de acuerdo a un teorema de A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa [3] que probaremos a continuación toda álgebra de De Morgan es isomorfa a un álgebra de De Morgan de conjuntos.

Recordemos el siguiente resultado de G. Birkhoff (ver por ejemplo [33]): Dado un reticulado distributivo acotado, no trivial, A sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$ el conjunto de todos los filtros primos de A. Para cada elemento $a \in A$ sea $\mathcal{S}(a) = \{P \in \mathcal{P} : a \in P\}$ luego $\mathcal{S}(a) \in 2^{\mathcal{P}}$.
Se prueba que $\mathcal{S}$ es una función biunívoca que verifica: $\mathcal{S}(0) = \emptyset$; $\mathcal{S}(1) = \mathcal{P}$; $\mathcal{S}(a \vee b) = \mathcal{S}(a) \cup \mathcal{S}(b)$ y $\mathcal{S}(a \wedge b) = \mathcal{S}(a) \cap \mathcal{S}(b)$. Además es claro que $\mathcal{S}$ es una función de A sobre $A' = \mathcal{S}(A)$, luego $\mathcal{S}$ es un isomorfismo, de reticulado, A sobre $A' = \mathcal{S}(A)$.

Dada un álgebra de De Morgan A, por el resultado anterior el reticulado distributivo acotado A es isomorfo al anillo $A' = \mathcal{S}(A)$.
Se trata de definir (ver el próximo párrafo) una involución φ de $\mathcal{P}$ en forma tal que si $X \subseteq \mathcal{P}$ y se define la negación de De Morgan de X por la fórmula $\sim X = \complement\varphi^{-1}(X)$, A' sea cerrado respecto a la operación "$\sim$". De aquí resultará que A' es una subálgebra del álgebra de De Morgan $(2^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}, \cap, \cup, \sim)$.
Además probaremos que: $\mathcal{S}(\sim x) = \sim \mathcal{S}(x)$ luego A' es un álgebra de De Morgan de conjuntos isomorfa al álgebra de De Morgan A.

4.3 La transformación de Birula-Rasiowa

Lema 4.3.1 *Si P es un filtro primo del álgebra de De Morgan A y $\varphi(P) = \complement \sim P$ entonces $\varphi(P)$ es un filtro primo de A y además $\varphi\varphi(P) = P$.* [3]

Dem. Probemos que si P es un filtro primo de A entonces $\sim P$ es un ideal primo de A.

a) $0 \in \sim P$ pues $0 = \sim 1$ y $1 \in P$.

b) Si $a, b \in \sim P$ entonces $a \vee b \in \sim P$.
De $a, b \in \sim P$ resulta que $a = \sim p_1$, $b = \sim p_2$ con $p_1, p_2 \in P$, luego
$a \vee b = \sim (p_1 \wedge p_2) \in \sim P$ pues $p_1 \wedge p_2 \in P$.

c) Si $a \in \sim P$ y $b \leq a$ entonces $b \in \sim P$.
$a = \sim p$ con $p \in P$ y $b \leq a = \sim p$ implica $p \leq \sim b$, luego $\sim b \in P$, esto es $b \in \sim P$.

d) Si $a \wedge b \in \sim P$ entonces $a \in \sim P$ ó $b \in \sim P$.
$a \wedge b = \sim p$ con $p \in P$, luego $\sim a \vee \sim b = p$ y como P es primo $\sim a \in P$ ó $\sim b \in P$, es decir, $a \in \sim P$ ó $b \in \sim P$.

e) $\sim P$ es un ideal propio.
$1 \notin \sim P$, pues si $1 \in \sim P$ entonces $1 = \sim p$ con $p \in P$, luego $0 = \sim 1 = p \in P$, absurdo ya que P es propio.

Como $\sim P$ es un ideal primo entonces $\varphi(P) = \complement \sim P$ es filtro primo.

Si X es una parte cualquiera de un álgebra de De Morgan entonces $\complement \sim X = \sim \complement X$.
$y \in \complement \sim X \;\Leftrightarrow\; y \neq \sim x$, para todo $x \in X \;\Leftrightarrow\; \sim y \notin X \;\Leftrightarrow\; \sim y \in \complement X \;\Leftrightarrow\; y \in \sim \complement X$.
Luego $\varphi\varphi(P) = \varphi(\complement \sim P) = \complement \sim \complement \sim P = P$ ■

A la transformación φ se le dá el nombre de **transformación de Birula-Rasiowa.**

Observemos que si A es un reticulado de De Morgan, no necesariamente acotado, y P un filtro primo de A entonces $\varphi(P) = \complement \sim P$ también es un filtro primo de A. En este caso debemos probar que $\varphi(P) \neq \emptyset$ y $\varphi(P) \neq A$. En efecto si $\complement \sim P = \emptyset$ entonces $\sim P = A$ y por lo tanto $P = \sim A = A$, absurdo. Si $\complement \sim P = A$ entonces $\sim P = \emptyset$, absurdo.

Luego si $X \subseteq I$ y ponemos por definición $\sim X = \complement\varphi^{-1}(X)$, entonces $(2^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}, \cap, \cup, \sim)$ es un álgebra de De Morgan. Resta probar que $\mathcal{S}(\sim a) = \sim \mathcal{S}(a)$.

Teorema 4.3.1 *Sea A un álgebra de De Morgan, no trivial, $\mathcal{P}$ la familia de todos los filtros primos de A, φ la transformación de Birula-Rasiowa definida sobre $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}(a) = \{P \in \mathcal{P} : a \in P\}$ donde $a \in A$. Para cada $X \subseteq \mathcal{P}$ pongamos $\sim X = \complement\varphi(X) = \complement\varphi^{-1}(X)$ entonces $A' = \mathcal{S}(A)$ es una subálgebra del álgebra de De Morgan $(2^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}, \cap, \cup, \sim)$ y además $\mathcal{S}$ es un isomorfismo de A sobre A'* [3].

Dem. Es claro que $(2^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}, \cap, \cup, \sim)$ es un álgebra de De Morgan ya que φ es una involución de $\mathcal{P}$.
$\mathcal{S}(\sim a) = \sim \mathcal{S}(a) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{S}(\sim a) = \complement\varphi(\mathcal{S}(a)) \;\Leftrightarrow\; \complement\mathcal{S}(\sim a) = \varphi(\mathcal{S}(a))$.
$P \in \varphi(\mathcal{S}(a)) \;\Leftrightarrow\; \varphi(P) \in \mathcal{S}(a) \;\Leftrightarrow\; a \in \varphi(P) = \complement \sim P \;\Leftrightarrow\; a \notin \sim P \;\Leftrightarrow\; \sim a \notin P \;\Leftrightarrow\; P \notin \mathcal{S}(\sim a) \;\Leftrightarrow\; P \in \complement\mathcal{S}(\sim a)$. ■

Observación 4.3.1 *a) Si la involución φ definida sobre I es la identidad, es decir, $\varphi(x) = x$ para todo $x \in I$ entonces $\sim X = \complement\varphi^{-1}(X) = \complement\varphi(X) = \complement X$ y en este caso la noción de álgebra de De Morgan se reduce a la noción de álgebra de Boole y naturalmente el teorema de Stone de representación de álgebras de Boole es un caso particular del teorema de A. Bialynicki-Birula y H. Rasiowa para las álgebras de De Morgan.*

b) En el Teorema 4.3.1 se supone que A tiene más de un elemento. Es claro que un álgebra de De Morgan con un elemento se representa por un álgebra de De Morgan de conjuntos, formada por el conjunto $\emptyset$, pero en este caso no hay involución.

5 Imagenes homomórficas

5.1 Imagenes homomórficas de un reticulado de De Morgan

Es claro que si A es un reticulado de De Morgan, todo reticulado de De Morgan A' con un sólo elemento es una imagen homomórfica de A, que se denomina imagen homomórfica trivial.
Vamos ahora a indicar como se determinan las imagenes homomórficas, no triviales, de un reticulado de De Morgan A por medio de una construcción intrínsica efectuada sobre A.

Recordemos que un subconjunto F de un reticulado distributivo A, no necesariamente acotado, se dice un filtro si 1) $F \neq \emptyset$, 2) Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$ y 2) Si $x \in F$ e $y \in A$ verifica que $x \leq y$ entonces $y \in F$. Un filtro P se dice primo, si P es propio, esto es $P \neq A$ y si $x \vee y \in P$ entonces $x \in P$ o $y \in P$.
Sean A y A' reticulados de De Morgan, A' no trivial, $h : A \to A'$ un epimorfismo. Sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ las familias de todos los filtros primos de A y A' respectivamente. Como A' no es trivial entonces $\mathcal{P}'$ no es vacía.

1) Si $P' \in \mathcal{P}'$ entonces $P = h^{-1}(P') \in \mathcal{P}$.

 1a) $P \neq \emptyset$.
 Como $P' \neq \emptyset$ entonces $h^{-1}(p') \in P$ cualquiera que sea $p' \in P'$.

 1b) Si $x, y \in P$ entonces $x \wedge y \in P$.
 De $x, y \in P = h^{-1}(P')$ resulta que $h(x), h(y) \in P'$ y por lo tanto $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y) \in P'$ luego $x \wedge y \in P$.

 1c) Si $x \in P$ y $x \leq y$ entonces $y \in P$.
 De $x \in P = h^{-1}(P')$ resulta que $h(x) \in P'$ y de $x \leq y$ resulta $h(x) \leq h(y)$ luego $h(y) \in P'$ y por lo tanto $y \in P$.

 1d) Si $x \vee y \in P$ entonces $x \in P$ ó $y \in P$.
 De $x \vee y \in P$ resulta que $h(x) \vee h(y) = h(x \vee y) \in P'$ luego como P' es primo tenemos que $h(x) \in P'$ ó $h(y) \in P'$ esto es $x \in P$ ó $y \in P$.

 1e) $P \neq A$.
 Si $A = P = h^{-1}(P')$ entonces $h(x) \in P$ cualquiera que sea $x \in A$ y como h es suryectiva tendríamos que $P' = A'$, absurdo.

Sea $\mathcal{P}_0 = h^{-1}(\mathcal{P}')$ entonces:

2) Si $P \in \mathcal{P}_0$ entonces $\varphi(P) \in \mathcal{P}_0$.
 Por hipótesis $P = h^{-1}(P')$ donde $P' \in \mathcal{P}'$, luego $\varphi(P) = \sim \complement P = \sim \complement h^{-1}(P') = h^{-1}(\sim \complement P')$ y como $\sim \complement P' \in \mathcal{P}'$ tenemos que $\varphi(P) \in \mathcal{P}_0$.

Dado $x \in A$ notaremos $\mathcal{P}_0(x) = \{P \in \mathcal{P}_0 : x \in P\}$, entonces:

3) $h(x) = h(y) \iff \mathcal{P}_0(x) = \mathcal{P}_0(y)$.
 En efecto si $P \in \mathcal{P}_0(x)$ entonces $x \in P = h^{-1}(P')$ con $P' \in \mathcal{P}'$, luego $h(x) \in P'$ y como $h(y) = h(x)$ tenemos que $h(y) \in P'$ esto es $y \in h^{-1}(P') = P$ y por lo tanto $P \in \mathcal{P}_0(y)$. Acabamos así de probar que $\mathcal{P}_0(x) \subseteq \mathcal{P}_0(y)$. La otra inclusión se prueba

en forma análoga.
Supongamos ahora que $\mathcal{P}_0(x) = \mathcal{P}_0(y)$ y que $h(x) \neq h(y)$ entonces (i) $h(x) \not\leq h(y)$ ó (ii) $h(x) \not\leq h(y)$. Si ocurre (i) existe $P' \in \mathcal{P}'$ tal que $h(x) \in P'$ y $h(y) \notin P'$ luego $x \in P = h^{-1}(P')$ e $y \notin P = h^{-1}(P')$ lo que contradice la hipótesis. Si ocurre (ii) la demostracción es análoga.

Definamos sobre A la siguiente relación binaria $x \equiv y \iff h(x) = h(y)$. Por la teoría de reticulados distributivos sabemos que esta relación es de equivalencia y compatible con las operaciones $\wedge$ y $\vee$. Probemos que es compatible con el operador $\sim$. En efecto $x \equiv y \iff h(x) = h(y) \iff \sim h(x) = \sim h(y) \iff h(\sim x) = h(\sim y) \iff \sim x \equiv \sim y$.
Si $x \in A$ sea $C(x) = \{y \in A : y \equiv x\}$ entonces algebrizando el conjunto cociente, que notaremos $A" = A/\equiv$ ó $A" = A/\mathcal{P}_0$ del siguiente modo: $C(x) \wedge C(y) = C(x \wedge y)$, $C(x) \vee C(y) = C(x \vee y), \sim C(x) = C(\sim x)$ es claro que $(A", \wedge, \vee, \sim)$ es un reticulado de De Morgan.

4) <u>$A"$ es isomorfa a A'.</u>
Dado $a' \in A'$ como h es suryectiva existe $a \in A$ tal que $h(a) = a'$. Pongamos por definición $f(C(a)) = h(a) = a'$. Es bien conocido que f está bien definida y que f es una función de $A"$ sobre A'. Se prueba facilmente que $f(C(a) \wedge C(b)) = f(C(a)) \wedge f(C(b))$, $f(C(a) \vee C(b)) = f(C(a)) \vee f(C(b))$ y $f(\sim C(a) = \sim f(C(a))$. Además f es inyectiva. En efecto si $f(C(a)) = f(C(b))$ esto es $h(a) = h(b)$ luego $a \equiv b$ y por lo tanto $C(a) = C(b)$.

Sea $\mathcal{P}_0$ una familia de filtros primos de un reticulado de De Morgan A que verifica:

$$\underline{\text{(H) Si } P \in \mathcal{P}_0 \text{ entonces } \varphi(P) \in \mathcal{P}_0.}$$

Si $a \in A$ sea $\mathcal{P}_0(x) = \{P \in \mathcal{P}_0 : x \in P\}$. Pongamos por definición $x \equiv y$ (*mód.* $\mathcal{P}_0$) $\iff$ $\mathcal{P}_0(x) = \mathcal{P}_0(y)$. Tambien notaremos "$x \equiv y$" en vez de $x \equiv y$ (*mód.* $\mathcal{P}_0$). Se prueba en forma inmediata que "$\equiv$" es una relación de equivalencia. Probemos que es una relación de congruencia.

1) <u>Si $a \equiv b$ y $a' \equiv b'$ entonces $a \wedge a' \equiv b \wedge b'$.</u>
Si $a \wedge b \in P$ con $P \in \mathcal{P}_0$ entonces como $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$ y P es un filtro la condición anterior es equivalente a decir que $a, b \in P$ con $P \in \mathcal{P}_0$ de donde resulta por las hipótesis que $a', b' \in P$ con $P \in \mathcal{P}_0$ lo que equivale a decir $a' \wedge b' \in P$ con $P \in \mathcal{P}_0$.

2) <u>Si $a \equiv b$ y $a' \equiv b'$ entonces $a \vee a' \equiv b \vee b'$.</u>
Si $a \vee b \in P$ con $P \in \mathcal{P}_0$ entonces como P es un filtro primo ello equivale a $a \in P \in \mathcal{P}_0$ ó $b \in P \in \mathcal{P}_0$. Luego de las hipótesis esto es equivalente a $a' \in P \in \mathcal{P}_0$ ó $b' \in P \in \mathcal{P}_0$ y finalmente como P es primo esto equivale a $a' \wedge b' \in P \in \mathcal{P}_0$.

3) <u>Si $a \equiv b$ entonces $\sim a \equiv \sim b$.</u>
$\sim a \in P \in \mathcal{P}_0 \iff a \in \sim P \iff a \notin \complement \sim P = \varphi(P) \in \mathcal{P}_0$ y por la hipótesis resulta que ello es equivalente a $a' \notin \varphi(P)$ lo que equivale a decir $a' \in \sim P \iff \sim a' \in P$.

Algebrizando el conjunto cociente que notaremos $A' = A/\equiv$ ó $A' = A/\mathcal{P}_0$ del siguiente modo: $C(x) \wedge C(y) = C(x \wedge y)$, $C(x) \vee C(y) = C(x \vee y)$, $\sim C(x) = C(\sim x)$ es claro que

$(A', \wedge, \vee, \sim)$ es un reticulado de De Morgan y definiendo $h(a) = C(a)$, $a \in A$ es obvio que h es un epimorfismo de A en A', que se denomina epimorfismo **natural** de A en A'. Acabamos así de demostrar que a partir de una familia filtros primos $\mathcal{P}_0$ de un reticulado de De Morgan A, que verifica la condición (H) (diremos que la familia $\mathcal{P}_0$ es **cerrada** con respecto a φ o que es **invariante** por φ), se obtiene una imagen homomórfica, no trivial, de A y que todas las imagenes homomórficas, no triviales, de un reticulado de De Morgan A se obtienen considerando familias de filtros primos de A, cerradas con respecto a φ. Es claro que si $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(A)$ entonces $A/\mathcal{P}_0 \cong A$ pués $C(x) = \{x\}$ cualquiera que sea $x \in A$.

5.2 Imagenes homomórficas de un álgebra de De Morgan

Vamos ahora a indicar como se determinan las imagenes homomórficas, no triviales, de un álgebra de De Morgan A por medio de una construcción intrínsica efectuada sobre A.

Sean A y A' álgebras de De Morgan, A' no trivial, $h : A \to A'$ un epimorfismo. Se denomina **núcleo** de h al conjunto $N_h = \{x \in A : h(x) = 1'\}$. Sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ las familias de todos los filtros primos de A y A' respectivamente. Si $P' \in \mathcal{P}'$ entonces vimos que $P = h^{-1}(P') \in \mathcal{P}$. Pero en este caso las propiedades 1a) y 1e) se pueden probar del siguiente modo:

1a) $\underline{1 \in P}$
Como $1' \in P'$ y $h(1) = 1'$ entonces $1 \in P = h^{-1}(P')$.

1e) $\underline{0 \notin P}$
Si $0 \in P$ entonces $0' = h(0) \in P'$, absurdo.

Vimos que si $\mathcal{P}_0 = h^{-1}(\mathcal{P}')$, dado $x \in A$ y notando $\mathcal{P}_0(x) = \{P \in \mathcal{P}_0 : x \in P\}$ entonces: $h(x) = h(y) \iff \mathcal{P}_0(x) = \mathcal{P}_0(y)$ y que la relación binaria $x \equiv y \iff h(x) = h(y)$ es una congruencia. Precisamente $A" = A/\equiv$ es un reticulado de De Morgan. Poniendo $1" = C(1)$ entonces $(A", \wedge, \vee, 1")$ es un álgebra de De Morgan isomorfa a A'.

Probemos que $N_h = \bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}_0} P$.
En efecto $x \in \overline{N_h \iff h(x) = 1'} \iff h(x) = 1' = h(1) \iff x \equiv 1 \iff x \in P, \forall P \in \mathcal{P}_0$.

Recíprocamente dada una familia de filtros primos $\mathcal{P}_0$ de un álgebra de De Morgan A que verifica:

$$\underline{\text{(H) Si } P \in \mathcal{P}_0 \text{ entonces } \varphi(P) \in \mathcal{P}_0,}$$

sabemos que ella induce una relación de congruencia, $\equiv$ (módulo $\mathcal{P}_0$), entonces algebrizando $A' = A/\equiv$ $(A' = A/\mathcal{P}_0)$ como antes, A' es un reticulado de De Morgan y poniendo $1' = C(1)$ entonces A' es un álgebra de De Morgan que es una imagen homomórfica de A.

Acabamos así de demostrar que a partir de una familia filtros primos $\mathcal{P}_0$ de un álgebra de De Morgan A, que verifica la condición (H) se obtiene una imagen homomórfica, no trivial, de A. Observemos que $C(1) = \bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}_0} P$ y $C(0) = \complement \bigcup\limits_{P \in \mathcal{P}_0} P$.

Observemos que si A es un álgebra de De Morgan, no trivial, y $\mathcal{P}_0$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ verificando la condición (H) tal que $A/\mathcal{P}_0$ sea un álgebra de De Morgan trivial, entonces $\mathcal{P}_0 = \emptyset$. En efecto si $A/\mathcal{P}_0$ tiene un sólo elemento entonces

$x \equiv y$ $(módulo \mathcal{P}_0)$, $\forall$ $x, y \in A$, esto es $\mathcal{P}_0(x) = \mathcal{P}_0(y)$, $\forall$ $x, y \in A$, y por lo tanto $\mathcal{P}_0(0) = \mathcal{P}_0(1)$, entonces como $P \in \mathcal{P}_0(1)$ para todo $P \in \mathcal{P}(A)$ entonces también $P \in \mathcal{P}_0(0)$ y en consecuencia $0 \in P$, absurdo.

Sabemos que si R, R' son reticulados distributivos, R' no trivial, $h : R \to R'$ es un epimorfismo y F un filtro de R entonces $h(F)$ es un filtro de R', pero si P es un filtro primo de R, $h(P)$ no es necesariamente un filtro primo de R' (ver por ejemplo [33]).
Vamos a demostrar que si h es el epimorfismo natural de A en $A' = A/\equiv$ y $\mathcal{P}'$ es la familia de todos los filtros primos de A' entonces:

$$\text{(I)} \qquad \underline{\mathcal{P}_0 \subseteq h^{-1}(\mathcal{P}'.)}$$

Si $P \in \mathcal{P}_0$ sabemos que $h(P)$ es un filtro de A'. Probemos que $h(P)$ es primo. Supongamos que $a' \vee b' \in h(P)$, donde $a', b' \in A'$, luego $a' \vee b' = h(p) = C(p)$ donde $p \in P$ y $a' = C(a), b' = C(b)$ donde $a, b \in A$. Luego $C(p) = C(a) \vee C(b) = C(a \vee b)$ y por lo tanto $a \vee b \equiv p$ donde $p \in P$, luego de acuerdo con la definición de $\equiv$, $a \vee b \in P$ y como P es primo tenemos que $a \in P$ ó $b \in P$, y por lo tanto $a' = h(a) \in h(P)$ ó $b' = h(b) \in h(P)$. Luego $P' = h(P) \in \mathcal{P}'$. Probemos que $h^{-1}(h(P)) = P$. Sabemos que $P \subseteq h^{-1}(h(P))$. Sea $x \in h^{-1}(h(P))$ luego $h(x) \in h(P)$ y por lo tanto (1) $h(x) = h(p)$ con (2) $p \in P \in \mathcal{P}'$. De (1) resulta que (3) $x \equiv p$ (mód. $\mathcal{P}_0$) y de (2) y (3) $x \in P$.

Observación 5.2.1 *No necesariamente se verifica que* $\underline{\mathcal{P}_0 = h^{-1}(\mathcal{P}'.)}$ *En efecto consideremos el conjunto* $\mathbb{N}$ *de los números naturales.*
Sabemos que el sistema $(B = 2^{\mathbb{N}}, \cap, \cup, \complement, \emptyset, \mathbb{N})$ *es un álgebra de Boole* B *luego un álgebra de De Morgan. Los átomos de* B *son los conjuntos* $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *y por lo tanto los filtros* $F(\{n\})$ *son ultrafiltros de* B *y en consecuencia filtros primos. Consideremos la siguiente familia de filtros primos de* B: $\mathcal{P}_0 = \{F(\{n\})\}_{n \in \mathbb{N}}$. *Si* $X, Y \in B$, *entonces se verifica que* $X \equiv Y$ *(mód.* $\mathcal{P}_0$*)* $\iff$ $X = Y$. *Como* $B \setminus \bigcup\{F(\{n\}) : n \in \mathbb{N}\} = \{\emptyset\}$, *entonces* $C(\emptyset) = \{\emptyset\}$. *Supongamos ahora que* $X \neq Y$ *y que* $X \equiv Y$ *(mód.* $\mathcal{P}_0$*) esto es que (1)* $\mathcal{P}_0(X) = \mathcal{P}_0(Y)$. *Sea* $n \in X$ *luego* $\{n\} \subseteq X$ *y por lo tanto* $X \in F(\{n\}) \in \mathcal{P}_0$ *luego* $F(\{n\}) \in \mathcal{P}_0(X)$ *luego por (1) resulta* $F(\{n\}) \in \mathcal{P}_0(Y)$ *esto es* $Y \in F(\{n\})$ *luego* $\{n\} \subseteq Y$ *y por lo tanto* $n \in Y$. *En forma análoga se prueba que* $Y \subseteq X$.
Luego el epimorfismo natural $h : B \to B' = B/\mathcal{P}_0$ *es la identidad ya que* $h(X) = C(X) = X$, *y por lo tanto* h *es un isomorfismo. La familia de los filtros primos de* B' *está formada por los ultrafiltros de* $\mathcal{P}_0$ *mas los ultrafiltros no principales. Es claro que el conjunto* I *de las partes finitas de* $\mathbb{N}$ *es un ideal de* $B' \cong B$ *luego existe un ideal maximal* M *de* B' *que contiene a* I *y por lo tanto* $U = \complement M$ *es un ultrafiltro, luego un filtro primo de* B' *que no es principal. Además* $h^{-1}(U) = U \notin \mathcal{P}_0$.

Observación 5.2.2 *1) Si* A *es un álgebra de De Morgan finita, no trivial, y* F *un filtro principal de* A, *esto es* $F = F(x) = [x) = \{y \in A : x \leq y\}$ *con* $x \in A$. *Es bien conocido que un filtro principal* $F(p)$ *es primo si y solo si* $p \in \Pi = \Pi(A)$, *donde con* $\Pi(A)$ *indicamos el conjunto de todos los elementos primos de* A.
Probemos que $\sim F(x) = I(\sim x)$, *cualquiera que sea* $x \in A$.
En efecto si $y \in \sim F(x)$, *esto es* $y = \sim f$ *con* $x \leq f$ *entonces* $y = \sim f \leq \sim x$ *y por lo tanto* $y \in I(\sim x)$.
Recíprocamente, si $y \in I(\sim x)$ *entonces* $y \leq \sim x$ *esto implica que* $x \leq \sim y$, *de donde resulta* $\sim y \in F(x)$, *es decir,* $y \in \sim F(x)$.
Luego si $p \in \Pi$ *entonces* $\varphi([p)) = \complement \sim [p) = \complement(\sim p]$.

2) Si $\mathcal{P}_0 = \{P_1, P_2, \dots, P_t\}$ una familia, no vacía, de filtros primos de A invariante por φ entonces para cada i, $i = 1, 2, \dots, t$: $P_i = F(p_i)$ donde $p_i \in \Pi$. Tenemos así un conjunto $\Pi_0 = \{p_1, p_2, \dots, p_t\} \subseteq \Pi$.
Dado $x \in A$ pongamos $\Pi_0(x) = \{p \in \Pi_0 : p \leq x\}$. En este caso la relación de congruencia indicada anteriormente "$\equiv$" está definida del siguiente modo:
$x \equiv y \iff \Pi_0(x) = \Pi_0(y)$. Notaremos tambien A/Π_0 en vez de $A/\mathcal{P}_0$.
Si $A' = A/\Pi_0$, $\Pi' = \Pi(A')$ el conjunto ordenado de los elementos primos de A', y h el epimorfismo natural de $A \to A'$ definido por $h(x) = C(x)$, entonces la función h restringida a Π_0 establece un isomorfismo de orden entre los conjuntos Π_0 y Π', esto es $\Pi(A/\Pi_0) \cong \Pi_0$. En efecto:

a) La restricción de h al conjunto Π_0, es una función suryectiva de Π_0 en Π'.
Si $p_0 \in \Pi_0$ entonces $P_0 = [p_0) \in \mathcal{P}_0$. En (I) vimos que $h(P_0) \in \mathcal{P}'$ luego $h(P_0) = [p')$ con $p' \in \Pi' = \Pi(A')$. Pongamos $h(p_0) = p'$. Dc $p' \in \Pi'$, resulta que como h es una suryección existe $y \in A$ tal que $h(y) = C(y) = p'$. Sea $X = \{x \in A : h(x) = p'\}$. Es claro que el conjunto X verifica " Si $x, y \in X$ entonces $x \wedge y \in X$". Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $p_0 = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$, luego $p_0 \in X$. Vamos a demostrar que $p_0 \in \Pi$. Si $p_0 = 0$ entonces $p' = h(p) = h(0) = 0'$, absurdo. Supongamos que $p_0 = a \vee b$, entonces $p' = h(p_0) = C(p_0) = C(a) \vee C(b)$ y como $p' = C(p_0) \in \Pi'$ entonces $p' = C(p) = C(a) = h(a)$ ó $p' = C(p) = C(b) = h(b)$, luego $a \in X$ ó $b \in X$. Si $a \in X$ entonces $p_0 \leq a$ y de $a \leq a \vee b = p_0$ se deduce $p_0 = a$. Del mismo modo si $b \in X$ se concluye que $p_0 = b$. Luego $p_0 \in \Pi$.
Vamos a demostrar mas precisamente que $p_0 \in \Pi_0$.
Sea $\Pi_0(p_0) = \{q \in \Pi_0 : q \leq p_0\}$. Si $\Pi_0(p_0) = \emptyset$ entonces $p_0 \equiv 0$ (mód. Π_0) y en consecuencia $h(p_0) = h(0) = C(0) = 0'$, contradicción, luego $\Pi_0(p_0) = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$. Sea $x = \bigvee_{i=1}^{s} q_i$. Es claro que $x \equiv p_0$ (mód. Π_0), luego $x \in X$, de donde resulta por la definición de p_0 que $p_0 \leq x = \bigvee_{i=1}^{s} q_i$, y como p_0 es primo existe un índice i, $1 \leq i \leq s$ tal qu e $p_0 \leq q_i$. Además como $q_i \leq p_0$ tenemos finalmente que $p_0 = q_i \in \Pi_0$.

b) Si $p_1, p_2 \in \Pi_0$ son tales que $p_1 \leq p_2$ entonces $h(p_1) \leq h(p_2)$.
En efecto de $p_1 \leq p_2$ resulta que $p_1 = p_1 \wedge p_2$, luego $C(p_1) = C(p_1) \wedge C(p_2)$ y en consecuencia $h(p_1) = C(p_1) \leq C(p_2) = h(p_2)$.

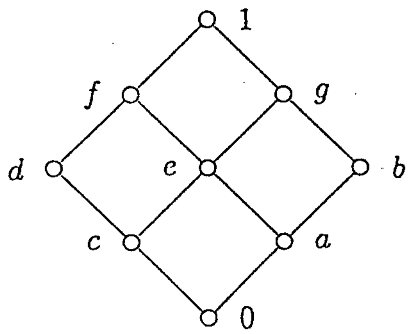
c) Si $p_1, p_2 \in \Pi_0$ son tales que $h(p_1) = h(p_2)$ entonces $p_1 = p_2$.
Como $h(p_1) = h(p_2)$ esto es $C(p_1) = C(p_2)$, entonces $p_1 \equiv p_2$ (mód. Π_0), esto es $\Pi_0(p_1) = \Pi_0(p_2)$ de donde resulta que $p_1 \leq p_2$ y $p_2 \leq p_1$, luego $p_1 = p_2$.

3) Pueden existir dos familias de filtros primos $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ de A invariantes por φ tales que $\mathbf{Q}_1 \neq \mathbf{Q}_2$, y que $A/\mathbf{Q}_1$ sea isomorfa a $A/\mathbf{Q}_2$. Por ejemplo si $\mathbf{Q}_1 = \{P_1\}$ y $\mathbf{Q}_2 = \{P2\}$, donde P_1 y P_2 son dos filtros primos de A tales que $P_1 \neq P_2$, $\varphi(P_1) = P_1$, $\varphi(P_2) = P_2$ entonces las álgebras de De Morgan $A/\mathbf{Q}_1$ y $A/\mathbf{Q}_2$ son isomorfas al álgebra de De Morgan $\mathbf{M}_2$.

Vamos a indicar diversas álgebras de De Morgan y determinaremos todas las imagenes homomórficas, no triviales, de cada una de ellas.

1)

A



x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\sim x$	1	f	d	g	b	e	a	c	0

En este caso $\Pi(A) = \{a, b, c, d\}$ luego

$$\mathcal{P}(A) = \{P_1 = F(a), P_2 = F(b), P_3 = F(c), P_4 = F(d)\}$$

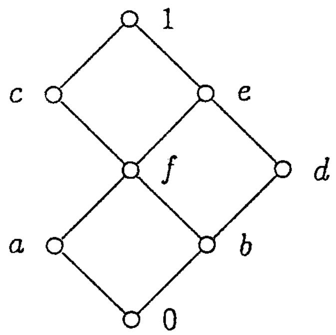
y

P	P_1	P_2	P_3	P_4
$\varphi(P)$	P_2	P_1	P_4	P_3

Por lo tanto las familias de filtros primos cerradas por φ son $\{P_1, P_2\}$, $\{P_3, P_4\}$ y $\mathcal{P}(A)$. En los dos primeros casos el cociente es isomorfo a $\mathbf{M}_3$ y $A/\mathcal{P}(A)$ es isomorfo a A.

2)

A



x	0	a	b	c	d	e	f	1
$\sim x$	1	c	e	a	d	b	f	0

En este caso $\Pi(A) = \{a, b, c, d\}$ luego

$$\mathcal{P}(A) = \{P_1 = F(a), P_2 = F(b), P_3 = F(c), P_4 = F(d)\}$$

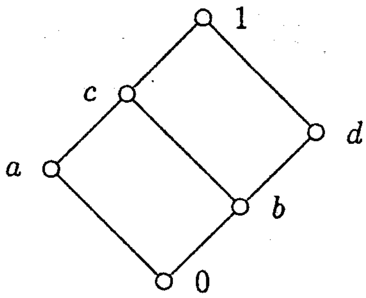
y

P	P_1	P_2	P_3	P_4
$\varphi(P)$	P_4	P_3	P_2	P_1

Por lo tanto las familias de filtros primos cerradas por φ son $\{P_1, P_4\}$, $\{P_2, P_3\}$ y $\mathcal{P}(A)$. En el primer caso el cociente es isomorfo a $\mathbf{M}_4$ en el segundo isomorfo a $\mathbf{M}_3$ y $A/\mathcal{P}(A)$ es isomorfo a A.

3)

A



x	0	a	b	c	d	1
$\sim x$	1	d	c	b	a	0

En este caso $\Pi(A) = \{a, b, c\}$ luego $\mathcal{P}(A) = \{P_1 = F(a), P_2 = F(b), P_3 = F(c)\}$ y

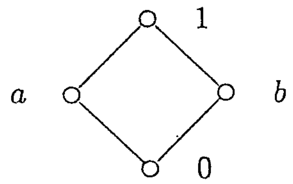
P	P_1	P_2	P_3
$\varphi(P)$	P_1	P_3	P_2

Por lo tanto las familias de filtros primos cerradas por φ son $\{P_1\}$, $\{P_2, P_3\}$ y $\mathcal{P}(A)$. En el primer caso el cociente es isomorfo a M_2 en el segundo caso el cociente es isomorfo a M_3 y $A/\mathcal{P}(A)$ es isomorfo a A.

6 Sistema determinante de un álgebra de De Morgan finita

Dada un álgebra de De Morgan A, finita no trivial, sabemos que el conjunto $\Pi = \Pi(A)$ de sus elementos primos determina el reticulado distributivo A, a menos de isomorfismos. Pero Π no siempre determina el álgebra de De Morgan A pues sobre un mismo reticulado distributivo pueden existir dos negaciones de Morgan distintas. Es lo que ocurre en el siguiente ejemplo:

A



x	0	a	b	1
$\sim x$	1	a	b	0
$-x$	1	b	a	0

El reticulado A con cualquiera de las negaciones indicadas es un álgebra de Morgan y para ambas álgebras el conjunto Π tiene el siguiente diagrama:

$\Pi(A)$

Entonces para recuperar el álgebra de De Morgan A a partir de $\Pi(A)$ es necesario dar alguna información suplementaria sobre $\Pi(A)$.

Si A es un álgebra de De Morgan finita, no trivial, entonces la transformación φ de Birula-Rasiowa de $\mathcal{P}(A)$ en $\mathcal{P}(A)$ induce una transformación $\psi : \Pi(A) \to \Pi(A)$, que seguiremos denominando transformación de Birula-Rasiowa, del siguiente modo: dado $P \in \mathcal{P}(A)$, como A es un reticulado distributivo, no trivial, sabemos que $P = F(p) = \{x \in A : p \leq x\}$ donde $p \in \Pi(A)$.

Definición 6.0.1 *$\psi(p) = q$ sí y sólo sí $\varphi(F(p)) = F(q)$, donde $q \in \Pi(A)$.*

Lema 6.0.1 *La función ψ tiene las siguientes propiedades:*

I1) *$\psi(\psi(p)) = p$, cualquiera que sea $p \in \Pi = \Pi(A)$.*

I2) *$p \leq q$ sí y sólo sí $\psi(q) \leq \psi(p)$, donde $p, q \in \Pi$.*

Dem.

I1) Si $p \in \Pi$ entonces $F(p) \in \mathcal{P}(A)$. Sabemos que (1) $\varphi(\varphi(F(p))) = F(p)$. Sea (2) $\varphi(F(p)) = F(q)$ donde $q \in \Pi$, luego por (1) tenemos (3) $\varphi(F(q)) = F(p)$. De (2) resulta que (4) $\psi(p) = q$ y de (3) resulta que (5) $\psi(q) = p$. Luego de (4) y (5): $p = \psi(q) = \psi(\psi(p))$.

I2) Sean $p, q \in \Pi$ tales que $p \leq q$ luego $F(q) \subseteq F(p)$ y como $F(p), F(q) \in \mathcal{P}(A)$ sabemos que $F(p') = \varphi(F(p)) \subseteq \varphi(F(q)) = F(q')$, donde $p', q' \in \Pi$, luego $q' \leq p'$. Pero por definición $\psi(q) = q'$ y $\psi(p) = p'$ luego $\psi(q) \leq \psi(p)$.

Sean $p, q \in \Pi$ tales que $\psi(q) \leq \psi(p)$ luego $F(\psi(p)) \subseteq F(\psi(q))$. Luego como $\varphi(F(p)) = F(\psi(p))$ y $\varphi(F(q)) = F(\psi(q))$ por (1) tenemos que $\varphi(F(p)) \subseteq \varphi(F(q))$ y por lo tanto $F(q) \subseteq F(p)$ esto es $p \leq q$.

■

Esto significa que ψ es un antiisomorfismo del conjunto ordenado $\Pi(A)$ y que ψ es una involución de $\Pi(A)$. Por lo tanto el conjunto ordenado $\Pi(A)$ es isomorfo a su dual $\Pi^*(A)$. Diremos, siguiendo a A. Monteiro, que el par $(\Pi(A), \psi)$ es el **sistema determinante** del álgebra A. [20], [22], [27]. Observemos que $\varphi(F(p)) = F(\psi(p))$.

Definición 6.0.2 *Denominaremos* **espacio de Birula–Rasiowa** *(ó* espacio B-R*) a todo par (X, α) formado por un conjunto ordenado X y una función $\alpha : X \to X$ que verifica las condiciones* I1) *e* I2)*.*
Dos espacios B-R (X, α), (Y, β) se dirán isomorfos si existe un isomorfismo de orden $f : X \to Y$ tal que $f(\alpha(x)) = \beta(f(x))$, $\forall\, x \in X$. [34]

Observación 6.0.3 *1) De acuerdo con la definición anterior resulta que si A es un álgebra de De Morgan finita entonces $(\Pi(A), \psi)$ es un espacio B-R.*

2) Si (X, α) es un conjunto espacio B-R, e Y un conjunto ordenado isomorfo a X entonces podemos definir sobre Y una función β que verifica I1) e I2).
En efecto sea $f : X \to Y$ un isomorfismo de orden. Dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Pongamos por definición $\beta(y) = f(\alpha(x))$.
(I1) $\underline{\alpha(\alpha(y)) = y, \forall\, y \in Y}$.
En efecto dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Por definición $\beta(y) = f(\alpha(x)) = y' \in Y$. Luego existe $x' \in X$ tal que $f(x') = y'$, por lo tanto tenemos $f(\alpha(x)) = y' = f(x')$ y como f es biunívoca resulta $\alpha(x) = x'$ luego $x = \alpha(\alpha(x)) = \alpha(x')$ y por lo tanto $\beta(\beta(y)) = \beta(f(\alpha(x)) = \beta(y') = f(\alpha(x')) = f(x) = y$.
Si $y_1, y_2 \in Y$ verifican $y_1 \leq y_2$ entonces $\beta(y_2) \leq \beta(y_1)$.
Como $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ donde $x_1, x_2 \in X$ entonces tenemos que $f(x_1) \leq f(x_2)$ y como f es un isomorfismo resulta $x_1 \leq x_2$ y en consecuencia $\alpha(x_2) \leq \alpha(x_1)$ y por lo tanto $\beta(y_2) = f(\alpha(x_2)) \leq f(\alpha(x_1)) = \beta(y_1)$.
Si $y_1, y_2 \in Y$ verifican $\beta(y_2) \leq \beta(y_1)$ entonces $y_1 \leq y_2$.
Por hipótesis (1) $f(\alpha(x_2)) \leq f(\alpha(x_1))$ donde $f(x_2) = y_2$, $f(x_1) = y_1$ y $x_1, x_2 \in X$ luego de (1) resulta por ser f un isomorfismo que $\alpha(x_2) \leq \alpha(x_1)$ y como α verifca I2 tenemos que $x_1 \leq x_2$ y en consecuencia $y_1 = f(x_1) \leq f(x_2) = y_2$.

3) Si X es un conjunto ordenado y f una función de X en X que verifica:

$$\text{I1)}\quad \underline{f(f(x)) = x,\ \forall\, x \in X}$$

e

$$\text{I3)}\quad \underline{\text{Si } x, y \in X \text{ son tales que } x \leq y \text{ entonces } f(y) \leq f(x)}$$

entonces f *también verifica*

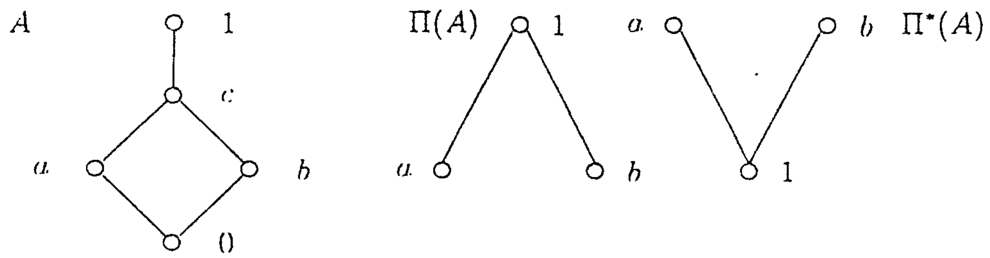
$$\underline{\text{Si } x, y \in X \text{ son tales que } f(y) \leq f(x) \text{ entonces } x \leq y.}$$

En efecto si $f(y) \leq f(x)$ entonces por I3) *tenemos que $f(f(x)) \leq f(f(y))$ de donde resulta por* I1) *que $x \leq y$.*
Luego toda función que verifica I1) *e* I3) *también verifica* I1) *e* I2). *Por lo tanto para indicar un espacio de B-R $(\Pi(A), \psi)$ basta indicar una función isótona de Π en Π de período 2.*

4) *Las condiciones* I1) *e* I3) *son independientes. En efecto consideremos la cadena $X = \{a, b, c\}$ donde $a < b < c$. Sea $f : X \to X$ definida por $f(a) = b$, $f(b) = a$ y $f(c) = c$, luego se verifica* I1) *y no se verifica* I3) *dado que $a \leq c$ y $c = f(c) \not\leq f(a) = b$. Sea $g : X \to X$ definida por $g(a) = c$, $g(c) = b$ y $g(b) = b$, entonces $g(g(a)) = g(c) = b \neq a$ y se verifica* I3) *pués $a \leq b$ y $g(b) = b \leq c = g(a)$, $a \leq c$ y $g(c) = b \leq c = g(a)$, $b \leq c$ y $g(c) = b \leq b = g(b)$.*

Un conjunto ordenado se dice **simétrico** si es isomorfo a su dual. Luego si un reticulado distributivo finito admite una estructura de álgebra de De Morgan el conjunto ordenado de sus elementos primos es isomorfo a su dual.

En la figura siguiente indicamos un reticulado distributivo A, y los conjuntos $\Pi(A)$ y $\Pi^*(A)$:



Como $\Pi(A)$ no es isomorfo a $\Pi^*(A)$ entonces sobre A no se puede definir una estructura de álgebra de De Morgan.

Lema 6.0.2 *Si A es un reticulado distributivo acotado y $\sim_1$ y $\sim_2$ son negaciones de De Morgan sobre A entonces $\sim_1 = \sim_2 \iff \varphi_1 = \varphi_2$ donde φ_1 y φ_2 son las transformaciones de Birula-Rasiowa asociadas a $\sim_1$ y $\sim_2$ respectivamente.*

Dem. $\Rightarrow$) $\varphi_1(P) = \complement \sim_1 (P) = \complement \sim_2 P = \varphi_2(P)$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\varphi_1 = \varphi_2$ y que $\sim_1 \neq \sim_2$ entonces existe $a \in A$ tal que $\sim_1 a \neq \sim_2 a$ luego (1) $\sim_1 a \not\leq \sim_2 a$ o (2) $\sim_2 a \not\leq \sim_1 a$. Supongamos que ocurre (1), entonces existe un filtro primo P tal que (3) $\sim_1 a \in P$ y (4) $\sim_2 a \notin P$. De (3) resulta $a \in \sim_1 P$ y por lo tanto (5) $a \notin \complement \sim_1 (P) = \varphi_1(P)$. De (4) resulta $a \notin \sim_2 P$ y por lo tanto (6) $a \in \complement \sim_2 (P) = \varphi_2(P)$. (5) y (6) contradicen la hipótesis. Si ocurre (2) la demostración es análoga. ■

Vamos a indicar como se puede determinar la negación de De Morgan de un elemento de un álgebra de De Morgan, finita, A cuando se conoce la transformación ψ de Birula-Rasiowa. Como $\sim 1 = 0$, y en consecuencia $\sim 0 = 1$, sólo interesa saber determinar $\sim x$, a partir de ψ, cuando $x \neq 1$.

Lema 6.0.3 *Dado un filtro primo P de un álgebra de De Morgan A entonces las siguientes condiciones son equivalentes: (1) $\sim x \in P$, (2) $x \notin \varphi(P)$.*

Dem. $\sim x \in P \iff x \in \sim P \iff x \notin \complement \sim P = \varphi(P)$. ■

Observación 6.0.4 *a) Recordemos que si: A es un reticulado distributivo entonces:*

$$F(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigcap_{i\in I} F(x_i)$$

y que todo filtro propio de A es intersección de filtros primos, y si A es finito entonces los filtros primos son de la forma $F(p)$ con $p \in \Pi(A)$. Luego si F es un filtro propio de A, $F = F(x) \neq A$ entonces F es la intersección de una familia $\{P_i\}_{i\in I}$ de filtros primos, esto es $F = \bigcap_{i\in I} P_i$. Por lo tanto como cada $P_i = F(p_i)$ con $p_i \in \Pi(A), i \in I$ tenemos que $F(x) = \bigcap_{i\in I} F(p_i) = F(\bigvee_{i\in I} p_i)$ luego $x = \bigvee_{i\in I} p_i$.

b) Si A es finito e $y \in A$, $y \neq 0$ entonces sabemos que $y = \bigvee\{p \in \Pi(A) : p \leq y\}$ luego $F(y) = \bigcap\{F(p) : p \in \Pi(A), p \leq y\} = \bigcap\{F(p) \in \mathcal{P}(A) : y \in F(p)\}$.

Teorema 6.0.1 *Si $(A, \sim)$ es un álgebra de De Morgan finita, no trivial, y si $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ es su sistema determinante y si $x \neq 1$ entonces:*

$$\sim x = \bigvee\{p \in \Pi : \psi(p) \not\leq x\}.$$

[19], [23], [27].

Dem. Si $x \neq 1$, entonces $\sim x \neq 0$, luego por la Observación 6.0.4, b)

$$F(\sim x) = \bigcap\{F(p) \in \mathcal{P}(A) : \sim x \in F(p)\}$$

y por el Lema 6.0.3 tenemos

$$F(\sim x) = \bigcap\{F(p) \in \mathcal{P}(A) : \sim x \in F(p)\} = \bigcap\{F(p) \in \mathcal{P}(A) : x \notin \varphi(F(p))\}.$$

Pero si $P \in \mathcal{P}(A)$ entonces $P = F(p)$ con $p \in \Pi(A)$ luego $\varphi(P) = \varphi(F(p)) = F(\psi(p))$, entonces $x \notin \varphi(P) \iff x \notin F(\psi(p)) \iff \psi(p) \not\leq x$ y en consecuencia $F(\sim x) = \bigcap\{F(p) : P \in \Pi(A), \psi(p) \not\leq x\}$ lo que equivale a

$$\sim x = \bigvee\{p \in \Pi(A) : \psi(p) \not\leq x\}.$$

■

Sea $\Pi_x(A) = \{p \in \Pi : p \leq x\}$, también notaremos Π_x a este conjunto. Es bien conocido que si $x \neq 0$ entonces $x = \bigvee\{p : p \in \Pi_x\}$

Lema 6.0.4 *Si $(A, \sim)$ es un álgebra de De Morgan finita, no trivial, $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ su sistema determinante y $x \neq 1$ entonces:*

$$\sim x = \bigvee\{p \in \Pi : p \in \psi(\Pi \setminus \Pi_x)\} = \bigvee\{p : p \in \Pi \setminus \psi(\Pi_x)\} = \bigvee\{\psi(p) : p \in \Pi \setminus \Pi_x\}.$$

L. Monteiro (1968).

Dem. Como $x \neq 1$ entonces $\sim x \neq 0$ y por lo tanto $\sim x = \bigvee\{q : q \in \Pi_{\sim x}\}$. Observemos que $\Pi \neq \Pi_x$ pués caso contrario $x = 1$, luego $\Pi \setminus \Pi_x \neq \emptyset$. Sea $Y = \{\psi(p) : p \in \Pi \setminus \Pi_x\}$. Probemos que $Y = \Pi_{\sim x}$. En efecto si $q \in \Pi_{\sim x}$ entonces (1) $q \in \Pi$ y (2) $q \leq \sim x$. Como ψ es una función suryectiva de Π en Π de (1) resulta que existe $p \in \Pi$ tal que (3) $\psi(p) = q$. De (2) resulta que $\sim x \in F(q)$ entonces por el Lema 6.0.3 tenemos:(4) $x \notin \varphi(F(q))$. De (3) resulta que (5) $\varphi(F(q)) = F(q)$. De (4) y (5) resulta $x \notin F(p)$ esto es $p \not\leq x$ y como $p \in \Pi$ tenemos que (6)$p \in \Pi \setminus \Pi_x$. De (3) y (6) resulta $q \in Y$. Sea $q \in Y$ luego $q = \psi(p)$ con $p \in \Pi \setminus \Pi_x$. Si $q \not\leq \sim x$ entonces $\sim x \notin F(q)$ y por el Lema 6.0.3, $x \in \varphi(F(q)) = F(p)$ y en consecuencia $p \leq x$ y por lo tanto $p \in \Pi_x$, absurdo. Luego $q \leq \sim x$ y por lo tanto $q \in \Pi_{\sim x}$. Acabamos así de probar que:

$$\sim x = \bigvee\{\psi(p) : p \in \Pi \setminus \Pi_x\}.$$

Como ψ es una biyección entonces $\psi(\Pi \setminus \Pi_x) = \psi(\Pi \cap \complement\Pi_x) = \psi(\Pi) \cap \psi(\complement\Pi_x) = \Pi \cap \complement\psi(\Pi_x) = \Pi \setminus \psi(\Pi_x)$. Entonces: $\bigvee\{p \in \Pi : p \in \psi(\Pi \setminus \Pi_x)\} = \{p : p \in \Pi \setminus \psi(\Pi_x)\}$.

Observemos que si $x = 0$ entonces $\Pi_0 = \emptyset$ luego $\Pi \setminus \Pi_0 = \Pi$ y en consecuencia $\psi(\Pi \setminus \Pi_0) = \psi(\Pi) = \Pi$, y por lo tanto

$$\sim 0 = \bigvee\{\psi(p) : p \in \Pi \setminus \Pi_0\} = \bigvee\{\psi(p) : p \in \Pi\} = \bigvee\{p : p \in \Pi\} = 1.$$

■

Recordemos el siguiente resultado de la teoría de reticulados

Teorema 6.0.2 *Si A y A' son reticulados distributivos finitos tales que $\Pi(A)$ y $\Pi(A')$ son conjuntos ordenados isomorfos entonces A y A' son isomorfos.*

Dem. Para los detalles de la demostración, ver por ejemplo [33]. Solamente indicaremos como se puede definir un isomorfismo entre A y A'. Si $f : \Pi(A) \to \Pi(A')$ es un isomorfismo de orden definimos $H : A \to A'$ por:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \bigvee\{f(p) : p \in \Pi(A), p \leq x\}, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

■

Teorema 6.0.3 *Si $(A, \sim)$ y $(A', \sim')$ son álgebras de De Morgan finitas, no triviales, tales que sus sistemas determinantes $(\Pi = \Pi(A), \psi)$, $(\Pi' = \Pi(A'), \psi')$ son espacios de Birula–Rasiowa isomorfos, entonces las álgebras de De Morgan $(A, \sim)$ y $(A', \sim')$ son isomorfas.*

Dem. Sea $f : \Pi \to \Pi'$ un isomorfismo de orden tal que $f(\psi(p)) = \psi'(f(p))$, para todo $p \in \Pi$. Ya sabemos que la función $H : A \to A'$ definida como en el Teorema 6.0.2 es un isomorfismo de reticulado.
Probemos que: (*) $H(\sim x) = \sim H(x)$ para todo $x \in A$. Si $x = 0$ entonces $H(\sim 0) = H(1) = 1 = \sim 0 = \sim H(0)$. Supongamos ahora que $x \neq 0$, entonces:

$$H(\sim x) = H(\bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi \setminus \Pi_x\} =$$

$$\bigvee\{H(\psi(q)) : q \in \Pi \setminus \Pi_x\} = \bigvee\{f(\psi(q)) : q \in \Pi \setminus \Pi_x\},$$

y

$$\sim H(x) = \bigvee\{\psi'(q') : q' \in \Pi' \setminus \Pi_{H(x)}\}.$$

Sean $U = \{f(\psi(q)) : q \in \Pi \setminus \Pi_x\}$ y $V = \{\psi'(q') : q' \in \Pi' - \Pi_{H(x)}\}$. Probemos que $U = V$, de donde resultará (*).
Si $u \in U$ entonces $u = f(\psi(q))$, donde (1) $q \in \Pi \setminus \Pi_x$, luego $u = \psi'(f(q)) = \psi'(q')$ donde $q' = f(q) \in \Pi'$. Sabemos que

$$(2) \ \ H(x) = H(\bigvee\{s : s \in \Pi_x\}) = \bigvee\{H(s) : s \in \Pi_x\} = \bigvee\{f(s) : s \in \Pi_x\}.$$

Si $q' \in \Pi_{H(x)}$, entonces $q' \in \Pi'$ y $q' \leq H(x)$, luego por (2) existe $s_0 \in \Pi$, (3) $s_0 \leq x$, tal que $f(q) = q' \leq f(s_0)$, y por lo tanto:

$$f(\psi(s_0)) = \psi'(f(s_0)) \leq \psi'(f(q)) = f(\psi(q)),$$

y como f es un isomorfismo de orden $\psi(s_0) \leq \psi(q)$, luego (4) $q \leq s_0$.
De (3) y (4) tenemos $q \leq x$ y como $q \in \Pi$, entonces $q \in \Pi_x$, contradicción. Luego $q' \in \Pi' \setminus \Pi_{H(x)}$ y por lo tanto $u = \psi'(q') \in V$. Recíprocamente si $v \in V$, entonces $v = \Psi'(q')$ donde $q' \in \Pi' \setminus \Pi_{H(x)}$. Como f es una función suryectiva entonces $q' = f(q)$, donde $q \in \Pi$, luego $v = \psi'(f(q)) = f(\psi(q))$. Si $q \in \Pi_x$ entonces $q \leq x$, luego $q' = f(q) = H(q) \leq H(x)$ esto es $q' \in \Pi_{H(x)}$, contradicción. ∎

Corolario 6.0.1 *Toda álgebra de De Morgan finita, no trivial,* $(A, \sim)$ *está determinada, a menos de isomorfismos, por su sistema determinante* $(\Pi = \Pi(A), \psi)$.

Este resultado fue enunciado por A. Monteiro en 1960, [19] y su demostración fue presentado en un curso realizado en 1962 en la Universidad Nacional del Sur, [23] (ver tambien [27]). La demostración indicada en esa oportunidad era mucho mas complicada que la presentada precedentemente.

Recordemos que dado un conjunto ordenado X, se dice que un subconjunto Y de X es una sección inferior de X si $Y = \emptyset$ ó Y verifica "Si $y \in Y$ y $x \leq y$ entonces $x \in Y$".

Teorema 6.0.4 *Dado un espacio B-R* (X, α) *donde* X *es finito existe un álgebra de De Morgan* $\mathcal{A}$ *tal que su sistema determinante* $(\Pi(\mathcal{A}), \psi)$ *es isomorfo a* (X, α).

Dem. Este teorema se debe a A. Monteiro y su demostración fue indicada en un curso de 1960, [18]. La demostración que indicamos a continuación se debe a L. Monteiro [34] que indicó en 1981 un resultado mas general y con demostraciones mas sencillas.
Sea $\mathcal{S}(X)$ el conjunto de todas las secciones inferiores del conjunto ordenado X. Sabemos por un teorema de Birkhoff que $(2^X, \cap, \cup, \emptyset, X)$ es un reticulado distributivo y que $\mathcal{A} = \mathcal{S}(X)$ es un $(0,1)$-subreticulado de 2^X cuyo conjunto de elementos primos $\Pi(\mathcal{A}) = \{(x] : x \in X\}$ es isomorfo a X. El isomorfismo en cuestión se define por $f(x) = (x], \forall x \in X$. Como α es una involución de X entonces de acuerdo con la Proposición 4.2.1 si definimos $\sim Y = \complement_X(\alpha(Y))$ para cada $Y \subseteq X$ entonces 2^X es un álgebra de De Morgan de conjuntos.
Probemos que $\mathcal{A}$ es una subálgebra de 2^X esto es que: Si $Y \in \mathcal{A}$ entonces $\sim Y \in \mathcal{A}$.
En efecto si $Y = \emptyset$ entonces $\sim \emptyset = \complement_X(\alpha(\emptyset)) = \complement\emptyset = X$, luego $\sim Y \in \mathcal{A}$. Si $Y = X$ entonces $\sim Y = \sim X = \complement_X\alpha(x) = \complement_X X = \emptyset$ luego $\sim Y \in \mathcal{A}$. Sea $Y \in \mathcal{A}$ e $Y \neq \emptyset, X$, si $\sim Y = \emptyset$ esto es $\complement_X\alpha(Y) = \emptyset$ entonces $\alpha(Y) = X$ y por lo tanto $Y = \alpha(\alpha(Y)) = \alpha(X) =$

X, absurdo. Luego $\alpha(Y) \neq \emptyset$. Sea (1) $z \in \sim Y = \complement_X(\alpha(Y))$ y (2) $x \leq z$ donde $x, z \in X$. De (1) resulta que $z \notin \alpha(Y)$, esto es $z \neq \alpha(y)$ cualquiera que sea $y \in Y$, luego como α es biunívoca tenemos que $\alpha(z) \neq \alpha(\alpha(y)) = y$ cualquiera que sea $y \in Y$ y por lo tanto (3) $\alpha(z) \notin Y$. De (2) resulta por ser α un antiisomorfismo que (4) $\alpha(z) \leq \alpha(x)$. Si $\alpha(x) \in Y$, como Y es una sección inferior de X de (4) resulta $\alpha(z) \in Y$, lo que contradice (3). Luego $\alpha(x) \notin Y$. Si $x \in \alpha(Y)$ entonces $x = \alpha(y)$, con $y \in Y$, luego $\alpha(x) = \alpha(\alpha(y)) = y$, con $y \in Y$, absurdo. Luego $x \notin \alpha(Y)$ y por lo tanto $x \in \complement_X\alpha(Y) = \sim Y$, luego $\sim Y$ es una sección inferior de X y por lo tanto $\sim Y \in \mathcal{A}$.

Consideremos el sistema determinante $(\Pi(\mathcal{A}), \psi)$ del álgebra $\mathcal{A}$, donde $\psi : \Pi(\mathcal{A}) \to \Pi(\mathcal{A})$ está definida (ver Definición 6.0.1) del siguiente modo: $\psi((x]) = (y]$ donde $x, y \in X$ sí y sólo sí $\varphi\Big(F((x])\Big) = F((y])$, donde $F\Big((x]\Big) = \{Y \in \mathcal{A} : (x] \subseteq Y\}$.
Probemos que $f(\alpha(x)) = \psi(f(x))$ para todo $x \in X$, esto es que $(\alpha(x)] = \psi((x])$ para todo $x \in X$, y por lo tanto de acuerdo con la definición de ψ esto equivale a probar que $\varphi\Big(F((x])\Big) = F\Big((\alpha(x)]\Big)$, esto es, ver Lema 4.3.1,

$$\complement_{\mathcal{A}} \sim F((x]) = F\Big((\alpha(x)]\Big)$$

luego por la y Observación 5.2.2, 1),:

$$\complement_{\mathcal{A}} I(\sim (x]) = F\Big((\alpha(x)]\Big)$$

esto es

$$\complement_{\mathcal{A}} I(\complement_X \alpha(x]) = F\Big((\alpha(x)]\Big).$$

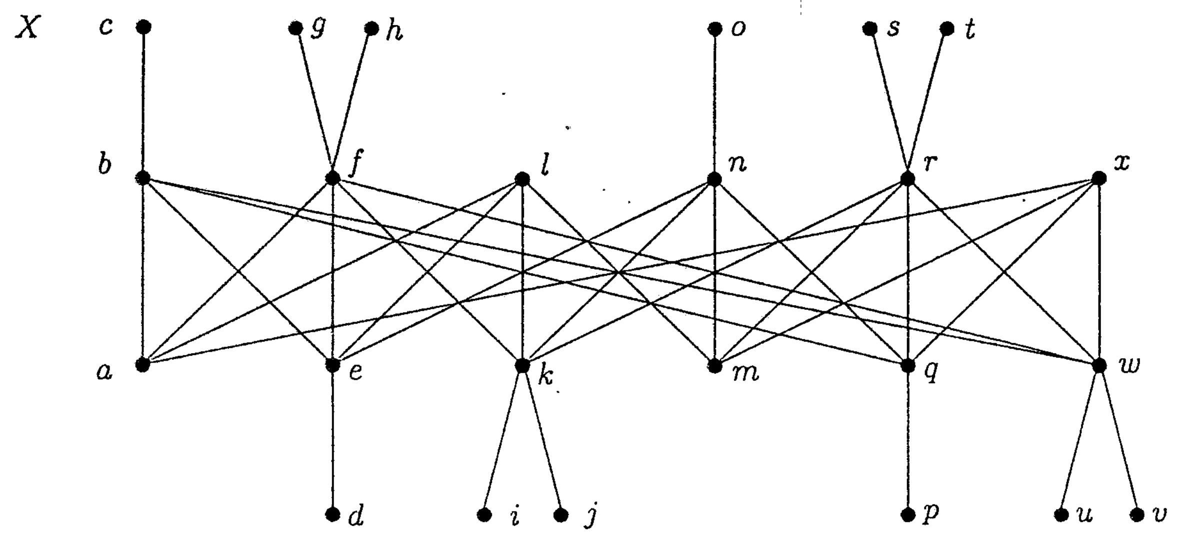
En efecto sea (1) $Z \in \mathcal{A}$ tal que $Z \notin I(\complement_X\alpha(x])$, luego $Z \not\subseteq \complement_X\alpha((x])$ por lo tanto existe (2) $z \in Z$ tal que $z \notin \complement_X\alpha((x])$, luego $z \in \alpha((x])$ y en consecuencia $z = \alpha(w)$ donde $w \in (x]$, esto es $w \leq x$ y por lo tanto (3) $\alpha(x) \leq \alpha(w) = z$. De (1), (2) y (3) resulta que $\alpha(x) \in Z$ y por lo tanto $(\alpha(x)] \subseteq Z$ y en consecuencia $Z \in F\Big((\alpha(x)]\Big)$.
Observemos que $\alpha(x) \in (\alpha(x)]$ y $x \in (x]$ entonces $\alpha(x) \in \alpha((x])$, por lo tanto (*) $\alpha(x) \in (\alpha(x)] \cap \alpha((x])$.
Recíprocamente sea $Z \in F\Big((\alpha(x)]\Big)$ esto es $Z \in \mathcal{A}$ y (4) $(\alpha(x)] \subseteq Z$. Si $Z \notin \complement_{\mathcal{A}} I(\complement_X\alpha(x])$ entonces $Z \in I(\complement_X\alpha(x])$ esto es $Z \subseteq \complement_X\alpha((x])$ y por lo tanto (5) $\alpha((x]) \subseteq \complement_X Z$. De (4) y (5) resulta que (6) $(\alpha(x)] \cap \alpha((x]) = \emptyset$, lo que contradice (*).
■

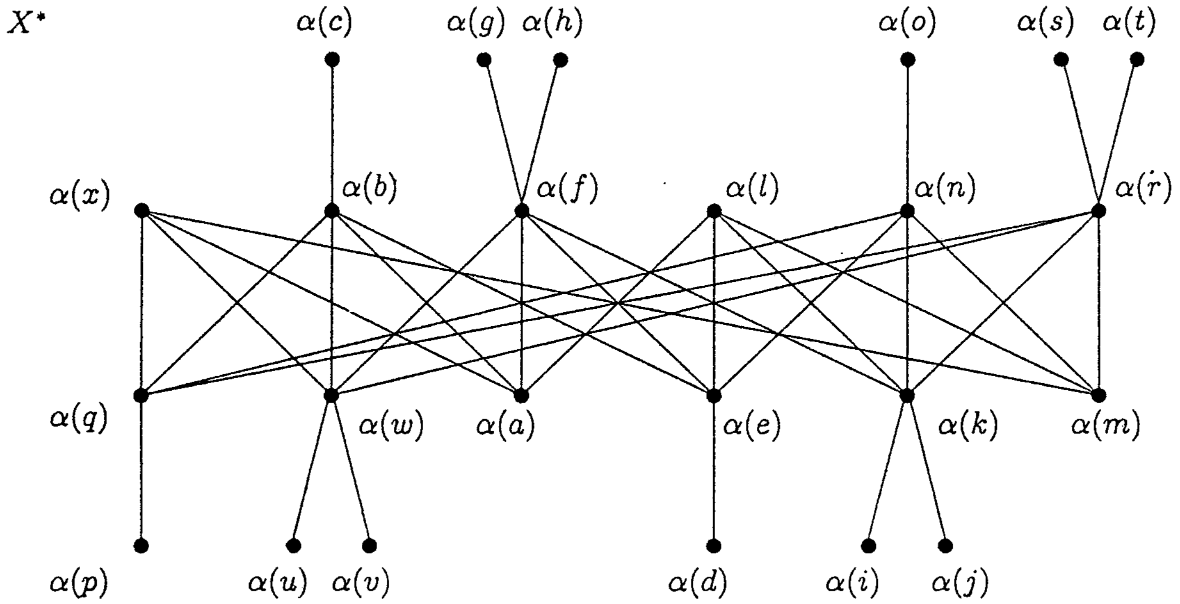
Un conjunto ordenado X se dice **completamente simétrico** si existe un antiisomorfismo de X que a su vez es una involución de X.
¿Un conjunto ordenado simétrico es completamente simétrico? Esto es: si existe un antiisomorfismo de un conjunto ordenado X se deduce que existe algún antiismorfismo que es una involución de X. La respuesta es negativa. G. Birkhoff [4] dice que existe un conjunto ordenado finito simétrico que no es completamente simétrico y cuyo número de elementos es menor que 18, pero no indica cuál es. A. Diego indicó el conjunto ordenado X, con 24 elementos, cuyo diagrama se encuentra en la siguiente figura, que es simétrico y no es completamente simétrico.

La biyección α de X definida como producto de ciclos del siguiente modo:

$$\alpha = (almx)(benq)(fkrw)(cdop)(gisu)(hjtv).$$

es un antiisomorfismo.

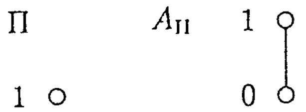




7 Ejemplos de álgebras de De Morgan

Vamos a indicar los ejemplos mas sencillos de conjuntos ordenados finitos Π completamente simétricos con n elementos ($n = 1, 2, 3, 4$). En cada caso indicaremos I) el reticulado distributivo A_Π cuyo conjunto de elementos primos es isomorfo a Π; II) Las posibles funciones $\psi : \Pi \to \Pi$ que verifican I1) e I2); III) Las posibles negaciones que se obtienen a partir de cada ψ de acuerdo con el resultado indicado en el Lema 6.0.4.

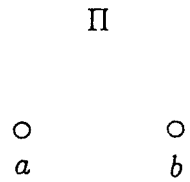
Ejemplo 7.0.1 Π *tiene un sólo elemento que representaremos por el símbolo* 1, *esto es* $\Pi = \{1\}$. *En este caso existe una única función de* Π *en* Π, *a saber* $\psi(1) = 1$.

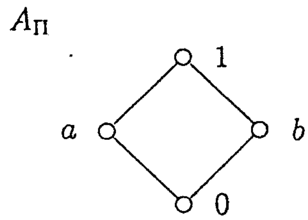


x	*0*	*1*
$\sim x$	*1*	*0*

Ejemplo 7.0.2 *El conjunto* Π *tiene* 2 *elementos.*

a) Diagramas:

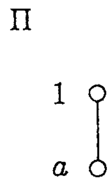


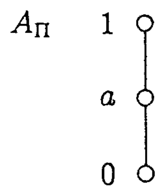


x	a	b
$\psi_1(x)$	a	b
$\psi_2(x)$	b	a

x	*0*	a	b	*1*
$\sim_1 x$	*1*	b	a	*0*
$\sim_2 x$	*1*	a	b	*0*

b) Diagramas:





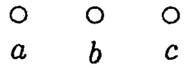
x	a	*1*
$\psi(x)$	*1*	a

x	*0*	a	*1*
$\sim x$	*1*	a	*0*

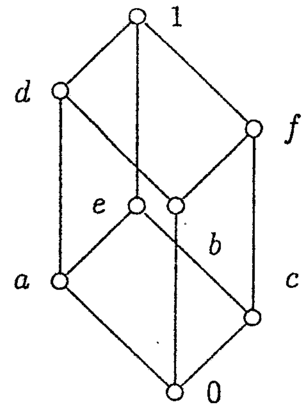
Ejemplo 7.0.3 *El conjunto* Π *tiene tres elementos.*

a) Diagramas:

Π



A_Π



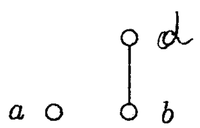
x	a	b	c
$\psi_1(x)$	a	b	c
$\psi_2(x)$	a	c	b
$\psi_3(x)$	c	b	a
$\psi_4(x)$	b	a	c

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$\sim_1 x$	1	f	e	d	c	b	a	0
$\sim_2 x$	1	f	d	e	b	c	a	0
$\sim_3 x$	1	d	e	f	a	b	c	0
$\sim_4 x$	1	e	f	d	c	a	b	0

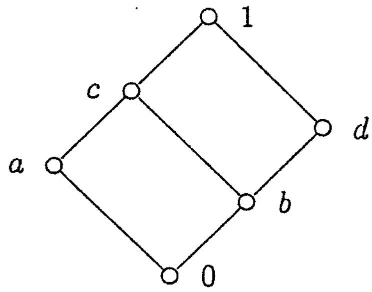
Observemos que las álgebras de De Morgan $(A_\Pi, \sim_2)$, $(A_\Pi, \sim_3)$ *y* $(A_\Pi, \sim_4)$ *son isomorfas.*

b) Diagramas:

Π



A_Π

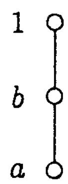


x	a	b	d
$\psi(x)$	a	d	b

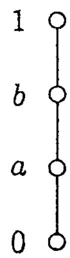
x	0	a	b	c	d	1
$\sim x$	1	d	c	b	a	0

c) Diagramas:

Π



A_Π

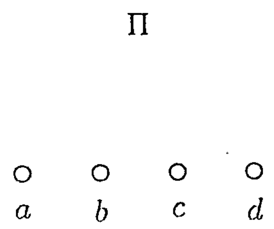


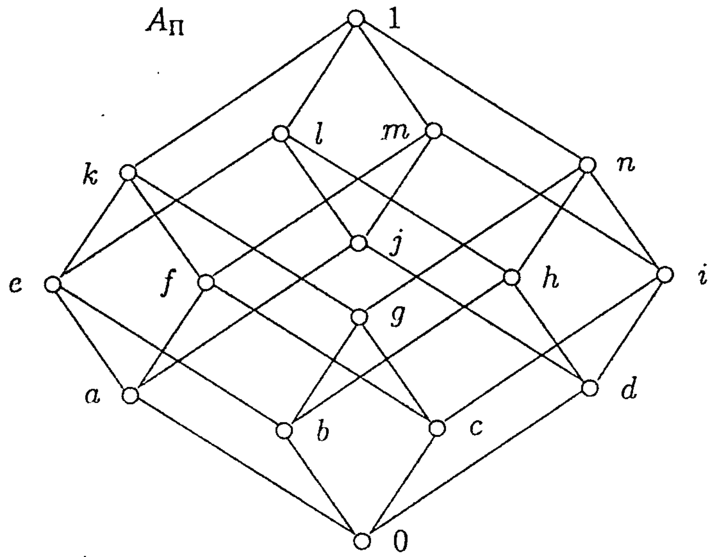
x	a	b	1
$\psi(x)$	1	b	a

x	0	a	b	1
$\sim x$	1	b	a	0

Ejemplo 7.0.4 *El conjunto* Π *tiene cuatro elementos.*

a) Diagramas:





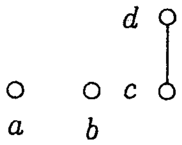
x	a	b	c	d
$\psi_1(x)$	a	b	c	d
$\psi_2(x)$	a	b	d	c
$\psi_3(x)$	a	d	c	b
$\psi_4(x)$	a	c	b	d
$\psi_5(x)$	b	a	d	c
$\psi_6(x)$	b	a	c	d
$\psi_7(x)$	c	d	a	b
$\psi_8(x)$	c	b	a	d
$\psi_9(x)$	d	c	b	a
$\psi_{10}(x)$	d	b	c	a

x	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	1
$\sim_1 x$	1	n	m	l	k	i	h	j	f	e	g	d	c	b	a	0
$\sim_2 x$	1	n	m	k	l	i	g	f	j	e	h	c	d	b	a	0
$\sim_3 x$	1	n	k	l	m	g	h	e	f	j	i	b	c	d	a	0
$\sim_4 x$	1	n	l	m	k	h	i	j	e	f	g	d	b	c	a	0
$\sim_5 x$	1	m	n	k	l	f	e	g	h	e	j	c	d	a	b	0
$\sim_6 x$	1	m	n	l	k	i	j	h	g	e	f	d	c	a	b	0
$\sim_7 x$	1	l	k	n	m	e	h	g	f	i	j	b	a	d	c	0
$\sim_8 x$	1	l	m	n	k	j	h	i	f	g	e	d	a	b	c	0
$\sim_9 x$	1	k	l	m	n	e	f	j	h	i	g	a	b	c	d	0
$\sim_{10} x$	1	k	m	l	n	f	e	j	i	h	g	a	c	b	d	0

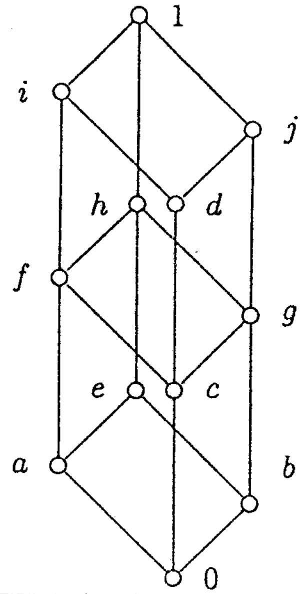
Observemos que las álgebras de De Morgan $(A_\Pi, \sim_2)$, $(A_\Pi, \sim_3)$, $(A_\Pi, \sim_4)$, $(A_\Pi, \sim_6)$, $(A_\Pi, \sim_8)$ *y* $(A_\Pi, \sim_{10})$ *son isomorfas y tambien lo son* $(A_\Pi, \sim_5)$, $(A_\Pi, \sim_7)$ *y* $(A_\Pi, \sim_9)$.

b) Diagramas:

Π



A_Π

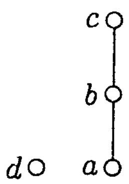


x	a	b	c	d
$\psi_1(x)$	a	b	d	c
$\psi_2(x)$	b	a	d	c

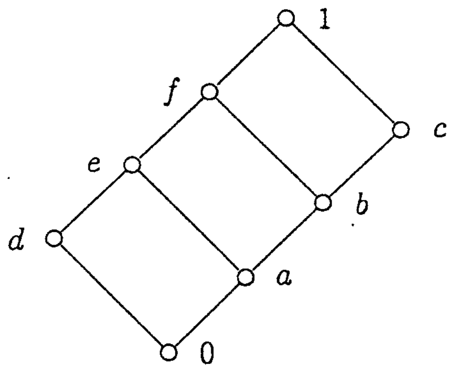
x	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	1
$\sim_1 x$	1	j	i	h	e	d	g	f	c	b	a	0
$\sim_2 x$	1	i	j	h	e	d	f	g	c	a	b	0

c) Diagramas:

Π



A_Π



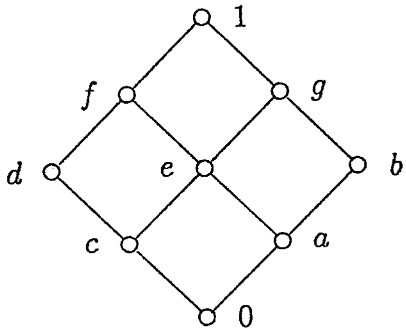
x	a	b	c	d
$\psi(x)$	c	b	a	d

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$\sim x$	1	f	e	d	c	b	a	0

d) Diagramas:

Π

A_Π

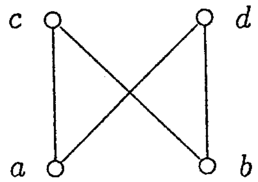


x	a	b	c	d
$\psi_1(x)$	b	a	d	c
$\psi_2(x)$	d	c	b	a

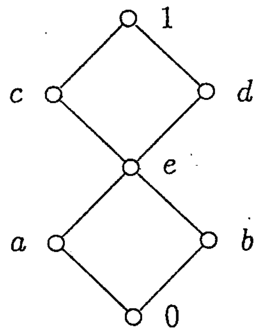
x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\sim_1 x$	1	f	d	g	b	e	a	c	0
$\sim_2 x$	1	g	b	f	d	e	c	a	0

e) Diagramas:

Π



A_Π

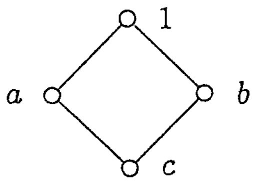


x	a	b	c	d
$\psi_1(x)$	c	d	a	b
$\psi_2(x)$	d	c	b	a

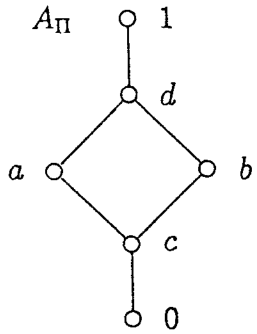
x	0	a	b	c	d	e	1
$\sim_1 x$	1	d	c	b	a	e	0
$\sim_2 x$	1	c	d	a	b	e	0

f) Diagramas:

Π



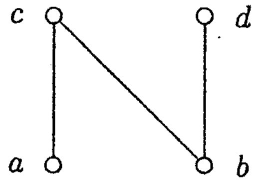
A_Π



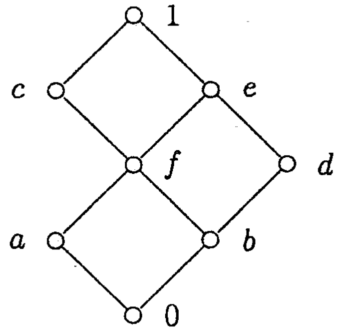
x	a	b	c	1
$\psi_1(x)$	a	b	1	c
$\psi_2(x)$	b	a	1	c

x	0	a	b	c	d	1
$\sim_1 x$	1	b	a	d	c	0
$\sim_2 x$	1	a	b	d	c	0

g) Diagramas: Π



A_Π

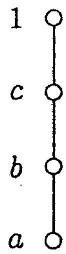


x	a	b	c	d
$\psi(x)$	d	c	b	a

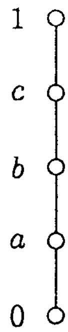
x	0	a	b	c	d	e	f	1
$\sim x$	1	c	e	a	d	b	f	0

h) Diagramas:

Π



A_Π



x	a	b	c	1
$\psi(x)$	1	c	b	a

x	0	a	b	c	1
$\sim x$	1	c	b	a	0

8 Sistemas deductivos

8.1 Filtros simples

Si A es un reticulado de De Morgan, A' un álgebra de De Morgan y h un homomorfismo de A sobre A'. Denominaremos núcleo del homomorfismo h al conjunto $D = \{x \in A : h(x) = 1'\}$.

Definición 8.1.1 *Una parte D de un reticulado de De Morgan se dice un* sistema deductivo *si verifica:*

D1) *D es un filtro.*

D2) *Si $a \in D, a \twoheadrightarrow b \in D$ entonces $b \in D$.* (modus ponens).

Un sistema deductivo se dice propio si $D \neq A$, [2].

Proposición 8.1.1 *Si h es un homomorfismo de un reticulado de De Morgan A sobre un álgebra de De Morgan A', su núcleo es un sistema deductivo.* (Bialynicki-Birula) [3].

Dem. Sea D el núcleo de h. Como h es epimorfismo $1' = h(a), a \in A$, luego $a \in D$ y por lo tanto $D \neq \emptyset$.
Sean $a, b \in D$ entonces $h(a) = h(b) = 1'$ de donde $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b) = 1' \wedge 1'$ lo que implica que $a \wedge b \in D$.
Si $a \in D$ y $a \leq b$, entonces $1' = h(a) \leq h(b)$, por lo tanto $h(b) = 1'$ y $b \in D$.
Si $a \in D$ y $a \twoheadrightarrow b \in D$, entonces $h(a) = 1' = h(a \twoheadrightarrow b) = h(\sim a \vee b) = \sim h(a) \vee h(b) = \sim 1' \vee h(b) = 0' \vee h(b) = h(b)$, de donde $b \in D$. ■

Observación 8.1.1 *En un reticulado de De Morgan pueden existir filtros que no son sistemas deductivos. En el Ejemplo 7.0.2 a), el filtro $F = F(a) = \{a, 1\}$ no es un sistema deductivo, ya que $a \in F, a \twoheadrightarrow b = \sim_1 a \vee b = a \vee b = 1 \in F$, y $b \notin F$.*
Tambien existen subconjuntos de reticulados de De Morgan que verifican D2) *y no verifican* D1). *En el ejemplo indicado precedentemente el subconjunto $X = \{0, 1\}$ verifica* D2) *pero no es un filtro.*

Lema 8.1.1 *Un sistema deductivo D es propio si y sólo si $d \in D$ implica $\sim d \notin D$.*

Dem. Sea D un sistema deductivo propio y supongamos que existe $d \in D$ tal que $\sim d \in D$. Como $\sim d \leq \sim d \vee x = d \twoheadrightarrow x$ entonces $d, d \twoheadrightarrow x \in D$, para todo $x \in A$. Luego $x \in D$, para todo $x \in A$ y por lo tanto $D = A$, contradicción.
Recíprocamente si $D = A$ y $d \in D$ entonces $\sim d \in D$, lo que contradice la hipótesis. ■

Daremos el nombre de **contradicciones** de un reticulado de De Morgan A a los elementos de la forma $x \wedge \sim x$, con $x \in A$ luego

Corolario 8.1.1 *Un sistema deductivo D es propio si y sólo si D no contiene contradicciones.*

Proposición 8.1.2 *Un álgebra de De Morgan A es un álgebra de Boole si y sólo si todos sus filtros son sistemas deductivos.*

Dem. Supongamos que A es un álgebra de Boole y sea F un filtro de A tal que $a,\ a \twoheadrightarrow b \in F$. Como F es un filtro $a \wedge (a \twoheadrightarrow b) \in F$. Pero $a \wedge (a \twoheadrightarrow b) = a \wedge (\sim a \vee b) = (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$. Luego tenemos que $a \wedge b \in F$ y como $a \wedge b \leq b$, y F es un filtro entonces $b \in F$, por lo tanto F es sistema deductivo.
Para probar la recíproca basta verificar que $a \wedge \sim a = 0$, para todo $a \in A$. Sea $a \in A$ y consideremos $F = F(a \wedge \sim a)$. Como $a \wedge \sim a \leq a \vee \sim a$ entonces (1) $a \vee \sim a \in F$. Además (2) $(a \vee \sim a) \twoheadrightarrow 0 = \sim (a \vee \sim a) \vee 0 = \sim a \wedge a \in F$. De (1) y (2) resulta por ser F un sistema deductivo que $0 \in F$. luego $a \wedge \sim a \leq 0$, y en consecuencia $a \wedge \sim a = 0$. ∎

Observemos que si F_1 y F_2 son dos filtros de un reticulado A entonces $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Como $F_1 \neq \emptyset$ y $F_2 \neq \emptyset$ existen (1) $f_1 \in F_1$ y (2) $f_2 \in F_2$, como (3) $f_1 \leq f_1 \vee f_2$ y (4) $f_2 \leq f_1 \vee f_2$, de (1) y (3) resulta por ser F_1 un filtro que $f_1 \vee f_2 \in F_1$, y de (2) y (4) resulta por ser F_2 un filtro que $f_1 \vee f_2 \in F_2$ luego $f_1 \vee f_2 \in F_1 \cap F_2$. Entonces se prueba sin dificultad que $F_1 \cap F_2$ es un filtro de A.
Luego en particular si P es un filtro primo de un reticulado de De Morgan A entonces $P \cap \varphi(P)$ es un filtro de A, donde φ es la transformación de Birula–Rasiowa.

Definición 8.1.2 *A todo subconjunto F de un reticulado de De Morgan A de la forma $F = P \cap \varphi(P)$, donde $P \in \mathcal{P}(A)$ y φ es la transformación de Birula–Rasiowa, daremos el nombre de* **filtro simple**.

Lema 8.1.2 *Todo filtro simple de un reticulado de De Morgan es un sistema deductivo propio.*

Dem. Sea F un filtro simple de A, esto es $F = P \cap \varphi(P)$ donde $P \in \mathcal{P}(A)$. Como $F \subseteq P$ y P es propio, entonces F es propio. Supongamos que $a,\ a \twoheadrightarrow b = \sim a \vee b \in F = P \cap \varphi(P)$. Entonces (1) $a \in P$, (2) $a \in \varphi(P)$, (3) $\sim a \vee b \in P$, (4) $\sim a \vee b \in \varphi(P)$. De (3) resulta por ser $\varphi(P)$ un filtro primo, que $\sim a \in \varphi(P)$ ó $b \in P$. Si $\sim a \in \varphi(P) = \complement \sim P$, entonces $\sim a \notin \sim P$, lo que contradice (1). Por lo tanto $b \in \varphi(P)$. De (3) se deduce que $\sim a \in P$ ó $b \in P$. Si $\sim a \in P$, obtenemos que $a \in \sim P$, lo que contradice (2). Por lo tanto $b \in P$. Como $b \in \varphi(P)$ y $b \in P$ entonces $b \in F = P \cap \varphi(P)$, lo que prueba que F es un sistema deductivo. ∎

Corolario 8.1.2 *Todo reticulado de De Morgan con más de un elemento posee sistemas deductivos propios.*

Dem. Si A es un reticulado de De Morgan con más de un elemento entonces A contiene por lo menos un filtro primo P, luego $F = P \cap \varphi(P)$ es un sistema deductivo propio. ∎

Los resultados anteriores justifican la siguiente:

Definición 8.1.3 *Todo filtro de la forma $F = P \cap \varphi(P)$ se denomina un sistema deductivo* **simple**.

Lema 8.1.3 *En un álgebra de De Morgan la intersección de una familia arbitraria de sistemas deductivos es un sistema deductivo.*

En un reticulado de De Morgan puede ocurrir que la intersección de una familia de sistemas deductivos sea el conjunto vacío.

Ejemplo 8.1.1 *Sea $A = \mathbb{Z}$ y $n > 0$. Entonces $F(n) = [n, +\infty)$ es un filtro primo de A $\varphi(F(n)) = \complement - [n, +\infty) = \complement[-\infty, -n] = [-n+1, +\infty) = F(-n+1)$. Entonces $F(n) \cap \varphi(F(n)) = [n, +\infty) \cap [-n+1, +\infty) = [n, +\infty)$. Si $\bigcap_{n>0} F(n) \neq \emptyset$ entonces existiría $x \in F(n)$, para todo $n > 0$ y por lo tanto $n \leq x$ para todo $n > 0$, absurdo.*

Definición 8.1.4 *Si A es un reticulado de De Morgan se denomina* **sistema deductivo engendrado** *por un subconjunto, no vacío, G de A a la intersección de todos los sistemas deductivos que contienen a G.*

Proposición 8.1.3 *La familia de todos los sistemas deductivos propios ordenados por inclusión es inductiva superiormente.*

De aquí resulta que:

Proposición 8.1.4 *Todo sistema deductivo propio está contenido en un sistema deductivo maximal.*

8.2 Sistemas deductivos irreducibles

Definición 8.2.1 *Un sistema deductivo D se dice completamente irreducible si:*

1) D es propio.

2) Dada una familia $\{D_i\}_{i\in I}$ de sistemas deductivos tales que $D = \bigcap_{i\in I} D_i$ entonces existe $i_o \in I$ tal que $D_{i_o} = D$.

Definición 8.2.2 *Un sistema deductivo D se dice irreducible si:*

1) D es propio.

2) Si D_1 y D_2 son sistemas deductivos tales que $D = D_1 \cap D_2$, entonces $D = D_1$ ó $D = D_2$.

Proposición 8.2.1 *Todo sistema deductivo completamente irreducible es un sistema deductivo irreducible.*

Lema 8.2.1 *Dado un sistema deductivo propio D y $c \notin D$ entonces la familia de los sistemas deductivos que contienen a D sin contener a c es inductiva superiormente.*

Definición 8.2.3 *A todo sistema deductivo maximal de la familia indicada anteriormente denominaremos sistema deductivo* ligado *a D y a c.*

Lema 8.2.2 *Si D es un sistema deductivo propio y $c \notin D$ entonces todo sistema deductivo ligado a D y c es completamente irreducible.*

Dem. Si M un sistema deductivo maximal ligado a D y a c entonces $D \subseteq M$ y $c \notin M$. Luego M es propio. Supongamos que $M = \bigcap_{i\in I} D_i$. Como $c \notin M$ entonces existe $i_o \in I$ tal que $c \notin D_{i_o}$ (1). Como $D \subseteq M \subseteq D_i$, para todo $i \in I$ entonces $D \subseteq D_{i_o}$ y $c \notin D_{i_o}$. En consecuencia, como M es maximal $M = D_{i_o}$. ∎

Corolario 8.2.1 *Todo sistema deductivo propio es intersección de sistemas deductivos completamente irreducibles.*

Teorema 8.2.1 *Un sistema deductivo D es completamente irreducible si y sólo si D es un sistema deductivo máximo entre aquellos que no contienen a un elemento c.*

Existen sistemas deductivos irreducibles que no son completamente irreducibles.

Ejemplo 8.2.1 *La recta $\mathbf{R}$ es un reticulado de De Morgan. Los filtros de $\mathbf{R}$ son de la forma: I) $F(a) = [a, +\infty)$ y II) $F = \{x \in \mathbf{R} : a < x\}$, donde a es un elemento fijo de $\mathbf{R}$. Los filtros de la forma I) y II) son primos y si $a > 0$ son sistemas deductivos simples. Sea $a > 0$ y $P = F(a)$ luego $\varphi(P) = \{x : -a < x\}$. Por lo tanto, $P \subseteq \varphi(P)$, luego $D = P \cap \varphi(P) = P$ es un sistema deductivo simple. Consideremos el sistema deductivo $F(n)$, $n \in \mathbf{N}$. Sea r un número real tal que $\dfrac{1}{n} < r$, luego $n - \dfrac{1}{r} > 0$, y por lo tanto $P_r = F(n - \dfrac{1}{r})$ es un sistema deductivo simple. Además $F(n) = \bigcap_{\frac{1}{n}<r} P_r$, por lo tanto $F(n)$ no es completamente irreducible.*

Observación 8.2.1 *No todo sistema deductivo de un álgebra de De Morgan A es de la forma $P \cap \varphi(P)$, con P un filtro primo de A. En efecto sea A el álgebra de De Morgan que se indica a continuación:*

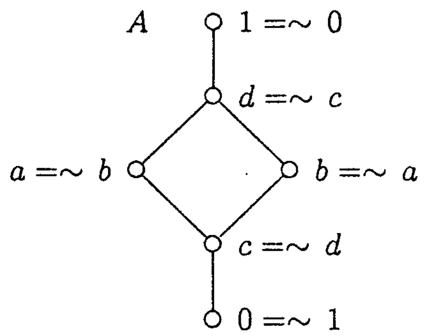


Figura 8.2.1

$D = \{d, 1\}$ es un sistema deductivo. Sus filtros primos son: $F(a), F(b), F(c)$ y $F(1)$. Se verifica facilmente que $D \neq F(x) \cap \varphi(F(x))$ cualquiera sea el filtro primo $F(x)$. Luego no todo sistema deductivo es de la forma $P \cap \varphi(P)$, donde P un filtro primo.

Teorema 8.2.2 *Todo sistema deductivo simple es un sistema deductivo irreducible.*

Dem. Sea $D = \varphi(P) \cap P$, donde P es un filtro primo, luego $D \neq A$. Supongamos que existen sistemas deductivos D_1 y D_2 tales que $D = D_1 \cap D_2$.
$D = D_1 \cap D_2 = \varphi(P) \cap P \subseteq P$, y como P es primo (1) $D_1 \subseteq P$ ó (2) $D_2 \subseteq P$. Como$D = D_1 \cap D_2 = \varphi(P) \cap P \subseteq \varphi(P)$, y $\varphi(P)$ es primo entonces (3) $D_1 \subseteq \varphi(P)$ ó (4) $D_2 \subseteq \varphi(P)$.
Si se verifican (1) y (3) (análogamente (2) y (4)) se tiene que $D_1 \subseteq P \cap \varphi(P) = D$ y como $D \subseteq D_1$, entonces $D = D_1$.
Supongamos que se verifican (1) y (4) y que $D \neq D_1$ y $D \neq D_2$, luego existen $a \in D_1 \setminus D$

y $b \in D_2 \setminus D$. Probemos que $\sim b \in \varphi(P)$. Si $\sim b \notin \varphi(P)$ entonces $\sim b \in \complement\varphi(P) = \sim P$, luego $b \in P$. Como $b \in D_2$, de (4) $b \in \varphi(P)$, entonces $b \in P \cap \varphi(P) = D$, contradicción. Como $a \in D_1 \subseteq P$, entonces $a \in P$, de donde se deduce que $\sim b \vee a \in P \cap \varphi(P) = D$. Como $D \subset D_2, b \twoheadrightarrow a \in D_2$ y $b \in D_2$, por lo tanto $a \in D_2$ y como $a \in D_1, a \in D_1 \cap D_2 = D$, contradicción. Luego $D = D_1$ ó $D = D_2$. Si se verifica (2) y (3) la demostración es análoga. ■

Indiquemos algunos resultados que nos permitirán responder la siguiente pregunta: ¿Todo sistema deductivo irreducible es un sistema deductivo simple ?

Teorema 8.2.3 *Si P y Q son filtros primos tales que $P \cap \varphi(P) = Q \cap \varphi(Q)$, entonces $P = Q$ ó $P = \varphi(Q)$.*

Dem. Sea $S = P \cap \varphi(P) = Q \cap \varphi(Q)$. Luego (I) $P \cap \varphi(P) \subseteq Q$ y (II) $P \cap \varphi(P) \subseteq \varphi(Q)$. De (I) teniendo en cuenta que Q es primo se deduce (1) $P \subseteq Q$ ó (2) $\varphi(P) \subseteq Q$. Análogamente, de (II) como $\varphi(Q)$ es primo obtenemos (3) $P \subseteq Q$ ó (4) $\varphi(P) \subseteq \varphi(Q)$ ó sus equivalentes (3′) $Q \subseteq \varphi(P)$ y (4′) $Q \subseteq P$.
Si se cumplen (1) y (4) entonces se cumplen (1) y (4′), por lo tanto $P = Q$. Si se cumplen (2) y (3) esto es (2) y (3′), entonces $\varphi(P) = Q$, luego $P = \varphi(Q)$. Si se cumplen (1) y (3) esto es (1) y (3′), luego $P \subseteq \varphi(P)$, y por lo tanto $S = P \cap \varphi(P) = P = Q \cap \varphi(Q)$, y como P es primo entonces $P = Q$ ó $P = \varphi(Q)$.
Si se cumplen (2) y (4) luego (4′), entonces $\varphi(P) \subseteq P$ y por lo tanto $S = P \cap \varphi(P) = \varphi(P) = Q \cap \varphi(Q)$, y como $\varphi(P)$ es primo entonces $\varphi(P) = Q$ ó $P = Q$. ■

Acabamos de probar que si un sistema deductivo irreducible I se puede escribir en la forma $I = P \cap \varphi(P)$, donde P es primo, entonces esta representación es única.
Determinemos la situación de los filtros primos P y $\varphi(P)$ en la familia de todos los filtros primos que contienen a un sistema deductivo irreducible I.

Lema 8.2.3 *Si $S = P \cap \varphi(P)$ y los filtros P y $\varphi(P)$ son incomparables entonces P y $\varphi(P)$ son los únicos filtros primos mínimos que contienen a S. Si P es comparable con $\varphi(P)$ entonces $S = P$ ó $S = \varphi(P)$.*

Dem. Sea Q un filtro primo que contiene a S. Entonces $P \cap \varphi(P) \subseteq Q$, lo que implica que $P \subseteq Q$ ó $\varphi(P) \subseteq Q$, lo que prueba que P y $\varphi(P)$ son filtros primos mínimos en la familia de los filtros primos que contienen a S. La demostración de la segunda parte del lema es inmediata. ■

Si todo sistema deductivo irreducible I fuese un sistema deductivo simple entonces si I es primo debe tenerse que $P \subseteq \varphi(P)$ e $I = P \cap \varphi(P)$. Si I no es primo deberían existir solamente dos filtros primos mínimos P_1 y P_2 que contienen a I y además $P_2 = \varphi(P_1)$.

Lema 8.2.4 *Si F es un filtro de un álgebra de De Morgan A que verifica $F \cap \sim F = \emptyset$, y P un filtro primo tal que (I) $F \subseteq P$ y (II) $P \cap \sim F = \emptyset$, entonces $\varphi(P)$ cumple las siguientes condiciones (I') $F \subseteq \varphi(P)$ y (II')*
$\varphi(P) \cap \sim F = \emptyset$.

Dem. Si $F \cap \sim F = \emptyset$ entonces F no contiene contradicciones. En efecto si $x \wedge \sim x \in F$ para algún $x \in A$ entonces (1) $x \in F$ y (2) $\sim x \in F$. De (2) resulta (3) $x \in \sim F$ luego de (1) y (3) $x \in F \cap \sim F$ absurdo. De (I) obtenemos que $\sim F \subseteq \sim P$ y entonces

$\varphi(P) = \complement \sim P \subseteq \complement \sim F$, por lo tanto (II') $\varphi(P) \cap \sim F = \emptyset$. Resta probar que $F \subseteq \varphi(P)$. Caso contrario existiría un elemento $f \in F$ tal que $f \notin \varphi(P)$ lo que implica que $f \in F$ y $f \in \sim P$. Entonces $\sim f \in \sim F$ y $\sim f \in P$, por lo tanto $\sim f \in P \cap \sim F$, lo que contradice (II). ■

Teorema 8.2.4 *Un filtro es un sistema deductivo propio si y sólo si es intersección de sistemas deductivos simples.*

Dem. Sea F un filtro tal que $F = \bigcap_{i \in I} S_i$, donde los S_i son sistemas deductivos simples. Como $F \subseteq S_i$ y S_i es un filtro propio, entonces F es un filtro propio. Además como F es intersección de sistemas deductivos entonces F es un sistema deductivo.
Recíprocamente, sea D un sistema deductivo propio. Entonces D no contiene contradicciones si y sólo si $D \cap \sim D = \emptyset$. Como $\sim D$ es un ideal disjunto del filtro D, entonces por un teorema de M. Stone (ver por ejemplo [33]) existe un filtro primo P que verifica: (I) $D \subseteq P$ y (II) $P \cap \sim D = \emptyset$. Si $D = \complement \sim D$ entonces $D = P = \complement \sim P = \varphi(P)$, y por lo tanto $D = P \cap \varphi(P)$, lo que implica que D es un sistema deductivo simple.
Supongamos que $D \neq \complement \sim D$, entonces $\sim D \neq \complement D$. Sea $x \in \complement(D \cup \sim D)$. Vamos a probar que existe un sistema deductivo simple que contiene a D disjunto con $\sim D$ y que no contiene a x. Para ello consideremos el ideal generado por $\sim D$ y x, esto es (1) $I = \sim D \vee I(x) = \{i = z_1 \vee z_2 : z_1 \in \sim D \text{ y } z_2 \leq x\}$ y probemos que (2) $I \cap D = \emptyset$.
Los elementos de I son de la forma $i = z_1 \vee z_2$, donde $z_1 \in \sim D$ y $z_2 \leq x$ lo que implica que $z_1 = \sim d$, con $d \in D$ y $z_2 \leq x$, entonces $i = \sim d \vee z_2$, con $d \in D$ y $z_2 \leq x$. Probemos que $i \notin D$. Si $i = \sim d \vee z_2 = d \twoheadrightarrow z_2 \in D$ entonces como $d \in D$ y D es un sistema deductivo resultaría por modus ponens que $z_2 \in D$, luego como $z_2 \leq x$ resulta que $x \in D$, contradicción, ya que $x \in \complement(D \cup \sim D) = \complement D \cap \complement \sim D$, lo que implica que $x \in \complement D$ y $x \in \complement \sim D$, y en particular $x \notin D$. Luego vale (2) $I \cap D = \emptyset$. Como el ideal I es disjunto del filtro D, entonces por un teorema de M. Stone, existe un filtro primo P tal que (3) $D \subseteq P$ y (4) $P \cap I = \emptyset$, en particular (4′) $P \cap \sim D = \emptyset$ ya que de (1) resulta que $\sim D \subseteq I$ y entonces $P \cap \sim D \subseteq I \cap P = \emptyset$. De (3) y (4′), por el Lema 8.2.4 obtenemos (5) $D \subseteq \varphi(P)$ y (6) $\varphi(P) \cap \sim P = \emptyset$.
De (3) y (5) se deduce (7) $D \subseteq P \cap \varphi(P) = S$,un sistema deductivo simple. De $S \subseteq P$, de (4) obtenemos que $S \cap I = \emptyset$, luego $x \notin S$. Acabamos de probar que si D es un sistema deductivo propio y si $x \in \complement(D \cup \sim D)$ entonces existe un sistema deductivo simple S tal que (I) $D \subseteq S$, (II) $S \cap \sim D = \emptyset$ y (III) $x \notin S$, luego D es intersección de sistemas deductivos simples. Si llamamos $S_x = P \cap \varphi(P)$, entonces $D = \bigcap_{x \notin D \cup \sim D} S_x$. ■

Corolario 8.2.2 *Todo sistema deductivo completamente irreducible es un sistema deductivo simple.*

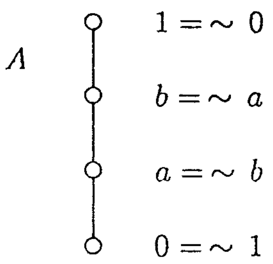
Dem. Sea C un sistema deductivo completamente irreducible, entonces por el teorema anterior, existe una familia de sistemas deductivos simples $\{S_i\}_{i \in I}$ tal que $C = \bigcap_{i \in I} S_i$, lo que implica, por ser C completamente irreducible, que existe $i \in I$ tal que $C = S_i$ y entonces C es un sistema deductivo simple. ■

Corolario 8.2.3 *Todo sistema deductivo máximo es un sistema deductivo simple.*

Dem. Todo sistema deductivo máximo es un sistema deductivo completamente irreducible. ■

No todo sistema deductivo máximo M es de la forma $M = U \cap \varphi(U)$, con U un ultrafiltro. En efecto consideremos el álgebra de De Morgan A indicada en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8.2.2



Los filtros primos son: $P_1 = F(1)$, $P_2 = F(b)$, $P_3 = F(a)$. Luego $U = P_3$ es un ultrafiltro, $\varphi(P_1) = P_3$, $\varphi(P_2) = P_2$, $\varphi(P_3) = P_1$, y los sistemas deductivos simples son $S_1 = P_1 \cap \varphi(P_1) = P_1 \cap P_3 = P_1$, $, S_2 = P_2 \cap \varphi(P_2) = P_2 \cap P_2 = P_2$, $S_3 = P_3 \cap \varphi(P_3) = P_3 \cap P_1 = P_1$. Como $S_3 = U \cap \varphi(U) = P_1 \subset P_2 = S_2$ entonces S_3 no es un sistema deductivo máximo.

Figura 8.2.2

Definición 8.2.4 *Daremos el nombre de* **radical** *de un álgebra de De Morgan A a la intersección de todos los sistemas deductivos máximos de A y lo notaremos $Rad\, A$. Si $Rad\, A = \{1\}$ diremos que el álgebra A es* **semisimple**.

En el ejemplo anterior el único sistema deductivo máximo es $F(b) = \{b, 1\}$, luego $Rad\, A = \{b, 1\}$, lo que implica que A no es semisimple.
Consideremos el álgebra de De Morgan $(A, \sim)$ indicada en el Ejemplo 7.0.4, f) y cuyo diagrama se indica a continuación:

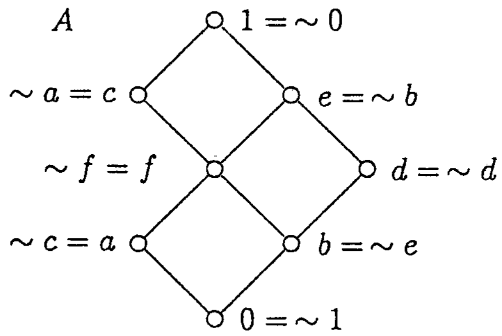


Figura 8.2.3

entonces la operación $\twoheadrightarrow$ está indicada en la tabla siguiente:

$\twoheadrightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	c	c	c	c	1	1	c	1
b	e	e	e	1	e	e	e	1
c	a	a	f	c	e	e	f	1
d	d	e	d	1	d	e	e	1
e	b	f	b	c	d	e	f	1
f	f	f	f	c	e	e	f	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1

Los sistemas deductivos simples son : $S_1 = F(a) \cap \varphi(F(a)) = F(a) \cap F(d) = F(e)$. $S_2 = F(b) \cap \varphi(F(b)) = F(b) \cap F(c) = F(c)$. S_1 y S_2 son los únicos sistemas deductivos máximos, por lo tanto $Rad\,A = F(e) \cap F(c) = \{1\}$, luego A es semisimple.

El conjunto $A' = \{0, a, c, 1\}$ es una subálgebra de A isomorfa a la del Ejemplo 8.2.2, la cual como hemos visto no es semisimple. Esto muestra, en virtud del teorema de Birkhoff, indicado a continuación, que las álgebras semisimples no pueden caracterizarse por igualdades.

Teorema 8.2.5 (Birkhoff). *Para que una clase $\mathcal{K}$ de álgebras pueda caracterizarse por igualdades es necesario y suficiente que:*

1) Las subálgebras de un álgebra de la clase $\mathcal{K}$ sea un álgebra de la clase $\mathcal{K}$.

2) El producto cartesiano de álgebras de la clase $\mathcal{K}$ sea un álgebra de la clase $\mathcal{K}$.

3) Toda imagen homomórfica de un álgebra de la clase $\mathcal{K}$ sea un álgebra de la clase $\mathcal{K}$.

Dado un reticulado de De Morgan representemos por $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{I}$. las familias de los sistemas deductivos máximos, completamente irreducibles, simples e irreducibles de A, respectivamente. Entre estas familias existe la siguiente relación: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}$.
Además:

1) $\mathcal{M} \neq \mathcal{C}$ En el ejemplo 8.2.2, los sistemas deductivos son $D_1 = \{1\}$ y $D_2 = \{b, 1\}$ lo que prueba que D_1 es completamente irreducible y no es máximo.

2) $\mathcal{C} \neq \mathcal{S}$ Sabemos que la recta $\mathbf{R}$ es un reticulado de De Morgan, y $P = F(\frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{1}{2}\}$ es un filtro primo de $\mathbf{R}$ luego $I = \sim P = \{x : x \leq -\frac{1}{2}\}$ luego $\varphi(P) = \complement \sim P = \{x : x > -\frac{1}{2}\}$ y por lo tanto $P \cap \varphi(P) = P$. Luego P es un sistema deductivo simple.
Sea x tal que $0 < x < \frac{1}{2}$, y consideremos el filtro primo $F(x)$, luego $F(x) \cap \varphi(F(x)) = F(x)$ y por lo tanto $F(x)$ es un sistema deductivo. Además $P = \bigcap_{0<x<\frac{1}{2}} F(x)$, y no existe x, $0 < x < \frac{1}{2}$ tal que $F(x) = P$, luego P no es completamente irreducible.

De lo precedente se deduce que $\mathcal{M} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}$. No sabemos si $\mathcal{S} \neq \mathcal{I}$.

Observación 8.2.2 *En el caso finito la noción de sistema deductivo irreducible coincide con la noción de sistema deductivo completamente irreducible, esto es, en el caso finito $\mathcal{C} = \mathcal{I}$, luego tenemos que $\mathcal{M} \subset \mathcal{C} = \mathcal{S} = \mathcal{I}$.*

9 Reticulados y álgebras de De Morgan simples

9.1 Introducción

Definición 9.1.1 *Un reticulado (álgebra) de De Morgan A se dice* **simples** *si contiene mas de un elemento y sus únicas imagenes homomórficas son isomorfas a un reticulado (álgebra) con un sólo elemento o a un reticulado (álgebra) isomorfo a A.*

Vimos que si $\mathcal{P}_0$ es una familia de filtros primos de un reticulado (álgebra) de De Morgan A, invariante por φ entonces podemos considerar el cociente $A/\mathcal{P}_0$. Si P es un filtro primo de un reticulado (álgebra) de De Morgan A y $\mathcal{P}_0 = \{P, \varphi(P)\}$ entonces $\mathcal{P}_0$ es una familia de filtros primos invariante por φ. Observemos que $C_1 = \bigcap_{P\in\mathcal{P}_0} P = P \cap \varphi(P)$ y $C_0 = \complement(\bigcup_{P\in\mathcal{P}_0} P) = \complement P \cap \sim P$ son clases de equivalencia módulo $\mathcal{P}_0$ y que además $C_1 \vee C_0 = C_1$ y $\sim C_1 = C_0$. En efecto: si $x \in C_1$ e $y \in C_0$ entonces $x \in P\cap\varphi(P)$ y como $x \leq x\vee y$ y P y $\varphi(P)$ son filtros tenemos que $x\vee y \in P\cap\varphi(P)$ luego $C_1\vee C_0 = C(x)\vee C(y) = C(x\vee y) = C_1$. De $x \in P \cap \varphi(P)$ resulta que $x \in P$ y $x \in \varphi(P) =\sim \complement P$ luego $\sim x \in\sim P$ y $\sim x \in \complement P$, esto es $\sim x \in C_0$ por lo tanto $\sim C_1 =\sim C(x) = C(\sim x) = C_0$.
A los efectos de determinar los reticulados (álgebras) de De Morgan simples vamos a probar el siguiente resultado:

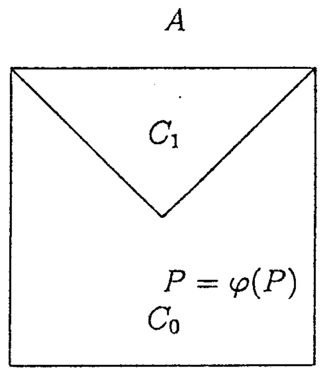
Teorema 9.1.1 *Si P es un filtro primo de un reticulado de De Morgan A y $\mathcal{P}_0 = \{P, \varphi(P)\}$ entonces:*

a) $A' = A/\mathcal{P}_0$ *es isomorfo a* $\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ *o a* M_4.

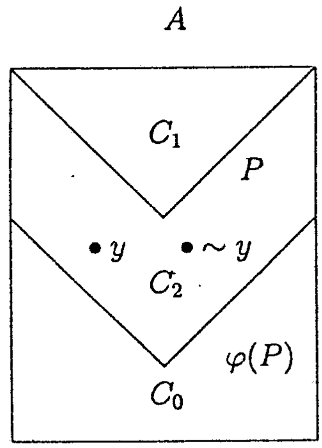
b) *El epimorfismo natural* $h{:}A \to A'$ *tiene por núcleo al sistema deductivo simple* $S = P \cap \varphi(P)$.

Dem. Claramente $\mathcal{P}_0$ es invariante por φ. Para esta familia de filtros primos podemos tener los siguientes casos:

1) $\underline{P = \varphi(P)}$.
Sabemos que $C_1 = P \cap \varphi(P) = P$ y $C_0 = \complement(P \cup \varphi(P)) = \complement P$ son clases de equivalencia, módulo $\mathcal{P}_0$. Además claramente son las únicas clases de equivalencia y como $C_1 \vee C_0 = C_1$ y $\sim C_1 = C_0$ tenemos que $A' = A/\mathcal{P}_0 \cong \mathrm{M}_2$.

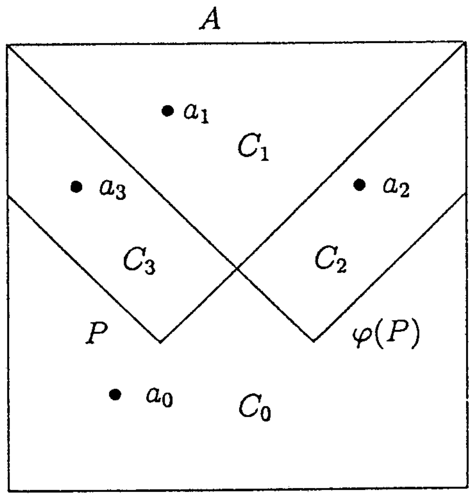


2) $\underline{P \text{ y } \varphi(P) \text{ son comparables y diferentes.}}$ Supongamos que $P \subset \varphi(P)$.



Sabemos que $C_1 = P \cap \varphi(P) = P$ y $C_0 = A \setminus (P \cup \varphi(P)) = \complement\varphi(P)$ son clases de equivalencia, módulo $\mathcal{P}_0$. Además si $x \in \varphi(P) \setminus P$ entonces $C_2 = C(x) = \varphi(P) \setminus P$. Claramente $C_0 \vee C_2 = C_2$ y $C_2 \vee C_1 = C_1$. Ya sabemos que $\sim C_1 = C_0$. Ademas si $y \in C_2 = \varphi(P) \setminus P$ esto es $y \in \varphi(P) = \sim \complement P$ e $y \in \complement P$, luego $\sim y \in \complement P$ e $\sim y \in \sim \complement P = \varphi(P)$, por lo tanto $\sim y \in \varphi(P) \setminus P = C_2$. Tenemos así que $\sim C_2 = C_2$ y en consecuencia $A' = A/\mathcal{P}_0 \cong \mathrm{M}_3$.
Si $\varphi(P) \subset P$, se demuestra en forma análoga que $A' = A/\mathcal{P}_0 \cong \mathrm{M}_3$.

3) $\underline{P \text{ y } \varphi(P) \text{ son incomparables.}}$



Obervemos que $P \cap \sim P \neq \emptyset$, en efecto si $P \cap \sim P = \emptyset$ entonces $P \subseteq \complement \sim P = \varphi(P)$, absurdo. En forma análoga se prueba que $\varphi(P) \cap \complement P \neq \emptyset$. Claramente existen cuatro clases de equivalencia, a saber: $C_1 = P \cap \varphi(P)$, $C_2 = \varphi(P) \cap \complement P$, $C_3 = P \cap \complement\varphi(P) = P \cap \sim P$, $C_0 = \complement P \cap \complement\varphi(P) = A \setminus (P \cup \varphi(P))$.
Si $a_i \in C_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ entonces $C_i = C(a_i)$. Vamos a demostrar que las operaciones de $\vee$ y $\sim$ en el conjunto cociente están dadas por la siguiente tabla:

$\vee$	C_0	C_2	C_3	C_1	$\sim C_x$
C_0	C_0	C_2	C_3	C_1	C_1
C_2	C_2	C_2	C_1	C_1	C_2
C_3	C_0	C_1	C_3	C_1	C_3
C_1	C_1	C_1	C_1	C_1	C_0

Probemos que $C_1 \vee C_i = C_1$. Como C_1 es un filtro, $a_1 \in C_1$ y $a_1 \leq a_1 \vee a_i$, para $i = 0, 2, 3$ entonces $a_1 \vee a_i \in C_1$ para $i = 0, 2, 3$ y en consecuencia $C_1 \vee C_i = C(a_1) \vee C(a_i) = C(a_1 \vee a_i) = C(a_1) = C_1$.
Probemos que $C_0 \vee C_2 = C_2$. Como $a_2 \in \varphi(P) \setminus P$, en particular $a_2 \in \varphi(P)$ luego como $\varphi(P)$ es un filtro y $a_2 \leq a_2 \vee a_0$ tenemos que $a_2 \vee a_0 \in \varphi(P)$. Si $a_2 \vee a_0 \in P$ entonces como P es un filtro primo tendremos que $a_2 \in P$ ó $a_0 \in P$, aburdo. Luego $a_2 \vee a_0 \in \varphi(P) \setminus P = C_2$. En forma análoga se demuestra que $C_0 \vee C_3 = C_3$. Probemos ahora que $C_2 \vee C_3 = C_1$. En efecto como $a_2 \in \varphi(P) \setminus P$ y $a_3 \in P \setminus \varphi(P)$ entonces en particular $a_2 \in \varphi(P)$ y $a_3 \in P$, luego como $a2$, $a_3 \leq a_2 \vee a_3$ y $\varphi(P)$ y P son filtros tenemos que $a_2 \vee a_3 \in \varphi(P) \cap P = C_1$.
Ya sabemos que $\sim C_1 = C_0$ y que $\sim C_0 = C_1$. Probemos que $\sim C_3 = C_3$. En efecto como $a_3 \in P \setminus \varphi(P) = P \cap \sim P$ entonces $a_3 \in P$ y $a_3 \in \sim P$ luego $\sim a_3 \in \sim P$ y $\sim a_3 \in P$ y en consecuencia $\sim a_3 \in P \cap \sim P = C_1$.

Acabamos así de probar que $A/\mathcal{P}_0$ es isomorfa a M_4. ■

9.2 Determinación de las álgebras simples

Teorema 9.2.1 *Si A es un reticulado de De Morgan (álgebra de De Morgan) simples entonces A es isomorfo (isomorfa) a $\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ ó a M_4.*

Dem. Si A es un reticulado de De Morgan (álgebra de De Morgan) simples entonces en particular es un reticulado de De Morgan (álgebra de De Morgan) con mas de un elemento, luego existe por lo menos un filtro primo P de A. Consideremos la familia $\mathcal{P}_0 = \{P, \varphi(P)\}$, luego $A' = A/\mathcal{P}_0$ es un imagen homomórfica de A. Por el teorema anterior sabemos que A' tiene mas de un elemento luego como A es simple A' es isomorfo (isomorfa) a A, esto es A es isomorfo (isomorfa) a $\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ ó a M_4. ■

Lema 9.2.1 *Si P es un filtro primo de un reticulado de De Morgan A tal que:*

1) *P y $\varphi(P)$ son comparables,*

2) *Existe $b \in A$ tal que $b, \sim b \in P$,*

entonces $b, \sim b \notin \varphi(P)$ y además $\varphi(P) \subset P$.

Dem. Por el Lema 6.0.3 si P es un filtro primo entonces $\sim x \in P \iff x \notin \varphi(P)$, luego de 2) resulta que $b = \sim(\sim b) \in P \iff \sim b \notin \varphi(P)$ y $\sim b \in P \iff b \notin \varphi(P)$.
Si $P \subseteq \varphi(P)$ entonces dado $b \in P$ tenemos que $b \in \varphi(P)$, contradicción, luego por 1) : $\varphi(P) \subset P$. ■

10 Teorema de representación de Birula-Rasiowa

10.1 Preliminares

Vamos a aplicar los resultados demostrados anteriormente al siguiente teorema de representación:

Teorema 10.1.1 *Si A es un reticulado de De Morgan con mas de un elemento y A no es simple entonces A es producto subdirecto de álgebras de De Morgan simples.*

Dem. Como A tiene mas de un elemento entonces la familia de los $\mathcal{P} = \{P_k\}_{k\in K}$ de los filtros primos de A es no vacía. Para cada $k \in K$ consideremos el conjunto $S_k = \{P_k, \varphi(P_k)\}$.
Sea $J \subseteq K$ tal que si $j, j' \in J$ y $j \neq j'$ entonces $S_j \neq S_{j'}$. Sabemos que cualquiera que sea $j \in J$, $E_j = A/S_j$ es isomorfo a $\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ ó a M_4. Consideremos el producto cartesiano de los reticulados de De Morgan simples E_j con $j \in J$, esto es $E = \prod\limits_{j\in J} E_j$.
Para cada $j \in J$ sea h_j el epimorfismo natural de A en E_j y para cada $a \in A$ consideremos la función H de A en E definida por:

$$H(a) = (h_j(a))_{j\in J}.$$

Entonces tenemos que:

1) $H(x \wedge y) = H(x) \wedge (y)$, donde $x, y \in A$.
$H(x \wedge y) = (h_j(x \wedge y))_{j\in J} = (h_j(x) \wedge h_j(y))_{j\in J} = (h_j(x))_{j\in J} \wedge (h_j(y))_{j\in J} = H(x) \wedge h(y)$.
En forma análoga se prueba que:

2) $H(x \vee y) = H(x) \vee (y)$, donde $x, y \in A$.

3) $\sim H(x) = H(\sim x)$, donde $x \in A$.

4) H es biunívoca.
Sean $x, y \in A$ tales que $x \neq y$ luego $x \not\leq y$ ó $y \not\leq x$. Supongamos que $x \not\leq y$ entonces existe un filtro primo P_j tal que $x \in P_j$ e $y \notin P_j$, por lo tanto si $S_j = \{P_j, \varphi(P_j)\}$ y h_j es el epimorfismo natural de A en $E_j = A/S_j$ tendremos que $h_j(x) \neq h_j(y)$ y por lo tanto $H(x) \neq H(y)$.

De 1), 2), 3) y 4) resulta que H es un homomorfismo inyectivo y por lo tanto H es un isomorfismo de A en $A' = H(A)$, y en consecuencia A' es isomorfo a A.
Probemos que $\Pi_j(A') = E_j$, para todo $j \in J$. Como $h_j(A) = E_j$ entonces para todo $a_j \in E_j$ existe $a \in A$ tal que $h_j(a) = a_j$. Sea $a' = H(a) \in A'$, luego $\Pi_j(a') = \Pi_j(H(a)) = h_j(a) = a_j$.
Además Π_j no es un isomorfismo de A' en E_j, cualquiera que sea $j \in J$. En efecto caso contrario existiría $j \in J$ tal que $A' \cong E_j$ y como $A \cong A'$ tendríamos que $A \cong E_j$ y por lo tanto A sería simples, absurdo.
En el caso en que A sea un álgebra de De Morgan entonces $H(1) = (h_j(1))_{j\in J} = (1_j)_{j\in J} = 1 \in E$ y A' es una subálgebra de E que es producto subdirecto de álgebras simples.
Esta demostración se debe a A. Monteiro. La demostración de Birula-Rasiowa utiliza la representación de un reticulado de De Morgan por un reticulado de De Morgan de conjuntos. ■

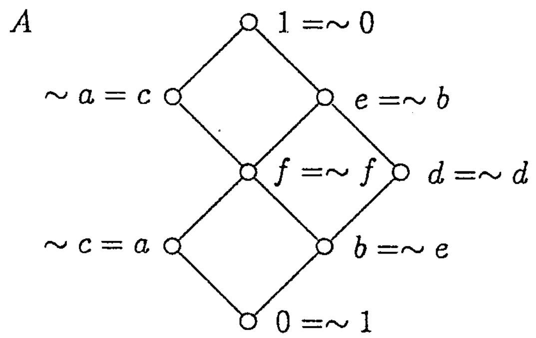
Corolario 10.1.1 *Los únicos reticulados de De Morgan subdirectamente irreducibles son los reticulados de De Morgan simples y las únicas álgebras de De Morgan subdirectamente irreducibles son las álgebras de De Morgan simples.*

El teorema anterior se debe a Birula y a Rasiowa. Estos autores utilizan la representación de los reticulados de De Morgan (álgebras de De Morgan) por reticulados (álgebras) de conjuntos (ver 4.2) para su demostración. La demostración que acabamos de indicar se debe a A. Monteiro.

Sea $\mathcal{P}' = \{P_k\}_{k\in K}$ un conjunto separador de filtros primos de A, esto es el conjunto $\mathcal{P}'$ verifica que dados dos elementos diferentes de A, existe $P \in \mathcal{P}'$ que contiene a uno de elementos sin contener al otro. Sea $\mathcal{P}" = \{\varphi(P_k)\}_{k\in K}$. Para cada $k \in K$ consideremos el conjunto $S_k = \{P_k, \varphi(P_k)\}$.
Sea $J \subseteq K$ tal que si $j, j' \in J$ y $j \neq j'$ entonces $S_j \neq S_{j'}$. Observemos que $\{P_j\}_{j\in J}$ tambien es un conjunto separador de filtros primos. Para cada $j \in J$ sea $E_j = E/S_j$ y $E = \prod_{j\in J} E_j$. Entonces se prueba como en el teorema anterior que A es producto subdirecto de los reticulados (álgebras) E_j.
Observemos que esta representación no es única, porque pueden existir mas de un conjunto separador de filtros primos (salvo que el conjunto A sea finito).

10.2 Ejemplos

1) Vamos a representar la siguiente álgebra de De Morgan:



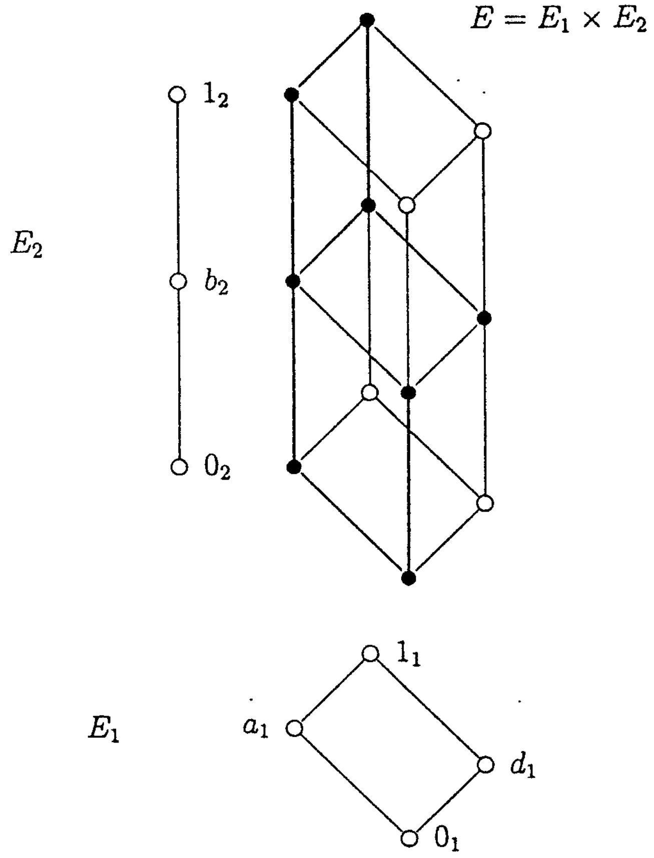
En este caso tenemos que la familia $\mathcal{P}$ de filtros primos de A, es

$$\mathcal{P} = \{P_1 = [a),\ P_2 = [b),\ P_3 = [c),\ P_4 = [d)\}$$

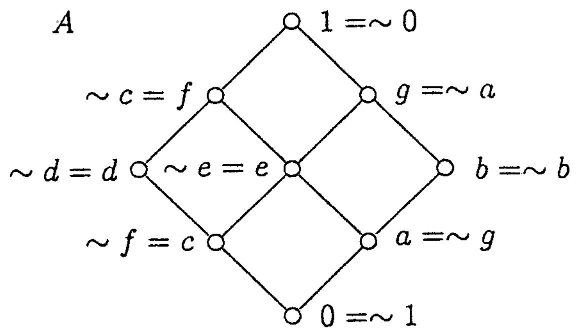
y $\varphi(P_1) = P_4$, $\varphi(P_2) = P_3$. Sean $S_1 = \{P_1, \varphi(P_1)\} = \{P_1, P_4\}$ y $S_2 = \{P_2, \varphi(P_2)\} = \{P_2, P_3\}$. Como P_1 y P_4 son incomparables entonces $E_1 = A/S_1 \cong \mathrm{M}_4$ y como $P_2 \subset P3$ entonces $E_2 = A/S_2 \cong \mathrm{M}_3$.
Representemos con $C_j(x)$, $j = 1, 2$ la clase de equivalencia módulo S_j que contiene al elemento $x \in A$, luego:
$C_1(0) = \{0, b\} = 0_1$, $C_1(a) = \{a, f, c\} = a_1$, $C_1(d) = \{d\} = d_1$,$C_1(1) = \{1, e\} = 1_1$ y $C_2(0) = \{0, a\} = 0_2$, $C_1(b) = \{b, f, d, e\} = b_2$, $C_2(1) = \{1, c\} = 1_2$. Por lo tanto tenemos que los epimorfimos h_1 y h_2 y el homomorfismo $H : A \to E_1 \times E_2$ estan dados por la siguiente tabla:

x	0	a	b	c	d	e	f	1
$h_1(x)$	0_1	a_1	0_1	a_1	d_1	1_1	a_1	1_1
$h_2(x)$	0_2	0_2	b_2	1_2	b_2	b_2	b_2	1_2
$H(x)$	$(0_1,0_2)$	$(a_1,0_2)$	$(0_1,b_1)$	$(a_1,1_2)$	(d_1,b_2)	$(1_1,b_2)$	(a_1,b_2)	$(1_1,1_2)$

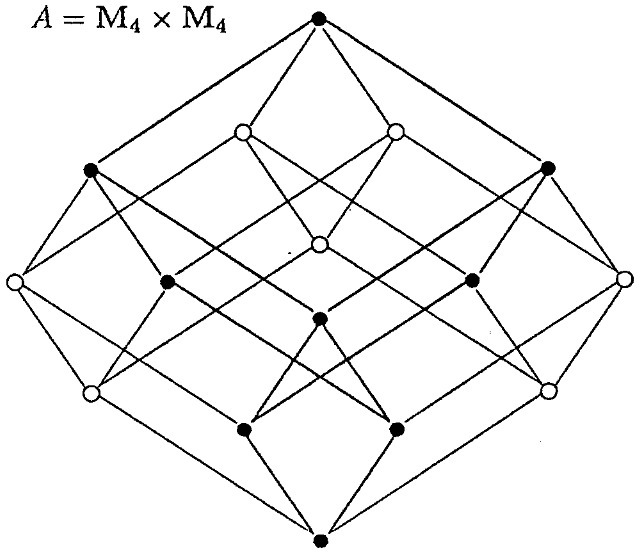
En el siguiente diagrama indicamos con • los elementos de la subálgebra $H(A)$ de $E = E_1 \times E_2$.



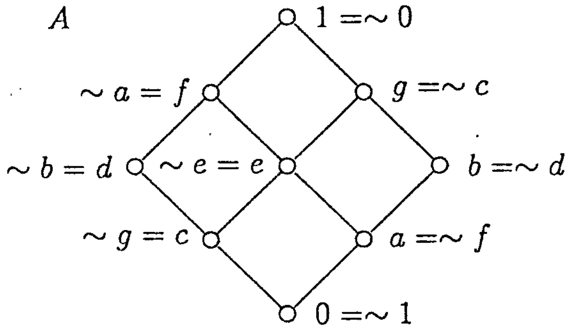
2) Consideremos ahora el álgebra de De Morgan:



En este caso el reticulado A es isomorfo al producto cartesiano de dos cadenas con tres elementos cada una, pero el álgebra de De Morgan A es producto subdirecto de dos álgebras de De Morgan isomorfas a M_4.



3) Sea A el álgebra de De Morgan indicada a continuación:



En este caso tenemos que la familia $\mathcal{P}$ de filtros primos de A, es

$$\mathcal{P} = \{P_1 = [a),\ P_2 = [b),\ P_3 = [c),\ P_4 = [d)\}$$

y $\varphi(P_1) = P_2$, $\varphi(P_3) = P_4$. Sean $S_1 = \{P_1, \varphi(P_1)\} = \{P_1, P_2\}$ y $S_2 = \{P_3, \varphi(P_3)\} = \{P_3, P_4\}$. Como $P_1 \subset P_2$ y $P_3 \subset P_4$ entonces $E_1 = A/S_1 \cong \mathrm{M}_3$ y $E_2 = A/S_2 \cong \mathrm{M}_3$. Representemos con $C_j(x)$, $j = 1, 2$ la clase de equivalencia módulo S_j que contiene al elemento $x \in A$, luego:
$C_1(0) = \{0, c, d\} = 0_1$, $C_1(a) = \{a, e, f\} = a_1$, $C_1(1) = \{b, g, 1\} = 1_1$ y $C_2(0) = \{0, a, d\} = 0_2$, $C_2(c) = \{c, e, g\}$, $C_2(1) = \{d, f, 1\} = 1_2$. En este caso $A \cong E_1 \times E_2$.

11 Imagenes booleanas de un reticulado de De Morgan

11.1 Filtros regulares

Toda álgebra de Boole es en particular un reticulado de De Morgan.

Definición 11.1.1 *Un álgebra de Boole B se dice una imagen boolena de un reticulado de De Morgan R, si existe una epiyección $h : R \to B$ que verifica $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$, $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$ $h(\sim x) = -h(x)$, donde $x, y \in R$, esto es si h es un epimorfismo entre los reticulados de De Morgan R y B.*

Es claro que si R es un reticulado de De Morgan entonces toda álgebra de Boole con un sólo elemento es una imagen booleana de R, que se denomina imagen booleana trivial. Se plantea el problema de saber si un reticulado de De Morgan tiene imagenes booleanas no triviales y en caso afirmativo como determinarlas.

Lema 11.1.1 *Si $h : R \to B$ es un epimorfismo de un reticulado de De Morgan R en un álgebra de Boole B, entonces su núcleo $D = \{x \in R : h(x) = 1\}$ verifica $x \vee \sim x \in D$, para todo $x \in R$.*

Dem. $h(x \vee \sim x) = h(x) \vee h(\sim x) = h(x) \vee -h(x) = 1.$ ■

Definición 11.1.2 *Un filtro de un reticulado de De Morgan R se dice* regular *si verifica:*

(MP) *Si Si $a \in F$ y $a \twoheadrightarrow b \in F$ entonces $b \in F$.*

(T) $x \vee \sim x \in F$, *para todo $x \in R$.*

A los elementos de la forma $x \vee \sim x$ daremos el nombre de tesis de R. Luego un filtro regular de R es un sistema deductivo que contiene todas las tesis de R. Claramente R es un filtro regular de R. Puede ocurrir que R sea el único filtro regular de R. Es lo que ocurre en los Ejemplos 7.0.2 a) $(A, \sim_1)$, 7.0.2 b), 7.0.3 $(A, \sim_1)$, 7.0.4 $(A, \sim_3)$, 7.0.2 $(A, \sim_2)$, 7.0.2 d) $(A, \sim_1)$,$(A, \sim_2)$, 7.0.2 e) $(A, \sim_1)$, 4h, 7.0.2 e) $(A, \sim_1)$, 7.0.2 f) $(A, \sim_1)$.

Observación 11.1.1 *En el Ejemplo 7.0.1 el filtro $F(1)$ verifica (MP) y (T), en el Ejemplo 7.0.2 el filtro $F(a)$ de $(A, \sim_1)$ no verifica ni (MP) ni (T) y F(1) verifica (MP) y no verifica (T) y en el Ejemplo 7.0.3 a) el filtro $F(a)$ de $(A, \sim_2)$ verifica (T) y no verifica (MP). Por lo tanto si F es un filtro de un reticulado de De Morgan R las condiciones son independientes.*

Lema 11.1.2 *Si $h : R \to B$ es un epimorfismo de un reticulado de De Morgan R en un álgebra de Boole B y $D = \{x \in R : h(x) = 1\}$ su núcleo entonces:*

$$h(x) = h(y) \iff (x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) \in D.$$

Dem. $\Rightarrow$) $h((x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x)) = (h(x) \twoheadrightarrow h(y)) \wedge (h(y) \twoheadrightarrow h(x)) = (-h(x) \vee h(y)) \wedge (-h(y) \vee h(x)) = (\sim h(x) \vee h(x)) \wedge (-h(y) \vee h(y)) = 1 \wedge 1 = 1$.
$\Leftarrow$) Si $(x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow x) \in D$ entonces (1) $x \twoheadrightarrow y \in D$ y (2) $y \twoheadrightarrow x \in D$. De (1) resulta $1 = h(x \twoheadrightarrow y) = h(x) \twoheadrightarrow h(y) = -h(x) \vee h(y)$ y por lo tanto $h(x) \leq h(y)$. En forma análoga de (2) se deduce $h(y) \leq h(x)$. ■

Si D es un filtro regular de un reticulado de De Morgan R y $a, b \in R$ notaremos $a \equiv b$ (mód. D) o $a \equiv b$ para indicar que $(a \twoheadrightarrow b) \wedge (b \twoheadrightarrow a) \in D$.

Lema 11.1.3 *Si D es un filtro regular de un reticulado de De Morgan R la relación $\equiv$ es una relación de equivalencia compatible con $\wedge, \vee$ y $\sim$.*

Dem.

I) $\equiv$ es una relación de equivalencia.

Ia) $a \equiv a$. $(a \twoheadrightarrow a) \wedge (a \twoheadrightarrow a) = \sim a \vee a \in D$ dado que D es un filtro regular.

Ib) Si $a \equiv b$ entonces $b \equiv c$. Evidente.

Ic) Si $a \equiv b$ y $b \equiv c$ entonces $a \equiv c$. Por hipótesis (1) $a \twoheadrightarrow b \in D$, (2) $b \twoheadrightarrow a \in D$, (3) $b \twoheadrightarrow c \in D$ y (4) $c \twoheadrightarrow b \in D$. Luego

$$(5) \quad (a \twoheadrightarrow b) \twoheadrightarrow (a \twoheadrightarrow c) = \sim (a \twoheadrightarrow b) \vee (a \twoheadrightarrow c) =$$
$$(a \wedge \sim b) \vee (\sim a \vee c) = (a \vee \sim a \vee c) \wedge (\sim b \vee \sim a \vee c) \geq$$
$$(a \vee \sim a) \wedge (\sim b \vee c) = (a \vee \sim a) \wedge (b \twoheadrightarrow c).$$

Como D es un filtro regular (6) $a \vee \sim a \in D$. Luego de (3) y (6) resulta por ser D un filtro que (7) $(a \vee \sim a) \wedge (b \twoheadrightarrow c) \in D$. Nuevamente teniendo en cuenta que D es un filtro de (7) y (5) resulta (8) $(a \twoheadrightarrow b) \twoheadrightarrow (a \twoheadrightarrow c) \in D$. De (1) y (8) resulta por (MP) que $a \twoheadrightarrow c \in D$. En forma análoga se deduce que $c \twoheadrightarrow a \in D$.

II) $\equiv$ es una congruencia.

IIa) Si $a \equiv a'$ y $b \equiv b'$ entonces $a \wedge b \equiv a' \wedge b'$.

$$(a \wedge b) \twoheadrightarrow (a' \wedge b') = ((a \wedge b) \twoheadrightarrow a') \wedge ((a \wedge b) \twoheadrightarrow b') =$$
$$[(a \twoheadrightarrow a') \vee (b \twoheadrightarrow a')] \wedge [(a \twoheadrightarrow b') \vee (b \twoheadrightarrow b')] = d_1 \vee d_2.$$

Como $(a \twoheadrightarrow a'), (b \twoheadrightarrow b') \in D$, $a \twoheadrightarrow a' \leq d_1$, $b \twoheadrightarrow b' \leq d_2$ y D es un filtro resulta que $d_1, d_2 \in D$ y por lo tanto $d_1 \vee d_2 \in D$.
En forma análoga se prueba que $(a' \wedge b') \twoheadrightarrow (a \wedge b) \in D$.

IIb) Si $a \equiv a'$ y $b \equiv b'$ entonces $a \vee b \equiv a' \vee b'$.

$$(a \vee b) \twoheadrightarrow (a' \vee b') = ((a \vee b) \twoheadrightarrow a') \vee ((a \vee b) \twoheadrightarrow b') =$$
$$[(a \twoheadrightarrow a') \wedge (b \twoheadrightarrow a')] \vee [(a \twoheadrightarrow b') \wedge (b \twoheadrightarrow b')] =$$
$$[(a \twoheadrightarrow a') \vee (a \twoheadrightarrow b')] \wedge [(a \twoheadrightarrow a') \vee (b \twoheadrightarrow b')] \wedge$$
$$[(b \twoheadrightarrow a') \vee (a \twoheadrightarrow b')] \wedge [(b \twoheadrightarrow a') \vee (b \twoheadrightarrow b')] =$$

$$d_1 \wedge d_2 \wedge d_3 \wedge d_4.$$

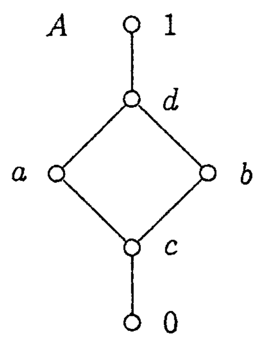
Como $(a \twoheadrightarrow a'), (b \twoheadrightarrow b') \in D$, $a \twoheadrightarrow a' \leq d_1$, $a \twoheadrightarrow a' \leq d_2$, $b \twoheadrightarrow b' \leq d_4$ y D es un filtro resulta que (1) $d_1, d_2, d_4 \in D$.
Ademas (2) $(b \twoheadrightarrow a') \vee (a \twoheadrightarrow b') = \sim b \vee a' \vee \sim a \vee b' = (a \twoheadrightarrow a') \vee (b \twoheadrightarrow b') \in D$.
De (1) y (2) resulta por ser D un filtro que $(a \vee b) \twoheadrightarrow (a' \vee b') \in D$. Análogamente se prueba que $(a' \vee b') \twoheadrightarrow (a \vee b) \in D$.

IIc) <u>Si $a \equiv a'$ entonces $\sim a \equiv \sim a'$.</u>
$\sim a \twoheadrightarrow \sim a' = a \vee \sim a' = a' \twoheadrightarrow a \in D$ y $\sim a' \twoheadrightarrow \sim a = a \twoheadrightarrow a' \in D$.

∎

Dado $x \in R$ sea $C(x) = \{y \in R : y \equiv x\}$. Consideremos el conjunto cociente $B = R/\equiv$ y pongamos por definición $C(a) \wedge C(b) = C(a \wedge b)$, $C(a) \vee C(b) = C(a \vee b)$, $-C(a) = C(\sim a)$.
Definiendo $h : R \to B = R/\equiv$ por $h(r) = C(r)$ tenemos que h es una función suryectiva que verifica: $h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b)$, $h(a) \vee h(b) = h(a \vee b)$, $-h(a) = h(\sim a)$. Por lo tanto B es un reticulado de De Morgan.
Vamos a demostrar que $D = C(x \vee \sim x)$. Como $x \vee \sim x \in D$ entonces $C(x \vee \sim x) \subseteq D$.
Probemos que: Si $d \in D$ entonces $d \equiv d \vee \sim d$. En efecto $d \twoheadrightarrow (d \vee \sim d) = (d \twoheadrightarrow d) \vee (d \twoheadrightarrow \sim d) = (\sim d \vee d) \vee (d \twoheadrightarrow \sim d) \in D$ y como $\sim d \vee d \in D$ entonces $d \twoheadrightarrow (d \vee \sim d) \in D$. Ademas $(d \vee \sim d) \twoheadrightarrow d = (d \twoheadrightarrow d) \wedge (\sim d \twoheadrightarrow d) = (\sim d \vee d) \wedge (d \vee d) = (\sim d \vee d) \wedge d = d \in D$.
Designemos con $\mathbf{1}$ a esta clase de equivalencia, esto es $\mathbf{1} = C(x \vee \sim x)$. Entonces $C(y) \wedge \mathbf{1} = C(y) \wedge C(y \vee \sim y) = C(y \wedge (y \vee \sim y)) = C(y)$. Acabamos así de probar que $\mathbf{1}$ es el último elemento del reticulado de De Morgan B. Sea $\mathbf{0} = -\mathbf{1}$ entonces $\mathbf{0}$ es el primer lemento de B y $\mathbf{0} = -C(x \vee \sim x) = C(\sim (x \vee \sim x)) = C(x \wedge \sim x)$. Luego $C(x) \vee -C(x) = C(x) \vee C(\sim x) = C(x \vee \sim x) = \mathbf{1}$ y $C(x) \wedge -C(x) = C(x) \wedge C(\sim x) = C(x \wedge \sim x) = \mathbf{0}$. Acabamos así de probar que B es un álgebra de Boole. Además $Nuc\,(h) = \{x \in R : h(x) = \mathbf{1}\} = \{x \in R : C(x) = \mathbf{1}\} = \{x \in R : x \equiv y \vee \sim y\} = D$.

Consideremos los reticulados de De Morgan indicados en el Ejemplo 7.0.4 f)



x	0	a	b	c	d	1
$\sim_1 x$	1	b	a	d	c	0
$\sim_2 x$	1	a	b	d	c	0

En el reticulado $(A, \sim_1)$: $\{x \vee \sim_1 x : x \in A\} = \{d, 1\}$ y el filtro $F(d)$ es regular. El reticulado cociente es isomorfo a un álgebra de Boole con 2 átomos.

En el reticulado $(A, \sim_2)$ $\{x \vee \sim_1 x : x \in A\} = \{a, b, d, 1\}$ y el filtro $F(c)$ es regular. El reticulado cociente es isomorfo a un álgebra de Boole con 1 átomo.

12 Factorización de Algebras de De Morgan

12.1 Introducción

Recordemos diversos resultados de la teoría de reticulados distributivos (ver por ejemplo [33]).

Si A es un reticulado distributivo, con primer (0) y último (1) elemento y $a, b \in A$ verifican $a \leq b$ es bien conocido que $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \leq b\}$ es un reticulado distributivo, con primer (a) y último elemento (b). Luego en particular $(b] = [0, b]$ y $[a) = [a, 1]$ son reticulados distributivos, y si $b \neq 0$ entonces $(b]$ es no trivial y si $a \neq 1$, $[a)$ es no trivial. Si c es un elemento booleano de A, notaremos con $-c$ su complemento booleano y con $B(A)$ el conjunto de todos los elementos booleanos de A.

Lema 12.1.1 *Si A_1 y A_2 son reticulados distributivos, no triviales, con primer y último elemento, entonces en $A_1 \times A_2$ existe un elemento booleano, diferente del primer y último elemento de $A = A_1 \times A_2$.*

Corolario 12.1.1 *Si A_1 y A_2 son reticulados distributivos finitos, no trivales, en $A_1 \times A_2$ existe un elemento booleano, diferente del primer y último elemento de $A = A_1 \times A_2$.*

Dem. En efecto $z = (1, 0) \in B(A_1 \times A_2)$ y $-z = (0, 1)$. ■

Lema 12.1.2 *Si A es un reticulado distributivo con primer y último elemento (0 y 1 respectivamente) tal que existe $b \in B(A) \setminus \{0, 1\}$ entonces $A_1 = (b]$ y $A_2 = (-b]$ son reticulados distributivos no triviales tales que A es isomorfo a $A_1 \times A_2$.*

Lema 12.1.3 *Si A es un reticulado distributivo con primer y último elemento (0 y 1 respectivamente) tal que existe $b \in B(A) \setminus \{0, 1\}$, $A_1 = (b]$, $A_2 = (-b]$ entonces:*

1) $B(A_1) = A_1 \cap B(A)$, $B(A_2) = A_2 \cap B(A)$.

2) Si $a \in B(A)$ entonces $a = a_1 \vee a_2$ donde $a_1 \in B(A_1)$ y $a_2 \in B(A_2)$.

y si A es finito, no trivial, se verifica:

3) Si $p \in \Pi(A)$ entonces $p \in A_1$ ó $p \in A_2$.

4) $\Pi(A) = \Pi(A_1) + \Pi(A_2)$. Esto es el conjunto ordenado de los elementos primos de A es la suma cardinal de dos conjuntos ordenados.

5) $\Pi(A_1) = \Pi(A) \cap A_1$ y $\Pi(A_2) = \Pi(A) \cap A_2$.

Observación 12.1.1 *Observemos que la transformación $h_1 : A \to A_1 = (b]$ definida por $h_1(a) = a \wedge b$, $\forall\, a \in A$ es un epimorfismo de reticulados que verifica (1) $h_1(a) = a \iff a \in (b]$ y (2) Nuc $(h_1) = [b)$. En efecto, como $0 \leq a \wedge b \leq b$ entonces $a \wedge b \in (b]$. Si $a \in (b]$ esto es $a \leq b$, por lo tanto $a = a \wedge b$ luego $h_1(a) = a$ y si $h_1(a) = a$ esto es $a \wedge b = a$ entonces $a \leq b$ esto es $a \in (b]$. $h_1(1) = 1 \wedge b = b$ y claramente $h_1(x \wedge y) = h_1(x) \wedge h_1(y)$ y $h_1(x \vee y) = h_1(x) \vee h_1(y)$. Nuc $(h_1) = \{x \in A : h_1(x) = b\} = \{x \in A : x \wedge b = b\} = \{x \in A : x \in [b)\}$.*

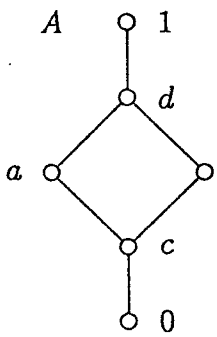
En forma análoga se prueba que la transformación $h_2 : A \to A_1 = (-b]$ definida por $h_2(a) = a \wedge -b$, $\forall\, a \in A$ es un epimorfismo de reticulados que verifica (1) $h_2(a) = a \iff a \in (-b]$ y (2) $Nuc\,(h_2) = [-b)$.

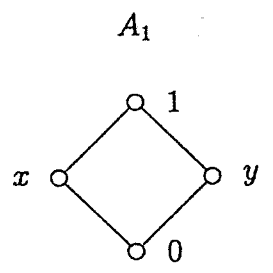
Sea A un reticulado distributivo, no trivial, $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de todos los filtros primos de R, $b \in B(A) \setminus \{0,1\}$, $\mathcal{P}_b = \{P \in \mathcal{P}(A) : b \in P\}$, $A_1 = (b]$ y $\mathcal{P}(A_1)$ el conjunto de todos los filtros primos de A_1. Probemos que $(\mathcal{P}_b(A), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(A_1), \subseteq)$ son conjuntos ordenados isomorfos. Dado $P \in \mathcal{P}_b(A)$ consideremos la siguiente función $H(P) = P \cap A_1$. En primer lugar vamos a probar que $P \cap A_1 \in \mathcal{P}(A_1)$. En efecto, como $b \in P$ y $b \in A_1$ entonces $b \in P \cap A_1$. Es claro que si $x, y \in P \cap A_1$ entonces $x \wedge y \in P \cap A_1$. Sea (1) $x \in P \cap A_1$ e (2) $y \in A_1$ tal que (3) $x \leq y$. Probemos que $y \in P \cap A_1$. Por (2) solo nos resta probar que $y \in P$. Por (1) tenemos que (4) $x \in P$. De (2) resulta (5) $y \in A$. De (4), (5) y (3) resulta $y \in P$. Luego $P \cap A_1$ es un filtro de A_1. Probemos que es primo. Supongamos que (6) $x \vee y \in P \cap A_1$, donde (7) $x, y \in A_1$. De (6) resulta que $x \vee y \in P$ luego (8) $x \in P$ ó (9) $y \in P$. Si se verifica (8) entonces por (7) resulta $x \in P \cap A_1$, y si se verifica (9) por (7) tenemos $y \in P \cap A_1$.
Es claro que:
(I) Si $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_b(A)$ son tales que $P_1 \subseteq P_2$ entonces $H(P_1) \subseteq H(P_2)$.
Probemos que:
(II) Si $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_b(A)$ son tales que$H(P_1) \subseteq H(P_2)$ entonces $P_1 \subseteq P_2$.
Sea $x \in P_1$, como $P_1 \in \mathcal{P}_b(A)$ entonces $b \in P_1$, luego $x \wedge b \in P_1$ y como $x \wedge b \in (b] = A_1$ entonces $x \wedge b \in P_1 \cap A_1 = H(P)$ luego por la hipótesis hecha tenemos que $x \wedge b \in H(P_2) = P_2 \cap A_1$ y en consecuencia $x \in P_2$.
Finalmente probemos que: (III) H es suryectiva.
Sea $P_1 \in \mathcal{P}(A_1)$. Como b es el último elemento del reticulado A_1 entonces $b \in P_1$. Sea P el filtro generado en A por P_1, esto es $P = F_A(P_1)$, luego como $b \in P_1$ y $P_1 \subseteq F_A(P_1)$ tenemos que $b \in F_A(P_1)$. Por la teoría de reticulados sabemos que:

$$F_A(P_1) = \{x \in A : \text{ existen } p_1, p_2, \ldots, p_t \in P_1 \text{ tales que } \bigwedge_{i=1}^{t} p_i \leq x\}.$$

Sean $x, y \in A$ tales que $x \vee y \in F_A(P_1)$ luego existen $p_1, p_2, \ldots, p_t \in P_1$ tales que $\bigwedge_{i=1}^{t} p_i \leq x \vee y$. Observemos que como $p_1, p_2, \ldots, p_t \in P_1$ y P_1 es un filtro de A_1 entonces $p = \bigwedge_{i=1}^{t} p_i \in P_1$. De $p \leq x \vee y$ resulta que (1) $p = p \wedge (x \vee y) = (p \wedge x) \vee (p \wedge y)$. Como $p \wedge x \leq p \leq b$ entonces (2) $p \wedge x \in (b] = A_1$. Análogamente tenemos que (3) $p \wedge y \in (b] = A_1$. Como $p \in P_1$ y P_1 es un filtro primo de A_1 de (1), (2) y (3) resulta que $p \wedge x \in P_1$ ó $p \wedge y \in P_1$. Luego como $P_1 \subseteq F_A(P_1)$ tenemos que $p \wedge x \in F_A(P_1)$ ó $p \wedge y \in F_A(P_1)$. Como $p \wedge x \leq x$ y $p \wedge y \leq y$ entonces $x \in F_A(P_1)$ ó $y \in F_A(P_1)$. Acabamos así de probar que $F_A(P_1) \in \mathcal{P}_b(A)$. Probemos que $H(F_A(P_1)) = P_1$, esto es que $F_A(P_1) \cap A_1 = P_1$. En efecto, como $P_1 \subseteq A_1$ y $P_1 \subseteq F_A(P_1)$ entonces $P_1 \subseteq F_A(P_1) \cap A_1$. Sea $x \in F_A(P_1) \cap A_1$ luego (i) $x \in F_A(P_1)$ y (ii) $x \in A_1$. De (i) resulta que existen $p_1, p_2, \ldots, p_t \in P_1$ tales que (iii) $\bigwedge_{i=1}^{t} p_i \leq x$. Ya sabemos que (iv) $p = \bigwedge_{i=1}^{t} p_i \in P_1$. De (iv), (iii) y (ii) resulta que $x \in P_1$.

Observación 12.1.2 *Consideremos los siguientes reticulados:*





La transformación $h : A \to A_1$ *definida por*

x	0	a	b	c	d	1
$f(x)$	0	0	x	y	1	1

es un epimorfismo de reticulados. Si $\mathcal{P}_d(A)$ *es el conjunto de todos los filtros primos de* A *que contienen al elemento* d*, entonces* $\mathcal{P}_d(A) = \{[a), [b), [c)\}$*. Sin embargo este conjunto no es isomorfo al conjunto de todos los filtros primos de* A_1*, que es* $\{[x), [y)\}$*. El núcleo de este homomorfismo es* $\{d, 1\}$ *y el conjunto ordenado de todos los filtros primos de* A *que contienen al núcleo no es isomorfo al conjunto de todos los filtros primos de* A*.* (ver [29], pag.49)

Supongamos ahora que A es un reticulado distributivo, finito no trivial, entonces $\mathcal{P}(A) = \{[p) : p \in \Pi(A)\}$. Sean $b \in B(A) \setminus \{0, 1\}$ y $\Pi_b(A) = \{[p) : p \in \Pi(A)$ y $b \in [p)\}$ esto es $\Pi_b(A) = \{[p) : p \in \Pi(A)$ y $b \leq p\}$. Consideremos el reticulado distributivo $A_1 = (b]$ y sea $\Pi_1 = \Pi(A_1)$. Por los resultados anteriores sabemos que los conjuntos ordenados $(\mathcal{P}_b(A), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(A_1), \subseteq)$ son isomorfos. Por el Lema 12.1.3,5) sabemos que $\Pi(A_1) = \Pi(A) \cap A_1$. Vamos a demostrar que en este caso $\Pi_b(A) = \Pi(A_1)$. En efecto, si $p \in \Pi_b(A)$ entonces $p \in \Pi(A)$ y $b \leq p$, luego luego $p \in A_1$. Veamos que $p \in \Pi(A_1)$. Por hipótesis $p \neq 0$. Supongamos que (1) $p \leq x_1 \vee y_1$ donde $x_1, y_1 \in A_1$. De (1) resulta que $p = p \wedge (x_1 \vee y_1) = (p \wedge x_1) \vee (p \vee y_1)$ luego como $p \in \Pi(A)$ tenemos que $p = p \wedge x_1$ ó $p = p \vee y_1$, estoes $p \leq x_1$ ó $p \leq y_1$. Recíprocamente supongamos que $p \in \Pi(A_1) = \Pi(A) \cap A_1$ luego $p \in \Pi(A)$ y $p \in A_1 = (b]$ esto es $p \leq b$ por lo tanto $p \in \Pi_b(A)$.

12.2 Elementos booleanos fuertes

Dadas dos álgebras de De Morgan A_1 y A_2, no triviales, consideremos el álgebra de De Morgan $A = A_1 \times A_2$. Sea $z = (1, 0) \in A$ entonces $\sim z = (0, 1)$ y $z \wedge \sim z = (0, 0)$ y $z \vee \sim z = (1, 1)$. Por lo tanto z es un elemento booleano de A y su complemento booleano $-z$ coincide con la negación de De Morgan $\sim z$.

A. Monteiro [29] introdujo la siguiente:

Definición 12.2.1 *Un elemento* z *de un álgebra de De Morgan* A*, se denominará un elemento* booleano fuerte *de* A *si:*

BF1) $z \in B(A)$

BF2) *El complemento booleano* $-z$ *de* z *coincide con* $\sim z$*.*

Al conjunto de todos los elementos booleanos fuertes de A lo notaremos con $BF(A)$.

Si A es un álgebra de De Morgan, no trivial, entonces es claro que $0, 1 \in BF(A)$. De la definición precedente surge inmediatamente que $BF(A) \subseteq B(A)$. Es claro que existen álgebras de De Morgan donde $BF(A) = \{0, 1\}$.
Si $z \in BF(A) \setminus \{0, 1\}$ entonces también $A_1 = (z]$ es un álgebra de De Morgan, donde la negación está definida por $\sim_1 x = \sim x \wedge z$, cualquiera que sea $x \in A_1$.
Si $z \in BF(A) \setminus \{0, 1\}$ diremos que z es **un factor** de A. Esta terminología está justificada por el siguiente:

Lema 12.2.1 *Si z es un factor de un álgebra de De Morgan A, entonces existen álgebras de De Morgan A_1 y A_2, no triviales, tales que A es isomorfa al álgebra de De Morgan $A_1 \times A_2$.*

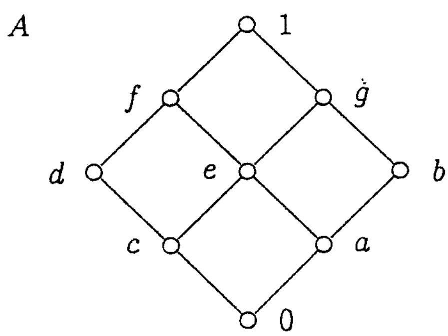
Dem. Por el Lema 12.1.2 sabemos que $A_1 = (z]$ y $A_2 = (\sim z]$ son reticulados distributivos no triviales y que el reticulado distributivo A es isomorfo al reticulado distributivo $A_1 \times A_2$. Sabemos que la tranformación $\alpha : A \to A_1 \times A_2$ definida por $\alpha(a) = (a \wedge z, a \wedge \sim z)$ establece un isomorfismo de reticulados entre A y $A_1 \times A_2$ (ver por ejemplo [33]).
Acabamos de ver que A_1 y A_2 son álgebras de De Morgan donde las negaciones están definidas por $\sim_1 x = x \wedge \sim x$ para todo $x \in A_1$ y $\sim_2 x = x \wedge \sim x$ para todo $x \in A_2$.
Probemos ahora que $\alpha(\sim a) = \sim \alpha(a)$. Para ello observemos en primer lugar que $a \wedge z \in A_1$ luego $\sim_1 (a \wedge z) = \sim (a \wedge z) \wedge z = (\sim a \vee \sim z) \wedge z = (\sim a \wedge z) \vee (\sim z \wedge z) = (\sim a \wedge z) \vee 0 = \sim a \wedge z$. En forma análoga como $a \wedge \sim z \in A_2$ se prueba que $\sim_2 (a \wedge \sim z) = \sim a \wedge \sim z)$.
Luego $\sim \alpha(a) = \sim (a \wedge z, a \wedge \sim z) = (\sim_1 (a \wedge z), \sim_2 (a \wedge \sim z) = (\sim a \wedge z, \sim a \wedge \sim z) = \alpha(\sim a)$. ■

Observemos que en este caso la transformación $h_1 : A \to (z]$ definida por:

$$h_1(a) = a \wedge z \;\; \forall\, a \in A$$

es un epimorfismo de De Morgan. En efecto, $\sim_1 h_1(x) = \sim_1 (x \wedge z) = \sim (x \wedge z) \wedge z = (\sim x \vee \sim z) \wedge z = (\sim x \wedge z) \vee (\sim z \vee z)$ luego como $z \in BF(A)$ tenemos que $\sim z \vee z = 0$ y por lo tanto $\sim_1 h_1(x) = \sim x \wedge z = h_1(\sim x)$. En forma análoga se prueba que la transformación $h_2 : A \to A_1 = (\sim z]$ definida por $h_2(a) = a \wedge \sim z$, $\forall\, a \in A$ es un epimorfismo de De Morgan.

Observación 12.2.1 *Consideremos el álgebra de De Morgan indicada a continuación:*



x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\sim x$	1	g	b	f	d	e	c	a	0

Como $b \in B(A)$ entonces el reticulado distributivo A es isomorfo al producto de dos reticulados distributivos (producto de dos cadenas con tres elementos). Sin embargo el álgebra de De Morgan A no es isomorfa al producto de dos álgebras de De Morgan.

Sea A un álgebra de De Morgan, no trivial, $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de todos los filtros primos de A, $z \in BF(A) \setminus \{0,1\}$, $\mathcal{P}_z = \{P \in \mathcal{P}(A) : z \in P\}$, $A_1 = (z]$ y $\mathcal{P}(A_1)$ el conjunto de todos los filtros primos de A_1. Ya sabemos que $(\mathcal{P}_z(A), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(A_1), \subseteq)$ son conjuntos ordenados vía la transformación $H(P) = P \cap A_1$, cualquiera que sea $P \in \mathcal{P}_z(A)$. Además tenemos que Si $P \in \mathcal{P}_z(A)$ entonces $\varphi(P) \in \mathcal{P}_z(A)$. Si $z \notin \varphi(P) = \complement_A \sim P$ entonces $z \in \sim P$ y por lo tanto $z = \sim t$ con $t \in P$, luego (1) $\sim z = t \in P$. Como $z \in P$ entonces $z \wedge \sim z \in P$ y como $z \in BF(A)$: (4) $z \wedge \sim z = 0$ luego $0 \in P$, absurdo. En consecuencia $(\mathcal{P}_z(A), \varphi)$ es un espacio de B-R. Si $X \subseteq A_1$ notaremos $\complement_{A_1} X = \{y \in A_1 : y \notin X\}$. En el álgebra de De Morgan A_1 la transformación de Birula-Rasiowa, φ_1 está definida por: $\varphi_1(P) = \complement_{A_1} \sim_1 P$, donde $P \in \mathcal{P}(A_1)$. Vamos a probar que los espacios de B-R $(\mathcal{P}_z(A), \varphi)$ y $(\mathcal{P}(A_1), \varphi_1)$ son isomorfos. Para ello probaremos que: $H(\varphi(P)) = \varphi_1(H(P)), \forall\, P \in \mathcal{P}_z(A)$. Esto es que

$$\complement_A \sim P \cap A_1 = \varphi(P) \cap A_1 = \complement_{A_1} \sim_1 H(P) = \complement_{A_1} \sim_1 (P \cap A_1).$$

En efecto, sea $y \in \complement_A \sim P \cap A_1$ luego $y \in A_1$ e $y \in \complement_A \sim P$ luego $y \notin \sim P$ y por lo tanto $\sim y \notin P$. Si $y \notin \complement_{A_1} \sim_1 (P \cap A_1)$ entonces $y \in \sim_1 (P \cap A_1)$ y por lo tanto $y = \sim_1 t$ donde $t \in P \cap A_1$, esto es $y = \sim t \wedge z$ donde (1) $t \in P$ y (2) $t \in A_1$, luego $\sim y = t \vee \sim z$. Como (3) $t \leq t \vee \sim z = \sim y$ de (3) y (1) resulta que $\sim y \in P$, absurdo. Recíprocamente, sea $y \in \complement_{A_1} \sim_1 (P \cap A_1)$ luego en particular (4) $y \in A_1$. Supongamos que $\sim y \in P$, luego como $\sim y \leq \sim y \vee z$ tenemos que $\sim y \vee z \in P$ y como $y \in A_1$ resulta que $\sim_1 y = \sim y \vee z \in P$. Como $y \in A_1$ entonces $\sim_1 y \in A_1$, luego $\sim_1 y \in P \cap A_1$ y por lo tanto $y \in \sim_1 (P \cap A_1)$ luego $y \notin \complement_{A_1} \sim_1 (P \cap A_1)$, absurdo. Luego $\sim y \in P$ y por lo tanto $\sim y \in \complement_A P$ y en consecuencia (5) $y \in \sim \complement_A P = \complement_A \sim P$. De (4) y (5) resulta que $y \in \complement_A \sim P \cap A_1$.

Dada un álgebra de De Morgan A, finita no trivial, y $z \in BF(A) \setminus \{0,1\}$, sean $A_1 = (z]$, $A_2 = (\sim z]$, luego por el Lema 12.1.3,4) sabemos que $\Pi(A) = \Pi(A_1) + \Pi(A_2)$ y que si $\Pi_z(A) = \{p \in \Pi(A) : p \leq z\}$ entonces $\Pi_z(A) = \Pi(A_1)$ y si $\Pi_{\sim z}(A) = \{p \in \Pi(A) : p \leq \sim z\}$ entonces $\Pi_{\sim z}(A) = \Pi(A_2)$. Consideremos los sistemas determinantes $(\Pi(A), \psi)$, $(\Pi(A_1), \psi_1)$ y $(\Pi(A_2), \psi_2)$ de las álgebras de De Morgan A, A_1 y A_2 respectivamente, vamos a demostar que:

1) La función ψ_1 coincide con la restricción de ψ a $\Pi_1 = \Pi(A_1)$ esto es $\psi_1 = \psi_{|\Pi_1}$.

2) La función ψ_2 coincide con la restricción de ψ a $\Pi_2 = \Pi(A_2)$ esto es $\psi_2 = \psi_{|\Pi_2}$.

Si $x \in A_1$, notaremos $[x)_1 = \{y \in A_1 : x \leq y\}$ y $(x]_1 = \{y \in A_1 : y \leq x\}$. Es claro que si $x \in A_1$ entonces $[x)_1 = [x) \cap A_1$ y $(x]_1 = (x] \cap A_1$.
Sea $p \in \Pi(A_1)$, vamos a probar que $\psi(p) = \psi_1(p)$.

$$\varphi([p)_1) = \complement_{A_1} \sim_1 [p)_1 = \complement_{A_1}(\sim_1 p]_1 = \complement_A(\sim_1 p]_1 \cap A_1 = \complement_A((\sim p \wedge z]_1 \cap A_1) \cap A_1 =$$

$$\complement_A((\sim p] \cap (z] \cap A_1) \cap A_1 = \complement_A((\sim p] \cap A_1) \cap A_1 = (\complement_A(\sim p] \cup \complement_A A_1) \cap A_1 =$$

$\complement_A(\sim p] \cap A_1 = (\complement_A \sim [p) \cap A_1 = \varphi([p)) \cap A_1 = [q) \cap A_1$.
Como $p \in \Pi(A_1) \subseteq \Pi(A)$ entonces $\psi(p) = q \in \Pi(A)$ si y sólo si $\varphi([p)) = [q)$. Como $[p) \in \mathcal{P}_z(A)$ entonces sabemos que $[q) = \varphi([p)) \in \mathcal{P}_z(A)$ luego $q \leq z$ y por lo tanto

$q \in \Pi_z(A) = \Pi(A_1)$ y en consecuencia $[q)_1 = [q) \cap A_1$. Por lo tanto $\varphi([p)_1) = [q) \cap A_1 = [q)_1$ y en consecuencia $\psi_1(p) = q = \psi(p)$.

Acabamos así de probar el siguiente resultado:
Si A es un álgebra de De Morgan, finita no trivial, y $z \in BF(A) \setminus \{0,1\}$ entonces A es el producto cartesiano de las álgebras de De Morgan $A_1 = (z]$, $A_2 = (\sim z]$ y el sistema determinante de A verifica:

$$(\Pi(A), \psi) = (\Pi(A_1), \psi) + (\Pi(A_2), \psi).$$

Probemos la recíproca de este resultado. Sea A es un álgebra de De Morgan, finita no trivial, y $(\Pi(A), \psi)$ su espacio de B-R. Si $\Pi(A)$ es la suma la suma cardinal de dos conjuntos ordenados Π_1 y Π_2, esto es (1) $\Pi(A) = \Pi_1 + \Pi_2$ y $\varphi_{|\Pi_1} = \varphi$ y $\varphi_{|\Pi_2} = \varphi$, en cuyo caso notaremos:

$$(\Pi(A), \psi) = (\Pi_1, \psi) + (\Pi_2, \psi),$$

entonces existen álgebras de De Morgan A_1 y A_2 que tienen por sistemas determinantes (Π_1, ψ) y (Π_2, ψ) respectivamente y son tales que $A \simeq A_1 \times A_2$. Sea $z = \bigvee\{p : p \in \Pi_1\}$ y $z' = \bigvee\{p : p \in \Pi_2\}$. Claramente $z \wedge z' = 0$ pués por (1) $p \wedge q = 0$, $\forall\, p \in \Pi_1$, $q \in \Pi_2$. Además $p \vee q = \bigvee\{p : p \in \Pi_1\} \vee \bigvee\{p : p \in \Pi_2\} =$ (por (1)) $= \bigvee\{p : p \in \Pi_1 + \Pi_2 = \Pi(A)\} = 1$. Por lo tanto z' es el complemento booleano de z y en consecuencia $z \in B(A)$. Sabemos que $\sim z = \bigvee\{p : p \in \Pi(A) \setminus \psi(\Pi_z)\} = \bigvee\{p : p \in \Pi(A) \setminus \psi(\Pi_1)\} = \bigvee\{p : p \in \Pi(A) \setminus \Pi_1\} = \bigvee\{p : p \in \Pi_2\} = z'$. Acabamos así de probar que $z \in BF(A)$. Además $z \neq 0, 1$. En efecto si $z = 0$ entonces $\Pi_2 = \Pi(A)$ y por lo tanto $\Pi_1 = \emptyset$ absurdo, y si $z = 1$ entonces $\Pi_1 = \Pi(A)$ y por lo tanto $\Pi_2 = \emptyset$ absurdo. Por lo tanto $z \in BF(A) \setminus \{0,1\}$. Entonces por los resultados anteriores $A_1 = (z]$ y $A_2 = (\sim z]$ son álgebras de De Morgan tales que $A \simeq A_1 \times A_2$.

Definición 12.2.2 *Un espacio de B-R (Π, ψ) se dice irreducible si no existen espacios de B-R (Π_1, ψ_1) y (Π_2, ψ_2) donde $\Pi_1 \subseteq \Pi$, $\Pi_2 \subseteq \Pi$, tales que $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$, $\psi_{|\Pi_1} = \psi$ y $\psi_{|\Pi_2} = \psi$. Esto es*

$$(\Pi(A), \psi) = (\Pi_1, \psi) + (\Pi_2, \psi).$$

13 Algebras de Kleene

13.1 Conjuntos ordenados conexos

Dos elementos x e y de un conjunto ordenado X se dicen **comparables** si $x \leq y$ ó $y \leq x$, y en este caso notaremos $x \parallel y$.

Definición 13.1.1 *Si X es un conjunto ordenado finito diremos que $x \in X$* **está ligado** *a $y \in X$, si existe una sucesión finita $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de elementos de X tales que $a_1 = x, a_n = y$ y a_i es comparable con a_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$. Para indicar que x está ligado a y notaremos $x \approx y$.*

Si $x, y \in X$, son tales que $x \neq y$ y $x \approx y$ podemos suponer que los elementos a_i, $1 \leq i \leq n$, verifican $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.
Es bien conocido que la relación $\approx$ es una relación de equivalencia definida sobre X. Sea $K(x) = \{y \in X : y \approx x\}$ la clase de equivalencia que contiene al elemento $x \in X$. Observemos que: Si $y \notin K(x)$, entonces y es incomparable con todos los elementos de $K(x)$. Sean $K(x_1), K(x_2), \ldots, K(x_n)$ las clases de equivalencia. Sabemos que los subconjuntos $K(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, de X son conjuntos ordenados conexos, que denominamos **componentes conexas de** X, y que el conjunto ordenado X es la *suma cardinal* de los conjuntos ordenados $K(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, esto es:

$$X = \sum_{i=1}^{n} K(x_i).$$

Observemos además que los conjuntos $K(x_i)$ son no solamente *disjuntos dos a dos*, sino que tambien cada elemento (*) $a \in K(x_i)$ es incomparable con todo $b \in K(x_j)$ si $i \neq j$.
Podemos suponer que los elementos x_i, $1 \leq i \leq n$, son elementos maximales del conjunto ordenado X. En efecto cada $K(x_i)$ es un conjunto ordenado finito, entonces existe $m \in K(x_i)$, m elemento maximal de $K(x_i)$. Veamos que m tambien es un elemento maximal de X. En efecto si $x \in X$ verifica $m \leq x$, como $m \in K(x_i)$, entonces por (*) m es incomparable con todo elemento $y \in K(x_j)$, $j \neq i$, luego $x \in K(x_i)$ y como m es un elemento maximal de $K(x_i)$ tenemos que $x_i = m$. Acabamos así de probar que m es un elemento maximal de X. Entonces podemos escribir:

$$X = \sum_{i=1}^{n} K(x_i),$$

donde los x_i, $1 \leq i \leq n$ son elementos maximales del conjunto ordenado X.

13.2 Algebras de Kleene

Vamos ahora a considerar una clase particular de álgebras de De Morgan introducidas por J.A. Kalman [13] con el nombre de *i-lattices*.

Definición 13.2.1 *Un reticulado (álgebra) de De Morgan A se denominará un reticulado (álgebra) de Kleene, si se verifica la siguiente condición cualesquiera que sean $x, y \in A$:*

$$\text{(K)} \qquad x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y.$$

Teorema 13.2.1 *Si A es un reticulado de Kleene, y P filtro primo de A , entonces P y $\varphi(P)$ son comparables.* (H. Rasiowa [36])

Dem. Sea A un reticulado de Kleene y supongamos que existe un filtro primo de A tal que P no es comparable con $\varphi(P)$. Supongamos por ejemplo que $P \not\subseteq \varphi(P)$, esto es existe (1) $a \in P$ tal que (2) $a \notin \varphi(P)$. De (1) resulta (1') $\sim a \notin \varphi(P)$ y de (2) resulta (2') $\sim a \in P$.
De (1) y (2') se tiene que (3) $a \wedge \sim a \in P$ y de (1') y (2) resulta (4) $a \wedge \sim a \notin \varphi(P)$.
Vamos a demostrar que $\varphi(P) \subseteq P$. En efecto sea (5) $b \in \varphi(P)$, lo cual es equivalente a afirmar que (6) $\sim b \notin P$.
Por la condición (K) tenemos que $a \wedge \sim a \leq b \vee \sim b$ luego teniendo en cuenta (3) y que P es un filtro resulta (7) $b \vee \sim b \in P$. De esta condición, resulta teniendo en cuanta (6) y que P es un filtro primo que $b \in P$ ∎

Este resultado de H. Rasiowa fué indicado en 1958. La recíproca del mismo fué indicada por A. Monteiro en 1962.

Teorema 13.2.2 *Si A es un reticulado de De Morgan, tal que todo filtro primo P de A es comparable con $\varphi(P)$ entonces A es un reticulado de Kleene.* (A. Monteiro [23])

Dem. Supongamos que existen elementos $a, b \in A$ tales que $a \wedge \sim a \not\leq b \vee \sim b$. Entonces existe un filtro primo P de A tal que:

$$(1) \quad a \wedge \sim a \in P; \quad (2) \quad b \vee \sim b \notin P.$$

De (2) se deduce que (3) $b \notin P$ y (4) $\sim b \notin P$. Sabemos que estas condiciones son equivalentes a: (3') $\sim b \in \varphi(P)$ y (4') $b \in \varphi(P)$.
De (4') y (3) resulta que $\varphi(P) \not\subseteq P$ y como por hipótesis P es comparable con $\varphi(P)$ entonces $P \subseteq P$, pero por (3') y (4) podemos afirmar mas precisamente que:

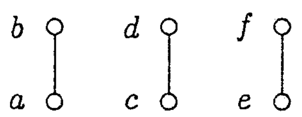
$$(5) \quad P \subset \varphi(P).$$

Como $a \wedge \sim a \leq a$ y $a \wedge \sim a \leq \sim a$ de (1) resulta por ser P un filtro que (6) $a \in P$ y (7) $\sim a \in P$, condiciones que son equivalentes a (6') $\sim a \notin \varphi(P)$ y (7') $a \notin \varphi(P)$. De (5), (6') y (7') deducimos que (8) $\sim a \notin P$ y (9) $a \notin P$, lo que contradicen las condiciones (6) y (7). ∎

Corolario 13.2.1 *Para que un reticulado de De Morgan A sea un reticulado de Kleene es necesario y suficiente que todo filtro primo de A sea comparable con $\varphi(P)$.*

Consideremos el álgebra de De Morgan A cuyo sistema determinante (Π, ψ) se indica a continuación:

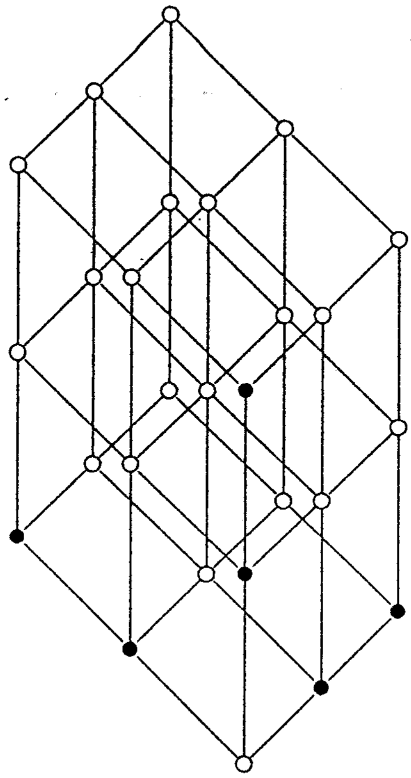
Π



x	a	b	c	d	e	f
$\psi(x)$	d	c	b	a	f	e

Entonces A tiene el siguiente diagrama, donde indicamos con • los elementos primos.

A



Observemos que $\psi(\{e,f\}) = \{e,f\}$, $\psi(\{a,b\} = \{c,d\}$ y $\psi(\{a,b\}+(\{c,d\} = \{a,b\}+\{c,d\}$.

Sea A un álgebra de De Morgan, finita no trivial y supongamos que $\Pi = \Pi(A)$ no es un conjunto ordenado conexo. Sabemos que $\Pi = \sum_{i=1}^{n} K(p_i)$, donde $K(p_i)$ $1 \leq i \leq n$, donde $K(p_i)$ son conjuntos ordenados conexos, que hemos denominado componentes conexas de Π. Veamos que:

$$\text{(I) } \underline{\text{Si } p,q \in \Pi \text{ y } p \approx q}, \text{ entonces } \psi(p) \approx \psi(q).$$

En efecto por hipótesis existe una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de elementos de Π tal que $a_1 = p$, $a_n = q$ y (1) $a_i \parallel a_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$. Consideremos la siguiente sucesión de Π: $b_1 = \psi(p), b_i = \psi(a_i)$ para $i = 2,3,\ldots,n-1$ $b_n = \psi(q)$, luego de (1) resulta que $b_i \parallel b_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n-1$ y por lo tanto $\psi(p) \approx \psi(q)$.

$$\text{(II) } \underline{\text{Si } \psi(p_i) \in} K(p_i) \text{ entonces } \psi(K(p_i)) = K(p_i).$$

En efecto: sea $x \in K(p)$ como por hipótesis $\psi(p) \in K(p)$ entonces (1) $x \approx \psi(p)$. Como ψ es suryectiva entonces (2) $x = \psi(y)$ con $y \in \Pi$. De (1) resulta que $y = \psi(x) \approx \psi(\psi(p)) = p$, luego (3) $y \in K(p)$. De (2) y (3) resulta que $x \in \psi(K(p))$. Recíprocamente sea $x \in \psi(K(p))$ luego $x = \psi(y)$ con $y \in K(p)$. Como por hipótesis $\psi(p) \in K(p)$ entonces $y \approx \psi(p)$ y por lo tanto $x = \psi(y) \approx \psi(\psi(p)) = p$ luego $x \in K(p)$.

$$\text{(III) } \underline{\text{Si } p_j = \psi(p_i)} \notin K(p_i),\ p_j \neq p_i \text{ entonces } \psi(K(p_i)) = K(p_j) \text{ y}$$

$$\underline{\psi(K(p_i) + K(p_j))} = K(p_i) + K(p_j).$$

Observemos que (*) cualquiera que sea $z \in K(p_i)$ entonces $\psi(z) \in K(p_j)$. En efecto si $z \in K(p_i)$, esto es $z \approx p_i$ entonces por (I) $\psi(z) \approx \psi(p_i) = p_j$, luego $\psi(z) \in K(p_j)$. Sea $t \in \psi(K(p_i))$ esto es $t = \psi(x)$ con $x \in K(p_i)$ luego por (*) tenemos que $t = \psi(x) \in K(p_j)$.

Recíprocamente si $t \in K(p_j)$ entonces $t \approx p_j = \psi(p_i)$, luego $\psi(t) \approx \psi(\psi(p_i)) = p_i$, por lo tanto $\psi(t) \in K(p_i)$ de donde resulta por (*) que $t = \psi(\psi(t)) \in \psi(K(p_i))$.
De $\psi(K(p_i)) = K(p_j)$ resulta que $\psi(K(p_j)) = K(p_i)$. Sea $t \in K(p_i) + K(p_j)$ esto es $t \in K(p_i)) = \psi(K(p_j))$ ó $t \in K(p_j) = \psi(K(p_i))$, luego $t = \psi(x)$, con $x \in K(p_i)$ ó $t = \psi(x)$, con $x \in K(p_j)$ luego $t \in \psi(K(p_i) + K(p_j))$. Recíprocamente si $t \in \psi(K(p_i) + K(p_j))$ entonces $t = \psi(x)$, con $x \in K(p_i) + K(p_j)$ luego $x \in K(p_i)$ ó $x \in K(p_j)$ y por lo tanto $t = \psi(x) \in \psi(K(p_i)) = K(p_j)$ ó $t = \psi(x) \in \psi(K(p_j)) = K(p_i)$ y en consecuencia $t \in K(p_i) + K(p_j)$.

Observemos que de (III) y un resultado anterior tenemos que: Si A es un álgebra de De Morgan, finita no trivial, cuyo sistema determinante es isomorfo a $(K(p_i) + K(p_j), \psi)$ entonces A es irreducible.

De acuerdo con los resultados precedentes tenemos que si A es un álgebra de De Morgan no conexa, finita no trivial, y $A = \sum_{i=1}^{n} K(p_i)$, donde $K(p_i)$ $1 \leq i \leq n$, donde $K(p_i)$ son conjuntos ordenados conexos, entonces (1) $\psi(K(p_i)) = K(p_i)$ ó (2) $\psi(K(p_i) \neq K(p_i)$ y en este caso $\psi(K(p_i)+K(p_j)) = K(p_i)+K(p_j)$ donde $p_j = \psi(p_i) \notin K(p_i)$. Sea C_1 el conjunto de las componentes conexas que verifican (1) y C_2 el conjunto de las componentes conexas que verifican (2). Claramente C_2 tiene un número par $2.r$ de elementos (eventualmente puede ser 0). Si $N[C_1] = t$ entonces $n = t+2.r$. Sean A_i, $1 \leq i \leq t$ álgebras de De Morgan cuyo sistema determinante $(\Pi(A_i), \psi')$ es isomorfo a $(K(p_i), \psi)$, y A_j, $1 \leq j \leq r$ álgebras de De Morgan cuyo sistema determinante $(\Pi(A_j), \psi')$ es isomorfo a $(K(q_j)+\psi(K(q_j)), \psi)$, entonces:

$$A \cong \prod_{i=1}^{t} A_i \times \prod_{j=1}^{r} A_j,$$

donde cada uno de los factores es irreducible.

Observación 13.2.1 *Sea A es un álgebra de Kleene, finita no trivial, entonces:*

K1) $\psi(p)$ es comparable con p, (esto es $\psi(p) \parallel p$) cualquiera que sea $p \in \Pi(A)$.
En efecto si $p \in \Pi(A)$ entonces $[p)$ es un filtro primo de A, luego $[p)$ es comparable con $\varphi([p))$. Supongamos que (1) $[p) \subseteq \varphi([p)) = [q)$, donde $q \in \Pi(A)$, luego $\psi(q) = p$ y por lo tanto $\psi(p) = q$. De (1) resulta que $q \leq p$ luego $\psi(p) \leq p$. Análogamente si $\varphi([p)) \subseteq [p)$.

K2) $\psi(p) \in K(p)$, cualquiera que sea $p \in \Pi(A)$.
Por K1) $\psi(p) \parallel p$ luego entonces $\psi(p) \approx p$ y por lo tanto $\psi(p) \in K(p)$.

K3) Si $\Pi(A) = \sum_{i=1}^{n} K(p_i)$, donde $K(p_i)$ $1 \leq i \leq n$, son las componentes conexas de $\Pi(A)$ entonces $\psi(K(p_i)) = K(p_i)$, $1 \leq i \leq n$. En efecto, por K2) $\psi(p_i) \in K(p_i)$, luego por (II) $\psi(K(p_i)) = K(p_i)$.

Lema 13.2.1 *Si A es un álgebra de De Morgan finita, no trivial, donde su sistema determinante* $(\Pi = \Pi(R), \psi)$ *es isomorfo al espacio de Birula-Rasiowa* (X, α) *donde* $X = X_1 + X_2$, $\alpha(X_1) = X_1$, $\alpha(X_2) = X_2$ *y si* A_i; $i = 1, 2$ *es un álgebra de De Morgan donde su sistema determinante* $(\Pi(A_i), \psi_i)$ *es isomorfo a* (X_i, α); $i = 1, 2$, *entonces* A es isomorfa a $A_1 \times A_2$.

Definición 13.2.2 *Denominaremos espacio de Kleene a todo espacio de Birula–Rasiowa (X, α) donde cada $x \in X$ es comparable con $\alpha(x)$.*

Lema 13.2.2 *Para que un álgebra de De Morgan A finita, no trivial, sea un álgebra de Kleene es necesario y suficiente que su sistema determinante $(\Pi = \Pi(A), \psi)$ sea un espacio de Kleene.*

Dem. Es claro que la condición es necesaria. Probemos que es suficiente. Si $y \wedge \sim y = 0$, entonces la condición de Kleene es verificada. Supongamos que $y \wedge \sim y \neq 0$. Para probar que la condición de Kleene es verificada es suficiente demostrar que:

$$\{p \in \Pi : p \leq y \wedge \sim y\} \subseteq \{q \in \Pi : q \leq z \vee \sim z\}$$

Sea $p \in \Pi$ tal que (1) : $p \leq y \wedge \sim y$. Por hipótesis (2) $\psi(p) \leq p$, ó (3) $p \leq \psi(p)$. Si se verifica (2) entonces por (1) tenemos: $\psi(p) \leq y \wedge \sim y$, y en paarticular $\psi(p) \leq \sim y = \bigvee\{\psi(q) : q \in \Pi \setminus \Pi_y\}$, de donde deducimos, pués $\psi(p) \in \Pi$, que $\psi(p) \leq \psi(q_0)$, donde $q_0 \in \Pi - \Pi_y$. Entonces $q_0 \leq p$ y por (1) tenemos $q_0 \leq y \wedge \sim y \leq y$, luego $q_0 \in \Pi_y$, contradicción. Entonces se debe verificar la condición (3). Si $\psi(p) \not\leq z$ entonces $\psi(p) \in \Pi - \Pi_z$, luego (4) : $\psi(p) \leq \sim z \leq z \vee \sim z$. De (3) y (4) tenemos que $p \leq z \vee \sim z$. Si $\psi(p) \leq z$, entonces $p \leq z \leq z \vee \sim z$. ■

Teorema 13.2.3 *En un álgebra de Kleene A todo elemento booleano de A es un elemento booleano fuerte, esto es $B(A) = BF(A)$.*

Dem. Este resultado se debe a A. Monteiro [29] y su demostración fué reproducida, en 1965, sin modificaciones en un trabajo de R. Cignoli, [7]. La demostración que indicamos fué dada en 1970 por L. Monteiro, [32] y [34]. Sea $b \in B(A)$, luego existe $b' \in B(A)$ tal que:

$$(1)\ b \wedge b' = 0; \qquad (2)\ b \vee b' = 1.$$

De (2) resulta que (3) $\sim b \wedge \sim b' = 0$. Como A es un álgebra de Kleene, entonces utilizando la condición (K) podemos escribir

$$b \wedge \sim b = b \wedge \sim b \wedge (b' \vee \sim b')$$

esto es

$$(4)\ b \wedge \sim b = (b \wedge \sim b \wedge b') \vee (b \wedge \sim b \wedge \sim b')$$

pero por (3) tenemos (5) $b \wedge \sim b \wedge \sim b' = b \wedge 0 = 0$, y por (1) tenemos (6) $b \wedge \sim b \wedge b' = b \wedge b' \wedge \sim b = 0 \wedge \sim b = 0$. Reemplazando (5) y (6) en (4) tenemos que $b \wedge \sim b = 0$ y en consecuencia $b \vee \sim b = 1$, lo que demuestra que $\sim b = b'$ y por lo tanto $b \in BF(A)$. ■

En 1981, R. Cignoli y M. S. de Gallego, [8], pag. 317, indican otra demostración de este resultado.

El siguiente resultado fué indicado por A. Monteiro [29]. Sea A es un álgebra de Kleene, finita no trivial, y $(\Pi(A), \psi)$ su sistema determinante. Como toda componente conexa Π_1 de Π verifica $\psi(\Pi_1) = \Pi_1$ entonces el elemento $b = \bigvee_{p \in \Pi_1} p \in BF(A)$. En efecto $\sim b = \bigvee\{p : p \in \Pi(A) \setminus \psi(\Pi_b)\} = \bigvee\{p : p \in \Pi(A) \setminus \psi(\Pi_1)\} = \bigvee\{p : p \in \Pi(A) \setminus \Pi_1)\}$ y por la teoría de reticulados sabemos que $\bigvee\{p : p \in \Pi(A) \setminus \Pi_1)\}$ es el complemento booleano de

$b = \bigvee_{p \in \Pi_1} p$. Además b es un átomo del álgebra de Boole $B(A)$.

Sea A un álgebra de Kleene A, no trivial, y $G = \{g_i\}_{i \in I} \subseteq A$ un subconjunto que genera a A, esto es $SM(G) = A$. El siguiente resultado se debe a A. Monteiro [27].

Lema 13.2.3 *Para que A sea un álgebra de Kleene es necesario y suficiente que:*

$$\text{(I)} \quad g_i \wedge \sim g_i \leq g_j \vee \sim g_j, \quad \forall \; g_i, g_j \in G.$$

Dem. Es obvio que la condición es necesaria. Veamos que es suficiente. Supongamos que en A existe un filtro primo P tal que P no es comparable con $\varphi(P)$ y consideremos los siguientes subconjuntos de A: $C_1 = P \cap \varphi(P)$, $C_2 = P \setminus \varphi(P) = P \cap \sim P$, $C_3 = \varphi(P) \setminus P = \varphi(P) \cap \complement P$ y $C_4 = \complement(P \cup \varphi(P))$.
Es claro que $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ es una partición de A. Se prueba sin dificultad que $A_1 = P \cup C_4 = P \cup \sim P$ y $A_2 = \varphi(P) \cup C_4 = \varphi(P) \cup \complement P$ son subálgebras de A.
Probemos que: (II) Existe $g_i \in G$ tal que $g_i \in C_2$. En efecto si para todo $g \in G$ se verificara $g \notin C_2$ entonces $G \subseteq A_2$ y por lo tanto $A = SM(G) \subseteq A_2$ y en consecuencia $A_2 = A$, De $A = A_2 = \varphi(P) \cup \complement P$ resulta que $P = A \cap P = P \cap \varphi(P)$ y por lo tanto $P \subseteq \varphi(P)$, absurdo. Luego como $g_i \in C_2 = P \cap \sim P$ tenemos que (1) $g_i \in P$ y (2) $g_i \in \sim P$. De (2) resulta (3) $\sim g_i \in P$, luego de (1) y (3) tenemos (4) $g_i \wedge \sim g_i \in P$.
En forma análoga se prueba que: (III) Existe $g_j \in G$ tal que $g_j \in C_3$. Claramente $g_j = g_i$. Como $g_j \in C_3 = \varphi(P) \cap \complement P$ entonces (5) $g_j \in \varphi(P)$ y (6) $g_j \in \complement P$. De (5) resulta (7) $\sim g_j \in \complement P$. Como $g_j \in \varphi(P)$ y $\varphi(P)$ es un filtro entonces (8) $g_j \vee \sim g_j \in \varphi(P)$. Si $g_j \vee \sim g_j \in P$ como P es un filtro primo entonces (9) $g_j \in P$ ó (10) $\sim g_j \in P$. Pero (9) contradice (6) y (10) contradice (7). Luego (11) $g_j \vee \sim g_j \in \complement P$. De(8) y (11) resulta que (12) $g_j \vee \sim g_j \in \varphi(P) \cap \complement P = C_3$.
Por hipótesis (13) $g_i \wedge \sim g_i \leq g_j \vee \sim g_j$, por lo tanto de (4) y (13) resulta que (14) $g_j \vee \sim g_j \in P$, luego por (12) y (14) tendríamos que $g_j \vee \sim g_j \in C_3 \cap P$. Pero $C_3 \cap P = \varphi(P) \cap \complement P \cap P = \emptyset$, absurdo.
Por lo tanto todo filtro primo de A es comparable con $\varphi(P)$ y en consecuenvia A es un álgebra de Kleene. ■

14 Algebras de De Morgan libres

14.1 Introducción

La noción de álgebra de De Morgan con un conjunto de generadores libres, se define del modo habitual, esto es:

Definición 14.1.1 *Un subconjunto G de un álgebra de De Morgan L se dice un* **conjunto de generadores libres** *de L si:*

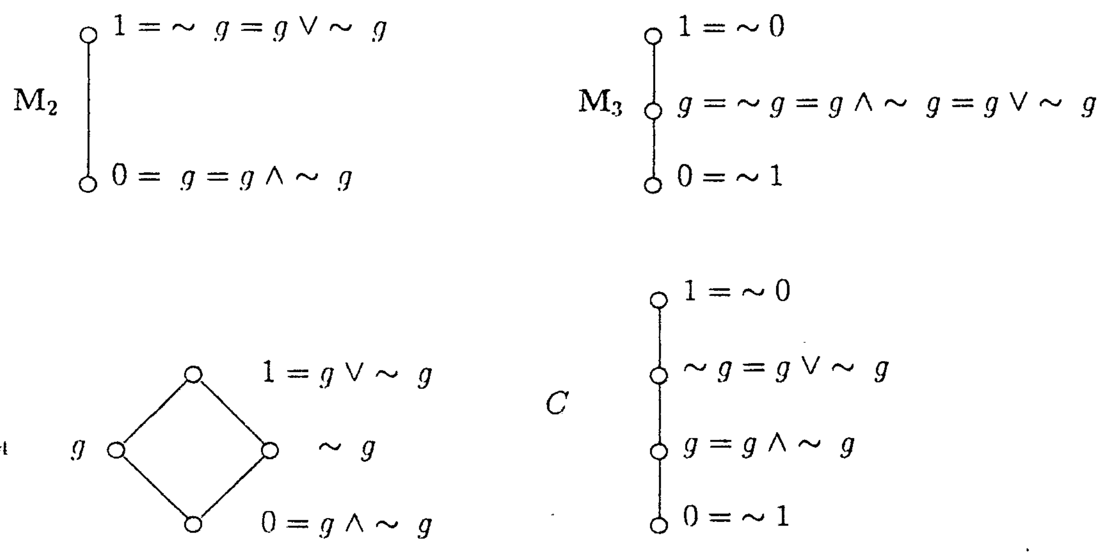
L1) $SM(G) = L$, (esto es G es un conjunto de generadores de L.)

L2) Dada una función f de G en un álgebra de De Morgan arbitraria A, existe un homomorfismo $h_f : L \to A$ que extiende a f, esto es $f(g) = h_f(g)$, $\forall\, g \in G$.

En este caso se suele decir que L es un álgebra de De Morgan libre o que L es un álgebra de De Morgan con un conjunto G de generadores libres.
La existencia y unicidad de ellos es una consecuencia de un teorema de álgebra universal.

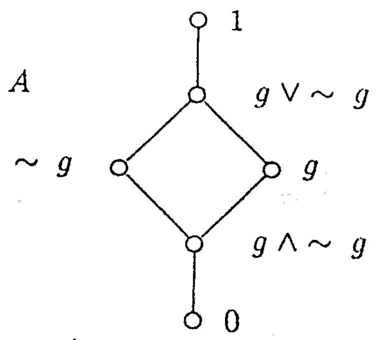
Vamos a notar con $ML(c)$ el álgebra de De Morgan con un conjunto de generadores libres G de cardinal c.
Si $G = \{g\}$ es un subconjunto de un álgebra de De Morgan A entonces: $SM(G)$ a lo sumo contiene los siguientes elementos $0, 1, g, \sim g, g \wedge \sim g, g \vee \sim g$. Observemos que algunos de estos elementos pueden ser iguales, dependiendo del álgebra A.

Ejemplo 14.1.1 *Consideremos las siguientes álgebras de De Morgan:*



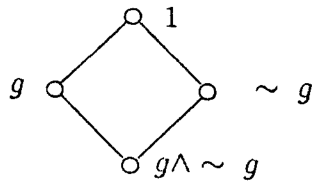
En cualquiera de los casos anteriores el conjunto $G = \{g\}$ genera el álgebra respectiva.

Consideremos la siguiente álgebra de De Morgan A.



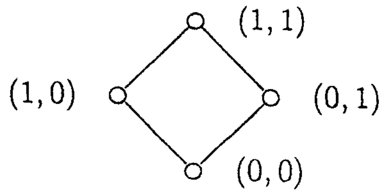
Es claro que $SM(\{g\}) = A$. Se reconoce sin dificultad que las 5 álgebras indicadas son las únicas generadas por un sólo elemento. Dentro de las álgebras con un generador, el álgebra $ML(1)$ con un generador libre debe ser la que contiene mayor cantidad de elementos, pués toda álgebra con un generador es una imagen homomórfica de $ML(1)$. Por lo tanto debe ser $ML(1) \cong A$. En efecto si f es una función de $G = \{g\}$ en un álgebra de De Morgan arbitraria M, y $f(g) = m \in M$, entonces definiendo $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(g) = m$, $h(\sim g) = \sim m$, $h(g \wedge \sim g) = m \wedge \sim m$ y $h(g \vee \sim g) = m \vee \sim m$, es claro que h es un homomorfismo de B en M que extiende a f.

Observemos que $ML(1)$ es isomorfa al reticulado distributivo acotado con dos generadores libres g y $\sim g$. Pongamos $\Pi(1) = \Pi(ML(1))$ entonces el sistema determinante $(\Pi(1), \psi)$ de $ML(1)$ es el siguiente:



x	$g \wedge \sim g$	g	$\sim g$	1
$\psi(x)$	1	g	$\sim g$	$g \wedge \sim g$

Observemos que $\Pi(1)$ con su orden natural es un álgebra de Boole isomorfa al producto cartesiano de $D \times D$ donde D es el álgebra de Boole $\{0, 1\}$. Sea $B = D \times D$ luego B tiene el siguiente diagrama y $\psi : B \rightarrow B$ está definida por la siguiente tabla:



x	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$\psi(x)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

Observemos que si $b = (x, y) \in B$ entonces $\psi(b) = \psi((x, y)) = (1 - y, 1, -x)$.

Vamos a reproducir una construcción del álgebra $ML(\mathfrak{c})$ con un conjunto G de generadores libres de cardinal $\mathfrak{c}$, que fuera indicada en 1961 por O. Chateubriand y A. Monteiro, [6], durante una estadía de A. Monteiro en la Universidad de Buenos Aires.
Sea I un conjunto de cardinal $\mathfrak{c}$ y consideremos el producto cartesiano

$$E = \prod_{i \in I} B_i \text{ donde } B_i = B = D \times D, \forall\, i \in I.$$

Entonces si $p \in E$, él será notado $[p_i]_{i\in I}$ ó $[p_i]$. Definamos una función de E en E del siguiente modo:

$$\varphi((p_i)) = [\psi(p_i)]$$

donde ψ es la involución de B indicada anteriormente. Es fácil demostrar que φ es una involución de E. Luego de acuerdo con resultados indicados anteriormente sabemos que si $X \subseteq E$ y definimos sobre el conjunto 2^E de todas las partes de E el operador unario

$$\sim X = \complement_E \varphi(X)$$

entonces $(2^E, \cap, \cup, \sim)$ es un álgebra de De Morgan que tiene primer elemento $\emptyset$ y último elemento E.
Para cada $i \in I$ sea $G_i = \{p = (p_i) \in E : p_i \in \{(1,0),(1,1)\}\}$ luego $G_i \subseteq E$, $\forall\, i \in I$. Tenemos así una función de I en $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in I}$ que es claramente biyectiva. Por lo tanto $\mathcal{G}$ e I tienen la misma cardinalidad.

Sea L la subálgebra de De Morgan generada por $\mathcal{G}$ en el álgebra de De Morgan 2^E, esto es $L = SM(\mathcal{G})$. Vamos a demostrar que $\mathcal{G}$ es un conjunto de generadores libres de L. Para ello debemos demostrar que dada un álgebra de De Morgan arbitraria A y una función $f : \mathcal{G} \to A$, f se puede extender a un homomorfismo $h : L \to A$.
Si A tiene un sólo elemento, $A = \{0\}$, entonces $f(G_i) = 0, \forall\, i \in I$ y por lo tanto la función $h(x) = 0, \forall\, x \in L$ es un homomorfismo que extiende a f.
Si A tiene más de un elemento, por resultados anteriores, sabemos que A es isomorfa a una subálgebra $\mathcal{A}$ del álgebra de De Morgan $(2^T, \cap, \cup, \approx)$. Sea α la involución de T que define la negación en 2^T mediante $\approx X = \complement_T \alpha(X), \forall X \subseteq T$.
Sea $f : \mathcal{G} \to \mathcal{A}$ entonces para cada $i \in I$: $f(G_i) = H_i$, donde $H_i \in \mathcal{A}$ esto es $H_i \subseteq T$.
Dado $X \subseteq T$, sea $K_X : T \to D$ la función definida por:

$$K_X(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \in X \\ 0 & si \;\; t \notin X \end{cases}$$

Observemos que (*) $K_{\complement_T X}(t) = 1 - K_X(t)$.
Consideremos ahora la función $K_i : T \to B$ definida por:

$$K_i(t) = (K_{H_i}(t), K_{\approx H_i}(t)),$$

luego por la definición de $\approx$ y (*) tenemos que

$$(1)\quad K_i(t) = (K_{H_i}(t), K_{\complement_T \alpha(H_i)}(t)) = (K_{H_i}(t), 1 - K_{\alpha(H_i)}(t)).$$

Probemos que (2) $K_{H_i}(\alpha(t)) = K_{\alpha(H_i)}(t)$.
En efecto $K_{H_i}(\alpha(t)) = 1 \iff \alpha(t) \in H_i \iff t = \alpha(\alpha(t)) \in \alpha(H_i) \iff K_{\alpha(H_i)}(t) = 1$.
De (2) resulta reemplazando t por $\alpha(t)$ que: (3) $K_{H_i}(t) = K_{\alpha(H_i)}(\alpha(t))$.

Finalmente sea $K : T \to E$ definida por:

$$K(t) = [K_i(t)]_{i\in I}.$$

Observemos que:

$$[K_i(t)]_{i\in I} = K(t) \in G_i \iff K_i(t) \in \{(1,0),(1,1)\} \iff$$

$$(K_{H_i}(t), 1 - K_{\alpha(H_i)}(t)) = (1,0) \text{ ó } (K_{H_i}(t), 1 - K_{\alpha(H_i)}(t)) = (1,1).$$

Luego:

$$K_{H_i}(t) = 1 \text{ y } 1 - K_{\alpha(H_i)}(t) = 0$$

ó

$$K_{H_i}(t) = 1, \text{ y } 1 - K_{\alpha(H_i)}(t) = 1$$

Por lo tanto (R) $K(t) \in G_i \iff K_{H_i}(t) = 1$.
Sea $h : 2^E \to 2^T$ definida por $h(X) = K^{-1}(X)$ para todo $X \subseteq E$, luego si $X, Y \subseteq E$ entonces se verifican:

$$h(X \cap Y) = h(X) \cap h(Y); \quad h(X \cup Y) = h(X) \cup h(Y);$$

$$h(\emptyset) = \emptyset; \quad h(E) = T.$$

Luego h es un homomorfismo de De Morgan de 2^E en 2^T si y solo si

$$h(\sim X) = \approx h(X), \ \forall\, X \subseteq E.$$

Esto es

$$K^{-1}(\complement_E \varphi(X) = \complement_T \alpha(K^{-1}(X)), \ \forall\, X \subseteq E.$$

lo que equivale a probar

$$\complement_T K^{-1}(\varphi(X)) = \complement_T \alpha(K^{-1}(X)), \ \forall\, X \subseteq E$$

esto es

$$(4) \ K^{-1}(\varphi(X)) = \alpha(K^{-1}(X)), \ \forall\, X \subseteq E.$$

Probemos que se verifica (4). En efecto $t \in K^{-1}(\varphi(X)) \iff K(t) \in \varphi(X) \iff$ (5) $\varphi(K(t)) \in \varphi(\varphi(X)) = X$. Pero como $\varphi(K(t)) = \varphi([K_i(t)]) = [\psi(K_i(t))]$ entonces (5) equivale a (6) $[\psi(K_i(t))] \in X$.
Pero como por (1) $K_i(t) = (K_{H_i}(t), 1 - K_{\alpha(H_i)}(t))$, entonces

$$\psi(K_i(t)) = (1 - (1 - K_{\alpha(H_i)}(t)), 1 - K_{H_i}(t)) = (K_{\alpha(H_i)}(t), 1 - K_{H_i}(t))$$

y por lo tanto utilizando (2), (3) y (1) tenemos que

$$\psi(K_i(t)) = (K_{H_i}(\alpha(t)), 1 - K_{\alpha(H_i)}(\alpha(t))) = K_i(\alpha(t)).$$

Luego (5) equivale a $K(\alpha(t)) = (K_i(\alpha(t))) \in X$ lo que equivale a $\alpha(t) \in K^{-1}(X)$ esto es $t \in \alpha(K^{-1}(X))$.
Acabamos así de probar que (I) h es un homomorfismo de De Morgan de 2^E en 2^T.
Probemos ahora que (II) h prolonga a f, esto es que

$$k^{-1}(G_i) = h(G_i) = f(G_i) = H_i, \forall\, G_i \in \mathcal{G}.$$

En efecto $t \in H_i \iff K_{H_i} = 1$ teniendo en cuenta (R) esto equivale a $K(t) \in G_i$ lo que equivale a $t \in K^{-1}(G_i) = h(G_i)$.
Finalmente probemos que (III) $h(L) \subseteq \mathcal{A}$. Por (I) $h(L)$ es una subálgebra del álgebra 2^T y como $\mathcal{G}$ genera a L, esto es $SM(\mathcal{G}) = L$, entonces $h(\mathcal{G})$ genera a $h(L)$,esto es $SM(h(\mathcal{G})) = h(L)$ y como $h(G_i) = f(G_i) = H_i \in \mathcal{A}$, $\forall\, i \in I$ entonces $h(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}$ luego $h(L) = SM(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}$, lo que termina la demostración.

NOTA: Los números indicados entre corchetes corresponden a la numeración del inventario de la Biblioteca *"Dr. Antonio Monteiro "* del Instituto de Matemática, INMABB, C.O.N.I.C.E.T - Universidad Nacional del Sur.

Referencias

[1] Balbes R. and Dwinger P., *Distributive lattices*, University of Missouri Press, (1974). .... [6460]

[2] Bialynicki-Birula A., *Remarks on quasi-boolean algebras* , Bull. Acad. Pol. Sc., classe III, 5 (1957), 615-619.

[3] Bialynicki-Birula A. and Rasiowa H., *On the representation of quasi-boolean algebras*, Bull. Acad. Pol. Sc., classe III, 5 (1957), 259-261.

[4] Birkhoff, G. *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Colloq. Publ. Vol. 25 (1970) .... [3629]

[5] Burris S. and Sankappanavar H. P., *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981. .... [6124]

[6] Chateubriand O. et Monteiro, A., *Les algèbres de De Morgan libres*, Notas de Lógica Matemática 26, INMABB-CONICET-UNS, Bahía Blanca (1969), 9 pág.

[7] Cignoli, R. *Boolean elements in Łukasiewicz algebras* Proc. Japan Academy, 41 (1965), 670-675.

[8] Cignoli, R. and S. de Gallego, M. *The lattice structure of some Łukasiewicz algebras* Algebra Universalis, 13 (1981), 315-328.

[9] Diego A. and Suarez A., *Two sets of axioms for Boolean algebras*, Notas de Lógica Matemática 16, INMABB-CONICET-UNS, Bahía Blanca (1964), 11 pág.

[10] Gastaminza M. L. and Gastaminza S., *Characterization of the Morgan lattices by the operations of implication and negation*, Proc. Japan Academy, 44 (1968), 659-662.

[11] Gratzer G., *Lattice theory, first concepts and distributive lattices*, W. H. Freeman Co., San Francisco, 1971. .... [4798]

[12] Gratzer G., *General lattice theory*, Birkhäuser 1978.......... [5905]

[13] Kalman J.A., *Lattices with involution,* Trans. Amer. Math. Soc., 87 (1958), 485-491.

[14] Kleene St., *On notation for ordinal numbers,* J.S.L. 3 (1938), 150-155.

[15] Maronna, R., *A characterization of De Morgan lattices*, Notas de Lógica Matemática 18, INMABB-CONICET-UNS, Bahía Blanca (1964) 4 pág. Portugaliae Math. 23 (1964) 169-171.

[16] Moisil Gr. C. *Recherches sur l'algèbre de la logique*, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy 22 (1935), pag. 1-118.

[17] Monteiro A., Notas del curso *Algebra de la Lógica I*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1959.

[18] Monteiro A., Notas del curso *Algebra de la Lógica II*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[19] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de Hilbert y de Tarski*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1960.

[20] Monteiro, A., *Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique*, Anais da Academia Brasileira de Ciencias (1960), 1-7. Notas de Lógica Matemática 6-7, INMABB-CONICET-UNS, Bahía Blanca (1974) 39 pág.

[21] Monteiro A., Notas del *Seminario de Lógica Matemática I*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1961.

[22] Monteiro A., Notas del *Seminario de Lógica Matemática II*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1962.

[23] Monteiro A., Notas del curso *N-lattices*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1962.

[24] Monteiro A., Notas del curso *Algebra de la Lógica III*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1962.

[25] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de Lukasiewicz trivalentes*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[26] Monteiro A., Notas del *Seminario de Lógica de Lukasiewicz*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[27] Monteiro A., Notas del curso *Algebras de De Morgan*, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1966.

[28] Monteiro A., *Generadores de reticulados distributivos finitos*, Actas del Simposio Panamericano de Matemática Aplicada, Buenos Aires Argentina (1968) , p.465.

[29] Monteiro A., *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Mathematica, 38, Fasc 1-4 (1980), 1-237.

[30] Monteiro A., *Sobre el número minimal de generadores de reticulados distributivos finitos y álgebras de Boole finitas*, Informes Técnicos Internos 65, INMABB-CONICET-UNS, (1998).

[31] Monteiro, L. et Picco, D., *Les réticulés de Morgan et l'opération de Sheffer,* Notas de Lógica Matemática 14, INMABB-CONICET-UNS, Bahía Blanca (1964) 7 pág. Tambien publicado en Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc. Série Sc. Math. Astr. et Phys., 11 (1963), 355-358.

[32] Monteiro, L., *Les algèbres de Heyting et de Lukasiewicz trivalentes,* Notre Dame J. Formal Logic, 11 (1970), 453-456.

[33] Monteiro L., *Algebras de Boole,* Informes Técnicos Internos 66, INMABB-CONICET-UNS (1998), versión corregida (2000), 201 páginas.

[34] Monteiro L., *M-algèbres de Kleene,* An. Acad. brasil. Ciênc. 53 (4)(1981), 665-672.

[35] Monteiro L. and Viglizzo I., *Construction of Nelson algebras*, Actas del IV Congreso Dr. Antonio A.R. Monteiro, Departamento e Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, (1997), pág. 238.

[36] Rasiowa H., *N-lattices and constructive logic with strong negation*, Fund. Math., 46 (1958), 61-80.

[37] Scholander, M., *Postulates for distributive lattices*, Canadian Journal of Mathematics, v. 3(1951), pp. 28-30.