INFORME TECNICO INTERNO

Nº. 79

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 79

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2002 -

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 79

PROBLEMAS DE CONTORNO II

A. Benedek y R. Panzone

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2002

PROBLEMAS DE CONTORNO II

por A. Benedek y R. Panzone

PROLOGO.

Estas notas constituyen una continuación, pero en varias variables, del texto de los autores "PROBLEMAS DE CONTORNO, I. *Lecciones sobre métodos y resultados básicos de la teoría de Sturm-Liouville y algunas de sus generalizaciones*, Notas de Algebra y Análisis nº 13, INMABB(UNS-CONICET), (1985).

En estas lecciones se estudian problemas de contorno de ecuaciones diferenciales en varias variables. En su mayoría estos problemas están planteados para ecuaciones de segundo orden en regiones planas de Jordan. El presente volumen está dividido en dos partes y cada una de ellas en capítulos y apéndices.

R.P.
Bahía Blanca, Dic. 2002

CONTENIDOS
PROBLEMAS DE CONTORNO II
PARTE I

CAPITULOS

APENDICES

CAPÍTULO 1
LOS PROBLEMAS DE DIRICHLET Y NEUMANN, SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE FREDHOLM

Sea J una curva de Jordan cerrada tal que localmente sea una curva C^2, es decir, existe una representación de la curva: $\vec{f}(t)=(x_1(t),x_2(t))$, $0\le t\le 1$, tal que para todo $t_0\in[0,1]$ existe un entorno V_0 para el cual $\vec{f}\,\big|\,V_0$ es un homeomorfismo dos veces continuamente diferenciable. Supongamos que $\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2>0$ para todo t.

Se sabe que en este caso J es una curva de Jordan (cerrada) rectificable de longitud S>0 y tal que sus coordenadas $x(s), y(s)$ referidas al parámetro longitud de arco s son dos veces continuamente diferenciables. Luego $x'(s)^2+y'(s)^2=1$ en $[0,S]$ y su curvatura (continua) es igual a:

$$k(s)=\frac{x'(s)y''(s)-x''(s)y'(s)}{\left(x'(s)^2+y'(s)^2\right)^{3/2}}=(x'y''-x''y')(s). \tag{1.1}$$

A un punto P del plano lo denotaremos con P ò con (x,y), si estas son sus coordenadas, ò s, si está en J en el lugar donde el parámetro longitud vale s. La región interior a J será denotada con D ò D_i según convenga, y la exterior siempre con D_e.

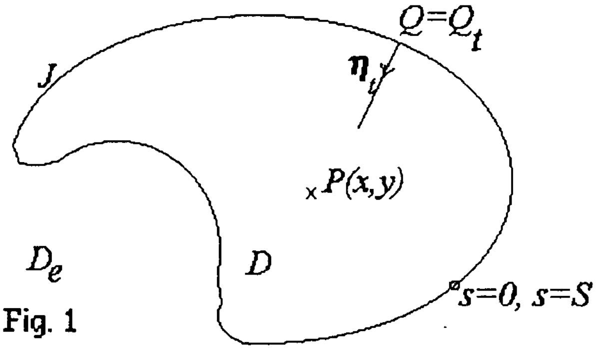


Fig. 1

Obsérvese que la situación descripta -y aceptada como hipótesis sobre la curva J- es equivalente a la siguiente: en todo $P\in J$ puede ubicarse un sistema de coordenadas X, Y, con ese punto como origen, tal que la curva localmente es representable en la forma $Y=F(X)$, F una función dos veces continuamente diferenciable tal que $\frac{dY}{dX}(0)=0$. Finalmente recordemos que el parámetro longitud s está determinado -salvo constante aditiva- por

$$s=\int_0^{t(s)}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)^{1/2}dt.$$

O sea, para la representación $Y=F(X)$ localmente tenemos:

$$s=\int_0^{X(s)}\left(1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right)^{1/2}dX.$$

Y por tanto: s=O(X), X=O(s).

A. EL PROBLEMA INTERIOR DE DIRICHLET. Este problema consiste en encontrar una función $u(x,y)$ armónica en D, continua en $\overline{D}=D\cup J$, tal que $u|_J=g$, donde $g(s)$ es un dato continuo sobre $J(=\partial D)$. Siguiendo una idea de C. Neumann se busca la solución por medio de un potencial de doble hoja instalado en J de densidad $\mu(s) \in C([0,S])$:

$$(1.2) \qquad u(P) = u(x,y) = \int_0^S \mu(s) \frac{\partial}{\partial \eta_s} \log \frac{1}{|P-Q_s|} ds \qquad P \in D \cup D_e$$

donde η_s indica la normal interior en el punto $Q_s \in J$. La función

$$(\mathrm{I}) \qquad \Phi(P,s) := \frac{\partial}{\partial \eta_s} \log \frac{1}{|P-Q_s|},$$

en $P \neq Q_s$, es armónica, lo mismo que $u(P) = \int_0^S \mu(s)\Phi(P,s)ds$ en $P \notin J$. Calculemos (ver Fig. 2) la derivada normal Φ de

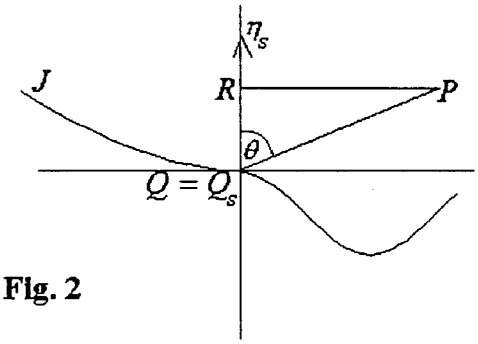


Fig. 2

$$(\mathrm{II}) \qquad \Psi(P,s) := \log \frac{1}{|P-Q_s|}.$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial \eta_s} \Psi(P,s) = \frac{\partial}{\partial \eta_s} \log \frac{1}{|P-Q_s|} = \lim_{R \to Q} \log \left| \frac{P-Q_s}{P-R} \right| \Big/ |R-Q_s| = \frac{\cos\theta}{|P-Q_s|} = \frac{\cos(P-Q_s, \eta_s)}{|P-Q_s|}.$$

En efecto, $$\lim_{R \to Q} \frac{\log \frac{|P-Q|}{|P-R|}}{|R-Q|} = -\frac{1}{2} \lim_{R \to Q} \frac{\log\left(\left(|R-Q|^2 + |P-Q|^2 - 2|P-Q||R-Q|\cos\theta\right) / |P-Q|^2 \right)}{|R-Q|} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim \frac{\log\left[1 + \left(\frac{|R-Q|}{|P-Q|} \right)^2 - 2\frac{|R-Q|}{|P-Q|}\cos\theta \right]}{|R-Q|} =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{R \to Q} \left[\left(\frac{|R-Q|}{|P-Q|} \right)^2 - 2\frac{|R-Q|}{|P-Q|}\cos\theta + \dots \right] \Big/ |R-Q|, \text{ o sea,}$$

$$(1.4) \qquad \Phi(P,s) = \frac{\cos\theta}{|P-Q_s|} = \frac{\cos(P-Q_s, \eta_s)}{|P-Q_s|}.$$

La armónica $u(P)$ se anula en el infinito: tomando en cuenta (1.4), si en (1.2) hacemos $P \to \infty$ resulta que $u(\infty) := \lim_{P \to \infty} u(P) = 0$. Por otra parte si $P = Q_t$, el miembro derecho de (1.4) está bien definido para $t \neq s$. Así podemos *definir el núcleo* $K(t,s)$:

$$(1.5) \qquad \pi K(t,s) := \frac{\partial}{\partial \eta_s} \log \frac{1}{|Q_t - Q_s|} = \frac{\cos(Q_t - Q_s, \eta_s)}{|Q_t - Q_s|} \qquad \text{para } t \neq s.$$

Completando la *definición de* $K(.,.)$ con $\pi K(t,t) := k(t)/2$ se comprueba que el núcleo (1.5) es continuo en $[0,S] \times [0,S]$ (y por tanto es un núcleo Hilbert-Schmidt). En efecto, como el vector tangente (x',y') es de norma uno el versor n_t es igual a $(-x',y')$. Luego,

$$\frac{\cos\theta(s,t)}{|Q_s-Q_t|}=\frac{(x(s)-x(t))(-y'(t))+(y(s)-y(t)x'(t)}{(x(s)-x(t))^2+(y(s)-y(t))^2}=$$

$$=\frac{\left[(s-t)x'(t)+(1/2)(s-t)^2x''(t)+o(s-t)^2)\right](-y'(t))+\dots}{(s-t)^2x'(t)^2+o((s-t)^2)+\dots}\xrightarrow[s\to t]{}\left(y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)\right)/2.$$

O sea,

(1.6) $$\lim_{s\to t}\frac{\cos\theta(s,t)}{|Q_s-Q_t|}=k(t)/2.$$

Por tanto en la fórmula (1.2) también puede tomarse $P\in J$. Sea

(1.7) $$u(t):=u(Q_t)=\pi\int_0^S K(t,s)\mu(s)ds=\pi\boldsymbol{K}(\mu).$$

El *operador* $\boldsymbol{K}$ (de tipo Hilbert-Schmidt) así definido lleva $L^2(0,S)$ en $C([0,S])$. Demostraremos más adelante el siguiente resultado fundamental.

PROPOSICIÓN 1. a) Sean $u_i(t)=\lim_{P\in D,\,P\to Q_t}u(P)$, $u_e(t)=\lim_{P\in D_e,\,P\to Q_t}u(P)$.

Bajo las hipótesis enunciadas los límites $u_i(t)$ y $u_e(t)$ existen y verifican

(1.8) $$u_i(t)=u(t)+\pi\,\mu(t),\ u_e(t)=u(t)-\pi\,\mu(t).$$

b) Por otra parte vale

(1.9) $$\lim_{P\to Q_s}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\eta}(P)-\frac{\partial u_e}{\partial\eta}(P')\right)=0,$$

donde $P\in D$ y se encuentra sobre la normal interior $\eta=\eta_s$ en Q_s, P' es el punto simétrico a P respecto a la tangente en Q_s ($P'\in D_e$).♦

Luego, si $\frac{\partial u_i}{\partial\eta}(P)$ converge a un límite cuando $P\to Q_s$, $P\in\eta$, entonces también existe el límite de $\frac{\partial u_e}{\partial\eta}(P')$ y coincide con aquél. La proposición implica que el potencial μ deberá satisfacer a la siguiente ecuación integral ([RN]),

(1.10) $$g(s)/\pi=\mu(s)+\int_0^S K(s,t)\,\mu(t)\,dt=\ \mu+\boldsymbol{K}(\mu),$$

si u resuelve el **problema de Dirichlet**: $u\in C(\overline{D}),u_i\in C^2(D),\Delta u_i=0$ y $u_i(s)=g(s)$ para todo s. La teoría de Fredholm de ecuaciones integrales nos asegura que (1.10) tiene exactamente una solución para cada $g\in L^2(0,S)$ pues la correspondiente ecuación homogénea,

(1.11) $$f(s)+\int_0^S K(s,t)\,f(t)\,dt=\ 0$$

sólo admite la solución trivial. Veamos esto. Si f es una solución de (1.11) en $L^2(0,S)$ entonces f es continua en $[0,S]$ y la función

(1.12) $$v(P)=\int_0^S f(t)\Phi(P,t)dt,$$

verifica, debido a la Proposición 1, que $v_i(Q)=0, Q\in J$. De la armonicidad de v sigue ahora que $v\equiv 0$. Por tanto, $\frac{\partial v_i}{\partial n_t}=0$ para todo $t\in S$. Entonces $\frac{\partial v_e}{\partial n_t}=0$ en J. De la siguiente sección B sabemos que si $w=v_e$ se tiene

$$(1.13)\qquad \iint_{D_e}(w_x^2+w_y^2)dxdy=-\int_0^S w\frac{\partial w}{\partial n_t}dt=0.$$

En consecuencia, $w_x=w_y=0$ y $w=v_e\equiv v(\infty)=0$. Por otra parte, $f(t)=\frac{v_i(t)-v_e(t)}{2\pi}=0$.

Entonces (1.10) tiene exactamente una solución $\mu\in L^2$ para cada g de cuadrado integrable. Como en nuestro caso g es continua entonces $\mu(s)$ también lo es.

TEOREMA 1. a) Existe exactamente un potencial de doble hoja de densidad $\mu(t)$ en L^2, tal que (1.2) define una función armónica en D que converge, al tender P al borde, a una g dada, definida y continua sobre ∂D.

b) $\mu(t)$ es necesariamente continua.

c) Existe exactamente una solución al problema interior de Dirichlet.•

DEMOSTRACIÓN. c) es consecuencia del principio de máximo para funciones armónicas, QED.

B. La *fórmula de Green*: $\int_G U\Delta V dx=\int_{\partial G} UV_n d\sigma-\int_G(\text{grad}U,\text{grad}V)dx$, donde n es la normal exterior, aplicada a la región $G\subset D_e$ comprendida entre J y una circunferencia C de radio R, centro 0, que tiende a infinito y la siguiente proposición, implican (1.13).

PROPOSICIÓN 2. Sea $z=x+iy=R\,e^{i\alpha}$. Entonces

$$(1.14)\qquad \int_C w(s)\frac{\partial w}{\partial n}(s)d\sigma(s)\xrightarrow[R\to\infty]{}0.\bullet$$

DEMOSTRACIÓN. $\int_C w(s)\frac{\partial w}{\partial n}(s)d\sigma(s)=\int_C w(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial w}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha)d\sigma$.

Si $\xi=X+iY=1/z$, $u(\xi)=w(z)$ y c es la circunferencia de radio $1/R$, la integral es igual a

$$\int_c u(\xi)\left[u_X(\xi)O(1/R^2)+u_Y(\xi)O(1/R^2)\right]R^2d\sigma'(\xi)=\int_c v(\infty)(1+o(1))\left[u_XO(1)+u_YO(1)\right]d\sigma'$$

Como existe el $lim\, u(\xi)=v(\infty)$ para $\xi\to 0$, u es armónica en un entorno del origen y por tanto u_X,u_Y están acotadas allí. Luego, $\int_C w(s)\frac{\partial w}{\partial n}(s)d\sigma(s)=v(\infty)\int_c O(1)d\sigma'$, QED.

C. DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 1. a) y b) de la Proposición 1 para $\mu=constante$ siguen de la siguiente observación. *Sea d=$d(P)$ la función igual a 2π en D, igual a π en J e igual a 0 en D_e*. Entonces, la función u definida por

$$(1.15)\quad u(P)=\int_0^S\mu(t)\Phi(P,t)dt,\ P\notin J\quad;\quad u(P)=\pi\int_0^S\mu(t)K(s,t)dt,\ P=Q_s\in J$$

es igual a d si $\mu \equiv 1$. En efecto, si v es una armónica conjugada de la función armónica u entonces de las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\beta = \frac{\partial v}{\partial x}\cos(\beta+\pi/2) + \frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{sen}(\beta+\pi/2)$$

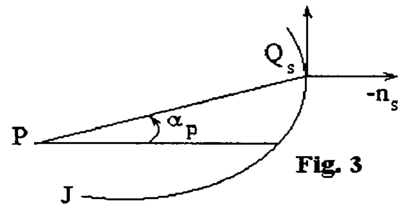


Fig. 3

Es decir, la derivada de u en una dirección coincide con la derivada de v en la dirección obtenida girando aquella en 90° en sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces (ver figura 3) recordando que $Log(z) = \log|z| + iArg(z)$ resulta, $-\frac{\partial \log|P-Q_s|}{\partial n_s} = \frac{\partial \log|Q_s - P|}{\partial(-n_s)} = \frac{d\alpha_P}{ds}(s)$. Luego, $u(P) = \int_0^S d\alpha_P(s) = d(P)$.

Veamos a) en el caso general. Comenzamos suponiendo $\mu \in C^1$. Entonces

$$(1.16) \qquad \int_0^S \mu(s)\frac{\partial}{\partial n_s}\log\frac{1}{|R-Q_s|}ds = \int_0^S (\mu(s)-\mu(t))\frac{\partial}{\partial n_s}\log\frac{1}{|R-Q_s|}ds + \mu(t)d(R) =$$

$$= \int_0^S (\mu(s)-\mu(t))\frac{\cos(R-Q_s, n_s)}{|R-Q_s|}ds + \mu(t)d(R).$$

Para R bastante cercano a J existe un (único) Q_t en J tal que $|R-Q_t| = \textit{distancia de } R \textit{ a } J$ (cf. H) Cap.2). De $\frac{|Q_s - Q_t|}{|R-Q_s|} \le \frac{|R-Q_s| + |R-Q_t|}{|R-Q_s|} \le 2$ sigue $R \to Q_s \Rightarrow Q_t \to Q_s \Rightarrow t \to s$. La última implicación debido a que para t cercano a s vale $|t-s|/2 \le |Q_t - Q_s|$. Entonces el integrando de la última integral está acotado y si $R \to Q_h$ entonces $\mu(t) \to \mu(h)$ y esa integral tiende a un número $L(h)$ que no depende del camino recorrido por R. Luego, el primer miembro de (1.16) tiene límite que depende del conjunto al que pertenece R y se tiene,

(1.17) $\qquad L(h) = u_i(h) - 2\pi\mu(h) \quad si\ R \in D,$

(1.18) $\qquad L(h) = u(h) - \pi\mu(h) \quad si\ R \in J,$

(1.19) $\qquad L(h) = u_e(h) \quad si\ R \in D_e.$

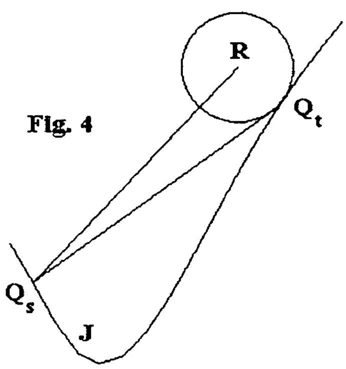
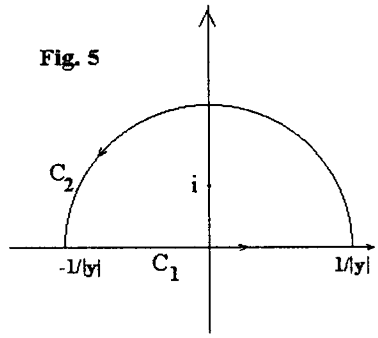


Fig. 4

Sea ahora $\{\mu_j\} \subset C^1$, una sucesión uniformemente convergente a $\mu \in C$ y sean $u_{i,j}, u_{e,j}, u_j$ las funciones correspondientes definidas según (1.15). Vale que $u_j(s) \xrightarrow{\bullet} u(s)$. Por tanto $L_j(s) \xrightarrow{\bullet} L(s) := u(s) - \pi\mu(s)$ y tenemos (1.18). En consecuencia, $u_{i,j} \xrightarrow{\bullet} U(s)$, $u_{e,j}(s) \xrightarrow{\bullet} V(s)$. Entonces la sucesión de armónicas $u_{i,j}(P)$ converge uniformemente, por el principio de mínimo ([Br]), a una función armónica A cuyo valor de contorno es $U(s)$. Sin embargo, $u_{i,j}(P) \to u(P) = \int_0^S \mu(s)\frac{\partial}{\partial n_s}\log\frac{1}{|P-Q_s|}ds$, $P \in D$. O sea, $A(P) = u(P)$, $U(s) = u_i(s)$. Análogamente $V(s) = u_e(s)$ y así obtenemos (1.17) y (1.19) para μ continua.

Veamos b). Consideremos un potencial u de doble hoja en y=0 sobre el intervalo [-1,1] de densidad $\mu(x)$. Entonces, $u(x,y)=-\int_{-1}^{1}\frac{y}{y^2+(x-t)^2}\mu(t)dt$,

Fig. 5



$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=\int_{-1}^{1}\left[\frac{2y^2}{(y^2+t^2)^2}-\frac{1}{y^2+t^2}\right]\mu(t)dt=\int_{-1}^{1}\frac{y^2-t^2}{(y^2+t^2)^2}\mu(t)dt.$$

Estudiaremos el comportamiento de esta derivada en x=0 y en distintos casos.

CASO 1. $\mu(t)\equiv 1$. Sea $0<|y|<1$. Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=\frac{1}{|y|}\int_{-1/|y|}^{1/|y|}\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}du=\frac{1}{|y|}G(y).$$

Pero, $G(y)=\int_{C_1+C_2}\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}du+\int_{-C_2}\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}du$ (ver Figura 5). Luego tenemos,

$G(y)=2\pi i.residuo\,en\,i\,de\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}+i|y|\int_{\pi}^{0}\frac{y^2-e^{2i\varphi}}{(y^2+e^{2i\varphi})^2}e^{i\varphi}d\varphi$. Sin embargo, el residuo de la fórmula es igual a 0= $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}du$ por lo que $G(y)=i|y|\int_{0}^{\pi}(1+o(1))e^{-i\varphi}d\varphi$ (para $y\to 0$).

En consecuencia, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=\frac{G(y)}{|y|}\to i\int_{0}^{\pi}e^{i\varphi}d\varphi=-2$ para $y\to 0$.

CASO 2. Sea $\mu(t)=|t|^{1/2}$ en [-1/2,1/2], $\mu(t)$ continua en [-1,1]. Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{y^2-t^2}{(y^2+t^2)^2}|t|^{1/2}dt+\int_{1/2<|t|<1}\frac{y^2-t^2}{(y^2+t^2)^2}\mu(t)dt=I_1(y)+I_2(y).$$

$I_2(y)$ converge para $y\to 0$. En cambio $I_1(y)\to-\infty$ si $|y|\to 0$. En efecto, si $t=|y|u$,

$I_1(y)=\frac{1}{|y|^{1/2}}\int_{-1/2|y|}^{1/2|y|}\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}|u|^{1/2}du$. Pero, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}|u|^{1/2}du<\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}du=0$ y sigue que

$I_1(y)\xrightarrow[y\to 0]{}-\infty$. Conclusión: $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)$ no tiene necesariamente límite para $|y|\to 0$ si $\mu(t)$ es solamente continua; sin embargo, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(0,-y)$ en ambos casos.

Veamos ahora una demostración de (1.9). Sea $R\in D$ (cf. Fig. 6). Recurriendo a la función $d(P)$ (cf. (1.15)), deducimos que podemos suponer $\mu(s)=0$. Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial n_s}\int_{0}^{s}\frac{\cos(R-Q_t,n_t)}{|R-Q_t|}\mu(t)dt=\int_{0}^{s}\frac{\partial}{\partial n_s}\left\{\frac{(R-Q_t)\cdot n_t}{|R-Q_t|^2}\right\}\mu(t)dt.$$

Por otra parte sabemos que: $\frac{\partial}{\partial n_s}(R-Q_t)=n_s$. Luego,

$$\frac{\partial}{\partial n_s}\frac{(R-Q_t)\cdot n_t}{|R-Q_t|^2}=\frac{(n_s\cdot n_t)|R-Q_t|^2-\left(2(R-Q_t)\cdot\frac{\partial}{\partial n_s}(R-Q_t)\right)((R-Q_t)\cdot n_t)}{|R-Q_t|^4}=$$
$$=\frac{(n_s\cdot n_t)-2(n_s.\eta)(n_t\cdot\eta)}{|R-Q_t|^2}.$$

Observemos que

$$(\wedge)\begin{cases} |n_s|=|n_t|=|\tau|=1,\ \eta=(R-Q_t)/|R-Q_t| \\ t-s=O(x) \\ |Q_t-T|=y=O(x^2),\ |x|=|Q_s-T|,\ y'(t)=y''(\xi)(t-s)=O(x) \\ \tau=(x'(t),y'(t)),\ n_s=(0,1),\ n_t=(-y'(t),x'(t)) \\ \eta=(-x(t),z-y(t))/(x^2+(z-y)^2)^{1/2} \\ |\mu(t)|<\varepsilon\ \ si\ \ |t-s|<\delta \end{cases}$$

Reemplazando en el cociente centrado precedente obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial n_s}\frac{(R-Q_t)\cdot n_t}{|R-Q_t|^2}=\frac{x'(t)-\dfrac{2(z-y(t))(y'(t)x(t)+x'(t)(z-y(t))}{x^2+(z-y)^2}}{x^2+(z-y)^2}=$$
$$=\frac{x'x^2-x'(z-y)^2-2y'x(z-y)}{(x^2+(z-y)^2)^2},\ \text{o sea,}$$

$$(*)\qquad \frac{\partial}{\partial n_s}\frac{(R-Q_t)\cdot n_t}{|R-Q_t|^2}=\frac{\alpha}{(x^2+(z-y)^2)^2}-\frac{\beta}{(x^2+(z-y)^2)^2}$$

donde $\alpha=x'(x^2-z^2-y^2)+2y'xy,\ \ \beta=2z(x'y-y'x)$. En consecuencia (ver figura 6):

$$(**)\qquad \frac{\partial}{\partial n_s}\frac{(R'-Q_t)\cdot n_t}{|R-Q_t|^2}=\frac{\alpha}{(x^2+(z+y)^2)^2}-\frac{\beta}{(x^2+(z+y)^2)^2}$$

Por tanto (*) – (**) = $\alpha A-\beta B$, donde

$A=\dfrac{1}{(x^2+(z-y)^2)^2}-\dfrac{1}{(x^2+(z+y)^2)^2}$, $B=\dfrac{1}{(x^2+(z-y)^2)^2}+\dfrac{1}{(x^2+(z+y)^2)^2}$. Entonces,

$$A=O\left(\frac{zy(z^2+y^2+x^2)}{(x^2+z^2)^2}\right),\ B=O\left(\frac{1}{(x^2+z^2)^2}\right).\ \text{Como}$$

$\alpha=O(1),\ \beta=O(|zy|+|zy'x|)=O(zx^2)$, resulta:

$$|(*)-(**)|=O\left(\frac{zy}{(x^2+z^2)^2}\right)+O\left(\frac{zx^2}{(x^2+z^2)^2}\right)=O\left(\frac{zx^2}{(x^2+z^2)^2}\right).$$

Para probar la proposición debemos mostrar que

$$(***)\qquad \frac{\partial}{\partial n_s}\int_0^s\left(\frac{\cos(R-Q_t,n_t)}{|R-Q_t|}-\frac{\cos(R'-Q_t,n_t)}{|R'-Q_t|}\right)\mu(t)dt\to 0$$

si $R\to Q_s$, es decir, cuando $z\to 0$. Si descomponemos la última integral en

$\int\limits_{|s-t|\geq\varepsilon} + \int\limits_{|s-t|<\varepsilon}$, vemos enseguida que para probar (***) basta demostrar que

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n_s}\left(\frac{\cos(R-Q_t,n_t)}{|R-Q_t|} - \frac{\cos(R'-Q_t,n_t)}{|R'-Q_t|}\right)\mu(t)dt = O(\varepsilon).$$

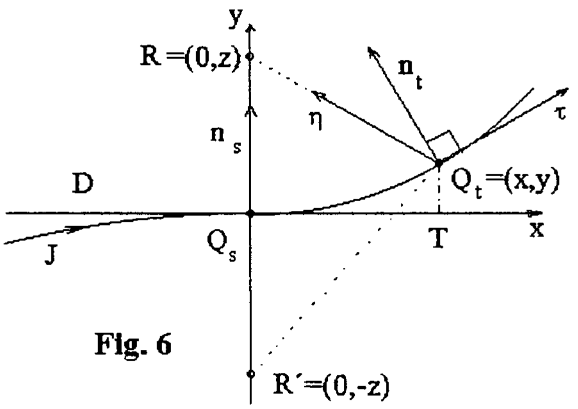


Fig. 6

Pero $\left|\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\right| \leq \varepsilon \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} |(*)-(**)| dt$. Es suficiente entonces ver que la última integral es acotada. En efecto, ella es $O\left(\int_0^\infty \frac{zx^2}{(x^2+z^2)^2}dx\right) = O\left(\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt\right) < \infty$, QED.

D. EL PROBLEMA INTERIOR DE NEUMANN. El **problema interior de Neumann** es análogo al de Dirichlet pero con otro dato que consiste en este caso en dar el valor de la derivada normal en cada punto. Precisamente, consiste en encontrar una función $u(x,y)$ armónica en D, continua en $\overline{D} = D \cup J$, tal que $\frac{\partial u}{\partial \eta_s}(s) = h(s)$ donde $h(s)$ es una función continua sobre $J(=\partial D)$.

Para estudiar este problema consideraremos el *potencial de simple hoja* de densidad $\rho(t)$ continua:

(1.20) $$w(P) = \int_0^S \rho(t)\log\frac{1}{|P-Q_t|}dt = \int_0^S \rho(t)\Psi(P,t)dt.$$

Evidentemente w es armónica en $D \cup D_e$. Además vale la:

PROPOSICIÓN 3. a) w puede extenderse en forma continua hasta el borde J,

b) $$\left[\frac{\partial w}{\partial \eta_s}\right]_i + \pi\rho(s) = \left[\frac{\partial w}{\partial \eta_s}\right]_e - \pi\rho(s) = \int_0^S \rho(t)\frac{\partial}{\partial \eta_s}\log\frac{1}{|Q_s-Q_t|}dt.\bullet$$

O sea que la derivada normal de w es la que presenta ahora discontinuidades. Admitiendo por el momento la proposición, el problema de Neumann planteado para w es: $\left[\frac{\partial w}{\partial \eta_s}\right]_i = h(s)$, y por tanto consiste en encontrar $\rho(t)$ que satisfaga:

(1.21) $$-\frac{h(s)}{\pi} = \rho(s) - \frac{1}{\pi}\int_0^S \rho(t)\frac{\partial}{\partial \eta_s}\log\frac{1}{|Q_s-Q_t|}dt.$$

Recordemos que $K(s,t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta_t}\log\frac{1}{|Q_s-Q_t|}$. Luego

(1.22) $$K^*(s,t) := \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta_s}\log\frac{1}{|Q_s-Q_t|} = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta_s}\log\frac{1}{|Q_t-Q_s|} = K(t,s),$$

y (1.21) se reduce a

(1.23) $$-\frac{h(s)}{\pi}=\rho(s)-\int_0^S \rho(t)\,K^*(s,t)\,dt=\rho(s)-\int_0^S \rho(t)\,K(t,s)\,dt.$$

De $d(P):=\int_0^S \frac{\partial}{\partial\eta_t}\log\frac{1}{|P-Q_t|}dt=\begin{cases}2\pi & si\ P\in D\\ \pi & si\ P\in J\\ 0 & si\ P\in D_e\end{cases}$ tenemos $\int_0^S K(s,t)\,dt=1$. Luego,

(1.24) $$\mu(s)-\int_0^S K(s,t)\,\mu(t)\,dt=0$$

admite la solucion $\mu(s)\equiv$ constante. O sea, 1 es un autovalor para el operador completamente continuo $\boldsymbol{K}$: $L^2(0,S)\to L^2(0,S)$. Este autovalor es de multiplicidad 1. En efecto, si $\mu(s)$ es una solución de (1.24) (necesariamente continua), tenemos,

$$\pi\mu(s)=\int_0^S \mu(t)\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{|Q_s-Q_t|}dt=u(s).$$

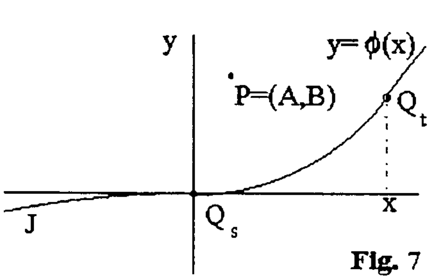


Fig. 7

De la Proposición 1 sigue que: $u_e(s)=u(s)-\pi\mu(s)=0$. Esto implica que $u_e\equiv 0$. Entonces, $0=\frac{\partial u_e}{\partial n_s}=\frac{\partial u_i}{\partial n_s}$. Por tanto (cf. (1.27)),

(1.25) $$\iint_D (u_x{}^2+u_y{}^2)dxdy=-\int_0^S u_i(t)\frac{\partial u_i}{\partial n_t}dt=0.$$

En consecuencia, *u=constante*, QED.

De la teoría de Fredholm para operadores completamente continuos sabemos que la ecuación (1.23) tiene solución ρ en L^2 (y continua pues $h\in C$) si y sólo si $h\perp 1$. Esto es, si y sólo si,:

(1.26) $$\int_0^S h(t)\,dt=0.$$

TEOREMA 2. a) El problema interior de Neumann tiene solución si y sólo si la función dato *h*(*s*) tiene media cero en el contorno. b) Dos soluciones difieren en una constante. •

DEMOSTRACIÓN. b) Sea u_0 la solución obtenida por medio del potencial de simple hoja con el dato *h* de media cero, *u* otra solución y $v=u-u_0$. Entonces, de la fórmula de Green:

(1.27) $$\iint_D w\Delta v dxdy=-\int_J w\frac{\partial v}{\partial n_{\text{int}}}d\sigma-\iint_D(\text{grad } v,\text{grad } w)dxdy,$$

obtenemos con $w=v$ que $\iint_D|\nabla v|^2dxdy=0$. Luego, *v=constante*.

a) Obsérvese que el dato *h* debe tener necesariamente media cero pues (1.27) se reduce para *w*=1 a: $\iint\Delta v=-\int\frac{\partial v}{\partial n_{\text{int}}}$. O sea, para *v* armónica, $\int\frac{\partial v}{\partial n_{\text{int}}}=0$, QED.

E. DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3. a) Véase la figura 7,

$$I_\varepsilon = \left|\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \rho(t)\log|P-Q_t|dt\right| \le max|\rho| \int_{-h_1}^{h_2} \left|\log\sqrt{(x-A)^2+(\phi(x)-B)^2}\right|(1+\phi'(x)^2)^{1/2}dx,$$

y donde $h_i \to 0$ si $\varepsilon \to 0$. Entonces, si ε es bastante pequeño y P bastante próximo a Q_s:

$I_\varepsilon \le M\int_{-h_1}^{h_2}\left|\log|x-A|\right|dx \le 2M\int_0^{h_1+h_2}|\log x|dx \to 0$ para $\varepsilon \to 0$. La integral $\int_0^s \rho(t)\log\dfrac{1}{|P-Q_t|}dt$ calculada fuera de un entorno "lineal" del punto Q_s en J define una función continua en un entorno plano de ese punto. De esto se deduce que $w(P)= \int_0^s \rho(t)\log\dfrac{1}{|P-Q_t|}dt$ es continua sobre J y por tanto lo es en todo el plano.

b) Recordemos que $\dfrac{\partial}{\partial n_s}\log\dfrac{1}{|P-Q_s|} = \dfrac{\cos(P-Q_s,n_s)}{|P-Q_s|}$, $P \ne Q_s$. Si $Q \in n_s, Q \notin J$, procediendo, por ejemplo, como en (1.3)-(1.4), obtenemos (ver Fig. 8):

$$(1.28) \qquad \frac{\partial}{\partial n_s}\log\frac{1}{|Q-Q_t|} = \frac{\cos(Q_t-Q,n_s)}{|Q_t-Q|} = -\frac{\cos(Q-Q_t,n_s)}{|Q-Q_t|}.$$

Debemos demostrar que valen las siguientes igualdades para $w(P)= \int_0^s \rho(t)\log\dfrac{1}{|P-Q_t|}dt$:

$$(1.29) \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_e = \pi\rho(s) - \int_0^s \rho(t)\frac{\cos(Q_s-Q_t,n_s)}{|Q_s-Q_t|}dt = \pi\rho(s) - C(s)$$

$$(1.30) \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_i = -\pi\rho(s) - \int_0^s \rho(t)\frac{\cos(Q_s-Q_t,n_s)}{|Q_s-Q_t|}dt = -\pi\rho(s) - C(s)$$

Sea u un potencial de doble hoja con densidad ρ. Entonces, si $Q \notin J, Q \in n_s$,

$$(1.31) \qquad u(Q) + \frac{\partial w}{\partial n_s}(Q) = \int_0^s \rho(t)\frac{\cos(Q-Q_t,n_t)-\cos(Q-Q_t,n_s)}{|Q-Q_t|}dt.$$

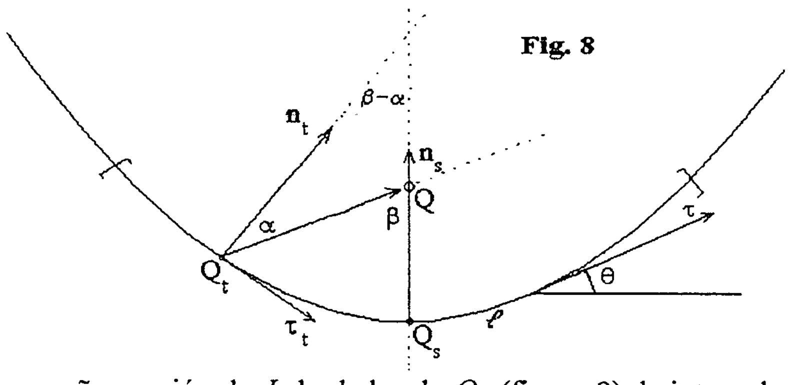


Fig. 8

Si l es una pequeña porción de J alrededor de Q_s (figura 8), la integral en (1.31) pero sobre l, en módulo no supera, salvo por un factor constante, a:

$$\int_l \frac{|\cos(Q-Q_t,n_t)-\cos(Q-Q_t,n_s)|}{|Q-Q_t|} \le 2\int_l \frac{|\mathrm{sen}(1/2)(\alpha-\beta)|}{|Q-Q_t|}dt = 2\int_l \frac{|\mathrm{sen}\,(1/2)Ang(n_s,n_t)|}{|Q-Q_t|}dt$$

$\leq \int_l \frac{|Ang(n_s,n_t)|}{|Q-Q_t|}dt$. Pero $|Ang(n_s,n_t)| = |Ang(\tau_s,\tau_t)| = \left|\int_s^t \dot{\theta}(\sigma)d\sigma\right| = \left|\int_s^t k(\sigma)d\sigma\right| = O(|s-t|)$.

Entonces, si $Q \to Q_s$ a lo largo de n_s, tenemos

$$\int_l \frac{|Ang(n_s,n_t)|}{|Q-Q_t|}dt \leq M\int_l \frac{|s-t|}{|Q-Q_t|}dt = \int_l O(1)\frac{|s-t|}{|s-t|}dt = O(long\ l)$$

y la integral en (1.31) tiende a un límite. Precisamente a:

$$\int_0^S \rho(t)\frac{\cos(Q_s - Q_t, n_t) - \cos(Q_s - Q_t, n_s)}{|Q_s - Q_t|}dt = u(s) - C(s).$$

Luego, $\lim_{Q \to Q_s, Q \in n_s}\left(u(Q) + \frac{\partial w}{\partial n_s}(Q)\right) = u_i(s) + \lim_{Q \to Q_s, Q \in n_s}\frac{\partial w}{\partial n_s}(Q) = u(s) - C(s)$.

O sea, el segundo límite existe y como w es continua hasta el borde se tiene: $\left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_{\text{int}}(s) =$

$= \lim_{Q \to Q_s, Q \in n_s}\frac{\partial w}{\partial n_s}(Q)$. La relación (1.30), $\left(\frac{\partial w}{\partial n_s}\right)_{\text{int}}(s) + \pi\rho(s) = -C(s)$, se obtiene recordando que $u_i(s) = u(s) + \pi\rho(s)$. Análogamente se procede con (1.29), QED.

F. EL PROBLEMA EXTERIOR DE DIRICHLET. Supongamos $(0,0)\in D$. Sea G una función continua definida en J. El **problema exterior de Dirichlet** consiste en hallar una función armónica U en D_e (es decir, con límite en el infinito) continua en $\overline{D_e}$ y tal que $U|_J = G$. La inversión respecto del origen, $z \to \xi = 1/z$, lleva el estudio del problema exterior de Dirichlet al del problema interior. Así, la transformación lleva J en j, D_e en el interior de j y la función G en g. Sigue entonces que el problema exterior de Dirichlet tiene siempre solución (única). La solución U es la transformada de la u obtenida al resolver el problema de Dirichlet en el interior de j con el valor de contorno g. Si aplicáramos el método de la sección A (cf. (1.8)) obtendríamos la ecuación integral:

$$\text{(1.33)} \qquad \frac{G}{\pi} = -\mu + \int_0^S K(s,t)\,\mu(t)\,dt$$

donde μ es la densidad del potencial de doble hoja instalado en J.

Pero ahora la ecuación homogénea

$$\text{(1.34)} \qquad 0 = -\mu + \int_0^S K(s,t)\,\mu(t)\,dt$$

admite soluciones no triviales (exactamente las constantes, cf. (1.15)) que ocupan una variedad unidimensional de L^2. Luego, G/π está en el rango de $-I+\boldsymbol{K}$ si y sólo si es ortogonal a las soluciones de la ecuación homogénea adjunta

$$\text{(1.35)} \qquad 0 = -w + \int_0^S K^*(s,t)\,w(t)\,dt = -w + \int_0^S K(t,s)\,w(t)\,dt.$$

El tercer teorema de Fredholm afirma que las soluciones de (1.35) forman un espacio unidimensional. Luego, si $w_0 \neq 0$ es una solución (en L^2) entonces toda otra solución es de la forma: *constante*$\cdot w_0$. Entonces, G es una función (continua) para la cual existe un potencial de doble hoja:

$$(1.36) \qquad U(P) = \int_0^S \mu(t) \frac{\partial}{\partial \eta_t} \log \frac{1}{|P - Q_t|} dt, \quad P \in D_e,$$

que converge a $G(Q_s)$ cuando $P \to Q_s \in J$ *si y sólo si*

$$(1.37) \qquad \int_0^S G\, w_0\, dt = 0.$$

Veamos que esto está de acuerdo con lo visto más arriba. Para u armónica en el interior de j y con valor g en el contorno existe una w sobre j tal que

$$u(0,0) = \int_j g\, w\, d\sigma.$$

[Esto no es otra cosa que el teorema del valor medio si j es la circunferencia con centro (0,0). El caso general sigue por transformación conforme del interior de j en una tal circunferencia, preservando el orígen, (cf. K, Teorema 3).]
Ahora bien, los potenciales U de la forma (1.36) se anulan en el ∞. En consecuencia la correspondiente u se anula en el origen. Luego su valor en el contorno debe verificar

$$\int_j g\, w\, d\sigma = 0.$$

Este es precisamente el significado de la condición (1.37) que es necesaria y suficiente para la existencia de una solución U del problema exterior de Dirichlet. Ésta necesariamente tiende a *cero* en el infinito.

G. EL PROBLEMA EXTERIOR DE NEUMANN. Supongamos $(0,0) \in D$. Esta hipótesis, como en el caso precedente, no restringe la generalidad. El **problema exterior de Neumann** consiste en hallar, dada H definida y continua sobre J, una función V, armónica en D_e, con límite finito en ∞, tal que $\frac{\partial V}{\partial(-\eta_s)}(Q) \to H(s)$ para $Q \to Q_s$, $Q \in -\eta_s$, $Q_s \neq Q \in D_e$. Obviamente esta V quedará indeterminada en por lo menos una constante aditiva. Si ignoramos por el momento la condición en ∞, sigue de la proposición 3 b) que para que exista solución *vía* un potencial de simple hoja la densidad ρ del mismo debe satisfacer a: $-H(s) = \pi\rho(s) + \int_0^S \rho(t) \frac{\partial}{\partial \eta_s} \log \frac{1}{|Q_s - Q_t|} dt$. O sea,

$$(1.38) \qquad -H(s)/\pi = \rho(s) + \int_0^S \rho(t)\, K^*(s,t)\, dt.$$

Es decir, $-H/\pi = (I + \boldsymbol{K}^*)(\rho)$. Pero la ecuación $(I+\boldsymbol{K}^{**})(v)=(I+\boldsymbol{K})(v)=0$ sólo admite la solución trivial (cfr. (1.11). Luego, por la teoría de Fredholm, (1.38) tiene solución para toda H en L^2. Luego, como H es continua, (1.38) tiene solución ρ *continua*.

O sea, siempre existe un potencial de simple hoja V, $V(P)=\int_0^s \rho(t)\log\frac{1}{|P-Q_t|}dt$, tal que $\frac{\partial V}{\partial(-\eta_s)}(Q)\to H(s)$ cuando $Q\to Q_s$, $Q\in -\eta_s$, $Q_s\neq Q_s$. Sin embargo la función armónica V no necesariamente tiene límite finito para $|P|\to\infty$ por lo que puede no ser solución del problema. En efecto, $V(P)=\int_0^s \rho(t)\log\frac{|P|}{|P-Q_t|}dt+\log\frac{1}{|P|}\int_0^s \rho(t)\,dt$. Para $|P|\to\infty$, el primer sumando tiende a cero y el segundo tendrá limite finito *si y sólo si*

(1.39) $$\int_0^s \rho(t)\,dt=0.$$

Pero, integrando (1.38) y recordando que $\int_0^s K^*(v,u)du=\int_0^s K(u,v)dv=1$, se obtiene

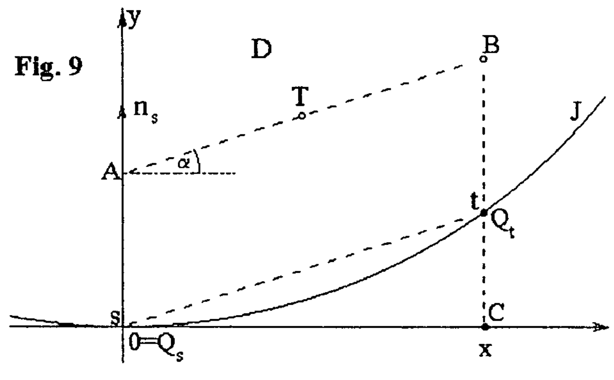
$$-\int_0^s H(s)\,ds=2\pi\int_0^s \rho(t)\,dt.$$

Luego la condición (1.39) equivale a $\int_0^s H(s)\,ds=0$. Resumiendo: el problema exterior de Neumann tiene una *solución* V para *todo dato continuo* H(s) de *media cero*. La transformación conforme $z\to\xi=\frac{1}{z}$ lleva esta solución V en una v que es solución de un problema interior de Neumann. Como v es indeterminada en *exactamente una constante* aditiva, lo mismo le ocurrirá a V.

H. EQUIVALENCIA DE LOS PROBLEMAS INTERIORES. Supongamos que u resuelva el problema interior de Neumann con un dato f continuo de media cero y de manera que u,u_x,u_y sean prolongables continuamente hasta el borde J ($u\in C^1(\overline{D})$). Por medio de las ecuaciones de Cauchy-Riemann queda determinada, salvo por una constante aditiva, una función armónica v conjugada a la u:

(1.39) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Fig. 9



En D la derivada de u en una dirección coincide con la derivada de v en la dirección obtenida rotando aquella en 90° en sentido contrario a las agujas del reloj. Además, v_x,v_y son prolongables hasta el borde definiendo funciones continuas en $\overline{D}$. Luego, v es uniformemente continua en D y prolongable con continuidad hasta ∂D. Veamos que la restricción de v a J tiene una derivada sobre J igual al límite de la derivada direccional interior en la misma dirección que la tangente a la curva. Siempre podemos suponer que la situación es como en la figura 9. Como la curva es C^2 tenemos la siguiente relación entre infinitésimos: $|x| \approx |s-t|, |Q_t - C| = O(|s-t|^2)$. Sean $|A-O| = |B-Q_t| = M|s-t|^{3/2}$, $M > |v_x(R)| + |v_y(R)|$ para todo R en un entorno de Q_s. Si $t-s$ es bastante pequeño entonces $A, B \in D$. Luego,

$$(1.40) \qquad \frac{v(Q_t)-v(Q_s)}{t-s} = \frac{v(B)-v(A)}{|B-A|} + o(1) = (v_x \cos\alpha + v_y \operatorname{sen}\alpha)(T) + o(1).$$

Como $\operatorname{sen}\alpha = o(1)$ para $t \to s$, el miembro izquierdo de (1.40) converge a $\lim_{T \to Q_s} v_x(T) = v_x(Q_s)$. En consecuencia, para $A \in n_s$,

$$(1.41) \qquad \frac{dv}{ds}(s) = \lim_{A \to Q_s} \frac{\partial v}{\partial \mathrm{tg}enQ_s}(A) = -\lim_{A \to Q_s} \frac{\partial u}{\partial n_s}(A) = -f(s).$$

Si fijamos el valor de v en un punto s_0 de la curva:

$$(1.42) \qquad v(Q_t) - v(Q_{s_0}) = \int_{s_0}^{t} -f(r)dr.$$

Como $\int_J f = 0$, v vuelve al mismo valor al dar Q_t una vuelta a J. Concluímos entonces que si el problema interior de Neumann tiene solución u entonces el problema interior de Dirichlet también la tiene para dato $g \in C^1$ definido por $g(t) = constante - \int_{s_0}^{t} f(s)ds$. La solución v es una conjugada de la u. Recíprocamente, supongamos que para $g \in C^1([0,S])$ exista v que resuelva el problema interior de Dirichlet con g como dato. El argumento precedente prueba que existe u que resuelve el problema interior de Neumann para f continua en el contorno y de media cero, si el dato f para el problema de Neumann se define por

$$(1.43) \qquad g(t) = v(Q_{s_0}) - \int_{s_0}^{t} f(r)dr.$$

La solución u es la opuesta de una conjugada de v.

I. EL PROBLEMA DE DIRICHLET CUANDO J ES UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO R.

De $\cos(Q_s - Q_t, n_t) = \dfrac{|Q_s - Q_t|}{2R}$ sigue que

$$(1.44) \qquad K(s,t) = \frac{1}{2\pi R}.$$

Por tanto la ecuación (1.10) se escribe de la siguiente forma:

$$(1.45) \qquad \frac{g}{\pi} = \mu + \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \mu(s)ds.$$

Integrando entre 0 y $2\pi R$ obtenemos

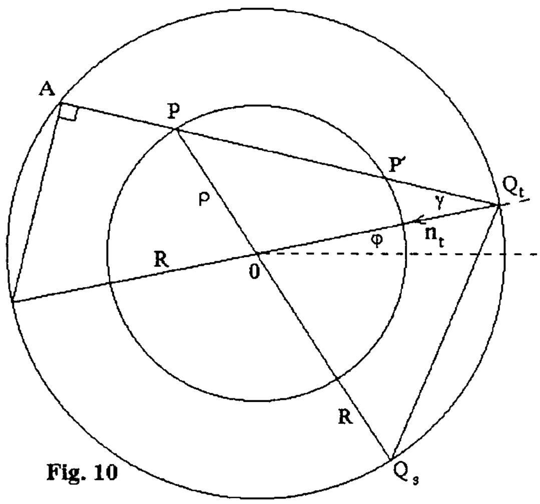


Fig. 10

$\int_0^{2\pi R} \mu\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} g\, ds$. Luego, de (1.45) sigue que

(1.46) $$\mu = \frac{g}{\pi} - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_0^{2\pi R} g\, ds.$$

De (1.2) y (1.4) para $P \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R\}$, (cf.(1.15)):

(1.47) $$u(P) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi R} g(t) \frac{\cos(P - Q_t, n_t)}{|P - Q_t|} dt - \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} g(t) dt.$$

Es decir, si $Q_t = \mathrm{Re}^{i\varphi} = Q_\varphi$, como $dt = R d\varphi$, tenemos:

(1.48) $$u(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{(2R.\cos\gamma(t) - |P - Q_t|)|P - Q_t|}{|P - Q_t|^2} g(t) dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(2R.\cos\gamma(\mathrm{Re}^{i\varphi}) - |Q_\varphi - P|)|Q_\varphi - P|}{|Q_\varphi - P|^2} g(\mathrm{Re}^{i\varphi})\, d\varphi.$$

El numerador de la fracción en (1.48) es igual a
$$(|A - Q_t| - |P - Q_t|)|P - Q_t| = |A - P||P - Q_t| = |P' - Q_t||P - Q_t|.$$

Pero ésta es la potencia de Q_t respecto de la circunferencia de radio ρ y por tanto igual a $(R - \rho)(R + \rho)$. Entonces, si $P = \rho e^{i\Phi}$,

(1.49) $$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\Phi - \varphi)} g(\mathrm{Re}^{i\varphi}) d\varphi$$

que es la conocida *fórmula de Poisson*, que suministra una función armónica en $|P| < R$, continua en $|P| \le R$, que vale $g(\mathrm{Re}^{i\varphi}) = g(t)$ en el contorno y que, como vimos, es única.
De (1.47) y (1.49) sigue la relación que vincula al *núcleo de Poisson* con el *núcleo del potencial de doble hoja*: $\frac{1}{2R}(1 + \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\Phi - \varphi)}) = \frac{\partial}{\partial n_\varphi} \log \frac{1}{|P - Q_\varphi|}$.

K. EL PROBLEMA INTERIOR DE DIRICHLET PARA J UNA CURVA DE JORDAN CERRADA ARBITRARIA. Vale el siguiente resultado,
TEOREMA 3. Sea J una curva de Jordan y D sea su dominio interior. Sea g una función continua definida sobre el contorno $\partial D = J$. Entonces existe una y sólo una función armónica en D, continua en $\overline{D}$, que coincide con g sobre J. •
La demostración de este teorema se deja al lector. Esta se basa en el Teorema 1 y en dos conocidas *propiedades de las funciones armónicas*:
1) las transformaciones conformes llevan funciones armónicas en funciones armónicas,
2) dado un punto $w \in D$ existe una función $F(z)$, holomorfa e inyectiva en $\{|z| < 1\}$, con rango D, tal que $F(0) = w$. Esta función puede ser extendida continuamente a $K := \{|z| \le 1\}$. La extensión $\widetilde{F}$ define un homeomorfismo entre K y $\overline{D}$ tal que $\widetilde{F} : \{|z| = 1\} \to J$ en forma bicontinua.

CAPÍTULO 2
EL PROBLEMA DE DIRICHLET PARA OPERADORES ELÍPTICOS CON COEFICIENTES EN $C^{0,\lambda}$.

Enunciaremos a continuación a algunos resultados relacionados con el problema de Dirichlet en R^2 para operadores diferenciales de segundo orden elípticos. Las proposiciones están demostradas en la referencia [B] para operadores en R^n, $n \geq 2$.

A. En un recinto de Jordan $D (\subset R^2)$ consideremos operadores diferenciales de la forma:

$$L(u) := \sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^{2} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u, \tag{2.1}$$

donde $x = (x_1, x_2)$. Supondremos que *para cierto* $\lambda \in (0,1)$, $a_{i,j}, b_j, c \in C^{0,\lambda}(D)$ y que las funciones consideradas son *reales*.

Con $C^{k,\lambda}(D)$, k entero no negativo, $\lambda \in (0,1]$, *designamos* al espacio de Banach de las funciones k veces diferenciables cuyas derivadas k-ésimas satisfacen una condición de Hölder de orden λ, munido de la norma:

$$\|f\|_{k,\lambda} = \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_\infty + \ldots + \sum_{h \leq k} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_1^h \partial x_2^{k-h}} \right\|_\infty + \sum \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_1^h \partial x_2^{k-h}} \right\|_{0,\lambda}, \tag{2.2}$$

donde $\|g\|_{0,\lambda} := \inf \left\{ M : \dfrac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\lambda} < M,\ x \neq y,\ x, y \in D \right\}$.

Estos espacios tienen la propiedad que la identidad al aplicar $C^{k,\lambda}(D)$ en $C^{k-1,\lambda}(D)$, $k > 0$, define un operador *completamente continuo*.

Supondremos además que la siguiente *condición de elipticidad* es satisfecha por L: para todo $x_0 \in D$ existe una constante $\beta(x_0) > 0$ y un entorno U de x_0 tal que para todo $x \in U$ vale

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j}(x) c_i c_j \geq \beta(x_0) \left(\sum_{i=1}^{2} |c_i|^2 \right). \tag{2.3}$$

Nos *limitaremos* al caso en que exista un $\beta > 0$ tal que $\beta(x_0) \geq \beta$ para todo $x_0 \in D$.

Finalmente supondremos que el contorno de D, ∂D, es de tipo $C^{2,\lambda}$. Esto significa que para todo $x_0 \in \partial D$ existe un entorno U de x_0 y existe una aplicación $z_1 = z_1(x_1, x_2)$, $z_2 = z_2(x_1, x_2)$, que define un *homeomorfismo* $C^{2,\lambda}$ de U sobre un entorno V de 0 del plano $z = (z_1, z_2)$ de tal forma que $U \cap \partial D$ se corresponde con $V \cap \{z_2 = 0\}$, $U \cap D$ con $V \cap \{z_2 > 0\}$. El *homeomorfismo se dice* $C^{2,\lambda}$ cuando tanto $z=z(x)$ como $x=x(z)$ vienen dadas por funciones $C^{2,\lambda}$ en los entornos de correspondencia.

Esto equivale a decir que en x_0 como centro puede ubicarse un sistema ortogonal de coordenadas (y_1, y_2) respecto al cual en un entorno de dicho punto: $y_2 = \alpha(y_1)$, $\alpha \in C^{2,\lambda}$, define al contorno ∂D y tal que los puntos en D de ese entorno satisfacen

$y_2 > \alpha(y_1)$.

Dada $\phi(x)$, $x \in \partial D$, diremos que *pertenece a* $C^{2,\lambda}(\partial D)$ si para cada punto $x_0 \in \partial D$ existe un entorno U de x_0 tal que en su homólogo V se verifica:

$$\phi_V(z) := \phi(x(z)) \in C^{2,\lambda}(V \cap \{z_2 = 0\}).$$

Cubriendo al ∂D con un número finito de entornos U_i definimos $\|\phi\|_{2,\lambda}$ como la suma de las normas $C^{2,\lambda}(V_i \cap \{z_2 = 0\})$ de las ϕ_{V_i}. Cubrimientos distintos dan lugar a *normas equivalentes*.

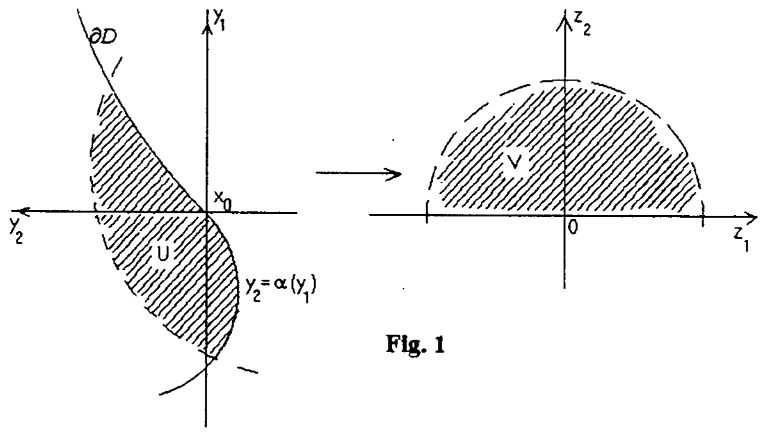


Fig. 1

Al espacio de los pares (f,ϕ), $f \in C^{0,\lambda}(D)$, $\phi \in C^{2,\lambda}(\partial D)$ lo *denotaremos*:

$$P^\lambda = P^\lambda(D) := C^{0,\lambda}(D) \times C^{2,\lambda}(\partial D).$$

Se lo considerará munido de la norma:

(2.4) $$\|(f,\phi)\|_\lambda := \|f\|_{0,\lambda} + \|\phi\|_{2,\lambda}.$$

P^λ es un *espacio de Banach*.

B. Observemos que si $u \in C^{2,\lambda}(D)$ entonces puede extenderse continuamente a $\overline{D}$ y la extensión -que denotaremos con la misma letra u- verifica en el contorno:

$$u|_{\partial D} \in C^{2,\lambda}(\partial D), \ \left\|u|_{\partial D}\right\|_{2,\lambda} \le C\,\|u\|_{2,\lambda}.$$

Definimos ahora un operador $\widetilde{L}$ sobre $C^{2,\lambda}(D)$:

(2.5) $$\widetilde{L}(u) := \left(Lu, u|_{\partial D}\right).$$

$\widetilde{L} : C^{2,\lambda}(D) \to P^\lambda(D)$ es un operador *continuo*.

C. Vale la siguiente *desigualdad fundamental* para toda $u \in C^{2,\lambda}(D)$:

(2.6) $$\|u\|_{2,\lambda} \le C\left\{ \|Lu\|_{0,\lambda} + \left\|u|_{\partial D}\right\|_{2,\lambda} + \|u\|_{1,\lambda} \right\}.$$

Sea $N = \{u \in C^{2,\lambda} : Lu = 0, u|_{\partial D} = 0\}$. Entonces dim $N < \infty$ y si N' es un subespacio de $C^{2,\lambda}$ suplemento topológico de N, es decir, $C^{2,\lambda}(D) = N \oplus N'$, entonces en N' se verifica la siguiente desigualdad:

(2.7) $$\|u\|_{2,\lambda} \leq C'\left\{\| Lu\|_{0,\lambda} + \left\| u|_{\partial D}\right\|_{2,\lambda}\right\} = C'\,\|\widetilde{L}u\|_{\lambda}.$$

D. **TEOREMA 1.** El rango de $\widetilde{L}$ es cerrado en P^{λ} y tiene codimensión finita igual a dim N. Si el coeficiente $c(x)$ del operador $\widetilde{L}$ es no positivo entonces dim N=0 y el rango de $\widetilde{L}$ coincide con P^{λ}.•

E. **PRINCIPIO DE MÁXIMO.** Sea $w \in C^{2,\lambda}$, $w \in C(\overline{D})$. Si Lw=0 y $c(x) \leq 0$ entonces

(2.8) $$|w| \leq \max_{\partial D} |w|.•$$

F. **TEOREMA 2.** El problema

(2.9) $$\begin{cases} Lu = f, & f \in C^{0,\lambda}(D), \\ u|_{\partial D} = \phi, & \phi \in C^{2,\lambda}(\partial D), \end{cases}$$

tiene solución única en $C^{2,\lambda}$ si $c(x) \leq 0$ (cfr. T. 1).•

El Teorema de la transformación inversa de Banach afirma que el operador $\widetilde{L}^{-1} : P^{\lambda} \to C^{2,\lambda}$ es acotado, es decir, la solución *u* es *continua en los datos* (f,ϕ).

G. **TEOREMA 3.** El problema

(2.10) $$\begin{cases} Lu = f, & f \in C^{0,\lambda}(D), \\ u|_{\partial D} = \phi, & \phi \in C(\partial D), \end{cases}$$

tiene una y sólo una solución $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$. Sobre todo compacto $K \subset D$, $u \in C^{2,\lambda}(K)$ y vale

(2.11) $$\left\| u|_K \right\|_{2,\lambda} \leq \frac{M}{(dist(K,\partial D))^{2+\lambda}}\left[\|Lu\|_{0,\lambda} + \|u\|_{\infty}\right],$$

donde $M = M(L,D)$.•

H. Son interesantes y útiles los siguientes resultados. Si $y = \alpha(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in C^2$ en un entorno E de x=0, entonces existe un número $r > 0$ y un entorno W de $0, W \subset E$, tal que los segmentos de longitud $2r$ con centros $(x,\alpha(x))$ dispuestos según las normales a la curva Γ definida por α y con $x \in W$, *no se intersecan dos a dos* y su unión define un entorno U de (0,0), ([B], pgs. 47-51). También vale que la distancia a Γ de un punto en el segmento con centro $(x,\alpha(x))$ se *realiza* en ese centro.

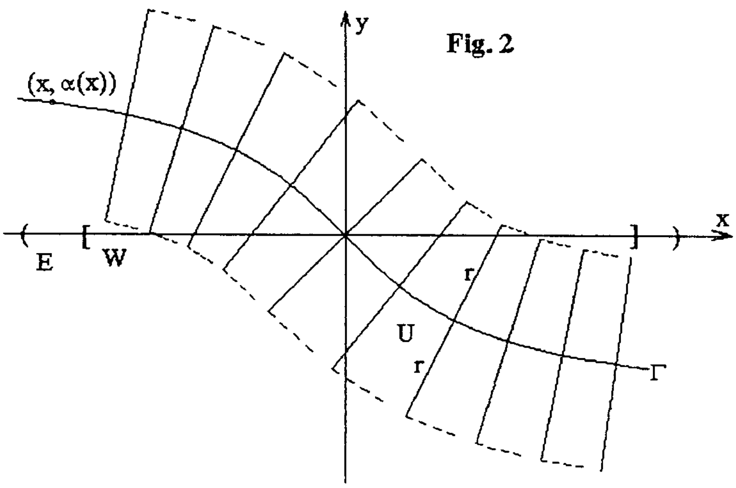


Fig. 2

TEOREMA 4. Sea $L=\Delta$ y sea u tal que $L(u)$=0 (*i.e.*, u armónica) en $U \cap \{(x,y): y>\alpha(x)\}$. Si u es prolongable continuamente hasta Γ donde toma el valor cero entonces es posible extender con continuidad hasta el borde, en un entorno V de (0,0) contenido en U, a las derivadas $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$. Más aún, vale que grad u satisface una condición de Lipschitz en $V \cap \{y>\alpha(x)\}$, (cf. [K2], p.508; [B], p.41).•

I. COMENTARIO A LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. Sea $\tilde{l}$ un operador definido por (2.5) y tal que $c(x)$ *no* es no positivo. Veamos que también ahora si $\tilde{l}$ tiene rango cerrado entonces *codimensión del rango de* $\tilde{l}$ =*dim* $N(\tilde{l}\,)<\infty$ donde $N(\tilde{l}\,)$ es el espacio nulo de $\tilde{l}$. Sea k un número tal que $c(x)-k\le 0$ y definamos $\tilde{L}$ por

(2.12) $$\tilde{L}u=\tilde{l}\ -Ku,\ Ku=(ku,0).$$

K es un operador compacto de $C^{2,\lambda}(D)$ en P^{λ} (cf. A). Por tanto $I+\tilde{L}^{-1}K$ es un operador de Fredholm de índice cero. Entonces, de $\tilde{L}(I+\tilde{L}^{-1})=\tilde{l}$ sigue que

dim $N(\tilde{l}\,)$=*dim* (espacio nulo de $\tilde{l}$)=*dim* (espacio nulo del adjunto de $\tilde{l}$)=
=*codimensión* (rango de $\tilde{l}$).

J. COMENTARIOS A LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2. *i*) Sea U el operador

(2.13) $$Uf:=h(x)*f,\ h(x)=\log(1/|x|).$$

Si f tiene soporte en $\{|x|<1\}$ y pertenece a $C^{0,\lambda}$ entonces se tiene:

(2.14) $$\|Uf\|_{2,\lambda}\le C\,\|f\|_{0,\lambda},$$

donde C es independiente de f y la primera norma se calcula también en el círculo unitario. Las derivadas de Uf verifican:

(2.15) $$\frac{\partial(Uf)}{\partial x_i}=\int\frac{\partial h}{\partial x_i}(x-y)\,f(y)\,dy,\ i=1,2$$

(2.16) $$\frac{\partial^2(Uf)}{\partial x_i^2}(x)=(v.p.\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}*f)(x)+\pi f(x)$$

(2.17) $$\frac{\partial^2(Uf)}{\partial x_2\partial x_1}(x)=\frac{\partial^2(Uf)}{\partial x_1\partial x_2}(x)=(v.p.\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\partial x_2}*f)(x)$$

La función en (2.15) es continua y acotada en el círculo unitario pues $\partial h/\partial x_i$ es localmente sumable. Por *definición de valor principal*:

$$(v.p.\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2}*f)(x):=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\partial x_2}(x-y)\,f(y)\,dy.$$

Luego, $\Delta(Uf)=2\pi f$ pues $h/2\pi$ es la *solución fundamental* para el laplaciano:

(2.18) $$\Delta(h/2\pi)=\delta.$$

ii) Si la función f definida en $\{|x|<1\}\cap\{x_2>0\}$ pertenece a $C^{0,\lambda}$, y si $\tilde{f}$ designa una extensión a $\{|x|<1\}$ en $C^{0,\lambda}$, por ejemplo, su extensión par respecto x_2, ($\tilde{f}(x_1,-x_2):=f(x_1,x_2)$ si x_2>0), entonces

(2.19) $$Vf:=h*\tilde{f}$$

es una función en $C^{2,\lambda}(\{|x|<1\}\cap\{x_2>0\})$ y verifica allí:

(2.20) $$\|Vf\|_{2,\lambda}\leq C\|f\|_{0,\lambda}.$$

iii) Si $\phi(t)\in C^{2,\lambda}(R)$ y tiene soporte en $\{|t|<1\}$ entonces el *operador de Poisson* para el semiplano:

(2.21) $$W\phi(x_1,x_2):=\frac{1}{\pi}\int\frac{x_2}{x_2^2+|x_1-t|^2}\phi(t)dt$$

verifica

(2.22) $$\|Wf\|_{2,\lambda}\leq C\|\phi\|_{2,\lambda},$$

donde la primera norma se calcula en $\{|x|<1\}\cap\{x_2>0\}$.

iv) Los párrafos *i*), *ii*), *iii*), suministran resultados importantes para resolver localmente el problema de hallar $\tilde{L}^{-1}$cuando $L=\Delta$. En efecto, para esto es necesario conocer el comportamiento del siguiente operador sobre $(f,\phi)\in C^{0,\lambda}\times C^{2,\lambda}$;

(2.22) $$c_1\int_{R\times R}\tilde{f}(z)h(x-z)\,dz\;+\;c_2\int_R\frac{x_2\,\phi(y)}{x_2^2+|x_1-y|^2}dy,$$

donde c_1 y c_2 son constantes adecuadas.

Esto permite a su vez encontrar $\tilde{L}^{-1}$, localmente y en general. Luego se halla el inverso global de $\tilde{L}$ probándose así el Teorema 2.

CAPITULO 3
PROPIEDADES DEL NÚCLEO DE GREEN PARA EL PROBLEMA DE DIRICHLET EN UNA REGIÓN DE JORDAN.

Sea D una región acotada simplemente conexa de R^2 cuyo contorno, ∂D, sea una curva cerrada de Jordan J. A un dominio de este tipo lo denominaremos *región de Jordan* pues es la región interior a una curva de Jordan que es su frontera. Llamaremos a D *región perimetrizable* si J es rectificable. $|D|$ y $|J|$ denotarán al *área* de D y a la *longitud* de J, respectivamente.

Nos proponemos estudiar algunas propiedades de los autovalores y de las autofunciones del *problema de Dirichlet*:

(3.1) $$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{en } D, \quad u = 0 \text{ en } \partial D.$$

Por *solución* de este problema entenderemos una función continua en $\overline{D}$, dos veces continuamente diferenciable en D que satisface (3.1) en todo punto de $\overline{D}$. El problema de Dirichlet se reduce a un problema de autovalores de una ecuación integral si se introduce la función (núcleo) de Green del laplaciano,(cf. *viii*) del siguiente teorema 3.1). La *función de Green* $G(p,q)$ se construye utilizando la solución elemental (fundamental) del operador Δ (cf. apéndices F y R) y la solución única del problema de Dirichlet para región de Jordan y dato continuo, (cf. Cap. 1, T. 1.3).

DEFINICION 1. Sean $p \in D$, $q \in \overline{D}$, $p \neq q$.

(3.2) $$G(p,q) := s(p,q) - H(p,q),$$

donde $s(p,q) := \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|p-q|}$ y $H(p,.)$ es la función armónica en D que coincide con $s(p,.)$ en ∂D: $\Delta_q H(p,q) = 0$ para todo $q \in D$, $H(p,r) = s(p,r)$ para todo $r \in \partial D$.•

Es decir, $G(p,q)$ está definida, por el momento, en $D \times \overline{D}$. Si $p_n \to p$ en D entonces $H(p_n,q)$ *converge uniformemente* a $H(p,q)$, $q \in \overline{D}$. Una consecuencia de esto es que $H(p,q)$ es continua en $D \times \overline{D}$. Por tanto $G(p,q)$ es *continua* en $(p,q) \in D \times \overline{D}$ *siempre que* $p \neq q$. En particular, $G(p,q)$ es medible en $D \times \overline{D}$. Convendremos en definir $G(p,p) = +\infty$ si $p \in D$.

A. El próximo teorema enuncia propiedades del núcleo de Green que no son necesariamente exclusivas de las regiones de Jordan.

TEOREMA 1. *i*) Si $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, $\phi \in L^\infty(D)$ y

(3.3) $$\Delta u = \phi \text{ en } D, \qquad u = 0 \text{ en } \partial D,$$

entonces

(3.4) $$u(p) = -\int_D G(p,q)\phi(q)\,dq, \quad p \in D.$$

ii) Si $p,q \in D$, $p \neq q$, entonces

(3.5) $$G(p,q) = G(q,p),$$

iii) Sea $\phi \in L^\infty(D)$ y $p \in \overline{D}$. Si $u(p) := \int_D G(p,q)\phi(q)\,dq$ entonces $u \in C(\overline{D})$, u=0 en ∂D y para i=1,2, (3.6) $$\frac{\partial u}{\partial p_i} = \int_D \frac{\partial G}{\partial p_i}(p,q)\phi(q)dq \in C(D),$$

iv) Sea $\phi \in C^1(D) \cap L^\infty(D)$. Entonces la función *u*(*p*) nula en el borde definida por (3.4) en $p \in D$ pertenece a $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ y resuelve el problema de Dirichlet (3.3).

v) son equivalentes las siguientes proposiciones ($\lambda \in \mathbf{C}$):

a) $\phi \in L^2(D)$, $\phi(p) = \lambda \int_D G(p,q)\phi(q)dq$,

b) $\phi \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$ en D, $\phi = 0$ en ∂D.

vi) Si M es el diámetro de D entonces

$$0 \leq G(p,q) \leq \frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{|p-q|},\ (p,q) \in D \times \overline{D},$$

vii) $$\int_{\overline{D}} G^2(p,q)dq \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\{|q|<M\}} \log^2\left(\frac{M}{|q|}\right)dq = C^2 < \infty,\ p \in D,$$

viii) $$\gamma^2 = \iint_{D\times\overline{D}} G^2(p,q)\,dp\,dq \leq C^2|D| < \infty. \blacklozenge$$

[Obsérvese que el operador *G*, $(G\phi)(p) = \int_D G(p,q)\phi(q)dq$, es, según *i*) e *iv*), el inverso del operador diferencial $-\Delta$. En relación con *iv*) véanse el Cap.2 y los Apéndices F y G. Las demostraciones de los cuatro primeros puntos se sucederán en lo que resta del capítulo. A continuación mostraremos que *i*)-*iv*)$\Rightarrow$ *v*). Conviene antes demostrar las propiedades *vi*)-*viii*) de *G*.]

DEMOSTRACION DE *vi*)-*viii*). La nonegatividad de *G* sigue del hecho que *G* es nonegativa en el contorno de la región $D \backslash S_\varepsilon(p)$ [(*)] – donde ε es suficientemente pequeño – y es armónica en su interior. El principio de máximo aplicado a la función armónica $-H(p,.)$ da lugar a la desigualdad uniforme:

(3.7) $$-H(p,q) \leq \frac{1}{2\pi}\max_{r\in\partial D}\log|p-r| \leq \frac{1}{2\pi}\log M$$

de la cual sigue *vi*).

Obviamente, *vi*) $\Rightarrow$ *vii*) $\Rightarrow$ *viii*).

DEMOSTRACION DE *i*)$-$*iv*)$\Rightarrow$*v*). Supongamos que ϕ verifica a). De *vii*) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta $\phi \in L^\infty(D)$. Luego, de *iii*) sigue $\phi \in C^1(D)$. Finalmente, de *iv*) se deduce b). Recíprocamente, si vale b) podemos aplicar *i*) y obtenemos a), QED.

B. DEMOSTRACION DE *i*) e *ii*). Diremos que un dominio *D* es *estándar regular* ($\in$ER) si es un recinto de Jordan cuyo contorno es una curva C^1 con tangente no nula en todo punto. Los dominios estándar regulares son *normales* (para el teorema de Gauss) pues valen en ellos los teoremas de Gauss, Green y Stokes. Vale que si a un dominio estándar *D* se le quita un número finito de círculos contenidos en *D* el dominio multiplemente conexo que resta es normal.

(*) $S_\varepsilon(p)$ es la esfera cerrada de centro p y radio ε cuyo contorno denotaremos $\Sigma_\varepsilon(p)$

Veamos como se prueban *i*) e *ii*) si $D \in$ ER. Llamaremos $D_\eta := D \setminus S_\eta(p)$. Entonces

$$\int_D G(p,q)\phi(q)dq = \lim_{\eta\to 0} \int_{D_\eta} \big(G(p,q)\Delta u(q) - u(q)\Delta_q G(p,q)\big)dq.$$

Luego si $r = |p-q|$, esto es igual a:

(3.8)
$$\lim_{\eta\to 0} \int_{D_\eta} (G(p,q)\Delta u(q) - u(q)\Delta_q G(p,q))dq =$$

$$= \int_{\partial D} \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_q - \lim_{\eta\to 0} \int_{r=\eta} \left(G\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial G}{\partial r} \right) d\sigma_q =$$

$$= 0 - \int_J u\frac{\partial G}{\partial n} d\sigma_q + 0 + \lim_{\eta\to 0} \int_{r=\eta} u\frac{\partial G}{\partial r} d\sigma_q = -\int_J u\frac{\partial G}{\partial n} d\sigma_q - \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{2\pi\eta} \int_{r=\eta} u(q) d\sigma_q =$$

$$= -\int_J u\frac{\partial G}{\partial n} d\sigma_q - u(p) = 0 - u(p) = -u(p).$$

Esto prueba *i*). Veamos ahora *ii*). Para $p,q \in D$, $p \neq q$, sea $S = S_\eta(p) \cup S_\eta(q) \subset D$, donde las esferas $S_\eta(p), S_\eta(q)$, no tienen puntos en común. Sea $D_\eta = D \setminus S$. Aplicando el teorema de Green a las funciones

$$u(s) = G(p,s),\ v(s) = G(q,s)$$

armónicas en D_η, obtenemos:

$$0 = \int_{D_\eta} (u\Delta v - v\Delta u)ds = \int_{\partial D_\eta} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma =$$

$$= \int_J \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \int_{|s-q|=r=\eta} \left(v\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial v}{\partial r} \right) d\sigma_s + \int_{|s-p|=r=\eta} \left(v\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial v}{\partial r} \right) d\sigma_s.$$

Luego,

(3.9)
$$0 = \int_J \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \lim_{\eta\to 0} \left(-\int_{|s-q|=\eta} u\frac{\partial v}{\partial r} d\sigma_s + \int_{|s-p|=\eta} v\frac{\partial u}{\partial r} d\sigma_s \right) =$$

$$= \int_J \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + u(q) - v(p) = 0 + G(p,q) - G(q,p).$$

C. En esta sección veremos algunos lemas necesarios para continuar con la demostración de *i*) e *ii*), (cf. [K2]). Aquí *u designará a una función armónica* (real) *no constante* en *D*: *u=u(p)*, $p = (x,y)$. $X(u)$ *denotará* al conjunto de puntos de *D* donde se *anula* el gradiente de *u*.

Por un *arco de curva* C^n, *n* entero positivo, entenderemos una curva γ que admite una representación $\underline{f}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $0 < t < 1$, $x_i(t) \in C^n(0,1)$, tal que para todo $t \in (0,1)$, $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \neq (0,0)$ y $\underline{f}$ es un homeomorfismo (C^0) de $(0,1)$ sobre $\underline{f}(0,1)$. Es decir, γ es un *arco de Jordan* C^n. De un conjunto conexo compacto Γ de R^2 se dirá que es una *curva* C^n si para todo *z*=$(x,y) \in \Gamma$ existe un entorno U_z tal que $\Gamma \cap U_z$ es un arco de curva C^n.

Luego, Γ es una curva cerrada de Jordan. La curva Γ admite un versor normal (n_1, n_2) en cada uno de sus puntos. Usando la sección H del capítulo anterior se deduce que para todo $z=(x,y) \in \Gamma$ existe un entorno W_z de z en correspondencia homeomórfica C^{n-1} con un entorno $V=\{ (t,s) \in (a,b) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \}$ dada por la función:

$$(t,s) \to (x_1(t) + sn_1(t), x_2(t) + sn_2(t)).$$

LEMA 1. El conjunto $u(X(u))$ es numerable.•

DEMOSTRACION. Sea $p \in X(u)$. Podemos suponer que $p=(0,0)$. Luego, $\nabla u(0,0) = 0$. La función $F(x,y)=u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)$ es analítica real en un entorno $V \times V$ $(\subset C \times C)$ del origen. El teorema de preparación de Weierstrass (cf. Apéndice W) afirma entonces que F, en un entorno $W \times W \subset V \times V$, se anula solamente sobre el gráfico de un número finito de funciones continuas $\tau_j(x)$, nulas en x=0, y posiblemente también sobre un entorno de y=0 en el plano de las y.

Sea $f(x) = u(x, \tau_j(x))$ para x variando en un semientorno real de 0: $0 \le x < \varepsilon$. Se tiene $f'(x) = u_x + u_y \tau_j'(x) = 0$ en $0 < x < \varepsilon$. En consecuencia, $u(x, \tau_j(x)) = u(0,0)$ en aquel semientorno. Entonces, en un entorno real de $p \in X(u)$, u es constante donde $\nabla u = 0$. O sea, u es localmente constante sobre $X(u)$, QED.

LEMA 2. Los conjuntos equipotenciales $J_\mu = \{p = (x,y) : u(x,y) = \mu\}$, $\mu \notin u(X(u))$, si no son vacíos, localment son curvas C^m que poseen vector tangente no nulo en todo punto, cualquiera sea $m > 0$.•

DEMOSTRACION. En J_μ, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| > 0$. Entonces, localmente se tiene $y = y(x) \in C^\infty$, o bien, $x = x(y) \in C^\infty$, QED.

Sea ahora $u(q)$ una función armónica no negativa en $D \setminus \{p\}$, nula en ∂D, que tiende a $+\infty$ cuando $q \to p \in D$. Por ejemplo, $u(q) = G(p,q)$. *Definamos* para $\varepsilon \notin u(X(u))$,

$$D_\varepsilon = \{q : u(q) > \varepsilon\},\ C_\varepsilon = \{q : 0 < u(q) < \varepsilon\},\ J_\varepsilon = \{q : u(q) = \varepsilon\},\ \varepsilon > 0.$$

Del principio de máximo se deduce que $\partial D_\varepsilon = J_\varepsilon \cup \{p\}$, $\partial C_\varepsilon = J_\varepsilon \cup J$, $(J = \partial D)$.

LEMA 3. D_ε y C_ε son dominios. J_ε es una curva de Jordan cerrada C^m con tangente no nula en todo punto (por tanto rectificable).•

DEMOSTRACION. r y q se dicen *conectados* en D si existe un arco de Jordan contenido en D con extremos r y q (arquiconexión). D_ε es conexo: en efecto, si no lo fuera existiría $p_0 \in D_\varepsilon$ no conectado en D_ε a p. Sea

$$T_0 = \{ q \in D_\varepsilon : q \textit{ conectado en } D_\varepsilon \textit{ a } p_0 \}.$$

Entonces, T_0 es abierto y $\partial T_0 \subseteq J_\varepsilon$. Luego, $u = \varepsilon$ en T_0, lo cual no es posible pues contradice la definición de D_ε.

Sea $C' = R^2 \setminus \overline{D_\varepsilon} = C_\varepsilon \cup \{R^2 \setminus D\}$. C' es un dominio: en efecto, para ver esto es suficiente mostrar que todo punto de C_ε se puede conectar con un punto de J. Sea $p_1 \in C_\varepsilon$ y

$S_0 = \{q \in C_\varepsilon : q \textit{ está conectado a } p_1 \textit{ en } C_\varepsilon\}$. Entonces $\partial S_0 \subseteq \partial C_\varepsilon \subseteq J_\varepsilon \bigcup J$. Si $\partial S_0 \subseteq J_\varepsilon$ entonces llegamos a una contradicción como antes. Luego $\partial S_0 \bigcap J \neq \varnothing$, y p_1 está conectado a *J*. El conjunto compacto J_ε, contenido en el dominio interior a *J*, admite exactamente dos dominios complementarios: D_ε y *C'*. Como es localmente una curva C^2 con tangente no nula ($\varepsilon \notin X(u)$) tiene normal en cada punto $r \in J_\varepsilon$, la cual posee la dirección del gradiente de *u*. Luego, hay dos pequeños segmentos de extremo *r*, uno contenido en D_ε y otro en C_ε, salvo por ese extremo. El teorema recíproco de Jordan asegura entonces que J_ε es una curva de Jordan.
C_ε está contenido en el interior de *J* y en el exterior de J_ε, ambas curvas de Jordan. En consecuencia, C_ε es un conjunto abierto conexo, QED.

D. CONTINUACION DE LA DEMOSTRACION DE *ii*). Usamos la misma notación que en B y con $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \notin u(X(u))$, $\varepsilon < u(q)$. Si $J_\varepsilon = \{u(s) = \varepsilon\}$ entonces $q \in D_\varepsilon$. Reemplazando en la deducción de (3.9) *D* por D_ε, obtenemos:

(3.10)
$$v(p) - u(q) = \int_{J_\varepsilon} -\frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma_s + \varepsilon \int_{J_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma_s .$$

Si en (3.8) hubiéramos usado $u \equiv 1$ y D_ε en lugar de *D*, obtendríamos:

(3.11)
$$\tilde{p} \in D_\varepsilon \Rightarrow -\int_{J_\varepsilon} \frac{\partial G(\tilde{p}, s)}{\partial n} d\sigma_s = 1.$$

Como $\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0$ en J_ε, *n* normal exterior, resulta, por el teorema del valor medio:

(3.12)
$$v(p) - u(q) = -\int_{J_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma_s - \varepsilon = \int_{J_\varepsilon} v \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_s - \varepsilon = v(s_\varepsilon) \int_{J_\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\sigma_s - \varepsilon ,$$

para cierto punto $s_\varepsilon \in J_\varepsilon$. Luego, $v(p) - u(q) = v(s_\varepsilon) - \varepsilon$. Para $\varepsilon \to 0$, $v(s_\varepsilon) \to 0$ pues $J_\varepsilon \to J$, y la tesis sigue, QED.

E. CONTINUACION DE LA DEMOSTRACION DE *i*). Sea $D'_\varepsilon = D_\varepsilon \backslash S_\varepsilon(p)$, $r = |p - q|$. Como en (3.8) usaremos que $\int_{r=\eta} u \frac{\partial G}{\partial r} d\sigma_q = -\frac{1}{2\pi\eta} \int_{r=\eta} u(q) d\sigma_q \to -u(q)$ para $r \to 0$. Luego,

$$\int_D G(p,q)\, \phi(q)\, dq = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D'_\varepsilon} G(p,q)\, \Delta u(q)\, dq = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{J_\varepsilon} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_q +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r=\varepsilon} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_q = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{J_\varepsilon} G(p,q) \frac{\partial u}{\partial n}(q)\, d\sigma_q + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r=\varepsilon} u(q) \frac{\partial G}{\partial r}(p,q)\, d\sigma_q =$$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{J_\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(q)\, d\sigma_q - u(p)$. De la fórmula de Green y la hipótesis obtenemos,

$\int_D G(p,q)\, \phi(q)\, dq = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \iint_{D_\varepsilon} \phi \, dx\, dy - u(p) = -u(p)$, QED.

F. Definimos $G(p_0,q) := \lim_{p \to p_0} G(p,q)$ para $p,q \in D$, $p_0 \in \partial D$. Como ese limite existe y es igual a $\lim_{p \to p_0} G(q,p) = G(q,p_0) = 0$, resulta: $G(p_0,q) = 0$ para todo $p_0 \in \partial D$, $q \in D$.

DEMOSTRACION DE *iii*). Sean $p,r \in \overline{D}$ y $|p-r| < \delta$. Por definición:

$$u(p) = \int_{D \cap S_{2\delta}(r)} G(p,q)\,\phi(q)\,dq + \int_{D - S_{2\delta}(r)} G(p,q)\,\phi(q)\,dq =: I_1(p) + I_2(p).$$

Como en $D \backslash S_{2\delta}(r)$ $G(p,q) \leq \frac{1}{2\pi}\log(M/\delta)$, resulta:

(3.13) $\qquad I_2(r) = \lim_{p \to r} I_2(p).$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, si δ es suficientemente pequeño,

(3.14) $$|I_1(p)| \leq \frac{\|\phi\|_\infty}{2\pi} \int_{\{|x|<3\delta\}} \log\frac{M}{|x|}\,dx < \varepsilon.$$

De (3.13) y (3.14) sigue entonces que $u(r) = \lim_{p \to r} u(p)$ y $u \in C(\overline{D})$.

En el caso que $r \in \partial D$: $u(r) = \int_D G(r,q)\,\phi(q)\,dq = 0$.

La demostración del punto *iii*) llega a su fin con una aplicación del siguiente lema.

LEMA 4. Sea $\phi \in L^\infty(D)$, $H(p,q) = s(p,q) - G(p,q)$ (cf. (3.1)) y

(3.15) $$F(x) := \int_D H(x,y)\,\phi(y)\,dy.$$

Entonces, $F(x) \in C^\infty(D)$ y en D vale,

(3.16) $$\frac{\partial^{i+j} F}{\partial x_1^i \partial x_2^j}(x_1,x_2) = \iint_D \frac{\partial^{i+j} H}{\partial x_1^i \partial x_2^j}((x_1,x_2),(y_1,y_2))\,\phi(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2,$$

(3.17) $$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \Delta_x F = 0. \blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Sabemos que la función $H(p,q)$ es continua en $(p,q) \in D \times \overline{D}$ y simétrica en $D \times D$. Además, por ser armónica, $H(.,q) \in C^\infty(D)$ para todo $q \in D$. Si $K \subset \operatorname{int}(K') \subset K' \subset D$, K y K' compactos, entonces, para $(p,q) \in K \times D$, se tiene,

(3.18) $$\left|\frac{\partial H}{\partial p_i}(p,q)\right| \leq 2 \sup_{p \in K', q \in D} |H(p,q)| \Big/ dist(K,\partial K') = M(K,K')\sup\{|H(p,q)| : (p,q) \in K' \times D\}.$$

En efecto, esto sigue de la fórmula de Poisson para la función armónica $H(.,q)$ calculada en $p \in K$ y radio del círculo igual a $dist(K,\partial K')$. La validez de (3.16) para las derivadas de primer orden se obtiene ahora derivando bajo el signo integral. Esta operación es justificable por el lema 1 del apéndice F. Con derivadas de orden superior se procede en forma semejante o bien iterando la desigualdad,

$$\left|\frac{\partial H}{\partial p_i}(p,q)\right| \leq M(K,K')\sup\{|H(p,q)| : (p,q) \in K' \times D\}.$$

(3.17) sigue inmediatamente de (3.16), QED.

DEMOSTRACION DE *iv*). La función

(3.19) $$v(p) = -\int_D s(p,q)\phi(q)dq = \frac{1}{2\pi}\int_D \phi(q)\log|p-q|dq,$$

pertenece a $C^2(D)\cap C^1(R^2)$ y es solución de $\Delta v = \phi$ en D, (cf. T. 1 y 2 del Apéndice F). Con la función $w \in C^\infty(D)\cap C(\overline{D})$ tal que $\Delta w = 0$ en D, $w = -v$ en ∂D, (cf. K del Cap.1), definimos $u = v + w$. Entonces u resuelve el problema de Dirichlet, (cf. (3.3)).
De *i*) del Teorema 3.1 sigue que es de la forma: $u(p) = -\int_D G(p,q)\phi(q)dq$, $p \in D$, QED.

G. Diremos que ϕ es $\lambda-$*Hölder continua* en D si para todo compacto $K \subset D$, existe una constante M tal que

(3.20) $|\phi(x)-\phi(y)| \leq M.|x-y|^\lambda$, para todo $x, y \in K$.

El teorema precedente tiene el siguiente importante

COROLARIO. Sea ϕ acotada y $\lambda-$Hölder continua en D, $0<\lambda<1$. Entonces la función

(3.21) $$u(p)=(G\phi)(p) := \int_D G(p,q)\,\phi(q)\,dq$$

tiene derivadas segundas $\lambda-$Hölder continuas.♦

DEMOSTRACION. Recurriendo a una partición de la unidad en D con dos funciones, al teorema 3 del apéndice F y al lema 3.4, deducimos que $u \in C^2(D)$ y que $\Delta u = \phi$ en el sentido de las distribuciones. Luego, $\Delta u = \phi$ puntualmente.
Sean D_ε y J_ε como en el lema 3.3. El problema

(3.22) $$\Delta v = \phi \text{ en } D_\varepsilon, v = u|_{J_\varepsilon} \text{ en } J_\varepsilon,$$

tiene una única solución u_ε perteneciente a $C^{2,\lambda}(D_\varepsilon)$, como se ve, por ejemplo, utilizando el Teor. 2 del Cap. 2. De lo dicho sigue que $u = u_\varepsilon$ en D_ε. Finalmente se obtiene el corolario al hacer $\varepsilon \downarrow 0$, QED.

H. AUTOVALORES Y DESARROLLO EN AUTOFUNCIONES. La equivalencia *v*) del Teorema 3.1 muestra que toda autofunción ϕ de (3.1) lo es de una ecuación integral con núcleo simétrico positivo $G(p,q) \in L^2(D\times D)$; es decir, de un operador autoadjunto G completamente continuo de tipo Hilbert-Schmidt:

(3.23) $$\lambda G\phi = \phi.$$

Más precisamente,

TEOREMA 2. Los autovalores del problema (3.1), $\Delta u + \lambda u = 0$ en D, $u = 0$ en ∂D, son positivos y pueden ordenarse en forma creciente,

(3.24) $$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots, \quad \lambda_n \to \infty.$$

Las autofunciones correspondientes $\phi_n(x)$, que suponemos normalizadas, pertenecen a $C(\overline{D})$ y pueden elegirse reales.
Ellas forman un sistema ortogonal completo y satisfacen la siguiente igualdad:

(3.25) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2} = \int_D G^2(p,q)\,dq \leq C^2 < \infty.$$♦

DEMOSTRACION. Sabemos que la ecuación $(\Delta + c)g = 0$ en D, si c es constante no positiva, admite sólo la solución trivial si exigimos que g se anule en el borde, (cf. T. 3, Ap. M o bien Teor. 2, Cap. 2). Es decir, 0 no es autovalor para el problema de Dirichlet (3.1).
Si $\lambda \neq 0$ es autovalor para nuestro problema entonces λ^{-1} lo es para el operador G, y por tanto, es positivo y de multiplicidad finita. En consecuencia, las autofunciones de $-\Delta$ pueden elegirse no sólo reales sino también ortogonales dos a dos, (cf. *v*) T. 3.1).
Si $u \in C_0^\infty(D)$ entonces $\Delta u \in C_0^\infty(D)$ y de *i*) Teorema 3.1 se deduce que el rango de G es denso en $L^2(D)$. Luego, $\lambda_n \to \infty$ y el sistema de autofunciones es completo en ese espacio.
$\dfrac{\phi_n(p)}{\lambda_n}$ es el n-ésimo coeficiente de Fourier de $G(p,.) \in L^2(D)$ respecto al sistema ortonormal $\{\phi_n\}$. Entonces, la primera igualdad en (3.25) es la identidad de Parseval para esa función, y las desigualdades no son otra cosa que *vii*) del Teorema 3.1, QED.

COROLARIO. Si $u=Gf$, $f \in L^2(D)$, entonces su desarrollo en autofunciones converge absoluta y uniformemente en D. En particular esto ocurre para funciones $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, nulas en el contorno, para las cuales $\|\Delta u\|_\infty < \infty$.♦
DEMOSTRACION. Sea f real. Entonces

(3.26) $$c_n(u) := \int \phi_n \,.\, Gf\,dq = \int f.\,G\phi_n\,dq = \frac{1}{\lambda_n}\int f.\phi_n\,dq = \frac{c_n(f)}{\lambda_n}.$$

De (3.26) sigue que la serie del desarrollo de u respecto al sistema $\{\phi_n\}$ es:

(3.27) $$u(p) = \sum c_n(u)\,\phi_n(p) = \sum c_n(f).\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n}$$

Usando (3.25) sigue que

(3.28) $$\sum_{n=M}^{N} |c_n(u)\,\phi_n(p)| \leq \left(\sum_{n=M}^{N} (\phi_n(p)/\lambda_n)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=M}^{N} (c_n(f))^2\right)^{1/2} \leq C\left(\sum_{n=M}^{N} (c_n(f))^2\right)^{1/2}.$$

Como $\left(\sum_{n=M}^{N} (c_n(f))^2\right)^{1/2} \xrightarrow[M,N\to\infty]{} 0$, (3.28) implica la convergencia absoluta y uniforme de la serie $\sum_1^\infty c_n(u)\,\phi_n(p)$, QED.

CAPITULO 4
UNA SOLUCION FUNDAMENTAL DEL OPERADOR METARMÓNICO $\Delta+\lambda$ Y LAS FUNCIONES χ-ARMÓNICAS

A. Supondremos en este capítulo que $\lambda=-\chi^2$, χ real positivo. Queremos hallar las soluciones radiales de $\Delta u+\lambda u=0$, $u(p)=\phi(\|p\|)$, (cf. Ap. R). O sea, las soluciones de

(4.1) $$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\phi}{d\rho}\right)-\chi^2\phi=0,\ \rho>0.$$

Sea $K(\chi\rho):=\phi(\rho)$. (4.1) equivale a

(4.2) $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dK}{dr}\right)-K=K''+\frac{1}{r}K'-K=0,\ r=\chi\rho>0.$$

La función de Kelvin de orden 0: $K_0(r):=\int_1^\infty\frac{e^{-rt}}{\sqrt{t^2-1}}dt$, $r>0$, es solución de (4.2).

En efecto,

(4.3) $$K_0''(r)-K_0(r)=\int_1^\infty\sqrt{t^2-1}\,e^{-rt}dt=\frac{1}{r}\int_1^\infty\frac{t\,e^{-rt}}{\sqrt{t^2-1}}dt=\frac{-K_0'(r)}{r}.$$

Otra solución de (4.2) es la siguiente función de Bessel modificada:

(4.4) $$I_0(r):=J_0(ir)=\sum_{n=0}^\infty\frac{r^{2n}}{(2^n.n!)^2}.$$

Como $K_0(r)\to\infty$ cuando $r\to0+$, K_0 e I_0 son linealmente independientes. Ambas resuelven la ecuación $(p\phi')'-q\phi=0$ con $p(r)=q(r)=r$. Luego, el wronskiano

$$W=W(I_0,K_0)=\frac{c}{p(r)}=\frac{c}{r}\neq0\quad\text{y}\quad\frac{d(K_0/I_0)}{dr}=\frac{W}{I_0^2(r)}=\frac{c}{rI_0^2(r)}.$$

Entonces, en cierto entorno U del origen está definida una función holomorfa h tal que

(4.5) $$\frac{d}{dr}\left(\frac{K_0}{I_0}\right)=\frac{c}{r}+h(r),\quad r\in U\cap R_+.$$

Sea $G:=\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Integrando (4.5) en G se obtiene

(4.6) $K_0(r)=c\,I_0(r)\log r+P(r)$, $\quad r\in U/\{0\}$,

donde $P(r)$ es un función analítica en U. Como $K_0(r)$ es solución de una ecuación diferencial con coeficientes analíticos en G, es prolongable a lo largo de cualquier arco continuo contenido en G. Esto mismo le ocurre a $I_0(r)\log r$. Por ser $P(r)$ analítica en un entorno del origen sigue de lo dicho que es prolongable a lo largo de cualquier arco en **C**. Por el teorema de monodromía $P(r)$ es una función analítica entera. Luego, (4.6) vale en G. Determinemos c. De (4.6) y (4.3) sigue que

$$c=\lim_{r\to0}r\,W=\lim_{r\downarrow0}rI_0(r)K_0'(r)=\lim_{r\downarrow0}-rI_0(r)\int_1^\infty\frac{t\,e^{-rt}}{\sqrt{t^2-1}}dt=\lim_{r\downarrow0}\int_r^\infty\frac{-t\,e^{-t}}{\sqrt{t^2-r^2}}dt=$$

$$=\lim_{r\downarrow0}\int_0^\infty\frac{-(t+r)e^{-(t+r)}}{\sqrt{t(t+2r)}}dt=-\int_0^\infty e^{-t}dt=-1.$$

DEFINICIÓN 1. $E^{\chi}(x) := -\dfrac{K_0(\chi|x|)}{2\pi}$.♦

TEOREMA 1. *i*) $K_0(r) = -I_0(r)\log r + P(r)$, $r > 0$, P analítica entera,

ii) Vale: $(\Delta - \chi^2)E^{\chi} = \delta$.♦

DEMOSTRACION. *ii*) $(\Delta + \lambda)K_0(\chi|x|)$ es una distribución T nula en $R^2\backslash\{0\}$. De *i*) se deduce que $T = -2\pi\delta +$ función localmente integrable, (cf. (12) Ap. F). En consecuencia $(\Delta + \lambda)K_0(\chi|x|) = -2\pi\delta$, QED.

Obsérvese que a diferencia de $E_0(x) = \dfrac{\log|x|}{2\pi}$, $E^{\chi}(x)$ es negativa en $R^2\backslash\{0\}$. En efecto, $K_0(\chi|x|) = \int_1^{\infty} e^{-\chi|x|t}(t^2-1)^{-1/2}dt > 0$. Por (4.6) ambas funciones son analíticas en $R^2\backslash\{0\}$. Luego, $(\Delta - \chi^2)$ es un operador *analítico-hipoelíptico* en *D*, (cf. Ap. L). (A lo largo de este capítulo *D denotará*, a una región acotada.). Por tanto tenemos el siguiente

COROLARIO. Las soluciones en *D* de $(\Delta - \chi^2)u = 0$ son analíticas en esa región.♦

En realidad todos los operadores $\Delta + \mu$, $\mu \in C$, son analítico-hipoelípticos, (cf. [H], p.114). Sobre este punto volveremos más adelante. Una consecuencia es la

PROPOSICIÓN 1. Las autofunciones del problema de Dirichlet son indefinidamente diferenciables en *D*.♦

Este resultado podríamos haberlo obtenido también de una aplicación repetida del teorema 3 del apéndice F.

B. **DEFINICION 2.** Las funciones del espacio nulo del operador $\Delta - \chi^2$ en *D* se denominarán funciones χ-armónicas.♦

Veremos que gozan de muchas propiedades comunes con las funciones armónicas. Para uso futuro introducimos la siguiente,

NOTACION 1. a) $\sigma_{\Delta} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ denotará al conjunto de autovalores del problema de Dirichlet (3.1).

b) Con $K \subset\subset D$ indicaremos que *K* es un compacto contenido en el abierto *D*.

c) *J* designará al contorno de *D*.♦

TEOREMA 2. (Principio de máximo de Phrágmen-Lindelöff). Sea w una función χ-armónica o armónica en *D* y $F := \{x_0, \dots, x_n\} \subset J$. Si w es continua y acotada en $\overline{D}\backslash F$ y nula en $J\backslash F$ entonces w=0.♦

DEMOSTRACION. Razonaremos sobre el caso particular $F := \{x_0\}$. Sea w χ-armónica y $D_{\varepsilon} = D\backslash S_{\varepsilon}(x_0)$. Sea $M = \sup_{x\in D}|w(x)|$. La función

$$W_{\varepsilon}(x) := MK_0(\chi|x - x_0|)/K_0(\chi\varepsilon), \tag{4.7}$$

es χ-armónica en *D*. Además $W_{\varepsilon}(x) \geq w(x)$ en ∂D_{ε} y por tanto en D_{ε}, (cf. Ap. M, T. 2). Fijamos $x \in D$. Haciendo tender ε a 0 y utilizando *i*) del Teorema 4 precedente resulta $0 \geq w(x)$. Como el mismo razonamiento se aplica a $-w$ obtenemos $w(x) = 0$.

Si w es armónica se puede repetir la demostración usando como W_{ε} a la función

$$M\frac{\log\left(\frac{diamD}{|x-x_0|}\right)}{\log\left(\frac{diamD}{\varepsilon}\right)}. \text{ QED.}$$

TEOREMA 3. (Principio de las singularidades evitables). Sea u χ-armónica (o armónica) y acotada en un entorno de $S_\rho(0)\setminus\{x_1\}$, $x_1 \in B_\rho(0)$ (*). Entonces u puede extenderse en forma continua a $B_\rho(0)$. La extensión es χ-armónica.♦

DEMOSTRACION. Sea $F=\{x_1\}$. De (4.15) en la siguiente sección C sigue que existe una función $v(x)$, χ-armónica en $B_\rho(0)$, continua en $S_\rho(0)$ e igual a u en $\Sigma_\rho(0)$(+). Definamos: $w(x)=u(x)-v(x)$. Entonces w se anula en Σ_ρ y es continua y acotada en $S_\rho\setminus F$. Del Teorema 2 precedente, con $D=B_\rho\setminus F$, $J=\partial D=\Sigma_\rho\cup F$, sigue que w=0 en D. O sea, v extiende a u, QED.

C. **EL NUCLEO** P_χ. Nuestro próximo objetivo es construír el análogo del núcleo de Poisson en el círculo de radio ρ y centro 0 correspondiente al problema:

(4.8) $\qquad (\Delta-\chi^2)u=0, \qquad u(\rho e^{i\varphi})=f(\varphi), \qquad 0\le\varphi\le 2\pi.$

De f supondremos solamente que su serie de Fourier es absolutamente convergente, o equivalentemente, en su desarrollo (4.12), $\sum(|a_n|+|b_n|)<\infty$, ([Z]).

Separando variables: $u=R(r).\Phi(\varphi)$, tenemos

(4.9) $$\frac{1}{r}\frac{(rR')'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}-\chi^2=0.$$

La periodicidad de Φ implica que $\Phi(\varphi)=A\cos n\varphi+B\operatorname{sen} n\varphi$, $n=0,1,2,\ldots$ y R es solución de

(4.10) $$\frac{1}{r}(rR')'-\frac{n^2R}{r^2}-\chi^2R=0, \qquad 0<r\le\rho.$$

Las soluciones acotadas de (4.10) son múltiplos de $R_n(r)=I_n(\chi r)$, donde

(4.11) $$I_n(z)=e^{-in\pi/2}J_n(e^{i\pi/2}z), \qquad -\pi<\arg z\le\pi,$$

es la función de Bessel modificada

$$I_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$$

Luego, soluciones en $B_\rho(0)$ de (4.8), acotadas y en forma de producto, son las funciones:

$$I_n(\chi r)(A\cos n\varphi+B\operatorname{sen} n\varphi).$$

(En realidad estas funciones son χ-armónicas en R^2). Sea la serie de Fourier de f:

(*) $B_\rho(y)$ denota al interior de la bola cerrada $S_\rho(y)$.

(+) $\Sigma_\rho(y)=\partial B_\rho(y)$.

(4.12) $$f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\,\mathrm{sen}\,n\varphi\right),\ \sum\left(|a_n|+|b_n|\right)<\infty\,.^{(\#)}$$

Definamos,

(4.13) $$u(re^{i\varphi})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_n(\chi r)}{I_n(\chi\rho)}(a_n\cos n\varphi+b_n\,\mathrm{sen}\,n\varphi),\quad r\le\rho\,.$$

Sabemos que ([W], pgs.149-150):

(4.14) $$\left|\frac{I_n(\chi r)}{I_n(\chi\rho)}\right|\le|r/\rho|^{n/2}\,.$$

Luego, de (4.12), (4.13) y (4.14) obtenemos (cf. Def. 2):

(4.15) $$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\frac{I_0(\chi r)}{I_0(\chi\rho)}\int_0^{2\pi}f(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(\chi r)}{I_n(\chi\rho)}\int_0^{2\pi}\cos n(s-\varphi)\,f(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(s)\left[\frac{1}{2}\frac{I_0(\chi r)}{I_0(\chi\rho)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(\chi r)}{I_n(\chi\rho)}\cos n(s-\varphi)\right]ds=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(s)P_\chi(r,\rho;s-\varphi)ds\,.$$

Si $r\le r_0<\rho$, las dos series convergen uniformemente. Más aún, la hipótesis sobre f implica que (4.13) y (4.15) convergen uniformemente en $r\le r_0\le\rho$. Ellas definen una función u continua hasta el borde $\Sigma_\rho(0)$ e igual a f allí. La función $u(re^{i\varphi})$ así construída es la única solución del problema (4.8), (cf. Cor. T. 1 y Ts. 3 y 2). Verifica aún (cf. Ap.M):

(4.16) $$\|u\|_\infty\le\|f\|_\infty\,.$$

DEFINICION 2. $P_\chi(r,\rho;t):=\dfrac{I_0(\chi r)}{2I_0(\chi\rho)}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(\chi r)}{I_n(\chi\rho)}\cos nt$ si $0\le r<\rho$, $-\pi\le t\le\pi$.

TEOREMA 4. α) P_χ es un *núcleo positivo* en el siguiente sentido:

i) $P_\chi\ge0$; *ii)* $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}P_\chi(r,\rho;t)\,dt\xrightarrow[r\uparrow\rho]{}1$, *iii)* $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{|t|>\varepsilon}P_\chi dt\xrightarrow[r\uparrow\rho]{}0$.

β) Sea $\Phi(t)$ una función real, continua, periódica de período 2π. Entonces, la función

(4.17) $$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(s)\,P_\chi(r,\rho;\varphi-s)\,ds\,,\ 0\le r<\rho\,,$$

es tal que $(\Delta-\chi^2)u=0$ en $B_\rho(0)$ y para todo $\varphi\in[-\pi,\pi]$:

(4.18) $$\lim_{r\uparrow\rho}u(re^{i\varphi})=\Phi(\varphi)\,.$$

O sea, si se define $u(\rho e^{i\varphi})=\Phi(\varphi)$, entonces $u\in C(S_\rho)$. También $u\ge0$ si $\Phi\ge0$.

DEMOSTRACION. α) Si fuera $P_\chi(r,\rho;\theta)<0$ tendríamos $P_\chi(r,\rho;t)<0$ en un ε-entorno de θ. Sea $\Phi\in C_0^\infty(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\Phi\ge0$, extendida periódicamente fuera de $(-\pi,\pi)$. Ya vimos que β) vale para esta Φ pues su serie de Fourier converge absoluta y uniformemente.

(#) Esta situación se presenta cuando f es de variación acotada y pertenece a alguna clase Hölder. Por ejemplo, si f es absolutamente continua y $f'\in L^2$.

Por otra parte, $u(re^{i\theta})=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(s)\,P_\chi(r,\rho;\theta-s)\,ds<0$. Pero esto está en contradicción con el principio de mínimo, (cf. Teor. 6 o Ap. M). Esto prueba *i*). Además

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\chi(r,\rho;t)\,dt=\frac{I_0(\chi r)}{I_0(\chi\rho)}\xrightarrow[r\to\rho]{}1.$$

Sea ahora $\Phi=|\Phi|\in C_0^\infty(-\pi,\pi)$, $\Phi(0)=0$, $\Phi(t)=1$ para $|t|>\varepsilon$. Vale:

$\int_{|t|>\varepsilon}P_\chi(r,\rho;t)\le\int_{-\pi}^{\pi}P_\chi(r,\rho;t-0)\,\Phi(t)\,dt=\pi\,u(r)\to\Phi(0)=0$ para $r\to\rho$. Así queda probada α).

β) sigue de α), (cf. [Z]). β) puede también deducirse de la posibilidad de aproximar uniformemente una función continua por funciones continuamente diferenciables (para las cuales vale β)), la positividad de P_χ y (4.16), QED.

A continuación extendemos el teorema precedente a sectores circulares.

TEOREMA 5. Sea $f(t)\in C_0^\infty(\alpha,2\pi-\alpha)$, $\alpha\in(0,\pi)$. Existe una solución de $(\Delta-\chi^2)u=0$ en el sector $Q=\{re^{i\varphi}:0<r<\rho,\alpha<\varphi<2\pi-\alpha\}$, continua en $\overline{Q}$, tal que para $x=re^{it}$

(4.19) $\quad u(x)=0$ si $t=\alpha$ ò $t=2\pi-\alpha$; $u(x)=f$ si $r=\rho$, $x\in\overline{Q}$.

DEMOSTRACION. En $\overline{Q}$ ensayamos soluciones de $(\Delta-\chi^2)u=0$ de la forma $R(r)\,\Phi(\varphi)$ tales que $\Phi(\alpha)=0=\Phi(2\pi-\alpha)$ obteniendo las ecuaciones $\Phi''=\mu\Phi$,

(4.20) $\quad (rR')'+(\frac{\mu}{r}-\chi^2 r)R=0,\qquad 0<r\le\rho,$

El sistema de funciones

(4.21) $\quad \left\{\Phi_n=\operatorname{sen}\nu_n(\varphi-\alpha):n=1,2,3,\ldots,\nu_n=\frac{n\pi}{2(\pi-\alpha)}\right\}$

es un sistema ortogonal completo de autofunciones del problema de contorno

(4.22) $\quad \Phi''=\mu\Phi,\ \mu=-\nu^2\qquad \Phi(\alpha)=0=\Phi(2\pi-\alpha)$.

Para este valor de μ (4.20) toma la forma $(rR')'/r-\nu^2R/r^2-\chi^2R=0$ y tiene por solución acotada en el origen a $I_{\nu_n}(\chi r)$.

El desarrollo de f respecto al sistema (4.21) es

(4.23) $\quad f=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}\nu_n(\varphi-\alpha),\qquad b_n=\frac{1}{\pi-\alpha}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(t-\alpha)}{2(\pi-\alpha)}\right)dt.$

$\{b_n\}$ será una familia rápidamente decreciente para una f que cumpla la hipótesis. Luego,

(4.24) $\quad u(re^{i\varphi}):=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{I_{\nu_n}(\chi r)}{I_{\nu_n}(\chi\rho)}\operatorname{sen}\nu_n(\varphi-\alpha)$

es χ-armónica en Q y continua en $\overline{Q}$. Esta función satisface además la condición de contorno (4.19), QED.

D. Volvemos en esta sección al principio de máximo.

TEOREMA 6. Sea $w(x)$ χ-armónica en D, continua y acotada en $\overline{D}\backslash F$, $F=\{x_0,\ldots,x_{n-1}\}\subset\partial D$. Supongamos que $N:=\sup\{w(x):x\in\partial D\setminus F\}\geq 0$. Entonces $N\geq w(x)$ en $\overline{D}\backslash F$.

DEMOSTRACION. Nuevamente razonaremos sobre un conjunto $F=\{x_0\}$. Definimos con z fijo y M=sup $\{|w(x)|:x\in\overline{D}\setminus F\}$:

(4.25) $$W_\varepsilon(x):=M\frac{K_0(\chi|x-x_0|)}{K_0(\chi\varepsilon)}+N\,I_0(\chi|x-z|).$$

Entonces, $W_\varepsilon(x)\geq w(x)$ en $\partial(D\setminus S_\varepsilon(x_0))$. Por tanto, $W_\varepsilon(x)\geq w(x)$ en $D\backslash S_\varepsilon(x_0)$, (cf. Ap. M, T. 2). Fijemos x. Haciendo $\varepsilon\to 0$, obtenemos $N\,I_0(\chi|x-z|)\geq w(x)$ en D. La desigualdad $N\geq w(x)$ sigue al hacer $z\to x$. Luego, $N\geq w(x)$ para todo $x\in\overline{D}\backslash F$, QED.

TEOREMA 7. Sea $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$ y solución del problema:

(4.26) $$(\Delta-\chi^2)u=h \text{ en } D, \qquad u=\phi \text{ en } \partial D.$$

Supongamos que $|h|\leq M$ y que $|\phi|\leq m$, M y m constantes. Entonces, para todo $x\in\overline{D}$,

(4.27) $$|u|\leq\sup\{M/\chi^2,m\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v=\pm u-M/\chi^2$. Luego, $(\Delta-\chi^2)v=\pm h+M\geq 0$ en D y $v\leq m-M/\chi^2$ en ∂D. Esto implica que

$$v(x)\leq\sup\{0,m-M/\chi^2\},\quad x\in D,$$

pues v no alcanza su máximo positivo en D, (cf. Ap.M). En consecuencia

$$\pm u\leq\sup\{m,M/\chi^2\},$$ QED.

E. En esta sección presentamos estimaciones de la media cuadrática del gradiente de soluciones de la ecuación metarmónica $\Delta u+\lambda u=0$ pero *contrariamente* a las secciones anteriores supondremos aquí que $\lambda>0$.

TEOREMA 8. Sea K un compacto contenido en D: $K\subset\subset D$. Sean $\lambda>\varepsilon>0$ y u tal que $\Delta u+\lambda u=0$. Entonces valen,

(4.28) $$\int_K|\text{grad } u|^2dp\leq C_{K,\varepsilon}.\lambda\int_D|u|^2dp,$$

(4.29) $$\int_K|D^\alpha u|^2dp\leq C_{K,\varepsilon,\alpha}.\lambda^{|\alpha|}\int_D|u|^2dp.$$

DEMOSTRACION. (4.29) sigue de (4.28). Veamos (4.28). Sea $\phi\in C_0^\infty(D)$, $0\leq\phi\leq 1$, $\phi=1$ en un entorno de K. De la fórmula

(4.30) $$|\phi\,\text{grad } u|^2=\text{div}(\phi^2u\text{ grad } u)-\phi^2u\Delta u-u\text{ grad}\phi^2\times\text{grad } u$$

obtenemos

(4.31) $$\int_D|\phi\text{ grad} u|^2dp=-\int_D\phi^2u\;\Delta u\;dp-2\int_D u\phi\text{ grad}\phi\times\text{grad } u\;dp\leq$$

$$\leq \lambda \int_D u^2 \phi^2 dp + \left(\int_D |\phi \text{ grad } u|^2 dp \right)^{1/2} \left(\int_D |2u \text{ grad} \phi|^2 dp \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \lambda \int_D u^2 dp + \frac{1}{2} \int_D |\phi \text{ grad } u|^2 dp + \frac{1}{2} \int_D |2u \text{ grad} \phi|^2 dp .$$

Por tanto,

(4.32) $$\frac{1}{2} \int_K |\text{grad } u|^2 dp \leq \frac{1}{2} \int_D |\phi \text{ grad } u|^2 dp \leq \lambda \int_D |u|^2 + M_K \int_{D \setminus K} |u|^2 dp ,$$

(4.33) $$\int_K |\text{grad } u|^2 dp \leq 2(\lambda + M_K) \int_D |u|^2 dp .$$

Como por hipótesis $M_K \leq \lambda.(M_K / \varepsilon)$, de (4.33) sigue (4.28), QED.

F. En esta sección volvemos a la ecuación $(\Delta + \lambda) u = f, \lambda < 0$. Estimaremos la media cuadrática de grad u via las de u y f.

NOTACION 2. grad $w = \nabla w$.

TEOREMA 9. Sean $f \in C(D)$, $u \in C^2(D)$ (real), $(\Delta - \chi^2) u = f$ en D. Sean K, $K_1 \subset\subset D$ y tales que $K \subset \text{int } K_1 \subset K_1$. Entonces,

(4.34) $$\int_K | \nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{2\chi^2} \int_{K_1} f^2 dx + C \int_{K_1} u^2 dx , \quad C = C(K, K_1) .$$

DEMOSTRACION. Sea $\phi \in C_0^\infty(K_1), 0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ en un entorno de K. Luego, de (4.30) obtenemos

(4.35) $$\phi^2 |\nabla u|^2 = div(\phi^2 u \nabla u) - 2\phi \, u \nabla u \times \nabla \phi - \phi^2 (\chi^2 u^2 + uf) ,$$

(4.36) $$\int_D \phi^2 |\nabla u|^2 dq \leq 0 + 2 \int_D |\phi \nabla u| |u \nabla \phi| \, dq - \int_D \phi^2 (\chi u + f / 2\chi)^2 dq + \int_D \phi^2 (f^2 / 4\chi^2) dq$$

$$\leq 2 \int_D |\phi \nabla u| |u \nabla \phi| dq + \frac{1}{4\chi^2} \int_D \phi^2 f^2 dq .$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Bunjakowski-Schwarz y que $2ab \leq \frac{a^2}{2} + 2b^2$ vemos que el miembro derecho de (4.36) no supera a $\frac{1}{2} \int_D \phi^2 |\nabla u|^2 dq + 2 \int_D u^2 |\nabla \phi|^2 dq + \frac{1}{4\chi^2} \int_{K_1} f^2 dq$.

En consecuencia, $\int_D \phi^2 |\nabla u|^2 dq \leq 4 \int_D u^2 |\nabla \phi|^2 dq + \frac{1}{2\chi^2} \int_{K_1} f^2 dq$.

Luego, $\int_K |\nabla u|^2 dq \leq C(K, K_1) \int_{K_1 \setminus K} u^2 dq + \frac{1}{2\chi^2} \int_{K_1} f^2 dq$, QED.

CAPITULO 5
LAS FUNCIONES χ-SUBARMONICAS, EL METODO DE PERRON Y EL NUCLEO DE GREEN PARA EL OPERADOR METARMÓNICO

5A. **DEFINICION** 1. Sea u una función continua en la región D, $S=S_\rho(x)\subset D$. Definimos para $y=x+re^{i\varphi}$,

$$u_S(y):=\begin{cases} u(y) & si\ y\in D\setminus B_\rho(x) \\ U(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\chi(r,\rho;t-\varphi)\,u(x+\rho e^{it})\,dt & si\ y\in B_\rho(x)\end{cases}$$

Del T. 4, Cap.4 sigue que u_S es continua en D y que

$$(5.1)\qquad U(x)=\frac{1}{I_0(\chi\rho)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x+\rho e^{it})\,dt=\frac{1}{I_0(\chi\rho)}\int_{|z|=\rho}U(x+z)\,d\sigma^\rho(z)$$

donde σ_x^ρ es la masa unitaria uniformemente distribuída sobre $\Sigma_\rho(x)$. Si x=0 escribiremos simplemente σ^ρ.♦

DEFINICION 2. Sea $u\in C(D)$. u se dirá χ*-subarmónica* si para todo $x\in D$ y S= $=S_\rho(x)\subset D$ se verifica $u\le u_S$ en D. Si además $u\equiv u_S$ para todo x y para todo $S=S_\rho(x)\subset D$ entonces diremos que u es χ*-armónica*. ♦

Es decir, u es χ-armónica si tanto u como $-u$ son χ-subarmónicas. De los Ts. 2 y 4 del Cap. 4 se deduce que esta última definición de χ-armonicidad coincide con la ya introducida.

NOTACION. $A^\chi(D)$ $(SUB^\chi(D))$, $\chi\ge 0$, denotará a la familia de funciones χ-armónicas (χ-subarmónicas) en la región D. Si χ=0, escribiremos simplemente $A(D)$ ($SUB(D)$). Si para algún $\chi>0$, $u\in A^\chi(D)$ (ò $SUB^\chi(D)$) diremos que *u es metarmónica* (ó *metasubarmónica*).♦

De (5.1) sigue la

PROPOSICION 0. Si u es χ-armónica y ≥ 0 en la región D y se anula en un punto entonces $u\equiv 0$.♦

A continuación demostraremos el *principio de máximo* para funciones χ-subarmónicas.

TEOREMA 1. Sea $u\in C(\overline{D})\cap SUB^\chi(D)$, D una región acotada.

i) $\max_{\partial D} u\ge 0 \Rightarrow \max_{\partial D} u=\max_{\overline{D}} u$,

ii) $\max_{\overline{D}} u>\max_{\partial D} u\Rightarrow \max_{\overline{D}} u<0$,

iii) u no identicamente 0, $\max_{\partial D} u\le 0\Rightarrow u<0$ en D.♦

DEMOSTRACION. *i*) Si u tomara su máximo positivo en $p\in D$ tendríamos para cierto $\varepsilon>0$: $u(p)\le\frac{1}{I_0(\chi\varepsilon)}\int_{|p-q|=\varepsilon}u(q)\,d\sigma_p^\varepsilon(q)<u(p)$, pues $I_0(\chi r)$>1 para $r>0$.

i) $\Rightarrow$ *ii*).

iii) De *ii*) se deduce que $\max_{D} u \le 0$. Si en $x \in D$ es $u(x) = 0$ entonces u se anula sobre toda circunferencia de centro x contenida en D. Es decir, $\{x : u(x) = 0\}$ es un abierto. Luego $u \equiv 0$, contradicción, QED.

5B. FORMULA DEL VALOR MEDIO. DESIGUALDAD DE HARNACK. Sea $S_R(0) \subset D$, región donde u es χ-armónica. De (5.1) obtenemos:

$$(5.2)\qquad u(0) = \frac{\int_0^{2\pi} u(re^{it})\, dt / 2\pi}{I_0(\chi r)} = \frac{\int_{|x|=r} u(x)\, d\sigma^r(x)}{\int_{|x|=r} I_0(\chi|x|)\, d\sigma^r(x)}, \qquad r \le R.$$

Integrando respecto de r luego de multiplicar por r, obtenemos la siguiente *fórmula del valor medio*:

$$(5.3)\qquad u(0) = \frac{\iint_{S_R(0)} u(x)\, dx}{\iint_{S_R(0)} I(\chi|x|)\, dx}.$$

De esta igualdad sigue

$$(5.4)\qquad |u(0)| \le \frac{1}{\pi R^2}\left|\iint_{S_R(0)} u(x)\, dx\right|.$$

Aplicando (5.4) a $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ obtenemos

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(0)\right| \le \frac{1}{\pi R^2}\left|\iint_{S_R(0)} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx\right| = \frac{1}{\pi R^2}\left|\int_{\Sigma_R(0)} u\, \nu_i\, ds\right| \le \frac{2\pi R}{\pi R^2} . \max_{|x|=R} |u|$$

y finalmente la *desigualdad de Harnack*:

$$(5.5)\qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(0)\right| \le \frac{2}{R} \max_{|x|=R} |u(x)|.$$

5C. FAMILIAS NORMALES DE FUNCIONES χ-ARMÓNICAS. A continuación demostraremos dos teoremas similares a sendos resultados de Harnack y Montel.

DEFINICION 3. Diremos que la sucesión $\{u_n\}$ converge *casi uniformemente* a u, y lo denotaremos con $u_n \xrightarrow{c.u.} u$, si $u_n \xrightarrow{\bullet} u$ (uniformemente) sobre compactos. Una familia $F = \{u_l : l \in \Lambda\}$ se dirá *normal* si de toda sucesión contenida en F puede extraerse una subsucesión casi uniformemente convergente.♦

TEOREMA 2. Sea $\{u_n : n = 1,2,\ldots\} \subset A^\chi(D)$ una sucesión tal que para todo n y $x \in D$ $u_n(x) \ge u_{n-1}(x)$. Si en un punto $x_0 \in D$ la sucesión numérica $\{u_n(x_0)\}$ converge entonces la sucesión de funciones converge casi uniformemente a una función $u(x) \in A^\chi(D)$.♦

DEMOSTRACION. Sea $x_0 = 0$ y $S = S_\rho(0) \subset D$. Sea C_ε una constante definida por

$$(5.6)\qquad C_\varepsilon = \sup\{P_\chi(r,\rho;t) : r \le \rho - \varepsilon, t \in [0,2\pi]\}.$$

$0 < C_\varepsilon < \infty$ pues $P_\chi(r,\rho;t)$ es continua en $(r,t) \in [0,\rho-\varepsilon] \times [-\pi,\pi]$, (cf. Cap. 4).

Entonces,

$$(5.7)\qquad 0\le (u_n-u_{n-1})(re^{i\varphi})=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\chi(r,\rho;\varphi-t)(u_n-u_{n-1})(\rho e^{it})\,dt\le$$

$$\le\frac{C_\varepsilon}{\pi}\int_0^{2\pi}(u_n-u_{n-1})(\rho e^{it})\,dt=2C_\varepsilon I_0(\chi\rho).(u_n-u_{n-1})(0).$$

De esto se deduce la existencia de $u\in C(D)$ y que $u_n\xrightarrow{c.u.}u$. Pasando al límite en $u_n(re^{i\varphi})=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\chi(r,\rho;\varphi-t)\,u_n(\rho e^{it})\,dt$, $r<\rho$, obtenemos

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\chi(r,\rho;\varphi-t)\,u(\rho e^{it})\,dt.$$

Así se deduce que $u=u_S$ para todo $S\subset D$, QED.

TEOREMA 3. Sea $\{u_n:n=1,2,\ldots\}\subset A^\chi(D)$ una sucesión uniformemente acotada por una constante *M*. Entonces existe una subsucesión $\{u_{n_j}(x)\}$ y una función $u\in A^\chi(D)$ tal que $u_{n_j}\xrightarrow{c.u.}u$ para $j\to\infty$.♦

DEMOSTRACION. Sean $r',r''\le r<\rho$ y suponemos $0\in D$. Usando (4.14) para acotar el resto de la serie que define al núcleo P_χ se obtiene:

$$\left|P_\chi(r',\rho;s-\varphi')-P_\chi(r'',\rho;s-\varphi'')\right|\le\varepsilon\quad\text{si}\quad\left|r'e^{i\varphi'}-r''e^{i\varphi''}\right|\le\delta,$$

donde $\delta=\delta(r,\rho)$. En este caso, $\left|u_n(r'e^{i\varphi'})-u_n(r''e^{i\varphi''})\right|\le\frac{\varepsilon M}{\pi}$. Del teorema de Arzelá-Ascoli se concluye que $\{u_n\}$ es relativamente compacta en $S_r(0)$. Se deduce entonces que $\{u_n\}$ contiene una subsucesión casi uniformemente convergente cuyo límite es, necesariamente, χ-armónico (cf. Teor. 4, Cap. 4), QED.

5D. LA FUNCION BARRERA. LA PROPIEDAD B.

DEFINICION 4. a) Dados D e $y\in\partial D$ diremos que en y hay *función barrera* si existe una función χ-subarmónica, $w_y(x)$, continua en $\overline{D}$ y tal que $w_y(y)=0$, $w_y(x)<0$ en $\overline{D}\setminus\{y\}$.
b) Diremos que la región D posee la propiedad B si admite en todo punto $y\in\partial D$ una función barrera.♦

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente

TEOREMA 4. Sea $f\in C[\partial D]$, D una región acotada que admite una función barrera en todo punto del contorno. Entonces existe una única solución $u\in C(\overline{D})\bigcap C^2(D)$ del problema

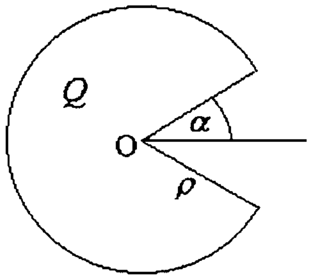
(5.7) $\qquad (\Delta-\chi^2)u=0\qquad$ en D, $u=f$ en ∂D.♦

Antes de demostrar este teorema queremos responder parcialmente a la pregunta ¿qué condiciones sobre ∂D aseguran la existencia de función barrera?

Sea $y \in \partial D$ tal que exite un disco S_ε, al que podemos suponer de centro 0 sin pérdida de generalidad, verificando: $\overline{D} \cap S_\varepsilon = \{y\}$. La función,

$$(5.9) \qquad w_y(x) := -\frac{I_0(\chi|x|)}{I_0(\chi\varepsilon)} + \frac{K_0(\chi|x|)}{K_0(\chi\varepsilon)}$$

es tal que: $w_y(y) = 0$, $w_y(x) \in A^\chi(D) \cap C(\overline{D})$ y $w_y(x) < 0$ en $\overline{D} \setminus \{y\}$. En efecto, $K_0(\chi r)$ es decreciente e $I_0(\chi r)$ creciente con r.



Consideremos ahora un sector circular Q como en el T.5 del Cap. 4. Si $y \neq 0$, $y \in \partial Q$, entonces de lo dicho se desprende que existe función barrera en ese punto para el dominio Q. Sea y=0. Definamos: $v(x) := I_n(\chi|x|)\cos(n\varphi)$, con n tal que $\cos(n\alpha) < 0$. Sea u la función construída en el T.5, Cap. 4 con una $f(\varphi)$ que verifique $f(\varphi) + I_n(\chi\rho)\cos(n\varphi)$<0, para $\alpha \leq \varphi \leq 2\pi - \alpha$. Luego, $w_0(x) := u(x) + v(x)$ es una función barrera en y=0 para D=Q, (cf. T. 1).

Luego, hemos probado que si D=$Q = B_\rho \setminus \kappa$, κ un sector circular de un cono cerrado, entonces existe una función barrera w_y para todo $y \in \partial D$. O sea, Q tiene la propiedad B.

Sea ahora D una región acotada que posea la *propiedad siguiente*: en todo punto y de su frontera es posible colocar el vértice de un sector circular σ de un cono cerrado tal que $\sigma \cap \overline{D} = \{y\}$. Veremos que en este caso D posee la propiedad B.

En el siguiente teorema 6 demostraremos que el concepto de función barrera es un concepto local, es decir, si w_y es "localmente" una función barrera entonces puede modificarse adecuadamente como para dar lugar a una función w'_y barrera en y para D. Esto es posible pues también el concepto de función χ-subarmónica es "local" como veremos en el teorema 5.

5E. **TEOREMA 5**. *i*) Sea u continua en D tal que

$$(5.10) \qquad u(x) \leq (M_r u)(x) := \frac{1}{I_0(\chi r)} \int_{|x-y|=r} u(y)\, d\sigma_x^r(y), \qquad S_r(x) \subset D,$$

para todo $x \in D$ y todo $r \in (0, \varepsilon)$ donde $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Entonces u es χ-subarmónica en D.

ii) Si $u(x) = (M_r u)(x)$ para todo $x \in D$ para todo $r \in (0, \varepsilon(x))$ entonces u es χ-armónica.♦

DEMOSTRACION. Obviamente *i*)$\Rightarrow$*ii*). Veamos *i*). Debemos mostrar que si $S = S_\rho(y) \subset D$ entonces $u(x) \leq u_S(x)$ para todo $x \in S$. Sea $v(x) = u(x) - u_S(x)$ y supongamos que v>0 en algun punto de S. Entonces existe $x_0 \in B_\rho(y)$ tal que $v(x_0) = \max_S v > 0$. Luego, si $S_r(x_0) \subset S$ y $r < \varepsilon(x_0)$ tenemos (cf. (5.1) o T. 4, Cap. 4)):

$$v(x_0) = u(x_0) - u_S(x_0) \leq \frac{1}{I_0(\chi r)} \int_{|x_0 - z|=r} (u - u_S)(z)\, d\sigma_{x_0}^r(z) \leq$$

$$\leq \frac{1}{I_0(\chi r)}\int_{|x_0-z|=r} v(x_0)\, d\sigma_{x_0}^r(z) = \frac{v(x_0)}{I_0(\chi r)} < v(x_0),$$

contradicción, QED.

TEOREMA 6. Sea $y \in \partial D$, D una región acotada, $B = B_r(y)$ un círculo abierto tal que en $\overline{D \cap B}$ esté definida $w \in SUB^{\chi}(D \cap B) \cap C(\overline{D \cap B})$. Si w es negativa salvo en el punto y donde se anula entonces existe una función barrera $\widetilde{w}$ en y para D.•

DEMOSTRACION. Para demostrar la tesis definimos

$$(5.11) \qquad \widetilde{w}(x) := \begin{cases} w(x) \vee (m/2), & x \in \overline{D} \cap S_r(y) \\ (m/2), & x \in \overline{D} \cap (R^2 \setminus S_r(y)) \end{cases}$$

donde $m = \sup\{w(z) : z \in \Sigma_r(y) \cap \overline{D}\} < 0$. $\widetilde{w}$ es continua en $\overline{D}$, se anula en y y es negativa en $\partial D \setminus \{y\}$. Resta ahora probar que esa función pertenece a $SUB^{\chi}(D)$. Para esto es suficiente mostrar que $\widetilde{w}$ verifica (5.10) en los puntos $x \in B_r(y) \cap D$. Sea $r < \varepsilon = \varepsilon(x) = \operatorname{dist}(x, \partial(B \cap D))$. Entonces, como $m/2 < 0, I_0(\chi r) > 1$, resulta,

$$M = \frac{1}{I_0(\chi r)}\int_{|x-t|=r} \widetilde{w}(t)\, d\sigma_x^r(t) \geq \frac{1}{I_0(\chi r)}\int_{|x-t|=r} w(t)\, d\sigma_x^r(t) \geq w(x), \qquad M > m/2.$$

Luego, $M \geq \widetilde{w}(x)$, QED.

5F. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4 POR EL METODO DE PERRON. Queremos probar que si la región acotada D tiene la propiedad B entonces existe una función u en $A^{\chi}(D) \cap C(\overline{D})$ que coincide en ∂D con un dato continuo f preasignado. Sea

$$\Omega := \{u \in SUB^{\chi}(D) \cap C(\overline{D}) : u(y) \leq f(y) \text{ para todo } y \in \partial D\}, \quad \Omega = \Omega(f; D).$$

La familia de funciones *minorantes* Ω contiene por lo menos a (cf. C, Cap. 4):

$$(5.12) \qquad F(x) = (-\sup\{|f(x)| : x \in \partial D\}) . I_0(\chi|x|).$$

PROPOSICION 1. *i)* $u, v \in \Omega \Rightarrow \sup(u,v) \in \Omega$,

ii) $u \in \Omega \Rightarrow u_S \in \Omega$.•

DEMOSTRACION. *i)* Sea $S = S_\rho(x) \subset D$. Entonces, $(\sup(u,v))_S \geq u_S, \geq v_S$. Luego, $(\sup(u,v))_S \geq \sup(u,v)$.

ii) Sea $S' = S_r(z) \subset D$. Debemos probar que $(u_S)_{S'} \geq u_S$. Si $S' \subset S$ entonces $(u_S)_{S'} = u_S$ pues u_S es χ-armónica en el interior de S.

Si $S \subset S'$ entonces vale $u_{S'} \geq u = u_S$ en $\Sigma_\rho(x)$. Por tanto, $u_{S'} - u_S \geq 0$ en S (por ejemplo, por *iii)* del Teor. 1). Además $u_{S'} \geq u = u_S$ en $S' \setminus S$. En consecuencia, $u_{S'} \geq u_S$ en D. Resulta entonces que $(u_S)_{S'} \geq u_S$.

Si $S \cap S' = \varnothing$, o consiste de un punto, entonces de la definición 1 sigue que $(u_S)_{S'} \geq u_S$.

Supongamos finalmente que en el caso restante $R := S \cap S'$. R tiene interior no vacío. En $\partial S'$, $(u_S)_{S'} = u_S \geq u$ implica $(u_S)_{S'} \geq u$ en S'. Luego, $(u_S)_{S'} \geq u_S$ en ∂R. Como ambas funciones son χ-armónicas en R, la misma desigualdad vale allí. Además, como $u_S = u$ en $S' \setminus R$ resulta $(u_S)_{S'} \geq u_S$ en S'. En consecuencia, $(u_S)_{S'} \geq u_S$, QED.

Para $x \in D$ definamos $w = w(x;f)$, que escribiremos simplemente como w=$w(x)$,

(5.13) $$w(x) := \sup_{u \in \Omega} u(x).$$

Para $u \in \Omega$, la función χ-subarmónica $F+u$ es no positiva en ∂D, y por tanto del T.1 sigue que $F+u \le 0$ en $\overline{D}$. De esto sigue que $w(x) \le -F(x)$ en $\overline{D}$.

Sea $\{ q \in D : q$ de coordenadas racionales$\} = \{q_j : j = 1,2,\ldots\}$. Para cada j elijamos una sucesión $\{u_n^j\} \subset \Omega$ tal que $u_n^j(q_j) \uparrow w(q_j)$ y definamos

$$v_n' := u_n^1 \vee u_n^2 \vee \ldots \vee u_n^n.$$

$v_n' \in \Omega$, $\{v'_n\}$ es una sucesión creciente y para todo j, $v_n'(q_j) \uparrow w(q_j)$ para $n \to \infty$. Sea $v_n(x) := (v_n')_S(x)$ para $S = S_\rho(z) \subset D$. $v_n \in \Omega$, es χ-armónica en B=$B_\rho(z)$ y $v_n \uparrow$. Además $v_n(q_j) \uparrow w(q_j)$ para cada $q_j \in B$. Sea para $x \in B$, $v(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x)$. Por el teorema 2, $v(x) \in A^\chi(B)$. Si para algún $x \in B$ tuviéramos $v(x) < w(x)$ entonces existiría una $u \in \Omega$ verificando $v(y) < u(y) \le w(y)$ para y en un entorno de x, $S_r(x) \subset B$, contradicción. Entonces v=w en B y w es χ-armónica en D.

Sea $y \in \partial D$. Veamos que $w(x)$ es continua en y y que vale $w(y)$=$f(y)$. Supongamos que $|x-y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Consideremos la función

(5.14) $$u(x) := (f(y) - \varepsilon) I_0(\chi|y-x|) + k w_y(x),$$

donde k es una constante y w_y es una función barrera en y para D. $u \in SUB^\chi(D)$. Si k es bastante grande tendremos $u \in \Omega$. Además, si $x \in D$, $f(y) - \varepsilon = \lim_{x \to y} u(x) \le \underline{\lim}_{x \to y} w(x)$.

Luego, haciendo $\varepsilon \to 0$ resulta

(5.15) $$f(y) \le \underline{\lim}_{x \to y} w(x).$$

Sea $w_1(x) := w(x;-f)$. De (5.15) sigue que

(5.16) $$-f(y) \le \underline{\lim}_{x \to y} w_1(x)$$

Supongamos que $u \in \Omega(f;D)$, $u_1 \in \Omega(-f;D)$. Entonces $u_1 + u \le 0$ en ∂D, y por tanto $u_1 + u \le 0$ en $\overline{D}$. De esto sigue que $w \le -u_1$ en $\overline{D}$. Luego, $w \le -w_1$ y de (5.16) obtenemos

(5.17) $$f(y) \ge -\underline{\lim}_{x \to y} w_1(x) = \overline{\lim}_{x \to y} (-w_1(x)) \ge \overline{\lim}_{x \to y} w(x)$$

(5.15) y (5.17) implican $f(y) = \lim_{x \to y} w(x)$, QED.

5G. Sea $\lambda = -\chi^2$, $\chi > 0$, D una región acotada con la propiedad B. En 5D se han dado condiciones suficientes para que una región tenga función barrera en cada punto de su contorno. En particular los dominios estándar regulares (cf. B, Cap. 3) tienen la propiedad B.

Definimos el núcleo de Green $G(p,q;\lambda)$ como en el Cap.3:

$$(5.18)\qquad \begin{cases} G(p,q;\lambda):=\dfrac{1}{2\pi}K_0(\chi|p-q|)-H(p,q;\lambda), & p,q\in D\\ (\Delta_q+\lambda)H(p,q;\lambda)=0, \quad H(p,.;\lambda)\in A^{\chi}(D)\cap C(\overline{D}) & \\ H(p,q;\lambda)=\dfrac{1}{2\pi}K_0(\chi|p-q|) \quad si\ q\in\partial D, & p\in D \end{cases}$$

TEOREMA 7. *i*) Si $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$, $\phi\in L^{\infty}(D)$, $(\Delta+\lambda)u=\phi$ en D, u=0 en ∂D, entonces

$$u(p)=-\int_D G(p,q;\lambda)\phi(q)\,dq, \text{ para todo } p\in D.$$

ii) $G(p,q;\lambda)=G(q,p;\lambda)$, para todo $p,q\in D$, $p\neq q$.

iii) Sean $\phi\in L^{\infty}(D)$, $p\in\overline{D}$, $u(p):=\int_D G(p,q;\lambda)\phi(q)\,dq$. Vale entonces: $u\in C(\overline{D})$, u=0 en ∂D y

$$\frac{\partial u}{\partial p_i}\in C(D),\ i=1,2, \qquad \frac{\partial u}{\partial p_i}=\int_D\frac{\partial G}{\partial p_i}(p,q;\lambda)\phi(q)dq.$$

iv) Dada $\phi\in C^1(D)\cap L^{\infty}(D)$ sea

$$u(p)=-\int_D G(p,q;\lambda)\phi(q)\,dq$$

Entonces, $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$, $(\Delta+\lambda)u=\phi$ en D, u=0 en ∂D.

v) Son equivalentes las proposiciones siguientes:

a) $\phi\in L^2(D)$, $\phi(p)=\mu\int_D G(p,q;\lambda)\phi(q)\,dq$,

b) $\phi\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$, $-(\Delta+\lambda)\phi=\mu\phi$ en $D, \phi=0$ en ∂D.

vi) Si l_p es la distancia de p a ∂D entonces para todo $q\in\overline{D}$:

$$0\le H(p,q;\lambda)\le\frac{K_0(\chi l_p)}{2\pi},$$

$$0\le G(p,q;\lambda)\le\frac{K_0(\chi|p-q|)}{2\pi}.$$

vii) Sea M=diam D. Entonces

$$\int_{\overline{D}}G^2(p,q;\lambda)\,dq\le\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\{|q|\le M\}}K_0^2(\chi|q|)\,dq=:C^2(\lambda)<\infty.$$

viii) $$\gamma^2(\lambda)=\iint_{\overline{D}\times\overline{D}}G^2(p,q;\lambda)\,dp\,dq\le C^2(\lambda).|D|<\infty.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Supongamos demostradas *i*)-*iv*). *vi*) sigue de (5.18), Teorema 4 y principios de máximo para funciones χ-armónicas que resumimos en la siguiente

PROPOSICION 2. Sea u una función χ-armónica real en la región acotada D, continua en $\overline{D}$; χ>0.

i) Si es nula en el contorno de la región es idénticamente nula.

ii) Si su mínimo en el contorno es no negativo entonces u es no negativa y $\max_{\partial D}u=\max_{\overline{D}}u$.

iii) Más aún, si $u\not\equiv 0$ y tiene un máximo ≥ 0 en $\overline{D}$, entonces lo alcanza en ∂D y no en D; y si $u\not\equiv 0$ tiene un mínimo ≤ 0 en $\overline{D}$, entonces lo alcanza en ∂D y no en D.

Resumiendo, para todo $x\in\overline{D}$,

$$|u(x)| \leq \sup\{|u(r)| : r \in \partial D\}.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Véanse Ts. 2, 3 y 7 del Cap. 4, T. 1 del Cap. 5 y T. 2 del Ap. M, QED.

Es fácil ver que *vi*) $\Rightarrow$ *vii*) y que *vii*) $\Rightarrow$ *viii*). Se demuestra como en 3A que *i*)-*iv*) $\Rightarrow$ *v*).

Veamos ahora la demostración de *ii*), *i*), *iii*) y *iv*) del T. 7 y en ese orden. A tal fin introducimos la definición de dominio estándar.

DEFINICION 5. Sea S un conjunto abierto, conexo y acotado. Diremos que S es una *región estándar* (*RE*) si para todo $p \in \partial S$ existe un entorno circular U de p tal que en él el contorno está representado por un arco de Jordan $C^1 : x_2 = f(x_1)$, donde x_1 y x_2 son las coordenadas del sistema móvil de referencia del contorno (equiorientado con el sistema de coordenadas en R^2). Respecto al sistema móvil:

$$p = (0,0), \quad S \cap U = \{(x_1, x_2) \in U : x_2 > f(x_1)\}, \quad f(0) = 0, f'(0) = 0 .\blacklozenge$$

Una región estándar es una región *normal* pues en ella valen los teoremas de Gauss, Green y Stokes. El contorno de una *RE* está formado por un número finito de curvas (cerradas) de Jordan C^1. El contorno de la componente de $R^2 \setminus \bar{S}$ que contiene al ∞ es una curva de Jordan que encierra las otras componentes de ∂S. A esta componente de ∂S la denotaremos con la letra J cuando sea necesario.

LEMA 1. *i*) Sea $u \not\equiv 0$ y χ-armónica. Sea $X(u) := \{x \in D : \operatorname{grad} u(x) = 0\}$. Entonces el conjunto $u(X(u))$ es numerable.

ii) Las curvas de nivel $N_a = \{p = (x,y) : u(x,y) = a\}$ para $a \notin u(X(u))$, cuando existen, son, localmente, curvas C^n, cualquiera sea $n > 0$, y con vector tangente no nulo en todo punto.$\blacklozenge$

DEMOSTRACION. Como los lemas 1 y 2 del Cap. 3, QED.

LEMA 2. Sea $u(q)$ una función χ-armónica en $D \setminus \{p\}$ que tiende a $+\infty$ cuando $q \to p$, nula en ∂D. Sea $\varepsilon \notin u(X(u))$, $D_\varepsilon = \{q : u(q) > \varepsilon\}$, $C_\varepsilon = \{q : 0 < u(q) < \varepsilon\}$, $N_\varepsilon = \{q : u(q) = \varepsilon\}$ Entonces, D_ε es una región estándar cuyo contorno es N_ε. Además, $D_\varepsilon \uparrow D$ si $\varepsilon \downarrow 0$.$\blacklozenge$

DEMOSTRACION. De la Proposición 2 sigue que $u \not\equiv 0, u \geq 0$. Luego, de la Proposición 0 sigue que $u > 0$ en D. Como en cada uno de sus puntos N_ε es localmente una curva C^2 con tangente no nula, tiene allí una normal con la dirección del gradiente de u. Luego, en todo entorno de un punto de N_ε hay puntos de D_ε y de C_ε. En consecuencia $\partial D_\varepsilon = N_\varepsilon$. Más aún, si n es la normal exterior a D_ε en un punto $q \in N_\varepsilon$, entonces $n = \dfrac{-\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|}$ y

$$\text{(5.19)} \qquad \frac{\partial u}{\partial n}(q) = -|\operatorname{grad} u| < 0.$$

Para demostrar que D_ε es una *RE* basta ver que D_ε es conexo. Y para esto, que todo punto de D_ε puede conectarse a p con un arco de Jordan contenido en D_ε. Supongamos $p_0 \in D_\varepsilon$ no conectado a p, y $T_0 := \{q \in D_\varepsilon : q \text{ conectado en } D_\varepsilon \text{ a } p_0\}$. Entonces $T_0 = \overset{o}{T_0}$ y $\partial T_0 \subset N_\varepsilon$. Luego, por la Proposición 2, $u < \varepsilon$ en T_0, contradicción. Como u es positiva en D obtenemos $D_\varepsilon \uparrow D$, QED.

ii) Sea $\varepsilon>0$ y $D_\varepsilon\subset D$ una *RE*, $N_\varepsilon=\partial D_\varepsilon$. Sea $D_{\varepsilon,\eta}=D_\varepsilon\backslash S_\eta(t)$, $S_\eta(t)\subset D_\varepsilon$ y $u\in C^2(D)$. Entonces, si $d\sigma_q$ denota al elemento de superficie, tenemos:

(5.20) $$\int_{D_{\varepsilon,\eta}}\big(G(t,q;\lambda)(\Delta+\lambda)u(q)-u(q)(\Delta_q+\lambda)G(t,q;\lambda)\big)dq=$$

$$=\int_{D_{\varepsilon,\eta}}\big(G(t,q;\lambda)\Delta u(q)-u(q)\Delta_q G(t,q;\lambda)\big)dq=\int_{D_{\varepsilon,\eta}}G(t,q;\lambda)\,(\Delta-\chi^2)u(q)\,dq=$$

$$=\int_{\partial D_{\varepsilon,\eta}}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_q=\int_{N_\varepsilon}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_q\;-\int_{|t-q|=r:=\eta}\left(G\frac{\partial u}{\partial r}-u\frac{\partial G}{\partial r}\right)d\sigma_q.$$

En particular, si $u\equiv 1$,

(5.21) $$-\int_{D_{\varepsilon,\eta}}G(t,q;\lambda)\chi^2dq=-\int_{N_\varepsilon}\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma_q+\int_{r=\eta}\frac{\partial G}{\partial r}d\sigma_q.$$

Si v es continua en un entorno de $t\in D_\varepsilon$, teniendo en cuenta la definición de G y el teorema 1 del Cap. 4, se verifica,

(5.22) $$-\int_{|t-q|=r}\frac{\partial G}{\partial r}(t,q;\lambda)\,v(q)\,d\sigma_q\xrightarrow[r\to 0]{}v(t).$$

Luego, (5.22) con $v\equiv 1$ y (5.21) implican, teniendo en cuenta *vi*), que

(5.23) $$\int_{N_\varepsilon}-\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)(t,q;\lambda)\,d\sigma_q=1-\chi^2\int_{D_\varepsilon}G(t,q;\lambda)\,d\sigma_q=O(1).$$

Para $\varepsilon\notin w(X(w))$ *definimos* D_ε como la región asociada en el Lema 2 a la función χ-armónica $w(q)=G(p,q;\lambda)$. Como $\frac{\partial G}{\partial n}(p,q;\lambda)<0$ en N_ε (cf. (5.19)), de (5.23) sigue que:

(5.23') $$0<\int_{N_\varepsilon}-\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)(p,q;\lambda)\,d\sigma_q=\int_{N_\varepsilon}\left|\frac{\partial G}{\partial n}(p,q;\lambda)\right|d\sigma_q<1.$$

Luego, de (5.23) se obtiene para todo $p\in D$:

(5.24) $$0<\int_D G(p,q;\lambda)\,dq=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon}G(p,q;\lambda)\,dq<\frac{1}{\chi^2}.$$

Sean $p,q\in D$, $S=S_\eta(p)\cup S_\eta(q)$, $S_\eta(p)\cap S_\eta(q)=\varnothing$, $S\subset D_\varepsilon$. Si $u(s)=G(p,s;\lambda)$, $v(s)=G(q,s;\lambda)$, obtenemos en analogía con (5.20):

$$0=\int_{D_\varepsilon\backslash S}(u\Delta v-v\Delta u)\,ds=\left(\int_{N_\varepsilon}-\int_{\partial S}\right)(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})\,d\sigma,$$

y entonces,

(5.25) $$\int_{N_\varepsilon}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})\,d\sigma=\int_{|s-q|=\eta}u(s)\frac{\partial G}{\partial n}(q,s;\lambda)\,d\sigma-\int_{|s-p|=\eta}v(s)\frac{\partial G}{\partial n}(p,s;\lambda)\,d\sigma+$$
$$+O(\eta\log\eta).$$

Haciendo tender $\eta\to 0$, usando (5.22), resulta

(5.26) $$\int_{N_\varepsilon}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})\,d\sigma=u(q)-v(p)=G(p,q;\lambda)-G(q,p;\lambda).$$

Como $u\equiv\varepsilon$ en N_ε, usando (5.23'), (5.24) y el teorema del valor medio, obtenemos para el primer miembro de (5.26), con cierto $\theta(\varepsilon)\in[min\,v(t),max\,v(t)]$, $t\in N_\varepsilon$, que:

$\int_{N_\varepsilon}(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})\,d\sigma=\varepsilon\int_{N_\varepsilon}\frac{\partial G}{\partial n}(q,s;\lambda)\,d\sigma_s-\theta\,O(1)=\varepsilon\,O(1)-\theta\,O(1)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$. En efecto, $N_\varepsilon\to\partial D$ para $\varepsilon\downarrow 0$ por lo que $\theta=\theta(\varepsilon)\to 0$. O sea, $G(p,q;\lambda)-G(q,p;\lambda)=0$ y también $H(p,q;\lambda)-H(q,p;\lambda)=0$ para todo par $(p,q)\in D\times D$.

i) De (5.20) resulta ($r=|p-q|$):

(5.27) $$\int_{D_{\varepsilon,\eta}} G(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq=\int_{N_\varepsilon}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_q-\int_{r=\eta}\left(G\frac{\partial u}{\partial r}-u\frac{\partial G}{\partial r}\right)d\sigma_q.$$

De *vii*) y (5.22) y haciendo tender η a 0, obtenemos:

(5.28) $$\int_{D_\varepsilon} G(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq=\int_{N_\varepsilon}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_q-u(p)$$

Utilizando (5.23), la fórmula de Green y el teorema del valor medio vemos que la integral en el miembro derecho es igual a,

$$\varepsilon\int_{N_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma_q+\theta(\varepsilon)\int_{N_\varepsilon}-\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma_q=\varepsilon\int_{D_\varepsilon}(\phi+\chi^2u)dq+\theta(\varepsilon)\,O(1)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0.$$

Luego, $\int_D G(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq=-u(p)$.

iii) Supongamos que $\{p_n\}\subset D$, $p_n\to p\in D$. Entonces, por *vi*), $\{H(p_n,\cdot;\lambda)\}$ es una sucesión de funciones χ-armónicas uniformemente acotadas. Más aún, $\sup\{|H(p_n,r;\lambda)-H(p_m,r;\lambda)|:r\in\partial D\}\to 0$ para $m,n\to\infty$. De la Proposición 2 obtenemos que $\{H(p_n,q;\lambda)\}$ converge uniformemente para $q\in\overline{D}$. Como para x,y en D vale $H(x,y;\lambda)=H(y,x:\lambda)$ resulta que $\{H(p_n,q;\lambda)\}$ converge a $H(p,q;\lambda)$ si $q\in D$ y por tanto en $\overline{D}$. Sigue entonces la

PROPOSICION 3. $H(p,q;\lambda)$ es continua en $D\times\overline{D}$.

Como en F del cap. 3 se prueba ahora que u=0 en ∂D y que $u\in C(\overline{D})$. Pongamos,

(5.29) $$u(p)=\frac{1}{2\pi}\int_D K_0(\chi|p-q|)\,\phi(q)\,dq-\int_D H(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq=v(p)+L(p).$$

$L(p)\in C^\infty(D)$. En efecto, $L(p)\in A^\chi(D)$. Esto se prueba como en el Lema 4 del Cap. 3 utilizando la desigualdad de Harnack (5.5) y la simetría de $H(x,y),(x,y)\in D\times D$. La demostración se hace en detalle nuevamente en el Lema 1 del Cap.6.

Para finalizar, $v(p)$ puede descomponerse de la siguiente manera (cf. Ap.F):

(5.30) $$v(p)=\sigma\phi(p)+\int_D T(p,q)\,\phi(q)\,dq=\sigma\phi(p)+\tilde{v}(p),$$

donde $T(p,q)=(|p-q|^2\log|p-q|)R(|p-q|^2)+P(|p-q|)$, R y P funciones analíticas enteras. Entonces, aplicando el lema 1 del apéndice F se ve que $\tilde{v}(p)\in C^2(R^2)$. O sea, que

(5.31) $$u(p)-\sigma\phi(p)=L(p)+\tilde{v}(p)\in C^2(D).$$

Como $\sigma\phi\in C^1(D)$, queda probado *iii*).

iv) Si $\phi \in C^1(D)$ entonces $\sigma\phi \in C^2(D)$ y de (5.31) sigue que $u \in C^2(D)$. Además: $(\Delta - \chi^2)v = \phi$ en el sentido de las distribuciones, (cf. Cap.4, T.1, *ii*)). Como $L \in A^{\chi}(D)$, $(\Delta - \chi^2)u = (\Delta - \chi^2)(v + L) = \phi$, QED.

Definimos para $\chi = 0$ y en el caso que D tenga la propiedad B para el operador diferencial Δ a $G(p,q) := G(p,q;0)$:

$$(5.18')\quad \begin{cases} G(p,q:0)) = \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{M}{|p-q|} - H(p,q), \quad p,q \in D, \quad M = diam\, D \\ \Delta_q(H(p,q)) = 0 \quad en\, D, \quad H(p,.) \in C(\overline{D}), \\ H(p,q) = \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{M}{|p-q|} \quad si \quad q \in \partial D, \quad p \in D, \end{cases}$$

Vale el siguiente resultado donde $\lambda = -\chi^2$, (cf. Cap. 3).

TEOREMA 8. *j*) Si D es un dominio acotado con la propiedad B para $\Delta - \chi^2$, $\chi \geq 0$, entonces puede definirse un núcleo $G(p,q;\lambda)$ verificando las condiciones enunciadas en (5.18) ò (5.18') según sea $\chi > 0$ ò $\chi = 0$.

jj) Si el núcleo $G(p,q;-\chi^2)$ satisface (5.18), o bien (5.18'), entonces tiene las propiedades *i*)-*viii*).

DEMOSTRACION. *j*) sigue de la definión de la propiedad B y el Teor. 4.

jj) (5.18)$\Rightarrow$ *i*)-*viii*) es lo que realmente se probó en el Teor. 7. Cambiando $K_0(\chi|.|)$ por $\log\dfrac{M}{|.|}$, se repite esa demostración para probar (5.18') $\Rightarrow$ *i*)-*viii*), QED.

5H. *Sea* $\phi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, autofunción de $-\Delta$ y *sea* σ_Δ el espectro de $-\Delta$. Entonces,

$$(5.32)\qquad -\Delta\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad \phi_n = 0 \text{ en } \partial D, \quad \phi_n \in C(\overline{D}).$$

Estas funciones son indefinidamente diferenciables en D. También son autofunciones del operador metarmónico pues $\lambda_n > 0$ y:

$$(5.33)\qquad -(\Delta + \lambda)\phi_n = (\lambda_n - \lambda)\phi_n \qquad , \lambda = -\chi^2.$$

Luego,si $p \in D$, se tiene,

$$(5.34)\qquad \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n - \lambda} = \int_D G(p,q;\lambda)\,\phi_n(q)\,dq$$

Si $\{c_n\}$ son los coeficientes de Fourier de $G(p,q;\lambda)$ respecto del sistema ortonormal completo $\{\phi_n\}$:

$$(5.35)\qquad c_n(G(p,.;\lambda)) = \frac{\phi_n(p)}{\lambda_n - \lambda}.$$

En consecuencia, de *vii*) Teor. 7 sigue que

$$(5.36)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n^2(p)}{(\lambda_n - \lambda)^2} \leq C^2(\lambda) < \infty \qquad \text{para todo } p \in D,$$

que como sabemos vale aún si $\lambda = 0$. El desarrollo

$$G(p,q;\lambda)-G(p,q)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(p)\left[\frac{1}{\lambda_n-\lambda}-\frac{1}{\lambda_n}\right]\phi_n(q)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)},$$

es válido entonces para todo $p\in D$, $\lambda\le 0$, en la topología de $L^2(q\in D)$. Más aún, la serie converge absoluta y uniformemente en $q\in\overline{D}$, como se deduce de (5.36). Vale el

TEOREMA 9. *i*) Sea $p\in D$. La serie

$$\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)} \tag{5.38}$$

converge absoluta y uniformemente en $q\in\overline{D}$ a la función continua en *q*: $F(p,q;\lambda)$.

ii) Si $F(p,\lambda):=F(p,p;\lambda)$, vale

$$F(p,\lambda)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}=\lim_{q\to p}\left(G(p,q;\lambda)-G(p,q)\right). \tag{5.39}$$

$F(p,\lambda)$ es continua en $D\times(C\setminus\sigma_\Delta)$ y para cada p es meromorfa en λ. Sus únicas singularidades son polos simples en $\lambda=\lambda_n$, $n=1,2,\ldots$.

DEMOSTRACION. Resta sólo demostrar *ii*). Sabemos que para cada p,

$$\int_D G^2(p,q)\,dq=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2}. \tag{5.40}$$

Una aplicación del teorema de Dini sobre convergencia monótona de funciones continuas asegura que la convergencia de la serie en (5.40) es uniforma en $p\in\overline{D}$. Supongamos ahora a λ en un compacto contenido en $C\setminus\sigma_\Delta$ y m tal que $\operatorname{Re}\lambda<\lambda_m<\lambda_{m+r}$. Si $n>m+r$ tenemos

$$\left|\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\right|\le\left|\frac{1}{\lambda_n-\operatorname{Re}\lambda}\right|\le\frac{1}{\lambda_n-\lambda_m}. \tag{5.41}$$

Escribamos: $F(p,\lambda)=\sum_{n=1}^{m+r}+\sum_{n=m+r+1}^{\infty}$. Entonces la última serie tiene por mayorante, salvo por un factor constante, a

$$\sum_{m+r+1}^{\infty}\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda_m)}\le\sup_{n>m+r}\left(\frac{1}{1-\lambda_m/\lambda_n}\right)\sum_{m+r+1}^{\infty}\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2}. \tag{5.42}$$

El miembro derecho tiende a cero uniformemente en *D* para $r\to\infty$, QED.

5I. **PROPOSICION 4.** Sea $u(p)=\int_D G(p,q;-\chi^2)\,f(q)\,dq$ donde $f\in L^1(D)$ y D es un dominio como en el Teorema 8. Si *f* se anula en un abierto $U\subset D$ entonces *u* existe y es χ-armónica en *U*.

DEMOSTRACION. Supongamos que $S_\varepsilon(t)\subset U$. La función $u(p)$ es continua en *U*. Utilizando (5.1) y el Teor. 5 obtenemos,

$$\int_{|p-t|=\varepsilon}u(p)\,d\sigma_t^\varepsilon(p)=\int_D f(q)\,dq\int_{|p-t|=\varepsilon}G(p,q;-\chi^2)\,d\sigma_t^\varepsilon(p)=$$
$$=I_0(\chi\varepsilon)\int_D G(t,q;-\chi^2)\,f(q)\,dq=I_0(\chi\varepsilon)\,u(t),\ \text{QED.}$$

CAPITULO 6
DOMINIOS CON LA PROPIEDAD G. COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LOS AUTOVALORES: METODO DE T. CARLEMAN. UN TEOREMA DE WEYL.

6A. Antes de entrar en el tema continuaremos con la clasificación de las regiones planas, que supondremos *acotadas*, cuya definición se impone debido a necesidades conceptuales de la teoría. Ya introdujimos la definición de *región de Jordan* y la de *región perimetrizable* (intr. al Cap.3). También la de región con la *propiedad B* respecto del operador $\Delta-\chi^2$ (Cap. 5). En la próxima sección se demuestra que una región de Jordan tiene la propiedad B respecto de $\Delta-\chi^2$ *para todo* $\chi>0$.
Si $\chi=0$ este es un hecho bien conocido. Recordemos su demostración.
Sea $p_0 \in J := \partial D$ y s un punto exterior de J lo suficientemente alejado como para que la circunferencia C de centro p_0 y radio $\rho=|p_0-s|$ contenga en su interior a J. Existe entonces un arco de Jordan K con extremos p_0 y s el cual -salvo por esos puntos- está contenido en el exterior de J y en el interior de C. En el recinto simplemente conexo formado por los puntos interiores a $S_\rho(p_0)$ y no en $\overline{D}\cup K$ puede definirse una rama de $\log(z-p_0)$. Entonces $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\log(z-p_0)-\log|s-p_0|}\right)$ es una función barrera para D en p_0.
De un dominio D se dirá que poee la *propiedad* S si el conjunto abierto

(6.1) $$A(t):=\{p\in D: dist(p,\partial D)<t\},\ t>0,$$

es tal que su área $|A(t)|=O(t^\varepsilon)$ para cierto $\varepsilon\in(0,1]$ fijo y $t\to 0$. Una región perimetrizable tiene la propiedad S y con $\varepsilon=1$. No necesariamente tiene la propiedad S una región de Jordan arbitraria (cf. [BP2]).
Finalmente diremos que un dominio D posee la *propiedad* G si existe una función $G(p,q)$ definida en $D\times\overline{D}$, continua en $D\times\overline{D}\setminus\{(p,p): p\in D\}$, tal que $G(p,q)=0$ si $q\in\partial D$ y verifica:

β) $(p,q)\in D\times D$, $p\neq q \Rightarrow G(p,q)=G(q,p)$,

ζ) $0\le G(p,q)\le\infty$, $(p,q)\in D\times D$,

η) $\int_{\overline{D}} G^2(p,q)\,dq<C^2<\infty$, C=cte., $p\in D$,

ι) para cada $p\in D$ y M=diam D, $G(p,q)-\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{M}{|p-q|}=O(1)$ en un entorno de $q=p$.

α) $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$, $\phi\in L^\infty(D)$, $\Delta u=\phi$ en D, u=0 en ∂D implica

(6.2) $$u(p)=-\int_D G(p,q)\,\phi(q)\,dq,\quad p\in D,$$

γ) $\phi\in L^\infty(D)$, $p\in\overline{D}$, $u(p):=\int_D G(p,q)\,\phi(q)\,dq \Rightarrow u\in C^1(D)\cap C(\overline{D})$, u=0 en ∂D.

δ) $\phi\in L^\infty(D)\cap C^1(D)\Rightarrow$(6.2) define una función en $C^2(D)\cap C(\overline{D})$ tal que $\Delta u=\phi$ en D, u=0 en ∂D.

Es decir, G satisface en D las propiedades *i*), *ii*), *iii*), *iv*), *vi*), *vii*) del núcleo de Green del Teor. 1, Cap. 3. Por lo tanto son válidas las proposiciones *viii*) y *v*) para esta región y el desarrollo en autofunciones, (cf. Teor. 2, Cap. 3). En particular tenemos

(6.3) $$G(p,q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n} \qquad \text{en } L_q^2(D),$$

donde $\{\phi_n : n=1,2,\dots\}$ es un sistema ortonormal completo formado por autofunciones reales del problema de Dirichlet homogéneo. En el Cap. 3 se probó que toda región de Jordan tiene la propiedad *G*.

6B. Sean $D\in G$, $\lambda=-\chi^2$, $\chi\geq 0$. Definamos para $p\in D$, $q\in\overline{D}$,

(6.4) $$F(p,q;\lambda):=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{(\lambda_n-\lambda)\lambda_n},$$

(6.5) $$G(p,q;\lambda):=G(p,q)+F(p,q;\lambda).$$

Entonces, $F(p,.;\lambda)\in C(\overline{D})$, $F(p,r;\lambda)=0$ si $r\in\partial D$; $G(p,q;\lambda)=G(q,p;\lambda)$ si $p\neq q$, $(p,q)\in D\times D$, (cf. Teor. 9, Cap. 5). Además, $G(p,q;\lambda)=0$ si $(p,q)\in D\times\partial D$.
Como $(\Delta_q+\lambda)\phi_n=(\lambda-\lambda_n)\phi_n$ resulta en $D\backslash\{p\}$ y en el sentido de las distribuciones,

$$(\Delta_q+\lambda)G(p,q;\lambda)=\lambda G(p,q)-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n}=0.$$

Es decir, $G(p,.;\lambda)$ es χ-armónica en $D\backslash\{p\}$, (cf. Cap. 4). *Definimos*,

(6.6) $$H(p,q;\lambda):=-G(p,q;\lambda)+Z(p,q;\lambda) \qquad q\in\overline{D}\backslash\{p\}$$

donde

$$Z(p,q;\lambda)=\frac{1}{2\pi}K_0(\chi|p-q|) \text{ si } \chi>0,\ Z(p,q;0)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{|p-q|}.$$

Entonces, $H(p,.;0)$ es armónica en $D\backslash\{p\}$. De *i*) sigue que es acotada en un entorno de *p* por lo que tiene una singularidad evitable en *p*. Por tanto es armónica en *D*.
Análogamente se demuestra que $H(p,.;\lambda)$ es χ-armónica en *D* (cf. Cap. 4, Teor. 1-3). Luego,

(6.7) $$\begin{cases} G(p,q;\lambda)=\dfrac{K_0(\chi|p-q|)}{2\pi}-H(p,q;\lambda), & \lambda=-\chi^2<0, \\ H(p,q;\lambda)=H(q,p;\lambda) & si \quad (p,q)\in D\times D \\ (\Delta_q+\lambda)H(p,q;\lambda)=0, & p,q\in D \\ H(p,q;\lambda)=\dfrac{K_0(\chi|p-q|)}{2\pi} & si \quad (p,q)\in D\times\partial D \end{cases}$$

donde $H(p,.;\lambda)\in C(\overline{D})$ y es indefinidamente diferenciable en *D* por ser χ-armónica allí.
TEOREMA 1. Las propiedades *i*)-*viii*) del Teor. 7 del Cap. 5 son válidas para el núcleo $G(p,q;\lambda)$ si *D* es una región con la propiedad *G*. En particular, si *D* es una región de Jordan.♦
DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1. Es suficiente demostrar las propiedades *i*), *iii*), *iv*), y *vi*). En efecto, la *ii*) sigue inmediatamente de (6.7). *vi*) $\Rightarrow$ *vii*) y *vii*) $\Rightarrow$ *viii*) se prueban como en el Teor. 7 del Cap. 5. También vale la implicación *i*) $-$ *iv*) $\Rightarrow$ *v*) que se prueba como su análoga del Cap. 5.
Veamos *vi*) suponiendo *i*), *iii*) y *iv*). Bajo esta hipótesis vale el siguiente resultado que designaremos como Corolario 1 al Teorema que estamos demostrando.

COROLARIO 1. Una región G tiene la propiedad B para el operador $\Delta-\chi^2$ cualquiera sea $\chi\geq 0$.♦

DEMOSTRACION DEL COROLARIO. Supongamos $0\in\partial D$. Bastará encontrar para p=0 una solución de $(\Delta+\lambda)w=0$, $w=|x|^2$ en ∂D, $\lambda=-\chi^2$. Pongamos $w=u+|x|^2$. Es suficiente entonces hallar una solución del problema: $(\Delta+\lambda)u=-4-\lambda(x_1^2+x_2^2)$, $u|_{\partial D}=0$. La existencia de tal u sigue de δ) si $\chi=0$ y si $\chi\neq 0$ de la supuesta proposición *iv*), QED.

Tenemos ahora a nuestra disposición el Teor. 4 del Cap. 5. Luego, *vi*) se prueba como en el Cap. 5 recurriendo a la Proposición 2 del mismo.

i) Debemos mostrar que $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D}),\phi\in L^\infty(D),(\Delta+\lambda)u=0,u=0$ en $\partial D\Rightarrow u(p)=-\int G(p,q;\lambda)\phi(q)dq$. Observemos que de (6.3), (6.4) y (6.5) se deduce que

(6.8) $$G(p,.;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(p)\phi_n(.)}{\lambda_n-\lambda}\qquad (\text{en } L^2(D)).$$

Si $w(p)=-\int_D G(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq$, entonces

(6.9) $$w(p)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(\phi)}{\lambda_n-\lambda}\phi_n(p)\qquad (\text{en } L^2(D)).$$

Luego, en el sentido de las distribuciones:

(6.10) $$\left(\Delta-\chi^2\right)w=\sum c_n(\phi)\phi_n=\phi.$$

Por tanto, $\left(\Delta-\chi^2\right)(w-u)=0$. Por otra parte (cf. (6.5)),

$$w(p)=-\int_D G(p,q)\,\phi(q)\,dq-\int_D F(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq=w_1(p)+w_2(p).$$

De γ) sigue que $w_1\in C^1(D)\cap C(\overline{D})$, $w_1=0$ en ∂D. Además,

(6.11) $$-w_2(p)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda\,c_n(\phi)}{\lambda_n-\lambda}\,\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\lambda\,c_n(\phi)}{\lambda_n-\lambda}\,\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n}.$$

La primera suma define una función continua en $\overline{D}$, nula en el borde. La serie en (6.11) es en módulo menor que un ε>0 dado si $N>N_0(\varepsilon)$ y uniformemente en $p\in D$, (cf. η) 6A). Es decir, $|w_2(p)|<2\varepsilon$ en un entorno de ∂D. En consecuencia, puede extenderse en forma continua hasta el borde y de manera que $w_2(r)=0$ si $r\in\partial D$. O sea, $w-u$ se anula en $r\in\partial D$ y es χ-armónica en la región. El principio de máximo asegura ahora que u=w.

De paso observemos que

(6.12) $$\left(\Delta-\chi^2\right)w_2=\left(\Delta-\chi^2\right)\left(\int_D -F(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq\right)=\lambda\int_D G(p,q)\,\phi(q)\,dq.$$

iii) Debemos probar que $\phi\in L^\infty,u(p)=\int G(p,q;\lambda)\phi(q)dq\Rightarrow u\in C^1(D)\cap C(\overline{D})$, u=0 en ∂D. De lo dicho se desprende que basta mostrar que $u\in C^1(D)$. Del Teor. 1 Ap. F e *i*) del Teor. 1 Cap.4 se deduce que $u\in C^1(D)$ es consecuencia del siguiente lema (cf. (6.7)).

LEMA 1. Sea $h(p)=\int_D H(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq$ y $\phi\in L^\infty(D)$. Entonces $\left(\Delta-\chi^2\right)h=0$.♦

En efecto, $K_0(r)=-\log r+(1-I_0(r))\log r+P(r)$. Es decir, (6.13) $\qquad K_0(\chi|x|) = -\log|x| + Q(|x|), \quad \text{con } Q \in C^1([0,\infty))$.

DEMOSTRACION DEL LEMA 1. El teorema de máximo para funciones χ-armónicas (Teor. 6, Cap.4) implica que si $p_n \to p$ entonces $H(p_n,q;\lambda)$ converge uniformemente. Luego, lo hace a $H(p,q;\lambda)$. Entonces, de (6.7) obtenemos $H(p,q;\lambda) \in C(D\times\overline{D})$. Esto implica que si $\{q_n\} \subset D$ converge a $q \in \overline{D}$ y $p \in K$, K compacto contenido en D, vale $H(p,q_n;\lambda) \xrightarrow{\bullet} H(p,q;\lambda)$. En consecuencia, $(\Delta_p + \lambda)H(p,q;\lambda) = 0$ y $H(.,q;\lambda)$ es χ - armónica para todo $q \in \overline{D}$.

De la desigualdad de Harnack (cf. (5.5)) sigue que si $p \in K \subset \operatorname{int} K' \subset K' \subset D$, $q \in \overline{D}$, K' compacto, entonces:

(6.13') $$\left|\frac{\partial H(p,q;\lambda)}{\partial p_i}\right| \le 2 \sup_{(p,q)\in K'\times\overline{D}} \frac{|H(p,q;\lambda)|}{dist(K,\partial K')},$$

y si $p \in K_1 \subset \operatorname{int} K$, $q \in \overline{D}$, K_1 compacto, entonces:

(6.13") $$\left|\frac{\partial^2 H(p,q;\lambda)}{\partial p_i \partial p_j}\right| \le 4 \sup_{(p,q)\in K'\times\overline{D}} \frac{|H(p,q;\lambda)|}{dist(K,\partial K').dist(K_1,\partial K)}.$$

O sea las derivadas de cualquier orden de $H(p,q;\lambda)$ respecto de las componentes de p están uniformemente acotadas para $p \in K \subset\subset D$, $q \in \overline{D}$. Luego,

(6.14) $$\frac{\partial^{i+j} h}{\partial p_1^i \partial p_2^j}(p_1,p_2) = \iint_D \frac{\partial H^{i+j}}{\partial p_1^i \partial p_2^j}((p_1,p_2),(q_1,q_2);\lambda)\,\phi(q_1,q_2)\,dq_1 dq_2$$

y $\left(\Delta - \chi^2\right)h = \iint_D \left(\Delta_p - \chi^2\right) H(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq = 0$, QED.

iv) Debemos demostrar que $\phi \in L^\infty(D) \cap C^1(D), u(p) = -\int_D G(p,q;\lambda)\phi(q)dq \Rightarrow$

$$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D}),\ u{=}0\ \partial D,\ (\Delta + \lambda)u = \phi \text{ en } \partial D.$$

Veamos que $u \in C^2(D)$. Para esto observemos que vale (cf. *iii*),

(6.15) $$\frac{\partial u}{\partial p_i} = -\frac{\partial}{\partial p_i}\int_D G(p,q;\lambda)\,\phi(q)\,dq = \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{1}{2\pi}\int_D K_0(\chi|p-q|)\,\phi(q)\,dq.$$

Sea $\phi = f + g$, $f = \eta.\phi$, $\eta \in C_0^\infty(D)$, $\eta{=}1$ en un entorno de p. Entonces la última integral es igual a

(6.16) $$\int_D K_0(\chi|p-q|)\,g(q)\,dq + \int_D K_0(\chi|p-q|)\,f(q)\,dq$$

La primera integral en (6.16) define un a función C^∞ en un entorno de p y la segunda es tal que

(6.17) $$\frac{\partial}{\partial p_i}\int_D K_0(\chi|p-q|)\,f(q)\,dq = \int_D K_0(\chi|p-q|)\,\frac{\partial f}{\partial q_i}(q)\,dq.$$

De *iii*) y el Lema 1 sigue que la segunda integral define una función C^1 en un entorno de p y resta sólo probar que $(\Delta + \lambda)u = \phi$. Pero esto es consecuencia de (6.10), QED.

Resumiendo: hemos demostrado que si una región tiene núcleo de Green para el operador Δ (propiedad *G*) entonces tiene núcleo de Green para $\Delta + \lambda$, $\lambda \le 0$.

6C. **TEOREMA 2**. Un dominio con la propiedad B para algún $\chi \geq 0$ es una región G y recíprocamente.♦

DEMOSTRACION. La recíproca está contenida en el Corolario 1.

Si D tiene la propiedad B para un χ>0 y $\lambda = -\chi^2$, entonces por el Teorema 7, Cap.5, existe $G(p,q;\lambda)$ con las propiedade *i*)-*viii*). Esas propiedades implican que $\phi_n(p)$ verifica

(6.18) $\quad -\Delta\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad \phi_n = 0$ en $\partial D, \quad \phi_n \in C^2(D)\cap C(\overline{D})$

si y sólo si verifica

(6.19) $\quad \phi_n(p) = (\lambda_n - \lambda)\int_D G(p,q;\lambda)\,\phi_n(q)\,dq\ , \qquad \phi_n \in L^2(D)$.

También que, normalizadas las $\phi_n, \{\phi_n(p): n = 1,2,\ldots\}$ es un sistema ortonormal completo. En efecto, vale el

TEOREMA DE LAS AUTOFUNCIONES. Los autovalores del problema $-(\Delta - \chi^2)v = \mu v$, $\chi \geq 0$, v=0 en ∂D, $v \in C^2(D)\cap C(\overline{D})$, verifican $\mu > \chi^2 =: -\lambda$. Son de multiplicidad finita y pueden ordenarse en forma creciente $\chi^2 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$, $\mu_n \uparrow \infty$. Las autofunciones correspondientes normalizadas $\{\phi_n\}$ están en $C(\overline{D})$ y pueden elegirse reales. Ellas forman un sistema ortogonal completo tal que $\sum_1^\infty \frac{\phi_n^2(p)}{\mu_n^2} = \int_D G(p,q;\lambda)dq \leq C^2 < \infty$.♦

DEMOSTRACION. Como el Teor. 2 del Cap. 3, QED.

Continuemos con la demostración del presente Teor. 2. De (6.19), y para $p \in D$, se obtiene,

(6.20) $$G(p,q;\lambda) = \sum \frac{\phi_n(p)}{(\lambda_n - \lambda)}\phi_n(q) \quad \text{en} \quad L^2(q \in D),$$

(6.21) $$\sum_{n=1}^\infty \frac{\phi_n^2(p)}{(\lambda_n - \lambda)^2} = \int_D G^2(p,q;\lambda)\,dq \leq C^2 < \infty \text{ para todo } p \in D.$$

Definimos ahora

(6.22) $$G(p,q) := G(p,q;\lambda) - \lambda\sum_{n=1}^\infty \frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} = G(p,q;\lambda) - F(p,q;\lambda).$$

$F(p,q;\lambda)$ es continua en $q \in \overline{D}$ y $F(p,q;\lambda)$=0 si $q \in \partial D$. Por tanto, en $D \times \partial D, G(p,q) = 0$. Por otra parte, en el sentido de las distribuciones, (cf. (6.20)),

(6.23) $$\Delta_q F(p,q;\lambda) = -\lambda\sum_{n=1}^\infty \frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n - \lambda} = -\lambda G(p,q;\lambda).$$

Luego, en $D\backslash\{p\}$,

$$\Delta_q G(p,q) = \Delta_q G(p,q;\lambda) + \lambda G(p,q;\lambda) = 0.$$

En efecto, la $G(p,q;\lambda)$ entre manos es χ − armónica en $D\backslash\{p\}$.

(Esto puede demostrarse también de la siguiente forma. La distribución, $T := -(\Delta_q + \lambda)G(p,q;\lambda) = \sum \phi_n(p)\phi_n(q)$, es tal que aplicada a f verifica $Tf = \sum c_b(f)\phi_n = f$. O sea, $T = \delta_p$. Luego, $G(p,.;\lambda)$ es χ − armónica en $D\backslash\{p\}$.)

En consecuencia, $G(p,.)$ es un a distribución armónica en $D\backslash\{p\}$ y por tanto una función armónica allí, lo mismo que $\frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{|p-q|}$. La función $H(p,.)$ definida en $\overline{D}$ por

$$H(p,q) := \frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{|p-q|} - G(p,q) = \frac{1}{2\pi}(\log\frac{M}{|p-q|} - K_0(\chi|p-q|)) + O(1)$$

es acotada en un entorno de $q = p$. Luego, $H(p,\ .\ )$ es armónica en D. Resumiendo, hemos probado que $\frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{|p-q|} - H(p,q)$ coincide con el núcleo $G(p,q;0)$ de (5.18'). Del T.8 Cap.5 sigue entonces que $G(p,q)$ satisface las propiedades *i)*-*viii)*. Es decir D es un recinto G, QED.

COROLARIO 2 (TEOREMA DE LOS DOMINIOS). Un dominio D tiene la propiedad B para un $\chi \geq 0$ si y sólo si la tiene para todo $\chi \geq 0$, y si y sólo si tiene la propiedad G.♦

NB. Obsérvese que la definición de la propiedad G no exige que $G(p,.)$ sea armónica en $D\setminus\{p\}$ sino solamente que $G(p,q) - \frac{1}{2\pi}\log\frac{M}{|p-q|} = O(1)$ en un entorno de $q=p$.

6D. Como $\int_D G^2(p,q)\,dq = \sum \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2}$, integrando respecto de p obtenemos,

$\sum \frac{1}{\lambda_n^2} = \int_{D\times D} G^2(p,q)\,dp\,dq$. En consecuencia,

$$(6.24) \qquad \sum \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty \qquad \lambda_n \to \infty \qquad \sum_{m<n}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \infty .$$

Sigue entonces que para infinitos valores de n vale:

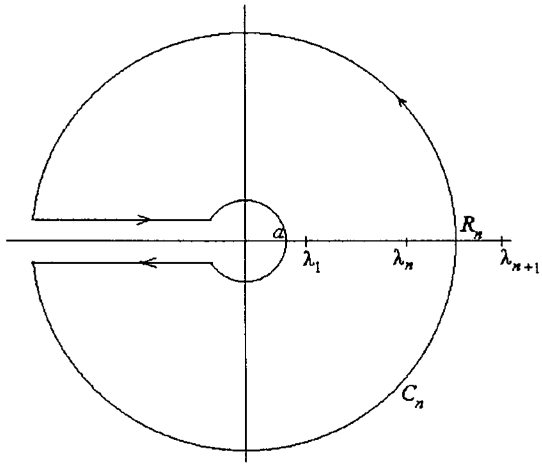
$$(6.25) \qquad \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n .$$

Definimos $Q := \left\{n : \frac{1}{\lambda_n^2} \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n\right\}$, y para $n \in Q$, $R_n = \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{2}$. Luego, si $\lambda \in C\setminus\sigma_\Delta$,

$$\left|\frac{\phi_m^2(p)}{(\lambda_m - \lambda)\lambda_m}\right| \leq \frac{\phi_m^2(p)}{\lambda_m^2}\max_h\left|\frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda}\right|,$$ y si además $\lambda \in \Gamma_n := \{\lambda : |\lambda| = R_n\}$,

$$(6.26) \qquad \max_h\left|\frac{\lambda_h}{\lambda_h - \lambda}\right| \leq \max_h\left|\frac{\lambda_h}{\lambda_h - R_n}\right| \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_{n+i}}{\lambda_{n+1} - R_n} = \frac{2\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \leq 2\lambda_{n+1}^3 \leq 16|\lambda|^3 .$$



Resulta entonces (cf. (6.4)) para

$$F(p;\lambda) := F(p,p;\lambda) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)},$$

$$(6.27) \qquad |F(p;\lambda)| \leq 16|\lambda|^4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\phi_m^2(p)}{\lambda_m^2}, \ \lambda \in \Gamma_j,\ j \in Q .$$

Definimos ahora, para $n \in Q$, la curva C_n como en la figura y donde $a \in (0, \lambda_1)$. Sea s un número complejo con $\operatorname{Re} s > 6$. Estudiaremos para éstos la función $\phi(p;s)$ definida por

(6.28) $$\phi(p;s) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{F(p;s)}{\lambda^s}\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s}.$$

La parte de la integral sobre Γ_n en (6.28) es $o(\lambda_n^{-1})$ pues $|F(p;\lambda)| \le 16C^2|\lambda|^4$, (cf. *vii*) Teor. 1, Cap. 3). Luego, para $n \to \infty$,

(6.29) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n\setminus\Gamma_n} -F(p;\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^s} \to \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s}.$$

Pero, $$-\int_{C_n\setminus\Gamma_n} \frac{F(p;\lambda)}{\lambda^s}\, d\lambda \to \int_{\infty}^{a} F(p;t\, e^{-i\pi})\frac{e^{-i\pi}}{(te^{-i\pi})^s}\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} F(p;ae^{i\varphi})\frac{ae^{i\varphi}}{(ae^{i\varphi})^s}\, id\varphi +$$

$$+\int_{a}^{\infty} F(p;t\, e^{i\pi})\frac{e^{i\pi}}{(te^{i\pi})^s}\, dt = \int_{a}^{\infty} F(p;-t)\, t^{-s}(e^{is\pi} - e^{-is\pi})\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} F(p;ae^{i\varphi})(ae^{i\varphi})^{1-s}\, id\varphi.$$

Luego, como $\operatorname{Re} s > 6$,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n\setminus\Gamma_n} \frac{F(p;\lambda)}{\lambda^s}\, d\lambda = \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi}\int_{a}^{\infty} F(p;-t)\, t^{-s}\, dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(p;ae^{i\varphi})(ae^{i\varphi})^{1-s}\, d\varphi.$$

El último término define una función Z_0,

(6.30) $$Z_0(p;s) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi<\varphi<\pi} F(p;ae^{i\varphi})e^{(1-s)\log(ae^{i\varphi})}\, d\varphi,$$

continua en $(p,s) \in D\times C$ y *analítica entera* en s para cada $p \in D$. Luego,

(6.31) $$\phi(p;s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j^2(p)}{\lambda_j^s} = \frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi}\int_{a}^{\infty} F(p;-t)\, t^{-s}\, dt + Z_0(p;s).$$

Por otra parte, si $\chi > 0$, de (6.5) y (6.7) se obtiene,

(6.32) $$F(p;\lambda) = H(p,p) - H(p,p;\lambda) - \frac{\log \chi}{2\pi} + d, \quad d\text{=cte.}$$

Luego,

(6.33) $$\int_{a}^{\infty} F(p;-t)\, t^{-s} dt = -\int_{a}^{\infty} \frac{\log\sqrt{t}}{2\pi\, t^s}\, dt + (d + H(p,p))\int_{a}^{\infty} \frac{dt}{t^s} - \int_{a}^{\infty} \frac{H(p,p;-t)}{t^s}\, dt.$$

La función de Kelvin verifica la siguiente desigualdad (cf. A Cap.4),

(6.34) $$K_0(x) \le e^{-x/2}K_0(x/2).$$

Y de esto que si $0 < b \le x$ entonces $K_0(x) \le e^{-x/2}K_0(b/2)$. Luego, de *vi*) Teor. 7, Cap. 5, sigue que si $a < |\lambda|$,

(6.35) $$H(p,p;-\chi^2) \le \frac{K_0(\chi\, l_p)}{2\pi} \le e^{-\chi l_p/2}\,\frac{K_0(l_p\sqrt{a}/2)}{2\pi} \qquad \text{donde } l_p\text{=dist}(p,\partial D).$$

Luego, la última integral en (6.33) define una función Z_1, entera en s:

(6.36) $$Z_1(p;s) = 2\int_{\sqrt{a}}^{\infty} \frac{H(p,p;-\chi^2)}{\chi^{2s-1}}\, d\chi.$$

LEMA 2. $\phi(p;s)$ es para cada $p \in D$, prolongable a C como una función meromorfa con un polo simple en s=1 con residuo $1/4\pi$ como única singularidad:

$$\phi(p;s) = \frac{1/4\pi}{s-1} + Z(p;s), \quad Z(p;s) \text{ entera en } s.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Sea s tal que $\mathrm{Re}(s) > 6$. La suma de los dos primeros sumandos del miembro derecho de (6.33), luego de una integración por partes, se reduce a:

$$\left(\frac{-(d+H(p,p))}{1-s} + \frac{\log\sqrt{a}}{2\pi(1-s)} - \frac{1}{4\pi(1-s)^2} \right) a^{1-s}. \tag{6.37}$$

De (6.31), (6.33) y (6.37) sigue que $\phi(p;s) = \dfrac{T}{s-1} + Z(p;s)$. El residuo T de ϕ en s =1 vale:

$$T = \lim_{s\to 1}(s-1)\phi(p;s) = \lim_{s\to 1} -\frac{\operatorname{sen} s\pi}{4\pi^2(s-1)} a^{1-s} = \frac{1}{4\pi}, \quad \text{QED.} \tag{6.38}$$

6E. Para comenzar el estudio del comportamiento asintótico de los autovalores del problema de Dirichlet veamos el

TEOREMA 3. Sea D una región G. Entonces, para todo $p \in D$,

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \phi_n^2(p)}{\lambda_N} \to \frac{1}{4\pi} \qquad \text{para } N \to \infty.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Si $\mathrm{Re}\, s > 6$:

$$\phi(p;s) = \frac{1}{4\pi(s-1)} + Z(p;s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^s} = \int_a^{\infty} x^{-s} d\alpha(x) \tag{6.39}$$

donde $\alpha(x)$ es una función monótona, no decreciente, no negativa, a puros saltos en los puntos $\lambda_n \in \sigma_\Delta$:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < \lambda_1 \\ \sum_{j=1}^{n} \phi_j^2(p) & si\ \lambda_n \le x < \lambda_{n+1} \end{cases} \tag{6.40}$$

Un teorema de Landau sobre series de Dirichlet con coeficientes positivos asegura que la abscisa de convergencia de la serie en (6.39) es $\mathrm{Re}\, s = 1$, (cf. Ap. D, Cor.). Un teorema debido a Ikehara, (cf. Ap. I), es aplicable ahora a la integral (6.39) y asegura que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = \frac{1}{4\pi}. \tag{6.41}$$

En particular,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha(\lambda_N)}{\lambda_N} = \frac{1}{4\pi}, \text{ QED.} \tag{6.42}$$

6F. ESQUEMA DE UNA DEMOSTRACION DE T. CARLEMAN DE UN TEOREMA DE H. WEYL. Recordemos que para $\mathrm{Re}\, s > 6$:

$$(6.43)\qquad \phi(p;s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^s}=$$

$$=\left[\frac{-\log\sqrt{a}}{2\pi}+d-\frac{1}{4\pi(s-1)}\right]a^{1-s}\frac{\operatorname{sen}s\pi}{\pi(s-1)}+\frac{\operatorname{sen}s\pi}{\pi}\int_a^{\infty}(H(p,p)-H(p,p;-t))\frac{dt}{t^s}=$$

$$=\frac{1}{4\pi(s-1)}+Z_2(s)+\frac{\operatorname{sen}s\pi}{\pi}\theta(p;s),$$

donde d=cte., Z_2 es analítica entera y $\theta(p;s)$ *representa la última integral*. Integrando respecto de p,

$$(6.44)\qquad \int_D\phi(p;s)\,dp=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-s}=\frac{|D|}{4\pi(s-1)}+|D|\,Z_2(s)+\frac{\operatorname{sen}s\pi}{\pi}\int_D\theta(p;s)\,dp.$$

Supongamos que la última integral *defina una función* Z_4, analítica regular en $\operatorname{Re}s>1$ y continua en $\operatorname{Re}s\geq 1$. Definamos:

$$(6.45)\qquad \beta(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<\lambda_1\\ n & si\ \lambda_n\leq x<\lambda_{n+1}\end{cases}$$

Entonces, el miembro izquierdo de (6.44) puede escribirse como $\int_a^{\infty}x^{-s}d\beta(x)$. Una aplicación del teorema de Ikehara daría

$$(6.46)\qquad \frac{\beta(t)}{t}\xrightarrow[t\to\infty]{}\frac{|D|}{4\pi}.$$

En particular, $\frac{n}{\lambda_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{|D|}{4\pi}$. O sea, si denotamos con C^a, o mejor con $C^a(\operatorname{Re}s\geq 1)$, a la clase de funciones regulares en $\operatorname{Re}s>1$, continuas en $\operatorname{Re}s\geq 1$, tenemos

LEMA 3. Sea D una región G. Si $Z_4(s)\in C^a(\operatorname{Re}s\geq 1)$ entonces

$$(6.47)\qquad \lambda_n\sim\frac{4\pi n}{|D|}.\blacklozenge$$

6G. **TEOREMA 4**. (H. Weyl) Sea D una región G con la propiedad S. Entonces, para $N\to\infty$,

i) $$\frac{\sum_{i=1}^{N}\phi_n^2(p)}{N}\to\frac{1}{|D|}$$

ii) $$\lambda_n\sim\frac{4\pi n}{|D|}.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. *i*) sigue de *ii*) y el Teor. 3. Demostraremos *ii*) probando que bajo las hipótesis mencionadas al integrar sobre D a cada sumando de

$$(6.48)\qquad \theta(p;s)=\int_a^{\infty}\big(H(p,p)-H(p,p;-t)\big)t^{-s}dt,$$

obtenemos una función en C^a.

Sea $a \le \lambda < \infty$, $\operatorname{Re} s \ge 1$. Entonces, por (6.35), si s permanece en un compacto, $0 \le \frac{H(p,p;-\lambda)}{\lambda^{\operatorname{Re} s}} \le K_0(\sqrt{\lambda}\, l_p)\frac{a^{1-\operatorname{Re} s}}{\lambda}$. En consecuencia, la existencia, regularidad y continuidad de

$$(6.49) \qquad Z_3(s) := \int_D dp \int_a^{\infty} H(p,p;-t)\, t^{-s} dt,$$

quedará probado si mostramos que $\int_D dp \int_a^{\infty} \frac{K_0(\sqrt{\lambda\, l_p})}{\lambda} d\lambda < \infty$, (cf. Lema 1, Ap.F).

Sea $t = \sqrt{\lambda}\, l_p$. Tenemos

$$(6.50) \qquad \int_D dp \int_a^{\infty} \frac{K_0(\sqrt{\lambda\, l_p})}{\lambda} d\lambda = 2\int_D dp \int_{\sqrt{a}\, l_p}^{\infty} \frac{K_0(t)}{t} dt = 2\int_D dp \int_0^{\infty} K_0(t) I_{\{t > \sqrt{a}\, l_p\}}(t)\, \frac{dt}{t} =$$

$$= 2\int_0^{\infty} K_0(t)\frac{dt}{t} \int_D I_{\{t > \sqrt{a}\, l_p\}}(t)\, dp = 2\int_0^{\infty} K_0(t) \left| \{p : t/\sqrt{a} > l_p\} \right| \frac{dt}{t} = 2\int_0^{\infty} K_0(\sqrt{a}\, u) \left| \{p : u > l_p\} \right| \frac{du}{u} =$$

$$= \int_0^1 K_0(\sqrt{a}\, u)\, O(u^{\varepsilon - 1})\, du + \int_1^{\infty} K_0(\sqrt{a}\, u) \frac{|D|}{u} du = O(1),$$

pues $K_0(.)$ crece como logaritmo en el origen y decae exponencialmente en el infinito. Análogamente se prueba que $H(p,p) \in L^1(D)$:

$$(6.51) \quad \int_D H(p,p)\, dp = \int_D |H(p,p)|\, dp \le \frac{1}{2\pi} \int_D \log \frac{M}{l_p} dp \le \int_D dp \int_{l_p}^{M} \frac{dt}{t} = \int_0^M \left| \{t : t > l_p\} \right| \frac{dt}{t} = O(1),$$

QED.

COROLARIO 3. Si D es un dominio perimetrizable entonces valen *i*) e *ii*) del T.4.♦

CAPITULO 7
OPERADORES HIPOELIPTICOS.

7A. El *soporte* de una distribución T es el complemento del mayor abierto donde T es nula. El *soporte singular* de T es el complemento del mayor abierto donde T coincide con una función C^∞. Vale: $sop\ singT \subset sopT$. Si A es una distribución de soporte compacto entonces $sop\, A * T \subset sopA + sopT$, (cf. [H]). Análogamente,

(7.1) $$sop\ sing\, A * T \subset sop\ sing\, A + sop\ singT.$$

Sea $P(\xi)$ un polinomio: $P(\xi) = \sum a_{j_1 \dots j_n} \xi_1^{j_1} .. \xi_n^{j_n}$ y $P(D)$ el operador diferencial

$$P(D) = \sum a_{j_1 \dots j_n} \left(\frac{\partial}{i\partial x_1} \right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{i\partial x_n} \right)^{j_n} = \sum a_{j_1 \dots j_n} D_1^{j_1} \dots D_n^{j_n}.$$

Luego, si $u, v \in C_0^\infty$, entonces $(D_h u, v) = (u, D_h v)$ donde $(u,v) = \int u\bar{v}\, dx$. Además, si $P(D)u = f$, u una distribución cualquiera, entonces

(7.2) $$sop\ singu \supset sop\ sing f.$$

DEFINICION 1. $P(D)$ se dice hipoelíptico si $P(D)u = f$ implica $sop\ sing u = sop\ sing f$. •

PROPOSICION 1. Si T es una distribución en el abierto U y $P(D)$ es hipoelíptico entonces $P(D)T \in C^\infty$ en U implica $T \in C^\infty$ en U. •

TEOREMA 1. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) $P(D)$ es hipoelíptico,

ii) $P(D)\, u=0$ en el abierto Ω implica $u \in C^\infty$ en Ω,

iii) Existe solución elemental E, $P(D)E = \delta$, tal que $sop\ sing\ E = \{0\}$.•

DEMOSTRACION. *iii*)$\Rightarrow$*i*) Sea $\phi = 1$ sobre el compacto K contenido en el abierto Ω donde $f \in C^\infty$. Luego, si $0 \le \phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$P(D)(\phi u) = P(D)u + P(D)((\phi - 1)u) = f + P(D)((\phi - 1)u)$$

Entonces, $sop\ sing\ P(D)(\phi u) \subset \overline{\{x; \phi(x) \neq 1,0\}} =: B$. Como $P(D)(\phi u) * E = \phi u$, de (7.1) obtenemos: $sop\ sing P(D)(\phi u) + sop\ sing\ E \supset sop\ sing\ \phi u$. Y de (7.2) sigue que $sop\ sing\ \phi u \subset B$. En consecuencia, $u \in C^\infty$ en Ω.

i)$\Rightarrow$*ii*) Sigue de la definición. *ii*)$\Rightarrow$*iii*). Existen soluciones elementales (cf. Teor. 6). Luego, todas ellas tienen su soporte singular igual a $\{0\}$, QED.

7B. Sea $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in C^n$, $P(\zeta) = 0$. Entonces

(7.3) $$u(x) = e^{i<\zeta,x>}$$

es solución de $P(D)u = 0$, pues $P(D)u = P(\zeta)u$.

TEOREMA 2. Sea $\{\zeta^k\}$ una sucesión de n-uplas en C^n tal que: $P(\zeta^k) = 0$, $|\mathrm{Re}\zeta^k| \to \infty$, $|\mathrm{Im}\zeta^k| \le M = cte$. Entonces $P(D)$ no es hipoelíptico.•

DEMOSTRACION. Si $\sum c_k \exp i < \zeta^k, x >$ converge en el sentido de las distribuciones a T entonces

(7.4) $$P(D)T = \sum c_k P(\zeta^k) \exp i < \zeta^k, x >= 0.$$

Supongamos para fijar las ideas que n=1, $\zeta^k = \xi_k$ real, $|\xi_k| \to \infty$. Es posible encontrar una solución numérica real $\{c_k\}$ tal que

$$(7.5) \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| < \frac{|c_N|}{2}; \quad \sum_{k=1}^{N-1} |c_k \xi_k| \le \frac{|c_N \xi_N|}{2\pi} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty .$$

Por ejemplo $c_n = 4^{-n}$ sirve si $|\xi_{k+1}| > \pi|\xi_k|$. Esto último siempre se puede lograr pasando a una subsucesión de $\{\xi_k\}$.

Sea $u := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp i\xi_k x$. Entonces,

$$|u(x+\pi/\xi_N) - u(x)| = \left| -2c_N \exp i\xi_N x + \sum_{k\neq N} c_k (\exp i\xi_k (x+\pi/\xi_N) - \exp i\xi_k x) \right| \ge$$

$$\ge 2|c_N| - \sum_{N+1}^{\infty} 2|c_k| - \sum_{k=1}^{N-1} |c_k| \left| i\xi_k \int_x^{x+\pi/\xi_N} \exp i\xi_k t \, dt \right| \ge |c_N| - \sum_{k=1}^{N-1} |c_k \xi_k \pi/\xi_N| \ge |c_N/2| .$$

En consecuencia,

$$(7.6) \qquad \frac{|u(x+\pi/\xi_N) - u(x)|}{\pi/\xi_N} \ge \left| \frac{c_N \xi_N}{2\pi} \right| \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty ,$$

y u no es diferenciable en ningun punto.

Si n=1 y $\zeta^k = \xi_k + i\eta_k$, con $|\eta_k| \le M$, $|\xi_k| \to \infty$, se puede modificar la demostración precedente para obtener que $u := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp i\zeta^k x$ no es diferenciable en ningún punto. En efecto, la expresión

$$|u(x+\pi/\xi_N) - u(x)| = \left| -(1+\exp\frac{-\pi\eta_N}{\xi_N}) c_N \exp i\zeta^N x + \sum_{k\neq N} c_k (\exp i\zeta^k (x+\pi/\xi_N) - \exp i\zeta^k x) \right| ,$$

será del orden del primer sumando si los coeficientes verifican:

$$(7.5') \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| < c(M)|c_N|; \quad \sum_{k=1}^{N-1} |c_k \xi_k| \le c(M) |c_N \xi_N| \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty , \quad c(M)\text{=const. pequeña,}$$

y la demostración se repite. Se ve también que lo mismo ocurre para el caso en que ζ^k sea una n-upla. La u así definida contradice a la proposición 1, QED.

7C. **DEFINICION 2.** Diremos que $k(x)$ es una función de peso temperada (sobre R^n) si $k(x) > 0$ y verifica, para ciertas constantes M y N positivas,

$$(7.7) \qquad k(\xi+\eta) \le k(\xi)(1+M|\eta|)^N, \text{ para todo } \xi, \eta \in R^n .$$

Al conjunto de tales funciones lo denotaremos con K.•

La siguiente proposición sigue fácilmente de la definición.

PROPOSICION 2. Si $k \in K$ entonces es continua pues vale

$$(7.8) \qquad (1+M|\eta|)^{-N} \le \frac{k(\xi+\eta)}{k(\xi)} \le (1+M|\eta|)^N, \text{ para todo } \xi, \eta \in R^n .$$

Además $1/k \in K$.•

EJEMPLOS. 1) $k_s(\xi) := (1+|\xi|^2)^{s/2}$, s real. $k_s \in K$; en efecto,

$1+|\xi+\eta|^2 \le 1+|\xi|^2+2|\xi||\eta|+|\eta|^2 \le (1+|\xi|^2)(1+|\eta|)^2$.

2) Sea $P(\xi)$ un polinomio de grado *m*. Denotaremos con $P^{(\alpha)}(\xi)$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, a $P^{(\alpha)}(\xi):=\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{\alpha_1}...\left(\dfrac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{\alpha_n}P(\xi)$ y con $|\alpha|$ a $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$. Entonces,

(7.9) $$\widetilde{P}(\xi)^2 := \sum_{|\alpha|\ge 0}\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 \in K\,.$$

DEMOSTRACION. La fórmula de Taylor para $P(\xi)$ se escribe

(7.9') $$P(\xi+\eta)=\sum_{|\beta|\le m}\frac{P^{(\beta)}(\xi)\eta^\beta}{\beta!}, \qquad \text{donde } \eta^\beta=\eta_1^{\beta_1}...\eta_n^{\beta_n},\ \beta!=\beta_1!...\beta_n!\,.$$

Por tanto,

$$\left|P^{(\alpha)}(\xi+\eta)\right|^2 \le \left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2+2\left|P^{\alpha}(\xi)\right|\left|\sum_{0<|\beta|\le m-|\alpha|}\frac{P^{(\alpha+\beta)}(\xi)\eta^\beta}{\beta!}\right|+\left|\sum_{0<|\beta|\le m-|\alpha|}\frac{P^{(\alpha+\beta)}(\xi)\eta^\beta}{\beta!}\right|^2.$$

Luego, si $g_h(\eta):=\left(\sum_{0<|\beta|\le h}\left(|\eta^\beta|/\beta!\right)^2\right)^{1/2}$, vale $g_h(\eta)\le\sum_{0<|\beta|\le h}|\eta|^{|\beta|}$ y resulta:

$$\left|P^{(\alpha)}(\xi+\eta)\right|^2 \le \left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2+2\left|P^{\alpha}(\xi)\right|.\,g_{m-|\alpha|}(\eta)\,\widetilde{P}(\xi)+g^2_{m-|\alpha|}(\eta)\,\widetilde{P}^2(\xi)\,.$$

Sumando obtenemos

$$\frac{\widetilde{P}^2(\xi+\eta)}{\widetilde{P}^2(\xi)}\le 1+\sum_{|\alpha|<m}\left(2g_{m-|\alpha|}(\eta)+g^2_{m-|\alpha|}(\eta)\right)\le 1+c_1|\eta|+...+c_{2m}|\eta|^{2m}\le\left(1+C|\eta|\right)^{2m}, \text{ QED.}$$

3) Con la misma demostración se prueba que

(7.10) $$\widetilde{P}'(\xi)^2 := \sum_{|\alpha|>0}\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right|^2 \in K\,.$$

DEFINICION 3. Sean $k\in K$, $1\le p\le\infty$. $B_{p,k}:=\left\{u\in S' : k.\hat{u}\in L^p\right\}$ con la norma

(7.11) $$\|u\|_{p,k}:=\frac{1}{(2\pi)^{n/p}}\|\hat{u}k\|_p\,.\blacklozenge$$

Recordemos que la transformada de Fourier de $f\in S$, $\hat{f}$, se *define como*

(7.12) $$\hat{f}(\xi)=\int_{R^n}\exp(-i<x,\xi>)\,f(x)\,dx\,.$$

La fórmula de inversión se escribe entonces

(7.13) $$f(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\exp(i<x,\xi>)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

La fórmula de Parseval toma la siguiente forma

(7.14) $$\int f(x)\,\overline{h}(x)\,dx=(2\pi)^{-n}\int\hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{h}}(\xi)\,d\xi\,, \qquad \int|f(x)|^2\,dx=(2\pi)^{-n}\int\left|\hat{f}(\xi)\right|^2\,d\xi\,.$$

Sea $\phi\in C_0^\infty$. *Definimos*: ${}^{\vee}\phi(x):=\phi(-x)$. Si $g\in D'(R^n)$, $<{}^{\vee}g,\phi>:=<g,{}^{\vee}\phi>$. Entonces, para *f* y *g* en *S* tenemos

(7.15) $$\left|\int f\ {}^{\vee}g\,dx\right|=\left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int\hat{f}\,\hat{g}\,d\xi\right|\le\|f\|_{p,k}\|g\|_{p*,1/k}\,,$$

(7.16) $$\|g\|_{p*,1/k} = \sup_{f\in S} \frac{|<^{\vee}g,f>|}{\|f\|_{p,k}}.$$

(7.15) implica la desigualdad $\geq$ en (7.16). La igualdad puede demostrarse, por ejemplo, probando que $S.k$ es una familia densa en L^p, $1\leq p<\infty$, y que en L^∞ es una familia determinante para L^1, o sea, suficiente para el cálculo de la norma 1. Más aun, vale el

TEOREMA 3. (cf. [H]) *i)* $B_{p,k}$ es un espacio de Banach tal que $S\subset B_{p,k}\subset S'$ aun topológicamente,

ii) $C_0^\infty(R^n)$ es denso en $B_{p,k}$ si $1\leq p<\infty$,

iii) si $1\leq p<\infty$ el dual de $B_{p,k}$ es $B_{p*,1/k}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p*}=1$; es decir, dada una funcional lineal continua L sobre $B_{p,k}$ existe exactamente un elemento $g\in B_{p*,1/k}$ tal que para todo $f\in S$,

$$L(f)=<^{\vee}g,f>,$$

y la norma de L coincide con $\|g\|_{p*,1/k}$,

iv) $k_1\leq k_2 \Rightarrow B_{p,k_1}\supset B_{p,k_2}$.♦

DEFINICION 4. Dada $k\in K$ llamaremos M_k a la función

(7.17) $$M_k(y):=\sup_{x\in R^n}\frac{k(x+y)}{k(x)}.♦$$

Veamos el siguiente resultado que complementa a la proposición 2.

PROPOSICION 3. *i)* $M_k(x+y)\leq M_k(x)M_k(y)$, $M_k\in K$.

ii) $k_1,k_2\in K \Rightarrow k_1.k_2,\ k_1/k_2,\ k_1+k_2\in K$,

iii) para todo s real, $k\in K\Rightarrow k^s\in K$.♦

DEMOSTRACION. *i)* De (7.17) sigue que $M_k(y)\leq (1+C|y|)^N$ para ciertos C y N. También que $\frac{M_k(x+y)}{M_k(x)}\leq \sup_z \frac{k(x+y+z)}{k(z)}\frac{1}{M_k(x)}\leq \sup_z\frac{k(x+y+z)}{k(z)}\frac{k(z)}{k(x+z)}=M_k(y)$.

ii) y *iii)* siguen de (7.7) o de (7.8), QED.

(Usando la proposición 3 se ve fácilmente que tanto $\widetilde{P}$ como $\widetilde{P}'$ están en K.)

PROPOSICION 4. Sea $1\leq p\leq\infty$. Si $\phi\in S$ y $u\in B_{p,k}$ entonces $\phi u\in B_{p,k}$ y

(7.18) $$\|\phi u\|_{p,k}\leq \|u\|_{p,k}\|\phi\|_{1,M_k}.♦$$

DEMOSTRACION. Tenemos: $(\phi u)^\wedge = (2\pi)^{-n}\hat{\phi}*\hat{u}$. Luego,

$$k(x)|(\phi u)^\wedge(x)|\leq (2\pi)^{-n}\int |k(x-y)\hat{u}(x-y)M_k(y)\hat{\phi}(y)|dy,$$

y por lo tanto, $\|k(\phi u)^\wedge\|_p\leq \|k\hat{u}\|_p\|M_k\phi\|_1/(2\pi)^n$. En consecuencia,

$$\|u\phi\|_{p,k}\leq\|u\|_{p,k}\|\phi\|_{1,M_k}, \qquad \text{QED.}$$

7D. **DEFINICION 5.** Un subespacio vectorial (SV) de $D'(\Omega)$, F, se dice *semilocal* si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $u \in F \Rightarrow \phi u \in F$. F semilocal se dirá *local* si pertenece a F todo $u \in D'(\Omega)$ tal que $\phi u \in F$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.♦

TEOREMA 4. Sea F semilocal. El menor espacio local que contiene a F es

(7.19) $\qquad F^{loc}(\Omega) := \{ u \in D'(\Omega) : \phi u \in F \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \}$.♦

EJEMPLOS. 1) $D'(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $L^1_{loc}(\Omega)$ son espacios locales,

2) $E'(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ son semilocales pero no locales,

3) $S'(R^n)$ es semilocal pero no local,

4) $\left(S'(R^n)\right)^{loc} = D'(R^n)$; $\left(C_0^\infty(\Omega)\right)^{loc} = C^\infty(\Omega)$,

5) $B_{p,k}\big|_\Omega$ es semilocal (prop. 4).

DEFINICION 6. $B_{p,k}^{loc}(\Omega)$ es el menor espacio local que contiene a $B_{p,k}\big|_\Omega$, (cf. Teor. 4). Si $\Omega = R^n$ escribiremos simplemente $B_{p,k}^{loc}$ en lugar de $B_{p,k}^{loc}(R^n)$.♦

PROPOSICION 5. *i)* $\delta \in B_{p,k}^{loc}(\Omega) \cap D'(\Omega) \Rightarrow k \in L^p$,

ii) $u \in B_{p,k}^{loc}(\Omega) \Rightarrow P(D)u \in B_{p,k/\widetilde{P}}^{loc}(\Omega)$.♦

DEMOSTRACION. *i)* De la hipótesis sigue que $\delta \in B_{p,k}$, y por tanto que $k \in L^p$.

ii) Sean $\widetilde{k} = k/\widetilde{P}$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi = 1$ en un entorno del soporte de ϕ. Entonces $\phi(P(D)u) = \phi(P(D)(\psi u))$. Luego,

$$\left\|\phi P(D)u\right\|_{p,\widetilde{k}} \leq \left\|\phi\right\|_{1,M_{\widetilde{k}}} \left\|P(D)(\psi u)\right\|_{p,\widetilde{k}} \leq C\left\|(\psi u)^\wedge P\widetilde{k}\right\|_p \leq$$

$$\leq C\left\|(\psi u)^\wedge \widetilde{P}\widetilde{k}\right\|_p = C\left\|(\psi u)^\wedge k\right\|_p = C'\left\|\psi u\right\|_{p,k}, \text{ QED.}$$

TEOREMA 5. Sea E una solución fundamental de $P(D)$, es decir, $P(D)E = \delta$. Entonces, si $E \in B_{p,k}^{loc}(R^n)$ se tiene $B_{\infty,\widetilde{P}} \subset B_{p,k}$ y $B_{\infty,\widetilde{P}}^{loc} \subset B_{p,k}^{loc}$.♦

DEMOSTRACION. De la proposicion precedente obtenemos $P(D)E = \delta \in B_{p,k/\widetilde{P}}^{loc}$, o sea $k/\widetilde{P} \in L^p$. Luego, si $\hat{u}\widetilde{P} \in L^\infty$ entonces $\hat{u}k = (\hat{u}\widetilde{P})(k/\widetilde{P}) \in L^p$, es decir, $B_{\infty,\widetilde{P}} \subset B_{p,k}$, QED.

7E. **TEOREMA 6.** Existe una distribución $E \in B_{\infty,\widetilde{P}}^{loc}$ tal que $P(D)E = \delta$ y verifica $E/\cosh|x| \in B_{\infty,\widetilde{P}}$.♦

Este teorema dice que en cierto sentido existen soluciones elementales con las mejores propiedades locales (cf. Teor. 5). Para probarlo recurriremos al siguiente lema que aceptamos sin demostración (cf. [H]).

LEMA FUNDAMENTAL. Sea P un polinomio de grado m. Existe $C = C(m,n)$ tal que para todo $u \in C_0^\infty(R^n)$

(7.20) $$|u(0)| \leq C\left\|\cosh|x| . P(D)u(x)\right\|_{1,1/\widetilde{P}}.$$♦

DEMOSTRACION DEL T.6. Sea B el subespacio vectorial de $C_0^\infty(R^n)$ definido por

$$B := \{w \in C_0^\infty : w = \cosh|x|.P(D)u,\, u \in C_0^\infty\},$$

considerado con la norma de $B_{1,1/\tilde{P}}$. La funcional lineal: $L(w)=u(0)$ está bien definida en B y es acotada allí en virtud de (7.20). Designemos también con L una extensión de la misma a todo el espacio de Banach $B_{1,1/\tilde{P}}$. Entonces existe $E_1 \in B_{\infty,\tilde{P}}$ tal que

$$L(w) = <{}^{\vee}E_1, w>,\ w \in S.$$

Luego, $u(0) = <{}^{\vee}E_1, \cosh|x|.P(D)u>$, para todo $u \in C_0^\infty$. Esto es, $<P(-D)({}^{\vee}E_1\cosh|x|), u> =$ $=u(0)$, o lo que es lo mismo $<P(D)(E_1\cosh|x|), u> = u(0)$. Entonces, $E = E_1\cosh|x|$ es una solución elemental que satisface la tesis, QED.

PROPOSICION 6. Si $u \in B_{p,k_1}$ y es de soporte compacto y $E \in B^{loc}_{\infty,k_2}$ entonces $u*E \in B^{loc}_{p,k_1k_2}$.♦

DEMOSTRACION. Sea $\phi \in C_0^\infty(R^n)$ y sean $K=$ soporte de ϕ, $K'=$ soporte de u. Sea $\psi \in C_0^\infty(R^n)$ tal que $\psi = 1$ en un entorno de $K-K' = \{x-y : x\in K, y \in K'\}$. Entonces, $(sop(1-\psi)+K')\cap K = \varnothing$. Por tanto, $\phi(u*(1-\psi)E)=0$, o sea, $\phi(u*E)=\phi(u*\psi E)$. Luego, utilizando la proposición 4 obtenemos,

$$\|\phi(u*E)\|_{p,k_1k_2} \le C\|u*\psi E\|_{p,k_1k_2} = C'\|\hat{u}(\psi E)^\wedge k_1k_2\|_p \le C'\|(\psi E)^\wedge k_2\|_\infty \|\hat{u}k_1\|_p < \infty, \text{ QED.}$$

Recordemos la fórmula de Leibnitz. Sea $P(\xi)$ un polinomio de grado m. Entonces, si convenimos que $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$ con $D_h = \dfrac{\partial}{i\partial x_h}$, tenemos:

$$P^{(\alpha)}(\eta) = \frac{\partial^{|\alpha|}P(\eta)}{\partial\eta_1^{\alpha_1}\ldots\partial\eta_n^{\alpha_n}} = i^{|\alpha|}D^\alpha P(\eta), \tag{7.21}$$

$$P(D)(\phi u) = \sum_\alpha \frac{D^\alpha\phi}{\alpha!}P^{(\alpha)}(D)u, \text{ (Leibnitz).} \tag{7.22}$$

TEOREMA 7. Si $u \in B^{loc}_{p,k}(\Omega)$ y $P(D)u=0$ en Ω entonces $u \in B^{loc}_{p,k(\tilde{P}/\tilde{P}')^h}(\Omega)$, para todo $h = 1, 2, 3, \ldots$.♦

DEMOSTRACION. Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. De (7.22), $P(D)(\phi u) = \sum_{\alpha\neq 0}(D^\alpha\phi)P^{(\alpha)}(D)u/\alpha!$.

Como para $\alpha \neq 0$, $\tilde{P}^{(\alpha)}(\xi) \le \tilde{P}'(\xi)$, de la proposición 5 obtenemos:

$$P^{(\alpha)}(D)u \in B^{loc}_{p,k/\tilde{P}^{(\alpha)}}(\Omega) \subset B^{loc}_{p,k/\tilde{P}'}(\Omega).$$

Luego, $P(D)(\phi u) \in B_{p,k/\tilde{P}'}$. Sea E una solución elemental como en el teorema 6: $E \in B^{loc}_{\infty,\tilde{P}}$. Pero $\phi u = \delta * \phi u = P(D)E * \phi u = E * P(D)(\phi u)$ y de la proposición 6 sigue que $\phi u \in B^{loc}_{p,\tilde{P}.k/\tilde{P}'}$. Por tener soporte compacto, $\phi u \in B_{p,\tilde{P}.k/\tilde{P}'}$. Aplicando repetidamente este resultado se obtiene $\phi u \in B_{p,k.(\tilde{P}/\tilde{P}')^h}$. Luego, $\phi u \in B_{p,k.(\tilde{P}/\tilde{P}')^h}(\Omega)$. Del teorema 4 sigue ahora la tesis, QED.

TEOREMA 8. (Lema de Sobolev) Si $h \in K$ verifica $\frac{(1+|x|)^j}{h(x)} \in L^{p*}(R^n)$ para un $j \in N$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p*}=1$, entonces $B_{p,h}^{loc}(\Omega) \subset C^j(\Omega)$. ♦

DEMOSTRACION. Si $|\alpha| \leq j$, $u \in B_{p,h}^{loc}(\Omega)$ entonces $\phi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow (u\phi)^\wedge . h \in L^p(R^n) \Rightarrow$

$\Rightarrow (u\phi)^\wedge (1+|x|)^j \in L^1 \Rightarrow (u\phi)^\wedge \xi^\alpha \in L^1$. Es decir, $(D^\alpha (u\phi))^\wedge \in L^1$. En consecuencia, $D^\alpha (u\phi) \in C(R^n)$ para todo α con $|\alpha| \leq j$, QED.

El teorema 7 admite el siguiente corolario.

COROLARIO 1. Si $\frac{\widetilde{P}(\xi)}{\widetilde{P}'(\xi)} \geq Q(1+|\xi|)^\varepsilon$ con ε, Q constantes positivas, entonces

i) $u \in B_{p,k}^{loc}(\Omega)$, $P(D)u=0$ implican $u \in C^\infty(\Omega)$,

ii) $P(D)$ es hipoelíptico.♦

DEMOSTRACION. *i)* $k_1(x) := (k.(\widetilde{P}/\widetilde{P}')^h)(x) \geq C(1+|x|)^{-N}.(1+|x|)^{\varepsilon h}$ implica $(1+|x|)^j / k_1(x) \leq C((1+|x|)^{j-\varepsilon h+N} \in L^{p*}(R^n)$ si h=$h(j)$ es bastante grande. Como $k_1(x) \in K$, del lema de Sobolev sigue que $B_{p,k(\widetilde{P}/\widetilde{P}')^{h(j)}}^{loc}(\Omega) = B_{p,k_1}^{loc}(\Omega) \subset C^j(\Omega)$. O sea, por el teorema 7, $u \in C^j(\Omega)$, y esto para todo j.

$i) \Rightarrow ii)$ Si E es la solución elemental del Teorema 6 tenemos para $\Omega = R^n \backslash \{0\}$: $E \in B_{\infty,\widetilde{P}}^{loc}(\Omega)$ y $P(D)E=0$. Luego, $E \in C^\infty(\Omega)$, y aplicando Teorema 1 sigue *ii)*, QED.

7F. Nuestro objetivo final es demostrar la recíproca del teorema 2. Para eso necesitamos reformular ese resultado.

DEFINICION 7. Dado $P(\xi)$, polinomio de grado m con coeficientes complejos sobre R^n, si $\xi \in R^n$,

$$d(\xi) := \inf\{|\xi - \zeta| : \zeta \in C^n, P(\zeta)=0\}.$$

O sea, $d(\xi)$ define la distancia de ξ a la familia de ceros de P. ♦

Si para $\xi \to \infty$, $d(\xi) \not\to \infty$, entonces existe $\{\xi_{(h)}\} \subset R^n$ tal que $|\xi_{(h)}| \to \infty$ y $d(\xi_{(h)}) \leq M < \infty$. Sea $\zeta_{(h)} = \xi_{(h)} + \eta_{(h)}$, $P(\zeta_{(h)})=0$, $|\zeta_{(h)} - \xi_{(h)}| = d(\xi_{(h)})$. Entonces $|\eta_{(h)}| \leq M$, y por tanto, $|\mathrm{Im}\, \zeta_{(h)}| \leq M$, $|\mathrm{Re}\, \zeta_{(h)}| \to \infty$. En consecuencia el teorema 2 puede reescribirse de la siguiente manera.

TEOREMA 2´. Si $P(D)$ es hipoelíptico entonces $d(\xi) \to \infty$ para $\xi \to \infty$. ♦

Sin embargo $d(\xi) \to \infty$ no puede lograrse en forma arbitrariamente lenta como muestra el siguiente resultado cuya demostración puede verse en el Apéndice A.

TEOREMA 9. Sea $P(\zeta)$ un polinomio de grado m en $(\zeta_1, \zeta_2, .. \zeta_n)$. Si $d(\xi) \to \infty$ para $\xi \to \infty$ entonces existen constantes positivas c y ε tales que $d(\xi) > c|\xi|^\varepsilon$ para $|\xi|$ suficientemente grande.♦

Luego, el siguiente teorema 10 es la recíproca del T.2′.

TEOREMA 10. Si existen constantes positivas c y ε tales que $d(\xi) > c|\xi|^{\varepsilon}$ para $|\xi|$ suficientemente grande entonces $P(D)$ es hipoelíptico.•

COROLARIO 2. $P(D)$ es hipoelíptico si y sólo si $d(\xi) \to \infty$ para $\xi \to \infty$ y si y sólo si existen constantes positivas c y ε tales que $d(\xi) > c|\xi|^{\varepsilon}$ para $|\xi|$ suficientemente grande.•

Veamos ahora la demostración del teorema 10.

LEMA 1. Sea $P(\zeta)$ un polinomio en $\zeta \in C^n$ de grado m. Existe C=$C(m,n)$ tal que para todo $\xi \in R^n$ con $P(\xi) \neq 0$:

$$\frac{1}{C} \leq d(\xi)\sum_{\alpha \neq 0}\left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/|\alpha|} \leq C\,.\bullet \tag{7.23}$$

DEMOSTRACION. Sea $A := \sum_{\alpha \neq 0}\left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/|\alpha|}$ y $\zeta = \xi + \eta$. Tenemos,

$$\left|\frac{P(\zeta)-P(\xi)}{P(\xi)}\right| = \left|\sum_{0<|\alpha|\leq m}\frac{\eta^{\alpha}P^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!\,P(\xi)}\right| \leq \sum_{0<|\alpha|}\frac{|\eta_1|^{\alpha_1}\ldots|\eta_n|^{\alpha_n}A^{\Sigma\alpha_i}}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} \leq$$
$$\leq \exp(\sum_i|\eta_i|A) - 1 \leq \exp(n|\eta|A) - 1\,.$$

Luego, si $P(\zeta) = 0$, $1 \leq \exp(n|\eta|A) - 1$ y por tanto $\log 2 \leq nA|\xi - \zeta|$. De esto sigue que $\frac{\log 2}{n} \leq A.d(\xi)$ y esta es la primera desigualdad en (7.23).

Por otra parte, de (7.9′) y la fórmula de Cauchy obtenemos

$$\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n}\int_{|\eta_1|=r}\cdots\int_{|\eta_n|=r}P(\xi+\eta)/P(\xi)\frac{d\eta_1}{\eta_1^{\alpha_1+1}}\cdots\frac{d\eta_n}{\eta_n^{\alpha_n+1}}$$

lo cual implica

$$\left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right| \leq \frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}}\max_{|\eta_i|=r}\left|\frac{P(\xi+\eta)}{P(\xi)}\right| \leq \frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}}\max_{|\eta|\leq\sqrt{n}\,r}\left|\frac{P(\xi+\eta)}{P(\xi)}\right|. \tag{7.24}$$

Tomemos $r = \frac{d(\xi)}{\sqrt{n}}$, $|\eta| \leq d(\xi)$. Sea $q(t) := \frac{P(\xi + t\eta)}{P(\xi)}$. Obviamente $q(0) = 1$ y las raíces $t_1,\ldots,t_m$ de $q(t) = 0$ verifican $|t_j| \geq 1$. Luego $|q(t)| \equiv |1 - t/t_1|\ldots|1 - t/t_m| \leq 2^m$ para $t \in [0,1]$. En consecuencia, $|P(\xi+\eta)/P(\xi)| \leq 2^m$, y de (7.24) sigue que

$$\left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right| \leq \frac{\alpha!\,2^m n^{|\alpha|/2}}{d(\xi)^{|\alpha|}}. \tag{7.25}$$

De (7.25) se deduce inmediatamente la segunda desigualdad en (7.23), QED.

DEMOSTRACION DEL T. 10. La hipótesis junto con el lema 1 implican que

$$\sup_{0<|\alpha|\leq m}\left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right| \leq C|\xi|^{-\varepsilon}.$$

Luego, $\sum_{\alpha\neq 0}\left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right|^2 \leq \frac{C'}{|\xi|^{2\varepsilon}}$ para $|\xi|$ bastante grande. O sea, $\widetilde{P}'(\xi)\leq C''\widetilde{P}(\xi)/|\xi|^{\varepsilon}$, para $|\xi|$ bastante grande. Pero $\widetilde{P}\geq\widetilde{P}'$ implica que para todo ξ y cierta constante Q vale $Q.\widetilde{P}'(\xi)\leq\widetilde{P}(\xi)/(1+|\xi|)^{\varepsilon}$. Del cororolario 1 sigue ahora la tesis, QED.

7G. APLICACIONES. Obsérvese que si $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)\to 0$ para $\xi\to\infty$ cualquiera sea $\alpha\neq 0$ entonces $d(\xi)\to\infty$ y $P(D)$ es hipoelíptico, (cf. (7.23) y teoremas 9 y 10).

I) Sea $P(\xi)=\sum_{|\alpha|=m}c_\alpha\xi^\alpha+\sum_{|\alpha|<m}c_\alpha\xi^\alpha=P_m(\xi)+Q(\xi)$. $P_m(\xi)$ es la *parte principal* de *P*.

DEFINICION 8. *P* se dice elíptico si $\xi\in R^n$ y $P_m(\xi)$=0 implican $\xi=0$.•

PROPOSICION 7. Todo operador elíptico es hipoelíptico.•

En efecto, sea $c=\inf_{|\xi|=1}|P_m(\xi)|$. De esto sigue que $|P_m(\xi)|\geq c|\xi|^m$. Como $|Q(\xi)|\leq C'(1+|\xi|^{m-1})$ resulta $|P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|=O(|\xi|^{-|\alpha|})$ para $\xi\to\infty$.

II) **PROPOSICION 8.** El operador del calor es hipoelíptico.

En efecto, sea $P(\xi)=i\xi_1+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$. Luego, $P(D)=\frac{\partial}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n^2}\right)$. Si $|\alpha|\geq 1$ entonces $|P^{(\alpha)}(\xi)|^2$ es una constante o bien de la forma $|2\xi_j|^2$ para algún $j\in\{2,..n\}$, mientras que $|P(\xi)|^2=\xi_1^2+(\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)^2$. Entonces,

$$\left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right|^2\leq C\frac{1+\xi_2^2+..\xi_n^2}{\xi_1^2+(\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)^2}\leq C\frac{1+(\xi_1^2+(\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)^2)^{1/2}}{\xi_1^2+(\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2)^2}\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0.$$

III) **PROPOSICION 9.** Si la parte principal de $P(\xi)$ tiene un cero real no nulo, simple, entonces *P* no es hipoelíptico.•

En efecto, sea $P_m(\xi')=0$ y $\frac{\partial P_m}{\partial\xi_j}(\xi')\neq 0$. Entonces $\frac{\partial P}{\partial\xi_j}(t\xi')=t^{m-1}\frac{\partial P_m}{\partial\xi_j}(\xi')+\frac{\partial Q}{\partial\xi_j}(t\xi')=$ $=ct^{m-1}+O(t^{m-2})$ con $c\neq 0$ y $P(t\xi')=Q(t\xi')=O(t^{m-1})$. Luego $\frac{\partial P}{\partial\xi_j}(t\xi')\Big/P(t\xi')\not\to 0$ para $t\to\infty$.

En consecuencia, todo *P* hipoelíptico es tal que su parte principal no tiene ceros en $R^n\backslash\{0\}$, o bien, los tiene múltiples como en el ejemplo II).

IV) Sea ahora $\mu=(m_1,\ldots,m_n)$ una n-upla de enteros positivos. Definimos: $|\alpha:\mu|:=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{m_k}$.

Sea $P(D)$ un operador que se escribe como $P(D)=\sum_{|\alpha:\mu|\leq 1}a_\alpha D^\alpha$. Llamemos $P^\circ(D):=\sum_{|\alpha:\mu|=1}a_\alpha D^\alpha$.

DEFINICION 9. *P* se dice *semielíptico* si $P^\circ(\xi)\neq 0$ para todo $\xi\in R^n\backslash\{0\}$.•

Un operador elíptico es semielíptico con $\mu=(m,...,m)$ y el operador del calor lo es para $\mu=(1,2,...,2)$.

PROPOSICION 10. Todo operador semielíptico es hipoelíptico.•

En efecto, sea $f(\xi):=P^\circ(\xi)\Big/\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^{m_j}$. f verifica la siguiente propiedad de homogeneidad:

(7.26) $\qquad f(\xi_1,...,\xi_n)=f(t^{1/m_1}\xi_1,...,t^{1/m_n}\xi_n)$, para $t>0$.

La hipótesis implica

$$\inf\{f(\xi):\xi\in R^n\setminus\{0\}\}=\inf\{f(\xi):|\xi|=1\}=c>0$$

O sea, $P^\circ(\xi)\geq c\sum|\xi_j|^{m_j}$. Por otra parte:

$$|\xi^\beta|=|\xi_1|^{m_1(\beta_1/m_1)}...|\xi_n|^{m_n(\beta_n/m_n)}\leq\left(\sum|\xi_j|^{m_j}\right)^{\beta_1/m_1+...+\beta_n/m_n}=\left(\sum|\xi_j|^{m_j}\right)^{\beta:\mu}.$$

Entonces, $|\beta:\mu|<1$ implica $|\beta:\mu|\leq 1-\dfrac{1}{max\, m_j}=1-\varepsilon$. Luego, $|\xi^\beta|\leq\left(\sum|\xi|^{m_j}\right)^{1-\varepsilon}$ y si $\alpha\neq 0$ tenemos,

$$\left|\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\right|\leq\frac{M'\left(\sum|\xi_j|^{m_j}\right)^{1-\varepsilon}}{c\left(\sum|\xi_j|^{m_j}\right)-M\left(\sum|\xi_j|^{m_j}\right)^{1-\varepsilon}}\leq\frac{M'/c}{\left(\sum|\xi_j|^{m_j}\right)^{\varepsilon}-(M/c)}\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0,\qquad \text{QED.}$$

CAPITULO 8

EL OPERADOR DE STURM-LIOUVILLE $-\frac{1}{k(x)}\Delta_x$.

8.1. Sea $k(x)>0$ en $\overline{D}$, D un recinto de Jordan. Supongamos que $k(x)\in C(\overline{D})\cap Lip_{loc}(D)$ *), (cf. Ap. L, §AL5). El operador

(8.1) $$-\frac{1}{k(x)}\Delta_x u$$

admite una sistema de autofunciones reales $\{\phi_n\}$,

(8.2) $$\Delta\phi_n+\lambda_n k\phi_n=0, \qquad \phi_n|_{\partial D}=0,$$

en correspondencia con una sucesión de autovalores reales $\{\lambda_n\}$,

(8.3) $$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n\le\ldots, \quad \lambda_n\to\infty.$$

Las autofunciones pueden *normalizarse* de manera que

(8.4) $$\int_D\phi_i(x)\phi_j(x)k(x)dx=\delta_{ij}.$$

En esta situación forman un sistema ortonormal *completo* en $L^2(D;k)$, es decir, respecto del peso k en D, (véase Ap.V).

Queremos caracterizar el núcleo de Green $G_k(p,q;\lambda)$ del operador $-(\Delta+\lambda k)$ para $\lambda<0$. Es decir, para $\lambda=-\chi^2$, $\chi>0$. Como $-(\Delta+\lambda k)\phi_n=(\lambda_n-\lambda)k\phi_n$, deberá satisfacer al menos la relación

(8.5) $$\int_D G_k(p,q;\lambda)\,\phi_n(q)\,k(q)\,dq=\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n-\lambda},$$

por lo que ensayamos

(8.6) $$G_k(p,q;\lambda)=G(p,q)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(p)\,\phi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}=G(p,q)+F_k(p,q;\lambda),$$

pues $G(p,q)=\sum\phi_n(p)\phi_n(q)/\lambda_n$. Recordemos que las soluciones de $-\Delta u=\tau k u$, $u\in C^2(D)\cap C_0(\overline{D})$ *), resuelven el problema

(8.7) $$u(p)=\tau\int_D G(p,q)u(q)k(q)dq.$$

Luego, de (8.2),

(8.8) $$\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n}=\int_D G(p,q)\phi_n(q)k(q)\,dq$$

y $\sum|\phi_n(p)/\lambda_n|^2=O(1)$ uniformemente en $p\in\overline{D}$, (cf. Cap. 3).

En consecuencia, $F_k(p,q;\lambda)$ es *acotada* en $\overline{D}\times\overline{D}$. $G_k(p,q;\lambda)$ es simétrica y define entonces un *operador Hilbert-Schmidt* en $L^2(D;k)$:

(8.9) $$(G_{k,\lambda}u)(p)=\int_D G_k(p,q;\lambda)u(q)k(q)dq.$$

De (8.8) sigue ahora que efectivamente (8.5) *vale para todo n*.

El operador (8.9) puede escribirse como $G_{k,\lambda}=G_{k,0}+F_{k,\lambda}$ si recurrimos a la relación (8.6). $G_{k,0}$ es un operador continuo de $L^2(D;k)$ en $L^\infty(\overline{D})$; más aún, vale el

---

*) $Lip_{loc}(D)=\{u\in C(D): u\ localmente\ Hölder\}$, $C_0(\overline{D}):=\{u\in C(\overline{D}): u\ se\ anula\ en\ \partial D\}$.

TEOREMA 1. $G_{k,0}$ es completamente continuo de $L^2(D;k)$ en $C(\overline{D})$.•
En efecto, esto sigue de una aplicación del teorema de Arzelá-Ascoli en vista de

(8.10) $$\left|\int_D (G(p,q) - G(p',q))f(q)k(q)dq\right| \leq \|k\|_\infty \|f\|_2 \left(\int_D |G(p,q)-G(p',q)|^2 dq\right)^{1/2},$$

y del siguiente

LEMA 1. Sea $d(p,p') := \left(\int_D |G(p,q)-G(p',q)|^2\, dq\right)^{1/2}$ para $p,p' \in \overline{D}$. Entonces

(8.11) $$\sup\{d(p,p') : |p-p'| \leq \delta\} \to 0 \text{ para } \delta \to 0.\bullet$$

DEMOSTRACION DEL LEMA. $d(p,p')$ es una pseudométrica en $\overline{D}$ que verifica $\lim_{p\to p_0} d(p,p_0)=0$ para todo $p_0 \in \overline{D}$. Esto se ve descomponiendo

$$\int_D = \int_{D\cap\{|p_0-q|<\varepsilon\}} + \int_{D\cap\{|p_0-q|\geq\varepsilon\}}$$

y usando *vi*), T.1 del Cap. 3 y el Teorema de Lebesgue de convergencia dominada. Tenemos entonces que dado $\eta > 0$ y $p_0 \in \overline{D}$ existe $r(p_0) > 0$ tal que $p \in B_{r(p_0)}(p_0) \Rightarrow d(p,p_0) < \eta$. Un argumento de compacidad permite ahora deducir que dado $\eta > 0$ existe $r > 0$ tal que $|p-p'| < r \Rightarrow d(p,p') < \eta$. Esto implica (8.11), QED.
Tenemos también que

(8.12) $$\left|\sum_1^\infty \left(\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n^2} - \frac{\phi_n^2(p')}{\lambda_n^2}\right)\right| \leq \sum \left|\frac{\phi_n(p)+\phi_n(p')}{\lambda_n}\right| \left|\frac{\phi_n(p)-\phi_n(p')}{\lambda_n}\right| \leq$$

$$\leq M \sum \left|\frac{\phi_n(p)-\phi_n(p')}{\lambda_n}\right|^2 \leq M\|k\|_\infty \int_D |G(p,q)-G(p',q)|^2 dq.$$

Por tanto, $\sum \left|\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n}\right|^2 \in C_0(\overline{D})$. Del teorema de Dini sigue entonces que $\sum_N^\infty \left|\frac{\phi_n}{\lambda_n}\right|^2 \downarrow 0$, uniformemente para $N \to \infty$. Podemos deducir entonces que vale el

TEOREMA 2. $F_k(p,q;\lambda) \in C(\overline{D}\times\overline{D})$. Además $F_k(p,q;\lambda) = 0$ si $p \in \partial D$ ò $q \in \partial D$.•

$F_{k,\lambda}(f) := \int_D F_k(p,q;\lambda) f(q)k(q)dq$ define un operador acotado de $L^2(D;k)$ en $L^\infty(D)$.
Sin embargo, del Teorema 2 sigue que la familia $\{F_{k,\lambda}(f) : \|f\|_2 \leq 1\} \subset C_0(\overline{D})$ es acotada y equiuniformemente continua. En consecuencia, $F_{k,\lambda}$ es un operador *completamente continuo de* $L^2(D;k)$ *en* $C_0(\overline{D})$. Vale entonces el

TEOREMA 3. $G_{k,\lambda}$ es un operador completamente continuo de $L^2(D;k)$ en $C_0(\overline{D})$.•
Si solamente $k \in C(\overline{D})$ también vale este resultado, (cf. Ap.G).

8.2. El operador diferencial $\Delta + \lambda k$ con dominio

(8.13) $$\mathrm{D}_{\Delta+\lambda k} = \{u \in C_0(\overline{D}) : (\Delta+\lambda k)u \in L^2(D)\} \qquad (\subset C_0(\overline{D}) \subset L^2(D))$$

es un operador *cerrado*, $\Delta + \lambda k : \mathrm{D}_{\Delta+\lambda k} \to L^2(D)$. Además es *biunívoco*, pues si

$u \in \mathrm{D}_{\Delta+\lambda k}$, $(\Delta+\lambda k)u = 0$ entonces $u \in C^2(D)$, (cf. Cor. 1, Ap. L), y por el principio de máximo, u=0, (cf. Teor. 5, Ap. M). En consecuencia existe $(\Delta+\lambda k)^{-1}$. Sigue entonces que éste es también un operador *cerrado*. Veamos que si $u \in \mathrm{D}_{\Delta+\lambda k}$ y $v = (\Delta+\lambda k)u$ entonces

$$Tv(p) := \int_D -G_k(p,q;\lambda)v(q)dq = u(p). \tag{8.14}$$

En efecto, de (8.5) sigue que (8.14) es válida para u igual a una combinación lineal de autofunciones. Esa familia es densa en $L^2(D)$ lo mismo que la familia de las combinaciones lineales de $\{(\lambda-\lambda_n)\phi_n k\}$. Luego, $(\Delta+\lambda k)^{-1}$ es cerrado con dominio denso en $L^2(D)$. Como el operador T es acotado en $L^2(D)$ resulta que el dominio del primero coincide con ese espacio. Luego (8.14) se verifica para toda u en $\mathrm{D}_{\Delta+\lambda k}$. Tenemos entonces el

TEOREMA 4. $(\Delta+\lambda k)^{-1}v = Tv = -\int_D G_k(p,q;\lambda)v(q)\,dq$ para toda $v \in L^2(D)$.♦

Es decir, T es el operador de Green de $(\Delta+\lambda k)$ y $G_k(p,q;\lambda)$ es su núcleo de Green.

TEOREMA 5. Para el núcleo $G_k(p,q;\lambda)$ valen las propiedades *i*)-*vi*) que se enuncian a continuación:

i) Si $u \in C^2(D) \cap C_0(\overline{D})$ y $(\Delta+\lambda k)u = \phi \in L^2(D)$ entonces para todo $p \in D$,

$$u(p) = \int_D -G_k(p,q;\lambda)\phi(q)dq. \tag{8.15}$$

ii) $G_k(p,q;\lambda) = G_k(q,p;\lambda)$ para todo $(p,q) \in D \times D$.

iii) Si $\phi \in L^2(D)$ $(=L^2(D;k))$ y $u(p) := \int_D -G_k(p,q;\lambda)\phi(q)dq$, $p \in \overline{D}$, entonces $u \in C_0(\overline{D})$. Además, en el sentido de las distribuciones,

$$(\Delta+\lambda k)u = \phi.$$

iv) Existen constantes, c_i, i=1,2, $c_1 > 0$, tales que

$$c_2 \le G_k(p,q;\lambda) \le \log\frac{c_1}{|p-q|}.$$

v) $\int_D |G(p,q;\lambda|^2 k(q)dq$ y $\int_D |G(p,q;\lambda|^2 dq$ son uniformemente acotadas en $p \in \overline{D}$.

vi) $\iint_{D\times D} G_k^2(p,q;\lambda)dq\,dp < \infty$. Análogamente $G_k(.,.;\lambda) \in L^2(D\times D; k(p).k(q))$.♦

DEMOSTRACION. Se deja al lector, (cf. (8.13) y Cap. 3), QED-

CAPITULO 9
DEPENDENCIA DE PARAMETROS DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET, PROPIEDADES DE REGULARIDAD, DESIGUALDADES A PRIORI Y UN TEOREMA DE CARLEMAN

9.1. Estudiamos a continuación la dependencia de la solución del problema

(9.1) $$(\Delta+\lambda)u = F \quad \text{en } D, \qquad u=\phi \quad \text{en } \partial D,$$

de los parámetros λ y p con $\lambda \in (-\infty,0)$ y $p=(p_1,\ldots,p_m) \in A = \mathring{A}$, un abierto de R^m. La región D es una región interior de Jordan con contorno $\partial D = J$. F y ϕ se suponen dependientes de $(\lambda, p) \in \mathrm{P} := (-\infty,0)\times A$.

DEFINICION 1. $F \in C(D) \cap L^\infty(D)$ se dirá *admisible* para el problema (9.1) si existe solución (única) u del problema cualquiera sea $\phi \in C(J)$. *Designaremos con* $\boldsymbol{A}$ al espacio vectorial de las funciones admisibles para todo $\lambda \in (-\infty,0)$ munido de la norma del supremo en D.♦

TEOREMA 1. Sean $F \in Lip_{loc}(D) \cap L^\infty(D)$, $-\infty < \lambda \leq 0$, y

(9.2) $$u(p) := -\int_D G(p,q;\lambda) F(q)dq .$$

Entonces $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ y $(\Delta+\lambda)u = F$ en D, $u = 0$ en ∂D. Además las derivadas segundas de u pertenecen a $Lip_{loc}(D)$.♦

DEMOSTRACION. Del Teor. 7 del Cap. 5 sigue que u se anula en el contorno, es continua en $\overline{D}$ y continuamente diferenciable en D. Del Teor. 3 del Ap. F sigue fácilmente que $u \in C^2(D)$. De la Prop. 4 y el Teor. 1 del Ap. P concluímos que $(\Delta+\lambda)u = F$. En virtud del Corolario al Teor. 1 del Ap P tenemos que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in Lip_{loc}(D)$, QED.

COROLARIO 1. $\boldsymbol{A} \supset \{F \in L^\infty(D) : F \in Lip_{loc}(D)\}$.♦

DEMOSTRACION. Del Cor. 1 al Teor. 1 del Cap. 6 y el Teor. 4 del Cap. 5 concluímos que en nuestro caso el problema $(\Delta+\lambda)w = 0, w|_J = \phi$ tiene solución (única) para $\lambda \in (-\infty,0)$. En virtud del teorema precedente deducimos que si $F \in Lip_{loc}(D) \cap L^\infty(D)$ entonces F es admisible para todo $\lambda \in (-\infty,0)$, QED.

PROPOSICION 1. Supongamos que $F(.;\lambda,p) : \mathrm{P} \to \boldsymbol{A}$ y $\phi(.;\lambda,p) : \mathrm{P} \to C(J)$ sean aplicaciones continuas. Entonces, la solución $u(.;\lambda,p)$ considerada como aplicación $u(.;\lambda,p) : \mathrm{P} \to C(\overline{D})$ es continua. Es decir, la solución depende contínuamente de los parámetros p y λ.♦

DEMOSTRACION. Sea K compacto, $K \subset \mathrm{P}$ y sean $M := \sup\{\|F\|_\infty : (\lambda,p) \in K\}$, $m := \sup\{\|\phi\|_\infty : (\lambda,p) \in K\}$. Sea $l := \inf\{|\lambda| : \exists p \;\; t.q. \;\; (\lambda,p) \in K\}$. Entonces, $l > 0$, $M < \infty$, $m < \infty$ y en virtud del Teorema 7 del Cap. 4, $\|u\|_\infty \leq \sup(M/l, m) = C < \infty$. Escribamos,

(9.3) $$\delta u = u(q;\lambda,p) - u(q;\lambda_0,p_0).$$

Luego, $(\Delta_q + \lambda_0)(\delta u) = F(q;\lambda,p) - F(q;\lambda_0,p_0) + (\lambda-\lambda_0)u(q;\lambda,p)$.

Utilizando nuevamente el Teor. 7 del Cap. 4 obtenemos:

$$\|\delta u\|_\infty \le \sup\left\{ \left(\|\delta F\|_\infty + |\lambda - \lambda_0| \|u\|_\infty\right)/|\lambda_0|, \|\delta\phi\|_\infty \right\} \to 0$$

para $(\lambda, p) \to (\lambda_0, p_0) \in K$, QED.

PROPOSICION 2. Las mismas hipótesis que en la Proposición 1. Supongamos además que F tenga en $\lambda = \lambda_0$, $p = p_0$ una derivada Frèchet respecto de λ, lo mismo que ϕ. Si $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(.;\lambda_0, p_0)$ es admisible entonces existe $\frac{\partial u}{\partial \lambda}(.;\lambda_0, p_0)$ y es igual a la solución de

$$(9.4)\qquad \begin{cases} (\Delta_q + \lambda_0)v(q) = \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(q;\lambda_0, p_0) - u(q;\lambda_0, p_0) & q \in D, \\ v(q) = \dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda}(q;\lambda_0, p_0) & q \in J. \end{cases} \qquad \blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Sea $\delta u(q) = u(q;\lambda, p_0) - u(q;\lambda_0, p_0)$. Entonces, por estar $u(.;\lambda_0, p_0)$ en $\boldsymbol{A}$ existe v y en D vale que

$$(\Delta + \lambda_0)\left(\frac{\delta u}{\lambda - \lambda_0} - v\right) = \frac{\delta F}{\lambda - \lambda_0} - u(.;\lambda, p_0) - \frac{\partial F}{\partial \lambda}(.;\lambda_0, p_0) + u(.;\lambda_0, p_0) =: h,$$

y en J,

$$\frac{\delta u}{\lambda - \lambda_0} - v = \frac{\delta \phi}{\lambda - \lambda_0} - \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(.;\lambda_0, p_0) =: k.$$

De (4.27) sigue ahora que $\left\| \frac{\delta u}{\lambda - \lambda_0} - v \right\|_{\infty|\bar{D}} \to 0$ cuando $\lambda \to \lambda_0$. En efecto,

$$\left\| \frac{\delta u}{\lambda - \lambda_0} - v \right\|_{\infty|\bar{D}} \le \sup\left(\frac{\|h\|_\infty}{|\lambda_0|}, \|k\|_\infty \right) \to 0 \text{ para } \lambda \to \lambda_0, \text{ QED.}$$

Análogamente se prueba la siguiente

PROPOSICION 3. Las mismas hipótesis de la Proposición 1. Supongamos que F tenga en $\lambda = \lambda_0$, $p = p_0$ una derivada de Frèchet respecto de p_i, lo mismo que ϕ, y que $\frac{\partial F}{\partial p_i}(.;\lambda_0, p_0)$ sea admisible. Entonces, existe $\frac{\partial u}{\partial p_i}(.;\lambda_0, p_0)$ y es igual a la solución de

$$(9.5)\qquad \begin{cases} (\Delta_q + \lambda_0)v(q) = \dfrac{\partial F}{\partial p_i}(q;\lambda_0, p_0) & q \in D, \\ v(q) = \dfrac{\partial \phi}{\partial p_i}(q;\lambda_0, p_0) & q \in J. \end{cases} \qquad \blacklozenge$$

Por inducción se prueba ahora la siguiente

PROPOSICION 4. Las mismas hipótesis de la Proposición 1. Supongamos que para $\beta \le \alpha$, $h \le m$ existan $D_p^\beta D_\lambda^h F$ y $D_p^\beta D_\lambda^h \phi$ (con resultados independientes del orden de derivación) en un entorno de $\lambda = \lambda_0$, $p = p_0$ y que $D_p^\beta D_\lambda^h F$ sea admisible en ese entorno para todo β y h. Entonces, $v := D_p^\alpha D_\lambda^m u$ existe si $\lambda = \lambda_0$, $p = p_0$ y es independiente del orden en que se calculan las derivadas. Además es solución (única) del problema:

$$(9.6)\qquad \begin{cases} (\Delta_q + \lambda_0)v(q) = D_p^\alpha D_\lambda^m F(q;\lambda_0, p_0) - m D_p^\alpha D_\lambda^{m-1} u(q;\lambda_0, p_0) & q \in D, \\ v(q) = D_p^\alpha D_\lambda^m \phi(q;\lambda_0, p_0) & q \in J. \end{cases} \qquad \blacklozenge$$

9.2. Veamos ahora algunas *desigualdades a priori*.

PROPOSICION 5. Sean K y K_1 compactos contenidos en D tales que $K \subset \operatorname{int} K_1$. Si $(\Delta+\lambda)u = F \in C^\infty(D)$ entonces

$$\left\|D_q^\alpha u\right\|_{2|K} \le M(K,K_1,\alpha)\left[\|u\|_{2|K_1} + \frac{1}{\chi}\sum_{|\beta|<|\alpha|}\left\|D_q^\beta F\right\|_{2|K_1}\right].\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. $(\Delta+\lambda)D_q^\beta u = D_q^\beta F$, (cf. Cap. 7 o Ap. L). Aplicando el teorema 9 del Cap. 4 obtenemos,

$$\int_K \left|\nabla(D_q^\beta u)\right|^2 dx \le \frac{1}{2\chi^2}\int_{K_1}\left|D_q^\beta F\right|^2 dx + M\int_{K_1}\left|D_q^\beta u\right|^2 dx,$$

y de esta desigualdad sigue la tesis por medio de un encaje finito de compactos adecuadamente elegidos, QED.

PROPOSICION 6. Las mismas hipótesis de la proposición 5. Sea $\chi \ge a > 0$. Entonces

$$\left\|D_q^\alpha u\right\|_{\infty|K} \le M(K,K_1,\alpha,a)\left[\|u\|_{2|K_1} + \sum_{|\beta|\le|\alpha|}\left\|D_q^\beta F\right\|_{2|K_1}\right]\Big/\chi.$$

DEMOSTRACION. Sabemos que $\left(\Delta-\chi^2\right)K_0(\chi|\cdot|) = -2\pi\delta$, (T.1, Cap. 4) y que $\left\|K_0(\chi|\cdot|)\right\|_2 = \left\|K_0(|\cdot|)\right\|_2/\chi = M/\chi$. Sea $\phi \in C_0^\infty(\operatorname{int} K_1)$, $\phi = 1$ sobre K. Entonces,

$$\left(\Delta-\chi^2\right)(\phi u) = \phi F + 2(\nabla u \times \nabla\phi) + u\Delta\phi =: r(x).$$

Luego, $K_0(\chi|x|) * r(x) = K_0(\chi|x|) * \left(\Delta-\chi^2\right)(\phi u) = \left((\Delta-\chi^2)K_0\right) * (\phi u) = -2\pi\phi u$.

Por tanto,

$$2\pi\|u\|_{\infty|K} \le \left\|K_0(\chi|\cdot|)\right\|_2\|r\|_2 \le M'(K,K_1)\left(\|F\|_{2|K_1} + \|\nabla u\|_{2|K_1} + \|u\|_{2|K_1}\right)/\chi.$$

Aplicando la proposición 5,

$$\|u\|_{\infty|K} \le M''(K,K_1,a)\left(\|F\|_{2|K_1} + \|u\|_{2|K_1}\right)/\chi. \tag{9.7}$$

Sea L un compacto tal que $K \subset \operatorname{int} L \subset L \subset \operatorname{int} K_1 \subset K_1 \subset D$. Reemplazando en (9.7) u por $D^\alpha u$ obtenemos:

$$\left\|D^\alpha u\right\|_{\infty|K} \le M''(K,L,a)\left(\left\|D^\alpha F\right\|_{2|L} + \left\|D^\alpha u\right\|_{2|L}\right)\Big/\chi \le \quad \text{(proposición 5)}$$

$$\le M(K,K_1,a)\left(\|u\|_{2|K_1} + \sum_{|\beta|\le|\alpha|}\left\|D^\beta F\right\|_{2|K_1}\right)\Big/\chi, \qquad \text{QED.}$$

9.3 En esta sección presentamos algunas estimaciones de la solución fundamental $E_0^\chi(x) := -\dfrac{K_0(\chi|x|)}{2\pi}$. La denotaremos simplemente con E.

PROPOSICION 7. Sea $\chi \ge a > 0$. Entonces

$$\sup_{q\in\partial D}\left|D_p^\alpha D_\lambda^m E(p-q)\right| \le A(\alpha,m,l_p,a)e^{-\chi l_p/2},$$

donde $p \in D$ y $l_p = \inf_{q\in\partial D}|p-q|$.$\blacklozenge$

DEMOSTRACION. Recordemos que

(9.8) $$-2\pi E(p-q)=K_0(\chi|p-q|)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-t\chi|p-q|}}{\sqrt{t^2-1}}dt.$$

Sea $r=|p-q|$. Basta estimar $D_p^{\alpha}D_{\chi}^{m}E$ pues $D_{\lambda}^{m}=\left(-\frac{1}{2\chi}D_{\chi}\right)^m$. Observemos que

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\left(r^m e^{-t\chi r}\right)=r^{m-1}e^{-t\chi r}(m-t\chi r)\frac{p_1-q_1}{r}.$$

Por inducción obtenemos:

$$D_p^{\alpha}(r^m e^{-t\chi r})=r^{m-|\alpha|}e^{-t\chi r}\sum_{n=0}^{|\alpha|}\sum_{j+k\le|\alpha|}C(j,k,n,m)(t\chi r)^n\left(\frac{p_1-q_1}{r}\right)^j\left(\frac{p_2-q_2}{r}\right)^k.$$

Luego $\left|D_p^{\alpha}(r^m e^{-t\chi r})\right|\le C(m,\alpha)r^{m-|\alpha|}e^{-t\chi r}\sum_{n=0}^{|\alpha|}(t\chi r)^n$, de donde sigue

$$\left|-2\pi D_p^{\alpha}D_{\chi}^{m}E\right|=\left|\int_1^{\infty}D_p^{\alpha}(r^m e^{-t\chi r})\frac{t^m}{\sqrt{t^2-1}}dt\right|\le C(m,\alpha)\sum_{n=0}^{|\alpha|}e^{-\frac{3\chi}{5}l_p}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\frac{2t\chi r}{5}}}{\sqrt{t^2-1}}(t\chi r)^n t^m r^{m-|\alpha|}dt\le$$

$$\le\frac{M(\alpha,m)}{l_p^{\alpha}a^m}e^{-\frac{3\chi}{5}l_p}\sup\left\{e^{-\frac{\chi rt}{5}}(t\chi r)^{m+n}:0<t<\infty,0\le n\le|\alpha|\right\}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\frac{tal_p}{5}}}{\sqrt{t^2-1}}dt\le$$

$$\le A'(\alpha,m,l_p,a)e^{-\frac{\chi l_p}{2}},$$ QED.

COROLARIO 1. Sean K un compacto contenido en D, $p\in K$ y $q\in\partial D$. Si $L=L_K$ es la distancia de K a ∂D y $\chi\ge a>0$ entonces $\left|D_p^{\alpha}D_{\lambda}^{m}E(p-q)\right|\le A(\alpha,m,K,a)e^{-\chi L/2}$.♦

9.4. En esta sección veremos estimaciones de derivadas de la función χ-armónica H, (cf. (6.7)):

(9.9) $$(\Delta_q+\lambda)H(p,q;\lambda)=0 \text{ en } D;\quad H(p,q;\lambda)=\frac{K_0(\chi|p-q|)}{2\pi}\text{ si } q\in\partial D,$$

donde $\lambda=-\chi^2$, $\chi\ge a>0$, $p\in D$.

TEOREMA 2. Sea $H_{\alpha,m}:=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial p^{\alpha}}\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}H(p,q;\lambda)$. Entonces, para p fijo en D,

i) $\left|H_{\alpha,0}\right|\le\sup_{q\in\partial D}\left|D_p^{\alpha}K_0(\chi|p-q|)\right|\le 2\pi\, A(\alpha,0,l_p,a)e^{-\chi l_p/2}$,

$$\left|H_{\alpha,m}\right|\le\sup\left(\sup_{q\in D}\frac{m\left|H_{\alpha,m-1}(p,q;\chi^2)\right|}{\chi^2},\sup_{q\in\partial D}\left|D_p^{\alpha}D_{\lambda}^{m}K_0(\chi|p-q|)\right|\right)\le C(\alpha,m,l_p,a)e^{-\chi l_p/2},$$

ii) $\left\|D_q^{\beta}H_{\alpha,m}\right\|_{\infty|K}\le C(\alpha,\beta,m,K,a)\,e^{-\chi l_p/2}$.♦

DEMOSTRACION. *i)* Sean respectivamente, u, v y w las soluciones de los siguientes problemas:

(9.10) $$\begin{cases}(\Delta+\lambda)u=0\\ u|_{\partial D}=K_0\end{cases};\quad\begin{cases}(\Delta+\lambda)v=-u\\ v|_{\partial D}=\frac{\partial K_0}{\partial\lambda}\end{cases};\quad\begin{cases}(\Delta+\lambda)w=-\partial u/\partial p_1\\ w|_{\partial D}=\frac{\partial^2 K_0}{\partial p_1\partial\lambda}\end{cases}$$

y sean z y $\tilde{w}$ las soluciones de:

$$(9.11)\qquad \begin{cases}(\Delta+\lambda)z=0\\ z|_{\partial D}=\dfrac{\partial K_0}{\partial p_1}\end{cases};\qquad \begin{cases}(\Delta+\lambda)\widetilde{w}=-z\\ \widetilde{w}|_{\partial D}=\dfrac{\partial^2 K_0}{\partial\lambda\partial p_1}\end{cases}.$$

Usaremos las proposiciones 2, 3 y 4 con $A=D$. Entonces, $z=\dfrac{\partial u}{\partial p_1}$, por lo que esta última es una función admisible. Luego, $w=\dfrac{\partial v}{\partial p_1}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial p_1\partial\lambda}$. Como $\widetilde{w}=\dfrac{\partial z}{\partial\lambda}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\lambda\partial p_1}$ tenemos $w=\widetilde{w}$.

$H_{\alpha.0}(p,q;\lambda)$ es solución del problema ($p\in D$, $q\in\overline{D}$):

$$(9.12)\qquad \begin{cases}(\Delta_q+\lambda)u=0\\ u|_{\partial D}=D_p^\alpha K_0(\chi|p-q|)\end{cases}.$$

Entonces, del principio de máximo y la proposición 7 obtenemos

$$|H_{\alpha.0}(p,q;\lambda)|\le\left\|D_p^\alpha K_0(\chi|p-q|)\right\|_{\infty|\partial D}\le 2\pi A(\alpha,0,l_p,a)e^{-\chi l_p/2}.$$

La segunda desigualdad en *i*) involucra a las funciones $H_{\alpha,m}(p,q;\lambda)$ y $H_{\alpha,m-1}(p,q;\lambda)$. Ella es consecuencia de (9.6) y Teor.7 del Capítulo 4. Se obtiene usando la proposición 7 y un razonamiento inductivo.

ii) Como $\chi\ge a$, eligiendo $K_1(K)$ adecuadamente, por la proposición 6 y la demostración de la proposición 7, se obtiene:

$$\left\|D_q^\beta H_{\alpha,0}\right\|_{\infty|K}\le M(K,\beta,a)\left\|H_{\alpha,0}\right\|_{2|K_1}\le M'(\alpha,\beta,K,a)e^{-\chi l_p/2}.$$

Por otra parte, por (9.6), $(\Delta_q+\lambda)H_{\alpha,m}=-mH_{\alpha,m-1}$. Luego,

$$\left\|D_q^\beta H_{\alpha,m}\right\|_{\infty|K}\le M''(K,\beta,a)\left[\sum_{|\gamma|\le|\beta|}\left\|D_q^\gamma H_{\alpha,m-1}\right\|_{2|K_1}+\left\|H_{\alpha,m}\right\|_{2|K_1}\right].$$

Sigue por inducción, utilizando *i*), que

$$\left\|D_q^\beta H_{\alpha,m}\right\|_{\infty|K}\le A(\alpha,\beta,K,a)e^{-\chi l_p/2}+\left\|H_{\alpha,m}\right\|_{2|K_1}\le C(\alpha,\beta,m,K,a)e^{-\chi l_p/2},\ \text{QED.}$$

9.5. Recordemos algunas relaciones y fórmulas de los capítulos 4 y 5:

$$(9.13)\qquad F(p,q;\lambda)=G(p,q;\lambda)-G(p,q)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(p)\phi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)},$$

donde $p\in D$, $\lambda\in C\setminus\sigma_\Delta$ y la serie converge uniformemente para $q\in\overline{D}$;

$$(914)\qquad F(p;\lambda)=\lim_{q\to p}F(p,q;\lambda)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n^2(p)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)},$$

es continua en $D\times(C\setminus\sigma_\Delta)$, analítica allí. Sea ahora $\lambda=-\chi^2$ con χ real, positivo.

$$(9.15)\qquad G(p,q;\lambda)=\frac{K_0(\chi|p-q|)}{2\pi}-H(p,q;\lambda),$$

con la función de Kelvin

(9.16) $\quad K_0(r)=-I_0(r)\log r+P(r)$, $P(r)$ analítica entera.

Más precisamente:

$$(9.17)\quad K_0(r)=\frac{\pi i}{2}H_0^1(ir)=\frac{\pi i}{2}(J_0(ir)+iY_0(ir))=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(r/2)^{2j}}{(j!)^2}\left\{\log\frac{r}{2}-\psi(j+1)\right\},$$

con $\psi(1)=-\gamma$, $\psi(m+1)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\gamma$;

$$(9.18)\qquad G(p,q)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|p-q|}-H(p,q);$$

$$(9.19)\qquad F(p;-\chi^2)=H(p,p)-H(p,p;-\chi^2)+\frac{(\log 2-\log\chi-\gamma)}{2\pi};$$

$$(9.20)\qquad I_0(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2j}}{(j!)^2}=\sum_{j=0}^{\infty}a_j z^{2j}.$$

Aplicando la proposición 5 precedente a las autofunciones normalizadas del problema de Dirichlet y observando que $(\Delta-\lambda_n)\phi_n=-2\lambda_n\phi_n$, obtenemos inductivamente:

$$(9.21)\qquad \left\|D^\alpha\phi_n\right\|_{2|K}\le C(K,\alpha)|\lambda_n|^{|\alpha|/2},$$

(cf. T.8, Cap.4). Luego,

$$(9.22)\qquad \left\|D^\alpha\phi_n\right\|_{\infty|K}\le C'(K,\alpha)|\lambda_n|^{(|\alpha|+1)/2}.$$

En efecto, esta desigualdad sigue de (9.21) y de la proposición 6.

Sea ahora $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $m=|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$. Entonces, para λ variando en un compacto W contenido en $C\setminus\sigma_\Delta$, vale, en $L^1(K\times K)$:

$$(9.23)\qquad D_p^\alpha D_q^\alpha D_\lambda^{m+1}(G(p,q;\lambda)-G(p,q))=D_p^\alpha D_q^\alpha D_\lambda^{m+1}(F(p,q;\lambda))=$$
$$=(m+1)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D^\alpha\phi_n(p)D^\alpha\phi_n(q)}{(\lambda_n-\lambda)^{m+2}},$$

(cf. (3.25)). La igualdad también se verifica en $L^2(q\in K)$, uniformemente en $p\in K$. Por otra parte, si $h\ge 2$, (cf. (9.13)):

$$(9.24)\qquad F_1(p,q;\lambda):=D_p^\alpha D_q^\alpha D_\lambda^{m+h}(G(p,q;\lambda))=(m+h)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_p^\alpha\phi_n(p)D_q^\alpha\phi_n(q)}{(\lambda_n-\lambda)^{m+h+1}}$$

uniformemente en $(p,q,\lambda)\in K\times K\times W$. Entonces la siguiente función $F_1(p;\lambda)$,

$$(9.25)\qquad F_1(p;\lambda):=\lim_{q\to p}F_1(p,q;\lambda)=(m+h)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(D^\alpha\phi_n(p))^2}{(\lambda_n-\lambda)^{m+h+1}}$$

es *holomorfa* en $C\setminus\sigma_\Delta$.

Calcularemos $F_1(p;\lambda)$ *para* $\lambda=-\chi^2<0$. Para ello será necesario evaluar $D_p^\alpha D_q^\alpha D_\lambda^{m+h}f(|p-q|,\lambda)$ para $m=|\alpha|\ge 0, h\ge 2$ y $f(r,\lambda)$ de la forma:

a) $\lambda^j r^{2j}$ *b)* $\lambda^j r^{2j}\log|\lambda|$ *c)* $\lambda^j r^{2j}\log r$ $j\ge 0$,

y hacer tender $r=|p-q|$ a cero, pues vale (cf. (9.15), (9.17), (9.20) y (9.24)):

$2\pi\, G(p,q;\lambda)=$

$=-(\log(\chi r))(1-a_1\lambda r^2+a_2\lambda^2r^4-\ldots)+(b_0+b_1\lambda r^2+b_2\lambda^2r^4+\ldots)-2\pi H(p,q;\lambda)$.

Se deduce que la derivada $D_p^\alpha D_q^\alpha D_\lambda^{m+h}$ $(=D_p^\alpha D_q^\alpha D_\lambda^{|\alpha|+2+k}$ con $k\ge 0)$ de los términos que, salvo factor, son de la forma *a)* o *c)*, tiende a cero para $r\to 0$.

Lo mismo les ocurre a los que (salvo factor) son de la forma *b)* con $j\ne m$.

Esa derivada del término $\lambda^m r^{2m}\log|\lambda|$ es producto de los siguientes dos factores:

(9.26) $$\frac{d^{m+h}}{d\lambda^{m+h}}(\lambda^m \log|\lambda|) = \sum_{j=0}^{m}\binom{m+h}{j} D^j(\lambda^m) D^{m+h-j}\log|\lambda| =$$
$$= \left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m+h}{j}\binom{-h}{m-j}\right)\frac{(-1)^{h-1}(h-1)!m!}{\lambda^h} = \frac{m!(h-1)!(-1)^{h+1}}{\lambda^h},$$

(9.27) $$D_p^\alpha D_q^\alpha r^{2m} = (-1)^m D_p^{2\alpha}\left((p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2\right)^m = (-1)^m\binom{m}{\alpha_1}(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!.$$

En conclusión,

(9.28) $$D_p^\alpha D_q^\alpha D_\lambda^{m+h}(\frac{1}{2}\lambda^m r^{2m}\log|\lambda|)\Big|_{r=0} = \frac{(-1)^{m+h+1}(h-1)!(m!)^2(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!}{2\alpha_1!\alpha_2!\lambda^h} = \frac{A}{\lambda^h}.$$

En consecuencia, para $\lambda = -\chi^2$, $\log\chi = \frac{1}{2}\log|\lambda|$, $m \geq 0$ y $a_0 := 1$,

(9.29) $$F_1(p,\lambda) = \frac{(-1)^{m+1}}{2\pi}\frac{Aa_m}{\lambda^h} - T(p;\lambda) = \frac{A'}{\lambda^h} - T(p;\lambda)$$

donde $$T(p;\lambda) = \lim_{q\to p} D_p^\alpha D_q^\alpha D_\lambda^{m+h} H(p,q;\lambda) = O\left(e^{-\chi l_p/2}\right),$$

y $$A' = \frac{(-1)^h(h-1)!(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!}{\pi 2^{2m+2}\alpha_1!\alpha_2!}.$$

TEOREMA 3. (Carleman). Sea D una región con la propiedad G y $\{\phi_n\}$ el sistema normalizado de autofunciones del problema de Dirichlet. Entonces, para todo $p \in D$ y $m \geq 0$,

(9.30) $$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}\sum_{\lambda_n<\lambda}\left(\frac{\partial^m\phi_n(p)}{\partial p_1^{\alpha_1}\partial p_2^{\alpha_2}}\right)^2 = \frac{1}{\pi 2^{2m+2}}\frac{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!}{(m+1)!\alpha_1!\alpha_2!}.$$

En particular,

(9.31) $$\frac{1}{\lambda}\sum_{\lambda_n<\lambda}(\phi_n(p))^2 \to \frac{1}{4\pi},$$

(9.32) $$\frac{1}{\lambda^2}\sum_{\lambda_n<\lambda}\left(\frac{\partial\phi_n(p)}{\partial p_1}\right)^2 \to \frac{1}{16\pi}.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Sea $h \geq 2$, C_N una curva como en la sección 6D del capítulo 6, y Γ_N la circunferencia de radio R_N. Con la función $F_1(p;\lambda)$ de (9.25) tenemos, para s complejo, $\operatorname{Re}s > 4(m+h+1)$, que vale,

(9.33) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} F_1(p;\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^{s-m-h}} \to B(s)\sum_{n=1}^{\infty}\left(D^\alpha\phi_n(p)\right)^2\lambda_n^{-s},$$

donde $B(s) = -(s-1)(s-2)\ldots(s-m-h)$.

En efecto, observemos que la serie converge en virtud de (9.22) y que

$$\underset{en\,\lambda_n}{residuo}\left(\frac{\lambda^{m+h-s}}{(\lambda_n-\lambda)^{m+h+1}}\right) = \frac{(-1)^{m+h+1}(m+h-s)(m+h-s-1)\ldots(1-s)}{(m+h)!\,\lambda_n^s} = \frac{B(s)}{(m+h)!}\lambda_n^{-s}.$$

De (9.25) sigue (9.33) formalmente. Veremos a continuación los detalles de la demostración de ese límite.

De (6.26), Cap. 6, sigue que, para $\lambda \in \Gamma_N$, $\left|\left(\frac{\lambda_n}{\lambda-\lambda_n}\right)^{m+h+1}\right| \le (16|\lambda|)^{3(m+h+1)}$. Luego,

$$|F_1(p;\lambda)| = \left|(m+h)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(D^\alpha\phi_n(p))^2}{(\lambda_n-\lambda)^{m+h+1}}\right| \le (16|\lambda|)^{3(m+h+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|D^\alpha\phi_n(p)|^2}{\lambda_n^{m+h+1}} = O\left(|\lambda|^{3(m+h+1)}\right),\ \lambda\in\Gamma_N .$$

En consecuencia, la integral sobre Γ_N tiende a 0 para $N\to\infty$. Por otra parte, $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_N\setminus\Gamma_N}\ldots$ tiende, para $N\to\infty$, a I_1+I_2 donde

$$(9.34)\qquad I_1 = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_a^\infty F_1(p;-t)(te^{-i\pi})^{m+h-s}e^{-i\pi}dt - \int_a^\infty F_1(p;-t)(te^{i\pi})^{m+h-s}e^{i\pi}dt\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(m+h-s)\pi}{\pi}\int_a^\infty F_1(p;-t)t^{m+h-s}dt,$$

$$(9.35)\qquad I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_1(p;ae^{i\phi})(ae^{i\phi})^{m+h+1-s}d\phi, \qquad 0<a<\lambda_1 .$$

En consecuencia

$$(9.36)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(D^\alpha\phi_n(p))^2}{\lambda_n^s} = (-1)^{m+h+1}\frac{\operatorname{sen} s\pi}{\pi B(s)}\int_a^\infty F_1(p;-t)t^{m+h-s}dt + \frac{I_2(s)}{B(s)} .$$

El factor $\frac{\operatorname{sen} s\pi}{B(s)}$ del primer sumando es analítico entero en s. Como $F_1(p;\lambda)$ es analítica en $\lambda\neq\lambda_n$, $n=1,2,\ldots$, de (9.35) se deduce que $I_2(s)$ es entera en s y que $I_2(s)$ se anula para s entero $\le m+h$. Luego, el último sumando en (9.36) es analítico entero en s.

Usando (9.29) tenemos,

$$\int_a^\infty F_1(p;-t)t^{m+h-s}dt = (-1)^h\int_a^\infty A' t^{m-s}dt - \int_a^\infty T(p;-t)t^{m+h-s}dt =$$

$$= (-1)^h\frac{A' a^{m-s+1}}{s-m-1} + \textit{función entera en } s .$$

Reemplazando en (9.36) obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(D^\alpha\phi_n(p))^2}{\lambda_n^s} = \frac{(-1)^m\operatorname{sen} s\pi}{\pi B(s)}\frac{A' a^{m-s+1}}{(m+1-s)} + \textit{fcn. entera en } s = L(s) + \textit{fcn. entera en } s .$$

$L(s)$ es una función analítica en todo el plano complejo cuya única singularidad es un polo simple en $s=m+1$ con residuo:

$$(9.37)\qquad r = A'\frac{(-1)^h\pi}{\pi.m!(h-1)!} = \frac{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!}{\pi.2^{2m+2}\alpha_1!\alpha_2!\,m!} .$$

O sea,

$$(9.38)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(D^\alpha\phi_n(p))^2}{\lambda_n^s} = \frac{r}{s-(m+1)} + f(s)$$

con $f(s)$ entera.

Definimos a continuación una medida $d\tilde{\alpha}$ soportada por σ_Δ de la siguiente manera.
Sea, para $\lambda > 0$,

$$\alpha(\lambda) := \sum_{\lambda_n < \lambda} (D^\alpha \phi_n(p))^2, \qquad d\tilde{\alpha}(\lambda) := \lambda^{-m} d\alpha(\lambda); \tag{9.39}$$

de (9.38) con $s' = s - m$, $0 < a < \inf(\lambda_1, 1)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(D^\alpha \phi_n(p))^2}{\lambda_n^{m+s'}} = \int_a^\infty \lambda^{-s'} d\tilde{\alpha}(\lambda) = \frac{r}{s'-1} + f(s'+m). \tag{9.40}$$

Del teorema de Ikehara sigue ahora que $\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{x} \to r$ para $x \to \infty$, (cf. Ap. I).
Pero de

$$\alpha(\lambda) = \int_a^\lambda x^m d\tilde{\alpha}(x) = x^m \tilde{\alpha}(x)\Big|_a^\lambda - m\int_a^\lambda x^{m-1} \tilde{\alpha}(x) dx,$$

sigue, para $\lambda \to \infty$, que

$$\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^{m+1}} = \frac{\tilde{\alpha}(\lambda)}{\lambda} - \frac{m}{\lambda^{m+1}} \int_a^\lambda x^m \frac{\tilde{\alpha}(x)}{x} dx \to \frac{r}{m+1}.$$

O sea, hemos demostrado la fórmula (9.30), QED.
Sigue fácilmente el siguiente
COROLARIO 1. En una región acotada D con la propiedad G, en particular en una región de Jordan,

$$\underline{lim} \frac{N}{\lambda_N} \geq \frac{|D|}{4\pi}. \blacklozenge$$

APENDICE A
LEMA DE HENSEL, SERIES DE PUISEUX Y UN TEOREMA DE DECISION DE TARSKI.

A. En esta primera sección consideramos funciones analíticas en dos variables con forma polinomial mónica

(1) $$P(z,x) = z^m + A_1(x)z^{m-1} + \ldots + A_m(x)$$

y coeficientes $A_j(x)$ holomorfos en un entorno de $x=0$. Llamaremos a estas funciones *polinomios analíticos*. Estos polinomios aparecerán nuevamente en el Ap. W donde se estudia el teorema de preparación de Weierstrass. Denotaremos con $P_0(z)$ a $P(z,0)$.

LEMA DE HENSEL. Sea $P(z,x)$ el polinomio analítico (1) y tal que $P_0(z) = Q_0(z).R_0(z)$, Q_0 polinomio de grado *q*, R_0 polinomio de grado *r*, $m.c.d.(R_0,Q_0)=1$.

Entonces existen dos polinomios analíticos Q y R tales que $P(z,x) = Q(z,x).R(z,x)$ y

(2) $$\begin{cases} Q(z,x) = z^q + B_1(x)z^{q-1} + \ldots & Q(z,0) = Q_0(z) \\ \\ R(z,x) = z^r + C_1(x)z^{r-1} + \ldots & R(z,0) = R_0(z) \end{cases} .\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Podemos suponer que Q_0 y R_0 son mónicos. La hipótesis implica que

(3) $$P(z,x) = P_0(z) + xP_1(z) + x^2P_2(z) + \ldots$$

con grado de $P_j(z) < m$ si $j>0$. (3) define una función analítica en un entorno de (0,0). Introducimos en la familia de polinomios de una variable *la norma*: $\|p\| = \sum |coef\ de\ p|$. Si $p(z) = \sum k_i z^i$ y $\tilde{p}(z) = \sum |k_i| z^i$, vale: $\|p\| = \tilde{p}(1)$. Obviamente $\|p(z).q(z)\| \le \|p(z)\|.\|q(z)\|$. De (1) se deduce entonces que la siguiente serie obtenida de (3) converge para cierto $\delta > 0$:

(4) $$\|P_0(z)\| + \delta\|P_1(z)\| + \ldots + \delta^n\|P_n(z)\| + \ldots \le M_1 < \infty,$$

y que multiplicada por $\sup\{|z|^m, 1\}$ es una mayorante de:

(5) $$\tilde{P}_0(|z|) + |x|\tilde{P}_1(|z|) + |x|^2\tilde{P}_2(|z|) + \ldots .$$

Luego, $\|P_n(z)\| \le M_1/\delta^n$. Por otra parte, la transformación $p(z) \to (a(z),b(z))$, donde $p(z) = a(z)R_0(z) + b(z)Q_0(z)$, gr $a(z) < q$, gr $b(z) < r$, es lineal de P_{m-1} := familia de polinomios de grado $\le m-1$ en $\mathrm{P}_{q-1} \times \mathrm{P}_{r-1}$. Esta transformación entre espacios vectoriales de dimensión finita es necesariamente acotada. Luego existe M_2 tal que

(6) $$\|a\| \le M_2\|p\|, \qquad \|b\| \le M_2\|p\|.$$

Buscamos polinomios $R_i(z)$, $Q_i(z)$, $i>0$, gr $R_i < r$, gr $Q_i < q$, tales que

$$P(z,x) = (R_0 + xR_1 + x^2R_2 + \ldots)(Q_0 + xQ_1 + x^2Q_2 + \ldots);$$

o sea, verificando,

$$(7)\qquad \begin{cases} R_1Q_0 + R_0Q_1 = P_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R_jQ_0 + R_0Q_j = P_j - R_{j-1}Q_1 - \dots - R_1Q_{j-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Estas ecuaciones admiten solución única que se obtiene en forma recursiva pues Q_0 y R_0 son primos entre sí, gr $P_j < m = q + r$ si $j > 0$. Para $j \geq 1$ se tiene: gr $R_j < r$, gr $Q_j < q$. Veamos ahora que esta solución "algebraica" da lugar a una solución "analítica".
Sea $h(x)$ analítica en un entorno de $x = 0$ y tal que $h(0) = 0$. La función

$$(8)\qquad f(x) := \left(1 - \sqrt{1 - 4h(x)}\right)/2$$

tiene esas mismas propiedades y satisface a la ecuación $f = h + f^2$. Si $h = \dfrac{M^3 x}{\delta - x}$, M constante positiva, entonces $f(x)$ es solución analítica en un entorno de $x = 0$ de

$$(9)\qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^3}{\delta^n} x^n + f^2(x), \quad f(0) = 0.$$

Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$; los coeficientes a_i satisfacen las siguientes relaciones

$$(10)\qquad a_1 = M^3/\delta,\ a_n = M^3/\delta^n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_{n-1}a_1,\ a_i > 0.$$

Sea ahora $M = \sup\{M_1, M_2\}$. De (7) y (6) obtenemos:

$$\|R_j\| \leq M\left(\|P_j\| + \|R_{j-1}\|\|Q_1\| + \dots + \|R_1\|\|Q_{j-1}\|\right).$$

La misma desigualdad vale para $\|Q_j\|$. En consecuencia,

$$(11)\qquad M\|R_j\| \leq M^3/\delta^j + \left(M\|R_{j-1}\| M\|Q_1\| + \dots\right), \qquad M\|Q_j\| \leq M^3/\delta^j + \left(M\|R_{j-1}\| M\|Q_1\| + \dots\right).$$

Definamos $b_j := \sup\{M\|R_j\|, M\|Q_j\|\}$. Entonces $b_1 \leq M^3/\delta$, $b_n \leq M^3/\delta^n + b_1 b_{n-1} + \dots + b_{n-1}b_1$. De aquí se concluye que si $\{a_n\}$ viene definida por (10) entonces $b_n \leq a_n$ para todo n. Luego, las series $\sum_{n=1}^{\infty} \|R_j\| x^j$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_j\| x^j$ convergen en un entorno de $x = 0$. Por tanto, en un entorno de $x = 0$:

$$(12)\qquad \begin{cases} R(z,x) := R_0(z) + xR_1(z) + \dots = z^r + z^{r-1}B_1(x) + \dots, \\ \\ Q(z,x) := Q_0(z) + xQ_1(z) + \dots = z^q + z^{q-1}C_1(x) + \dots, \end{cases}$$

y $P = Q.R$, QED.

B. A continuación demostramos, apoyándonos en el Lema de Hensel, un teorema sobre los desarrollos de las raíces de un polinomio analítico en potencias de $x^{1/p}$.

TEOREMA 1. *i*) Sean $P(z,x) = A_0(x)z^m + A_1(x)z^{m-1} + \dots + A_m(x)$, $m > 0$ y las $A_i(x)$ funciones meromorfas en un entorno de $x = 0$. Entonces,

$$(13)\qquad P(z,x) = A_0(x)(z - \zeta_1(x))\dots(z - \zeta_m(x)),$$

donde cada raiz $\zeta_i(x)$ es desarrollable, en un entorno reducido de $x=0$, en una serie de potencias en $x^{1/t}$:

$$(14) \qquad \zeta_i(x)=\sum_{j=N_i}^{\infty} c_{ij}\left(x^{1/t}\right)^j \qquad \textit{(Series de Puiseux)}$$

con ciertos N_i y t enteros, t entero positivo.

El desarrollo es absolutamente convergente si $0<\left|x^{1/t}\right|\le\delta$: $\sum_{j=N_i}^{\infty}\left|c_{ij}\right|\delta^j<\infty$.

ii) Si algún c_{ij} es no real entonces $\zeta_i(x)$ es no real para x real suficientemente pequeño.♦

DEMOSTRACION. Es fácil ver que (14) implica *ii*). La demostración de *i*) la haremos suponiendo $x>0$, pues por medio de la proplongación analítica puede obtenerse el resultado general. Sea

$$(15) \qquad p(z,x):=P(z,x)/A_0(x)\equiv z^m+\widetilde{A}_1(x)z^{m-1}+\ldots+\widetilde{A}_m(x),$$

con los coeficientes de la forma

$$(16) \qquad \widetilde{A}_i(x)=x^{\gamma_i}\sum_{j=0}^{\infty}h_{i,j}x^j,$$

definidos por series absolutamente convergentes en $0<x<\eta$. Si m=1 el teorema es trivialmente cierto. Sea m >1. El cambio de variables $z=\zeta-\widetilde{A}_1(x)/m$, $0<x<\eta$, reduce $p(z,x)$ en (15) a

$$(17) \qquad q(\zeta,x)=\zeta^m+B_2(x)\zeta^{m-2}+\ldots+B_m(x).$$

Si $B_i\equiv 0$ para todo i entonces $p=P/A_0=\left(z+\widetilde{A}_1/m\right)^m$ y el teorema sigue. Supongamos que para algún j, $B_j\not\equiv 0$. Los coeficientes $B_j(x)\not\equiv 0$ son de la forma (cf. (16)):

$$(18) \qquad B_j(x)=x^{\alpha_j}\sum_{i=0}^{\infty}k_{j,i}x^i, \quad \alpha_j \text{ entero, } 2\le j\le m, \quad k_{j,0}\ne 0.$$

Sea $r=\inf\left\{\alpha_j/j:B_j\not\equiv 0\right\}=n/d$, n y d primos entre sí, $d>0$. El cambio de variables $\zeta=\zeta' x^r$ transforma $q(\zeta,x)$ en

$$(19) \qquad q'(\zeta',x)=x^{mr}(\zeta'^m+B_2(x)x^{-2r}\zeta'^{m-2}+\ldots+B_m(x)x^{-mr}).$$

donde $B_j(x)x^{-jr}$ no tiene polo en x=0. Si ahora hacemos $x=x'^d$ obtenemos,

$$(20) \qquad q'(\zeta',x'^d)=x'^{dmr}(\zeta'^m+B_2'(x')\zeta'^{m-2}+\ldots+B_m'(x'))=x'^{nm}.p'(\zeta',x')$$

De la definición de r resulta $rj\le\alpha_j$ y también $0\le\alpha_j d-nj$ pero donde para algún j, para el cual $k_{j,0}\ne 0$, se tiene $0=\alpha_j d-nj$, o sea, $\alpha_j=rj$. Entonces $p'(\zeta',0)\ne\zeta'^m$. Además no es la potencia m-ésima de un factor lineal pues el coeficiente de ζ'^{m-1} es nulo. Luego $p'(\zeta',0)$ es factorizable y se aplica el lema de Hensel. Entonces, $p'(\zeta',x')$ es factorizable en dos polinomios mónicos:

$$(21) \qquad p'(\zeta',x')=Q'(\zeta',x').R'(\zeta',x'),$$

con $\mathrm{gr}\,Q'=q$, $\mathrm{gr}\,R'=r$, $0<q,r<m$, $q+r=m$.

Recordando que $\zeta'=\zeta/x^r=\zeta/x'^{rd}$ obtenemos $\zeta'=\zeta/x'^n$ y

$$(22) \qquad q(\zeta,x)=q'(\zeta',x'^d)=Q(\zeta,x').R(\zeta,x'),$$

donde Q y R son mónicos en ζ de grados q y r respectivamente. O sea, recordando todos los cambios de variables, se ha logrado escribir $p(z,x)=p_1(z,x')p_2(z,x')$. Procediendo con $p_1(z,x')$ y $p_2(z,x')$ de la misma manera que con $p(z,x)$ se llega al resultado deseado. En efecto, $x'=x^{1/d}$ y en un nuevo paso $x''=x'^{1/\tilde{d}}=x^{1/d.\tilde{d}}$ define la nueva variable. En un número finito de pasos todos los factores tendrán grado 1 y entonces tendrán la forma $(z+\widetilde{B}_j(x^{1/t_j}))$. Es decir, $\zeta_j(x)=-\widetilde{B}_j(x^{1/t_j})$. Estos son de la forma (14) si $t=m.c.m\{t_1,...,t_m\}$, QED.

C. A continuación probamos un resultado que permite demostrar la existencia de raíces reales de un polinomio real. Sea

(23) $$p(x)=x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n, \qquad A_j\in R,$$

y *definimos la cadena* de polinomios de grados estrictamente decrecientes

(24) $$p(x),\ p'(x)=\frac{dp}{dx}(x),\ r_1(x),\ ...,\ r_k(x),$$

(25) $$\begin{cases} p=d_1p'-r_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p'=d_2r_1-r_2 & r_{k-2}=d_kr_{k-1}-r_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & r_{k-1}=d_{k+1}r_k \end{cases}$$

Sea $a\in R$ tal que $p(a)\neq 0$. Para ese punto *definimos un indicador* w asociado a la cadena: $w(a)$ es el número de variaciones de signo (en los pares consecutivos) de la sucesión $\{p(a),p'(a),r_1(a),..r_k(a)\}$ pero obtenido ignorando los valores nulos que puedan aparecer.

TEOREMA DE STURM. *i*) Sea $a<d$. Entonces $w(a)-w(d)=\#\{c\in(a,d):p(c)=0\}$.
ii) Sea $M:=1+|A_1|+\ldots+|A_n|$. $p(x)$ posee una raíz real si y sólo si $w(-M)-w(M)>0$. ♦

DEMOSTRACION. *i*) $r_k(x)$ es el *m.c.d.* de p y p' y por tanto se anula sólo en algunos ceros de $p(x)$. La sucesión

(26) $$(p/r_k, p'/r_k, r_1/r_k,...,1)$$

tiene el mismo número de variaciones de signo en *a*, $p(a)\neq 0$, que (24).

Sea $B=(b_1,...,b_h)$ la familia de ceros reales de los polinomios en (26). Ninguno de estos números puede ser un cero de dos polinomios consecutivos (pues en caso contrario, en virtud de (25), un tal número sería un cero de p y p'). Supongamos que $b\in B$ pero no anula a p/r_k. Si $(r_i/r_k)(b)=0$ entonces $(r_{i-1}/r_k)(b)=-(r_{i+1}/r_k)(b)\neq 0$. En consecuencia, cualquiera sea el signo de $(r_i/r_k)(x)$ a la derecha e izquierda de b se tiene $w(b-)=w(b+)$. Se deduce entonces que w no salta al pasar de $b-$ a $b+$.

Sin embargo, si $(p/r_k)(b)=0$, y esto sucede si y sólo si $p(b)=0$, w presenta exactamente una variación de signo en $x=b$. En efecto, sea $q=p/r_k$. q tiene un cero simple en $x=b$. Además, $s:=p'/r_k=q'+(r'_k/r_k).q$ tiene el signo de q' en un entorno de $x=b$ Así, por ejemplo, si $q'(b)>0$, q es negativo en $b-$ y positivo en $b+$, es decir, $(q(x),s(x))$ tiene una variación de signo al pasar de $b-$ a $b+$. Idem si $q'(b)<0$. Los detalles que restan se dejan al lector.

ii) Si $|x| \geq 1$ y $x = -A_1 - \ldots - A_n / x^{n-1}$ entonces $|x| \leq |A_1| + \ldots + |A_n|$. Es decir, toda raíz de $p(x)$ es en módulo menor que $1 + \sum |A_i|$, QED.

D. Sea $f_i(x_1,\ldots,x_n)$ un polinomio a coeficientes reales, $i = 1, \ldots, r+p+q+s$.

PROBLEMA A. Encontrar condiciones sobre los coeficientes de los f_i que permitan decidir si el siguiente sistema de ecuaciones e inecuaciones tiene una solución en R^n:

$$(27)\quad \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) = f_2(x_1,\ldots,x_n) = \ldots = f_r(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ f_{r+1}(x_1,\ldots,x_n) > 0, \quad \ldots \quad , f_{r+p}(x_1,\ldots,x_n) > 0 \\ f_{r+p+1}(x_1,\ldots,x_n) \geq 0, \quad \ldots \quad , f_{r+p+q}(x_1,\ldots,x_n) \geq 0 \\ f_{r+p+q+1}(x_1,\ldots,x_n) \neq 0, \quad \ldots \quad , f_{r+p+q+s}(x_1,\ldots,x_n) \neq 0 \end{cases}$$

Aumentando eventualmente el número de variables llegamos a que basta considerar *solamente igualdades* en (27). En efecto, basta reemplazar las inecuaciones

(28) $\quad f(x_1,\ldots,x_n) > 0; \qquad f(x_1,\ldots,x_n) \neq 0; \qquad f(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$

por las ecuaciones

(29) $f(x_1,\ldots,x_n)t^2 - 1 = 0; \qquad f(x_1,\ldots,x_n)u - 1 = 0; \qquad f(x_1,\ldots,x_n) - v^2 = 0,$

con las variables adicionales t, u ò v.

Más aún, en lugar de un sistema de ecuaciones $f_1 = 0, \ldots, f_m = 0$ es suficiente considerar $f_1^2 + \ldots + f_m^2 = 0$. Entonces el problema A se reduce al

PROBLEMA B. Dado un polinomio real $f(x_1,\ldots,x_n)$ encontrar condiciones sobre sus coeficientes que permitan decidir si tiene una raíz real, es decir, en R^n.

NOTACION. $\mathrm{P}(x_1,\ldots,x_n)$ denotará al *anillo de polinomios reales* en $x_1,\ldots,x_n$ y P_i a la *familia de polinomios* en x_i con coeficientes en $\mathrm{P}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$.

$R(x_1,\ldots,x_n)$ denotará al *cuerpo de cocientes* de polinomios en $\mathrm{P}(x_1,\ldots,x_n)$ y R_i al *anillo de polinomios* en x_i con coeficientes en $R(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$.♦

Obviamente $\mathrm{P} = \mathrm{P}_i$ y $R_i \subset R$. Recordemos que los anillos P, P_i y R_i son de *factorización única*.

TEOREMA 2. Sea $f_j \in \mathrm{P}(x_1,\ldots,x_n)$, *j*=1, 2, ...,*m*. El máximo común divisor de estos polinomios puede computarse mediante operaciones de suma, resta, multiplicación y división en los coeficientes.♦

DEMOSTRACION. Probaremos el teorema por inducción en *n* y *m*. Sean $n = 1$, $m = 2$. Supongamos que $\mathrm{gr}\, f_1 \geq \mathrm{gr}\, f_2$. El algorítmo de Euclides:

$$(30)\quad \begin{cases} f_1 = q_1 f_2 + r_1 \\ f_2 = q_2 r_1 + r_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{j-2} = q_j r_{j-1} + r_j \\ r_{j-1} = q_{j+1} r_j \end{cases}$$

nos da: $r_j = m.c.d.(f_1, f_2)$. Si $m > 2$, obtenemos el *m.c.d.* paso a paso, pues:

$m.c.d.(f_1,...,f_m)=m.c.d.(f_m,m.c.d.(f_1,...,f_{m-1}))$. Supongamos el teorema válido para $n-1$ y todo *m*, donde $n>1$. Sea *m*=2. Para *i*=1,2, sea f_i polinomio en x_n a coeficientes en $P(x_1,...,x_{n-1})$. Por hipótesis inductiva se computan

(*) $d_i(x_1,...,x_{n-1}):=m.c.d.(coef.f_i)$, *i*=1, 2 y $d(x_1,...,x_{n-1}):=m.c.d.(d_1,d_2)$.

Luego , $f_i(x_1,...,x_n)=d_i(x_1,...,x_{n-1}).\tilde{f}_i(x_1,...,x_n)$ y $\tilde{f}_i$ es *primitivo* como polinomio en x_n (sus coeficientes no tienen factores comunes en el dominio de integridad $P(x_1,...,x_{n-1})$). Pero también $\tilde{f}_i \in R_n$. Por medio del algorítmo de Euclides hallamos

$$m.c.d.(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)=r\in R_n.$$

Si $gr_{x_n}r=0$ entonces $m.c.d.(f_1,f_2)=m.c.d.(d_1\tilde{f}_1,d_2\tilde{f}_2)=m.c.d.(d_1,d_2)=d\in P(x_1,...,x_{n-1})$.

Si $gr_{x_n}r>0$, la hipótesis inductiva permite escribir: $r=q.R$, $q\in R(x_1,...,x_{n-1})$, $R\in P_n$, R primitivo. Entonces, $\tilde{f}_i=R.h_i$, $h_i\in R_n$, $i=1,2,$. Análogamente, $h_i=H_iD_i/Q_i$, $H_i\in P_n$, H_i primitivo, D_i y $Q_i\in P(x_1,...,x_{n-1})$,. Podemos suponer que $m.c.d.(D_i,Q_i)=1$. Luego,

$$\tilde{f}_i=H_iR(D_i/Q_i).$$

Como el producto de polinomios primitivos es primitivo (cf. [VW], T.1, p.77) resulta: $Q_i\tilde{f}_i=\hat{f}_iD_i$, $\hat{f}_i$ primitivo lo mismo que $\tilde{f}_i$. En consecuencia, D_i y Q_i son constantes pues $m.c.d.(D_i,Q_i)=1$. Podemos escribir entonces $h_i=H_i\in P_n$. Dado que R tiene en x_n el mismo grado que *r* resulta que

(**) H_1 no tiene en común con H_2 un divisor de grado positivo en x_n.

Así tenemos, $f_1=d_1H_1R$, $f_2=d_2H_2R$. Como H_1, H_2 y R son primitivos y valen (*) y (**) tenemos $m.c.d.(f_1,f_2)=Rd\,m.c.d.((d_1/d)H_1,(d_2/d)H_2)=Rd$. Como R y d fueron computados también es computable el *m.c.d.* de f_1 y f_2, QED.

Obsérvese que $f_1(f_2/Rd)=d_1(d_2/d)H_1H_2R$ es el mínimo común múltiplo de f_1 y f_2. Como $m.c.m.(f_1,f_2,f_3)=m.c.m.(f_3,m.c.m.(f_1,f_2))$ tenemos

COLOLARIO 1. Sea $f_j\in P(x_1,...,x_n)$, $j=1,2,...,m$. El mínimo común múltiplo de estos polinomios es computable.♦

Si buscamos soluciones reales de $f=0$ será suficiente considerar polinomios sin factores múltiples. Los factores múltiples se detectan hallando el $m.c.d.(f,f_{x_1},...,f_{x_n})$. En efecto, sea *p* primo de grado positivo en x_1 y $j>0$. Entonces,

(31) para todo *i*: $p^j|f$ y $p^j|f_{x_i} \iff p^{j+1}|f$.

$\Leftarrow$: es inmediato.

$\Rightarrow$: $f=p^jr$ implica $f_{x_i}=jp^{j-1}(p_{x_i}r)+p^jr_{x_i}$. Luego, si $p^j|f_{x_i}$ entonces $p|(p_{x_i}r)$. Como $p_{x_1}\not\equiv 0$ y es de grado menor que *p* en x_1, necesariamente, $p|r$. Por tanto $p^{j+1}|f$, QED.

Tenemos entonces la

PROPOSICION 1. Sea $d=m.c.d.(f,f_{x_1},...,f_{x_n})$. Entonces f/d tiene todos los factores primos de *f* y ninguno múltiple.♦

E. El resultado que demostraremos a continuación es el teorema sobre *polinomios simétricos*. Sean $x_1,...,x_n$ variables y $f(x_1,...,x_n)$ un *polinomio simétrico*, es decir, invariante bajo permutaciones de los subíndices de las variables. Polinomios básicos con esta propiedad son $\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x_i$; $\sigma_2=\sum_{i\neq j}x_ix_j$; . . . ; $\sigma_n=x_1...x_n$. Como

$$\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-...+(-1)^n\sigma_n,$$

la correspondencia $(x_1,...,x_n)\to(\sigma_1,...,\sigma_n)$ define una suryección de C^n sobre C^n. En consecuencia, si $f(x_1,...,x_n)=\varphi(\sigma_1,...,\sigma_n)$ entonces φ queda unívocamente determinada. Dado un monomio $c\sigma_1^{\alpha_1}...\sigma_n^{\alpha_n}$ su *peso se define* como $k=\alpha_1+2\alpha_2+...+n\alpha_n$ y dado el polinomio $p(\sigma_1,...,\sigma_n)$ su *peso* es el del monomio de mayor peso que aparece en él.

TEOREMA 3. Sea $f(x_1,...,x_n)$ un polinomio simétrico de grado *k*. Entonces existe un único polinomio *p* en $\sigma_1,...,\sigma_n$ tal que $f(x_1,...,x_n)=p(\sigma_1,...,\sigma_n)$. El peso de *p* es igual al grado *k* de *f*.•

DEMOSTRACION. Demostraremos la existencia de p por inducción en n y k. Sea $F(x_1,...,x_{n-1}):=f(x_1,...,x_{n-1},0)$. F es simétrico. Supongamos el teorema para la dimensión $n-1$ y cualquier grado y para n siempre que el grado sea menor que k. Tenemos $F(x_1,...,x_{n-1})=P(\sigma_1^0,...,\sigma_{n-1}^0)$ donde $\sigma_i^0=\sigma_i(x_1,...,x_{n-1},0)$. El polinomio

$$f_1(x_1,...,x_n):=f(x_1,...,x_n)-P(\sigma_1,...,\sigma_{n-1})$$

es simétrico en sus variables, de grado menor o igual a k y es divisible por x_n. Por su simetría es divisible por $x_1x_2...x_n$. Por tanto, f_1/σ_n es un polinomio simétrico de grado menor que *k*. Aplicando nuevamente la hipótesis inductiva resulta

$f_1(x_1,...,x_n)=\sigma_n.q(\sigma_1,...,\sigma_n)=Q(\sigma_1,...,\sigma_n)$ y $f(x_1,...,x_n)=P(\sigma_1,...,\sigma_{n-1})+Q(\sigma_1,...,\sigma_n)$.

Respecto al peso del polinomio $p:=P+Q$, él es igual al mayor de los pesos de *P* ò *Q* pues *P* no depende de σ_n y en cambio $Q(\sigma_1,...,\sigma_n)=\sigma_n.q(\sigma_1,...,\sigma_n)$.

$P(\sigma_1,...,\sigma_{n-1})$ tiene peso igual al grado de $F(x_1,...,x_{n-1})$ por lo que su peso es menor o igual al grado de *f*. Por la hipótesis inductiva el grado de f_1/σ_n coincide con el peso de *q*, por lo que el peso de *Q* coincide con el grado de f_1 que es menor o igual a *k*. Si peso de $P<k$ entonces k=gr f =gr f_1 =peso de *Q*, QED.

N.B. Los coeficientes del polinomio $p(\sigma_1,...,\sigma_n)$ son computables a partir de los coeficientes de $f(x_1,...,x_n)$. Es decir, se obtienen a partir de éstos por medio de un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

F. ELIMINACION DE UNA VARIABLE (cf. [VW], T.1 pg.89). Sea P(y) *la familia de polinomios* en *y* con coeficientes en un cuerpo *K*.

TEOREMA 4. *i*) Sean $p(y)\equiv P_0y^n+P_1y^{n-1}+...+P_n$, $P_0\neq0$ y $q(y)=Q_0y^m+...+Q_m$, $Q_0\neq0$ polinomios en P(y). p y q tienen un factor común si y sólo si existen $a,b\in$ P(y) tales que: grado de $a<n$, grado de $b<m$ y $aq+bp=0$,

ii) Y si y sólo si el siguiente *determinante de Sylvester* se anula:

$$\begin{array}{r} \\ m\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ n\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array}
\left|\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{0 \quad \cdots \quad 0}}^{m-1}} \\
P_0 & P_1 & \cdots & \cdot & \cdot & P_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & P_0 & \cdots & \cdot & \cdot & P_{n-1} & P_n & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & P_n \\
 & & & & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad 0}}^{n-1}} \\
Q_0 & \cdot & \cdots & Q_m & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
0 & \cdot & \cdots & \cdot & Q_0 & Q_1 & \cdot & \cdots & Q_m
\end{array}\right| = 0$$

DEMOSTRACION. *i*) Si $p(y)=d(y)r(y)$ y $q(y)=d(y)s(y)$, podemos definir $a=r$, $b=-s$ y se verifica $aq+bp=0$. Recíprocamente, si esta última relación se verifica entonces *p* divide a *aq* y como grado de *a* es menor que *n*, un factor primo de *p* divide a *q*.
ii) Sean $a(y)=A_0y^{n-1}+\ldots+A_{n-1}$, $b(y)=B_0y^{m-1}+\ldots+B_{m-1}$. La ecuación $aq+bp=0$ es equivalente a las siguientes relaciones entre los coeficientes:

$$\sum_{0\le s\le n-1} A_sQ_{h-s} + \sum_{0\le s\le m-1} B_sP_{h-s} = 0, \qquad h=0,1,\ldots,n+m-1 \quad ,$$

donde $Q_h:=0$ si $h<0$ ò $h>m$, y $P_h:=0$ si $h<0$ ò $h>n$. En efecto, la suma es el coeficiente de $y^{n+m-1-h}$ en $aq+bp$.
Este es un sistema de $n+m$ ecuaciones lineales homogéneas en las n incógnitas A_s y m incógnitas B_t. Tiene solución no trivial si y sólo si la matriz D:

$$D:=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
Q_0 & 0 & \cdots & \cdot & \cdots & 0 & P_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
Q_1 & Q_0 & \cdots & \cdot & \cdots & 0 & P_1 & P_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
Q_m & Q_{m-1} & \cdots & Q_0 & \cdots & 0 & P_m & P_{m-1} & \cdot & \cdots & P_1 \\
0 & Q_m & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & P_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & P_n & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & Q_m & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & P_n
\end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{Q_0 \quad Q_0 \quad \cdots \quad Q_0 \quad \cdots \quad 0}}_{n} \quad \underbrace{\hphantom{P_0 \quad P_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}}_{m}\end{array}$$

tiene determinante nulo. Ahora obsérvese que toda columna de esta matriz es una fila en el determinante de Sylvester, QED.

G. Sea $f(x,y)$ un polinomio en dos variables, x, y, a coeficientes reales, de grado $n \geq 1$, *sin factores múltiples*, (cf. Proposición 1).

PROPOSICION 2. Sean a real y $g_a(x,y) := yf_x(x,y) - (x-a)f_y(x,y)$. Entonces, $f(x,y)=0$ tiene una solución real $\Longleftrightarrow$ $f(x,y)=0$ y $g_a(x,y)=0$ tienen una solución real en común.♦

DEMOSTRACION. $\Leftarrow$ es trivial. $\Rightarrow$: Supongamos que es falso. Como g_a se anula en los ceros de grad f y en $(a,0)$, f no se anula en estos puntos. Sea $d = dist((a,0), ceros\ reales\ de\ f)$. Entonces $d < \infty$. Sea (x_0, y_0) tal que $f(x_0,y_0)$=0, $d^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2$. El conjunto $\{(x,y) : f(x,y)=0\}$ es una curva C^1 en un entorno de (x_0,y_0), tangente en ese punto a la circunferencia con centro $(a,0)$ y radio d. O sea, $g_a(x_0,y_0)=0$, contradicción, QED.

PROPOSICION 3. *i)* $f(x,y)$ y $g_a(x,y)$ no tienen factor común independiente de una de las variables.

ii) Si $a \neq b$ entonces f, g_a y g_b no tienen factor común.♦

DEMOSTRACION. *i)* Sea $p = p(x)$ primo. Si $p|f$ entonces $p|f_y$. Si además $p|g_a$ entonces $p|yf_x$. O sea, $p|f_x$. Luego, por (31), $p^2|f$. Pero esto contradice la hipótesis sobre f. En forma similar se trata $p = p(y)$.

ii) Sea $p = p(x,y)$ tal que $p|f$. Si $p|g_a$ y $p|g_b$ entonces $p|f_y = \dfrac{g_a - g_b}{a-b}$. Por tanto, $p|yf_x$. Por *i)*, p no es independiente de x. Luego, $p|f_x$. Por (31), $p^2|f$, contradicción, QED.

Como f tiene a lo más n factores de grado positivo habrá un polinomio, al menos, entre g_0, $g_1, \ldots, g_n$, tal que no tiene factor común con f, donde $g_i := g_{a_i}$, $a_i \in R$, los a_i distintos dos a dos. Se lo puede detectar eliminando la variable y entre f y g_i, (cf. T. 4).

NB. Si f es de grado n en (x,y) pero no en y, la transformación afín $(x,y) \to (x + \varepsilon y, y)$ es tal que, salvo por un número finito de ε, transforma f en un polinomio de grado n en (x,y) y en y. Por tanto f se reduce a un polinomio de la forma $d_0 y^n + d_1(x) y^{n-1} + \ldots$, d_0=constante no nula. (Un cambio afín semejante permitiría reemplazar al nuevo f por otro de la forma $d_0 y^n + d_0' x^n + \ldots$, $d_0 \neq 0 \neq d_0'$.) ♦

Sean f de grado n en (x,y) y en y, $A_0 \neq 0$, $B_0 \not\equiv 0$ y

(32) $f = A_0 y^n + A_1(x) y^{n-1} + \ldots + A_n(x)$, $\qquad g_i = B_0(x) y^q + B_1(x) y^{q-1} + \ldots + B_q(x)$,

$$(33) \qquad R_i(x) := \mathrm{res}(f, g_i) := \begin{array}{c} \hphantom{A_0\ A_1\ \cdots\ .\ .\ A_n\ } \overbrace{\hphantom{0\ \cdots\ 0}}^{q-1} \\ \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & . & . & A_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_0 & \cdots & . & . & A_{n-1} & A_n & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & . & . & \cdots & A_n \\ B_0 & B_1 & \cdots & . & . & . & . & \cdots & 0 \\ 0 & B_0 & \cdots & . & . & . & . & \cdots & 0 \\ 0 & . & \cdots & . & B_0 & B_1 & . & \cdots & B_q \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} q \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \end{array}$$

Se suele llamar *resultante* de dos polinomios *f*, *g*, a su determinante de Sylvester. En la sección F vimos el *teorema de la resultante*:

$R_i(x) \equiv 0$ si y sólo si f y g_i tienen un factor común.

En virtud de la proposición 3 si hay un factor común éste debe tener grado positivo en x y en y. Supongamos que g_0 no tiene factor común con f, es decir, $R_0(x) \not\equiv 0$. Los ceros (complejos) de $R_0(x)$ son las proyecciones según y sobre el eje de las x de los ceros comunes de $f(x,y)$ y $g_0(x,y)$. O sea, si

(34) $$S := \{(x,y) : x \in C, y \in C, f(x,y) = 0, g_0(x,y) = 0\}$$

entonces

(35) $$\{x \in C : R_0(x) = 0\} = \{x \in C : \exists y \in C \; t.q.\, (x,y) \in S\}.$$

Luego de (34) y (35) sigue que $\#S < \infty$. Pero el *teorema de Bézout*, (cf. [VW], T.2 p.17), afirma que en esta situación $\#S \leq \operatorname{gr} f \,.\operatorname{gr} g_0 \leq n^2$.

Las raíces de R_0 forman la proyección ortogonal de *S*, es decir, según *y*. Computaremos otras proyecciones de *S* según direcciones oblicuas sobre el eje *x*. Sea *m* real y no nulo. El cambio de variables: $X = x - y/m$, $Y = y$, transforma *S* en $S' = \{(X,Y) : (x,y) \in S\}$, o sea en

(36) $$S' = \{(X,Y) \in C^2 : f(X + Y/m, Y) = 0, g_0(X + Y/m, Y) = 0\}.$$

Si calculamos la resultante eliminando *Y*:

(37) $$R_m(X) := res_Y\left(f(X + Y/m, Y), g_0(X + Y/m, Y)\right),$$

tenemos,

(38) $$\{X \in C : R_m(X) = 0\} = \{X \in C : \exists Y \in C \quad t.q.\, (X,Y) \in S'\} = \{x - y/m : (x,y) \in S\}.$$

Elección de m: observemos que si (x,y) no es real entonces $x - y/m$ es real si y sólo si

(39) $$m(x - \bar{x}) = y - \bar{y}.$$

Evitaremos estas direcciones, como se indica a continuación, logrando así que

(39') (x,y) es no real si y sólo si *X* es no real.

Nótese que, por ser *f* a coeficientes reales, $(x,y) \in S$ si y sólo si $(\bar{x},\bar{y}) \in S$.

Sea $Q_0(y) = res_x\left(f(x,y), g_0(x,y)\right)$. R_0 y Q_0 son computables. Por la hipótesis sobre g_0, $R_0 \not\equiv 0$. Sean *R* y *Q* polinomios (computables) obtenidos de R_0 y Q_0 librando a estos de sus factores múltiples superfluos, (cf. Prop. 1). Las raíces de *R* son las proyecciones de *S* según *y*, las de *Q* las proyecciones según *x*. Las denotaremos, respectivamente, $\xi_1, \ldots, \xi_H$ y $\eta_1, \ldots, \eta_J$. El polinomio mónico,

(40) $$p(m) = m \prod_{\substack{r \neq s \\ i \neq j}} \left(m - \frac{\eta_r - \eta_s}{\xi_i - \xi_j} \right) = m^{I+1} + c_1 m^I + \ldots + c_I m,$$

puede escribirse como

(41) $$p(m) = \frac{m \prod_{\substack{r \neq s \\ j \neq i}} \left((\xi_i - \xi_j)m - (\eta_r - \eta_s)\right)}{\prod_{\substack{r \neq s \\ j \neq i}} (\xi_i - \xi_j)} = \frac{m \prod_{\substack{r \neq s \\ j \neq i}} \left((\xi_i - \xi_j)m - (\eta_r - \eta_s)\right)}{\alpha(r_0, \ldots, r_H)}$$

donde α es un polinomio (computable) en los coeficientes r_n de R en virtud del teorema sobre funciones simétricas. El polinomio en m:

$$Z(m) := m\prod_{\substack{r\neq s\\ j\neq i}}\left((\xi_i - \xi_j)m - (\eta_r - \eta_s)\right),$$

es un polinomio con coeficientes suma de productos de un polinomio en las ξ_j por otro en las η_r. Luego, $Z(m) = \sum k_T(\xi,\eta)m^T$, k_T polinomio en ξ,η. Permutaciones en las ξ_j o permutaciones en las η_r dejan invariante a Z y por tanto a sus coeficientes que son entonces suma de productos de polinomios simétricos en sus respectivas variables. O sea, estos son polinomios en los coeficientes de R y en los coeficientes de Q, respectivamente. En consecuencia, $p(m)$ es un polinomio *computable* y sus coeficientes c_i son expresiones racionales en los coeficientes de R y Q.

PROPOSICION 4. Supongamos que m real no es raíz del polinomio computable p: $p(m)\neq 0$. Entonces, S contiene un punto real si y sólo si $R_m(X)$ tiene un cero real.•

DEMOSTRACION. Sigue de lo dicho, (38), (39) y (39'), QED.

Luego vale el

TEOREMA 5. Sea $m = 1+\sum_{i=1}^{l}\left(\left|c_i^2\right|+1\right)$. La ecuación $f(x,y)=0$ tiene una solución real si y sólo si el polinomio computable $\mathcal{R}(x) := R_m(x)$ tiene una raíz real.•

DEMOSTRACION. En efecto, m no es raíz de $p(x)$ pues $m > 1+\sum_{i=1}^{l}|c_i|$. Esta última expresión es una cota superior del módulo de toda raíz real de p (cf. T. de Sturm). Podemos aplicar entonces la proposición 4, QED.

H. Consideremos ahora el problema de hallar una solución real de

$$(42)\qquad \begin{cases}\phi(x,y)\equiv c_0(x)y^n + c_1(x)y^{n-1}+\ldots+c_n(x)=0, & c_0\neq 0\\ F(x)\equiv d_0x^m + d_1x^{m-1}+\ldots+d_m\neq 0, & d_0\neq 0\end{cases}$$

donde ϕ y F son polinomios de coeficientes reales, grado de ϕ en $(x,y)\geq n\geq 1$, gr$F = m\geq 0$. Sea $d(x) = m.c.d.(F(x),c_0(x),\ldots,c_n(x))$. Dividiendo ϕ por el polinomio computable $d(x)$ obtenemos $\psi(x,y)=\dfrac{\phi(x,y)}{d(x)}$. Entonces, $(x_0,y_0)\in R^2$ es tal que $\phi(x_0,y_0)=0$, $F(x_0)\neq 0$ si y sólo si $\psi(x_0,y_0)=0$, $F(x_0)\neq 0$.

Sea $Q(y)$ la resultante obtenida de $\psi(x,y)$ y $F(x)$ eliminando x. De lo dicho sigue que $Q(y)\not\equiv 0$. Existe entonces un $c\in R$, computable, tal que $Q(c)\neq 0$.

TEOREMA 6. Sea $f(x,y) := \psi(x, c+yF(x))$. Entonces, $\phi(x,y)=0$, $F(x)\neq 0$ admite una solución real $\Leftrightarrow$ $f(x,y)=0$ tiene una solución real.•

DEMOSTRACION. $\Rightarrow$: Si $(x,y)\in R^2$, $\phi(x,y)=0$, $F(x)\neq 0$ entonces $\psi(x,y)=0$. Por lo tanto, $f(X,Y)=0$ donde $X=x, Y=\dfrac{y-c}{F(x)}$.

$\Leftarrow$: Si $f(X,Y)=0$ entonces $F(X)\neq 0$ (de lo contrario serían $F(X)=0$ y $\psi(X,c)=0$, lo que es imposible pues $Q(c)\neq 0$). Luego, el par $(x,y)=(X,c+YF(X))$ es solución de $\psi(x,y)=0$. Por tanto de $\phi(x,y)=0$, $F(x)\neq 0$, QED.

NB. Si $\phi(x,y)$ fuera de grado N en (x,y) y en y, como podríamos suponer por lo dicho en la sección G, entonces sería $c_0(x)$=constante no nula, $d(x)=1$, $\psi(x,y)=\phi(x,y)$ y $\psi(x,c+yF(x))=c_0F(x)^N y^N+\widetilde{c}_1(x)F(x)^{N-1}y^{N-1}+\ldots$.♦

Sea $\mathcal{R}(x)$ el polinomio computable del teorema 5 obtenido a partir de $\psi(x,c+yF(x))$ con el método descripto en la sección G: reducción a un polinomio $f(x,y)$ sin factores múltiples y del mismo grado en (x,y) e y.

TEOREMA 7. El sistema $\phi(x,y)=0$, $F(x)\neq 0$ admite una solución real si y sólo si el polinomio $\mathcal{R}(x)$ tiene una raíz real. $\mathcal{R}(x)$ es computable a partir de $\phi(x,y)$ y $F(x)$.♦

DEMOSTRACION. Es consecuencia inmediata de los teoremas 5 y 6, QED.

I. Si analizamos cuidadosamente los pasos dados para computar $\mathcal{R}$ a partir de ϕ y F vemos que su construcción se concreta siguiendo una alternativa entre varias (un número finito) que se expresan por medio de la anulación o la no anulación de ciertos polinomios en los coeficientes de ϕ y F. Todas las inecuaciones se pueden expresar mediante una sola: el producto de todas ellas; y todas las ecuaciones también por solamente una: la suma de sus cuadrados. Entonces el teorema precedente se precisa así:

TEOREMA 8. Sea $\phi(x,y)$ polinomio de grado $n\geq 1$ y $F(x)$ polinomio de grado $m\geq 0$. Existe un número finito de alternativas G_i, $i=1,\ldots,N=N(\phi,F)$, de la forma

$$G_i:=\begin{cases}R_i(x,coef\ \phi,coef\ F)=0\\ Q_i(coef\ \phi,coef\ F)\neq 0\end{cases}$$

tales que

$$\phi(x,y)=0,\ F(x)\neq 0$$

tiene una solución real si y sólo si los coeficientes de ϕ y F y un x real satisfacen una de las alternativas.♦

Podemos ahora demostrar por inducción el siguiente *teorema de decisión*. Los pasos seguidos en las secciones G, H e I son esencialmente los de una demostración de A. Seidenberg (cf. [Se]) del Teor. 9 debido a Tarski.

TEOREMA 9. Sea $f(x_1,\ldots,x_n)$ un polinomio a coeficientes reales de grado m y A el vector de sus coeficientes. Existen $I=I(n,m)$ alternativas G_i, i=1,2,...,I,

$$G_i:=\begin{cases}P_i(A)=0\\ Q_i(A)\neq 0\\ R_{i,k}(A)>0 \quad k=1,2,\ldots,n_i\end{cases} \tag{43}$$

tales que f tiene una raíz real $(x_1,\ldots,x_n)$ si y sólo si se cumple una de esas alternativas. P_i, Q_i y $R_{i,k}$ son polinomios reales en los coeficientes de f.♦

DEMOSTRACION. Si ponemos $x = x_{n-1}$, $y = x_n$ y fijamos $(x_1,...,x_{n-2}) \in R^{n-2}$, entonces, en virtud del Teor. 8, $f(x_1,...,x_{n-2},x,y) = 0$ tiene una solución real si y sólo si para un x real se satisface una alternativa:

(44) $$R_{n-1}(x_1,...,x_{n-2},x,A) = 0\,,\quad Q_{n-1}(x_1,...,x_{n-2},A) \neq 0\,.$$

Pero $R_{n-1}(x_1,...,x_{n-3},x,y,A) = 0$, $Q_{n-1}(x_1,...,x_{n-3},x,A) \neq 0$ tiene una solución real si y sólo si para un x real se satisface otra alternativa:

$$R_{n-2}(x_1,...,x_{n-3},x,A) = 0,\quad Q_{n-2}(x_1,...,x_{n-3},A) \neq 0\,.$$

Siguiendo así y aplicando repetidamente el Teor. 8, llegamos a que la existencia de una solución real de $f = 0$ es equivalente a la satisfacción de una alternativa de la forma:

(45) $$R_1(x,A) = 0,\quad Q_1(A) \neq 0,$$

por un x real. Pero $R_1(x,A) = 0$ tiene una solución real si y sólo si se satisfacen, en virtud del teorema de Sturm, un conjunto de desigualdades, por lo que (45) resulta equivalente a una alternativa del tipo (43), QED.

TEOREMA 10. Sea $P(\zeta_1,...,\zeta_n)$ un polinomio en n variables a coeficientes complejos. Para R real positivo sea

(46) $$d(R) := \inf\{|\xi - \zeta| : \zeta \in C^n, \xi \in R^n, P(\zeta) = 0, |\xi| = R\}.$$

Si $d(R) \to \infty$ para $R \to \infty$ entonces existen números positivos A y a tales que, si R es suficientemente grande,

(47) $$d(R) > AR^a\,.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. En el cuadrante $\tau \geq 0$, $R \geq 0$ analicemos el siguiente conjunto

(48) $$S := \{(\tau,R) : \exists\zeta \in C^n, \exists\xi \in R^n\ t.q.\ P(\zeta) = 0, |\xi| = R, |\xi - \zeta|^2 = \tau\}.$$

Sea Q el polinomio en $(\tau,R,\xi,\mathrm{Re}\zeta,\mathrm{Im}\zeta)$ definido por

(49) $$Q(\tau,R,\xi,\mathrm{Re}\zeta,\mathrm{Im}\zeta) := |P(\zeta)|^2 + (|\xi|^2 - R^2)^2 + (|\xi - \zeta|^2 - \tau)^2\,.$$

Entonces, $S = \{(\tau,R) : Q(\tau,R,\xi,\mathrm{Re}\zeta,\mathrm{Im}\zeta) = 0$ *tiene una solución real* $(\xi,\mathrm{Re}\zeta,\mathrm{Im}\zeta)\}$.

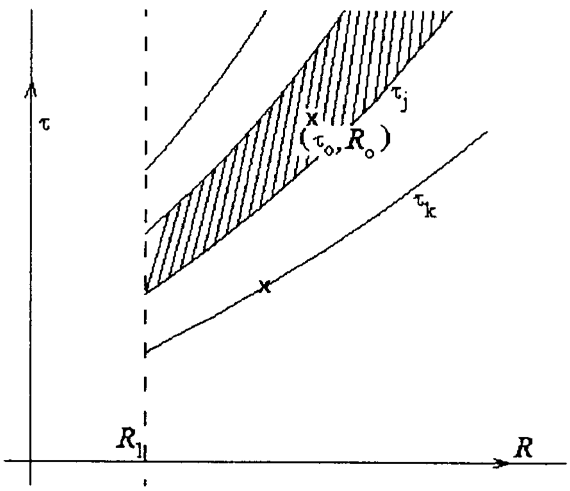
Fijados τ, R, consideramos a Q como un polinomio en las variables restantes y le aplicamos el teorema de decisión. Las alternativas G_i pueden escribirse en la forma

$$G_i := \left\{ G_{ik}(\tau,R) \begin{matrix} > \\ \neq \\ = \end{matrix} 0,\quad k = 1,...,k_i\,. \right.$$ $(\tau, R) \in S$ si y sólo si se presentan todas las desigualdades e igualdades en algún G_i. Estas a su vez se expresan por medio de polinomios en τ, R a coeficientes reales por lo que satisfacen la tesis del siguiente lema.

LEMA AUXILIAR. Sea $P(\tau, R)$ un polinomio a coeficientes reales en τ, R. Si $P \not\equiv 0$ entonces para $R > R_0$, $P(\tau, R) = A_0(R)\prod_{j=1}^{m}(\tau - \tau_j(R))$ donde $\tau_j(R) = \sum_{i=N_j}^{\infty} A_{ji}R^{-i/p}$, p entero positivo y $0 \neq A_0(R)$ es analítica en $R > R_1$.$\blacklozenge$

DEMOSTRACION. Véase la figura siguiente. Para la demostración efectuar el cambio de variable $x = 1/R$ y aplicar el teor. 1, QED.

Entonces, por *ii*) del teor. 1, cada $G_{ik}(\tau,R)$ tiene la propiedad que sus raíces no reales permanecen no reales a partir de un R en adelante. Por *i*) del teor. 1, dos raíces reales a partir de un R o son idénticas o bien son siempre distintas. Más aún, para R bastante grande, los gráficos de las funciones continuas $\tau = \tau_h(R)$, raíces reales de algún $G_{ik}(\tau,R)$, si no son idénticos entonces no se cruzan, (cf. (50)).



Si $(\tau_0,R_0)\in S$ entonces S contiene una curva $\tau=\tau_j(R)$ que pasa por (τ_0,R_0) o en su defecto toda una franja, limitada por estas curvas, que contiene a (τ_0,R_0). En efecto, en toda la franja se cumple la alternativa. O sea, S consta de curvas $\tau=\tau_j(R)$ o franjas cuyas fronteras son estas curvas. Luego, como

$$d^2(R)=\inf\{\tau:(\tau,R)\in S\},$$

tenemos $d^2\equiv 0$ o bien $d^2(R)$ es igual a una raíz $\tau_j(R)$ de una $G_{i,k}(\tau,R)\ (\equiv P(\tau,R))$. O sea, $d(R)=\sqrt{\tau_j(R)}$.

Del lema auxiliar sigue ahora que, para $R\to\infty$, vale

(50) $$\tau_j(R)=R^{-N/p}A_{jN}(1+o(1)),\quad N=N_j,\quad p \text{ entero positivo.}$$

Si $d(R)\to\infty$ entonces $d\not\equiv 0$. Luego, necesariamente $A_{jN}>0$ y $-N/p>0$. La tesis sigue inmediatamente, QED.

APENDICE B
ALGUNOS LEMAS ALGEBRAICOS Y CONSTRUCCION DE UNA SOLUCION FUNDAMENTAL PARA UN OPERADOR DIFERENCIAL PARCIAL.

Sea $P(x)$ un polinomio de n variables $x_1,...,x_n$ de grado m, $x=(x_1,...,x_n)$. Existe una solución elemental $E \in D'$ del operador $P(D) := P(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$, $P(D)E = \delta$, tal que $\frac{E}{\cosh|x|} \in B_{\infty,\tilde{P}}$, (cf. T.6, Cap. 7). Este resultado básico sigue del siguiente

LEMA FUNDAMENTAL. Para toda $u \in C_0^\infty$ vale

(1) $$|u(0)| \leq C \left\|\cosh|x|\, P(D)u\right\|_{1,1/\tilde{P}}, \qquad C = C(P). \bullet$$

Pero también puede construírse explícitamente una solución fundamental. Esto lo haremos en la sección B.

A. Un polinomio P en n variables de grado m tiene $N = N(n,m)$ coeficientes.

LEMA 1. Existe $A \subset C^n$ tal que $\# A = N$ y con la propiedad: si $P(\zeta) = 0$ para todo $\zeta \in A$ entonces $P \equiv 0$. Todo conjunto de la forma εA, $\varepsilon > 0$, tiene también esta propiedad.$\bullet$

DEMOSTRACION. Sean $\zeta(i) = (\zeta_1(i),...,\zeta_n(i)) \in C^n$, $i = 1,2,...,N$. La función

(2) $$F(\zeta(1),...,\zeta(N)) := \det\left|\zeta^\alpha(1) \quad . \quad . \quad . \quad \zeta^\alpha(N)\right|_{|\alpha|\leq m}$$

es un polinomio en $n.N$ variables complejas $\zeta_j(i)$, $i=1,...,N$, $j=1,2,...,n$, no identicamente nulo pues los monomios que en él aparecen (y con coeficientes ± 1) son distintos dos a dos. Luego, existe $A = \{\zeta(j) : j = 1,...,N\}$ tal que $F(\zeta(1),...,\zeta(N)) \neq 0$. Pero $P(\zeta(j)) = 0$, $j = 1,...,N$, es un sistema de N ecuaciones lineales homogéneas en los coeficientes de P, cuyo determinante es igual a $F(\zeta(1),...,\zeta(N)) \neq 0$. Luego es imposible que P se anule en todo elemento de A y sea $\not\equiv 0$. Observemos finalmente que también $F(\varepsilon\zeta(1),...,\varepsilon\zeta(N)) \neq 0$ si $\varepsilon > 0$, QED.

LEMA 2. Sea A como en el lema 1 y P un polinomio de grado no mayor que m. Existen C_1 y C_2, constantes positivas, tales que

(3) $$C_1\tilde{P}(\xi) \leq \sup_{\zeta\in A}|P(\xi+\zeta)| \leq C_2\tilde{P}(\xi), \quad \xi \in C^n. \bullet$$

DEMOSTRACION. Veamos la segunda desigualdad. La fórmula de Taylor expresa que

(4) $$P(\xi+\zeta) = \sum_{|\alpha|\leq m} P^{(\alpha)}(\xi)\frac{\zeta^\alpha}{\alpha!}.$$

Entonces,

(5) $$|P(\xi+\zeta)| \leq \tilde{P}(\xi)\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\left|\frac{\zeta^\alpha}{\alpha!}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Veamos ahora la primera desigualdad. A cada $\zeta(j) \in A$ le asociamos un polinomio en η de grado m:

$$R(\eta;\zeta(j)) := \frac{F(\zeta(1),\ldots,\underset{j}{\eta},\ldots,\zeta(N))}{F(\zeta(1),\ldots,\zeta(N))}$$

donde el numerador se obtiene de F reemplazando $\zeta(j)$ por η. Luego, $R(\zeta(i);\zeta(j)) = \delta_{ij}$ y vale

(6)
$$P(\xi+\eta) = \sum_{j=1}^{N} R(\eta;\zeta(j))\, P(\xi+\zeta(j)),$$

pues ambos polinomios en η coinciden en A y son de grado $\leq m$. Derivando respecto de η obtenemos

$$P^{(\alpha)}(\xi+\eta) = \sum_{j=1}^{N} R^{(\alpha)}(\eta;\zeta(j))\, P(\xi+\zeta(j)).$$

Para $\eta = 0$:

$$\left|P^{(\alpha)}(\xi)\right| \leq \sup_{1\leq j\leq N} \left|P(\xi+\zeta(j))\right| . \sum_{j=1}^{N} \left|R^{(\alpha)}(0;\zeta(j))\right|, \text{ QED.}$$

LEMA 3. Sea $p(z)$ un polinomio no trivial en $z \in C$, de grado $\leq m$. Entonces

(7)
$$\sup_{0<k<m} \inf_{|z|=k/m} |p(z)| \geq (4m+1)^{-m} |p(1)| .\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. Sea $p(z) = a(z-z_1)\ldots(z-z_\mu)$, $\mu \leq m$ y $L_j = \left\{z : \frac{2j-1}{2m} \leq |z| \leq \frac{2j+1}{2m}\right\}$, j=0,1,...,m. Uno de estos conjuntos, digamos L_k, no contiene en su interior ninguna raíz de p. Sea $r = \frac{k}{m}$. Entonces, si $|z| = r$,

(8)
$$|p(z)| \geq |a| \prod_{j=1}^{\mu} \left| r - |z_j| \right| \geq \frac{|p(1)|}{\prod(1+|z_j|)} . \prod \left| r - |z_j| \right| .$$

Sea $f(t) := \frac{|r-t|}{1+t}$. Esta función es decreciente en $(0,r)$ y creciente en (r,∞). Luego,

(9)
$$f(|z_j|) = \frac{\left|r-|z_j|\right|}{1+|z_j|} \geq \begin{cases} f(r+\frac{1}{2m}) & si \quad z_j \in L_h \quad m \geq h > k \\ f(r-\frac{1}{2m}) & si \quad z_j \in L_h \quad h < k \end{cases}$$

Pero si $r \leq 1$, $f(r-\frac{1}{2m}) = \frac{1}{(1+r)2m-1} > \frac{1}{4m}$ y $f(r+\frac{1}{2m}) = \frac{1}{(1+r)2m+1} \geq \frac{1}{4m+1}$. En consecuencia, el miembro derecho de (9) es mayor o igual que $\frac{1}{4m+1}$. Entonces, de (8) obtenemos: $|p(z)| \geq \frac{|p(1)|}{(4m+1)^m}$, QED.

LEMA 4. Dado A como en el lema 1, sea

$$A' := \left\{\frac{k\zeta}{m} : \zeta \in A, 0 \leq k \leq m\right\}.$$

Entonces, cualquiera sea el polinomio $P(\xi)$, $\xi \in C^n$, de grado menor o igual que *m*,

(10) $$\widetilde{P}(\xi) \leq B.\sup_{\theta\in A'} \inf_{\substack{|z|=1\\ z\in C}} |P(\xi + z\theta)|,$$

donde $B = \dfrac{(4m+1)^m}{C_1}$, con C_1 como en el lema 2.♦

DEMOSTRACION. Aplicamos el lema 3 a

$$p(z) := P(\xi + z\eta),\ \eta \in A.$$

Entonces

(11) $$\sup_{0\leq k\leq m} \inf_{|z|=k/m} |P(\xi + z\eta)| \geq \frac{1}{(4m+1)^m} |P(\xi + \eta)|.$$

Tomando supremos en $\eta \in A$ en ambos miembros de esta desigualdad, vale

$$\sup_{\eta\in A}\left(\sup_{0\leq k\leq m} \inf_{|z|=k/m} |P(\xi + z\eta)| \right) = \sup_{\theta\in A'} \inf_{|z|=1} |P(\xi + z\theta)| \geq \frac{1}{(4m+1)^m} \sup_{\eta\in A} |P(\xi + \eta)|.$$

Aplicando ahora el lema 2 obtenemos la tesis, QED.

B. **TEOREMA 1.** Existe $E \in D'(R^n)$ tal que $P(D)E = \delta$ y $\dfrac{E}{\cosh|x|} \in B_{\infty,\widetilde{P}}$.♦

DEMOSTRACION. Hallar una $E \in D'(R^n)$ tal que $P(D)E = \delta$ equivale a hallar una E tal que para toda $u \in C_0^\infty(R^n)$ verifique

(12) $u(0) = < P(D)E, u(-x) > = < E, P(-D)(u(-x)) > = < (E, (P(D)u)(-x) > = < \breve{E}, P(D)u >$.

Sea $v = P(D)u$. Luego, para $\xi \in R^n$ y $\hat{v}(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi)$, vale,

(13) $$u(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{u}(\xi)\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\hat{v}(\xi)}{P(\xi)} d\xi.$$

Si una tal E existiera tendríamos

(14) $$u(0) = < \breve{E}, v > = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\hat{v}(\xi)}{P(\xi)} d\xi.$$

Esto sugiere un procedimiento: tratar de definir $\breve{E}$ a partir de la segunda igualdad en (14). Sea $\theta \in A'$, (cf. lema 4), con A contenido en el interior de la esfera unitaria de R^n. Definimos

$$\psi_\theta(\xi) = \begin{cases} 1 & si \quad \widetilde{P}(\xi) \leq B|P(\xi + z\theta)| \quad para \quad todo \quad z, \quad |z| = 1 \\ 0 & en \quad caso \quad contrario. \end{cases}$$

ψ_θ es entonces la función característica (indicador) de un conjunto cerrado de R^n. Del lema 4 sigue que

$$(m+1)N \geq \sum_{\theta\in A'} \psi_\theta(\xi) =: \phi(\xi) \geq 1 \qquad \text{para todo } \xi \in R^n.$$

Por lo tanto, $\phi_\theta(\xi) := \dfrac{\psi_\theta(\xi)}{\phi(\xi)} \geq 0$ y $\sum_{\theta\in A'} \phi_\theta(\xi) \equiv 1$. Para $v = P(D)u$, $u \in C_0^\infty$, obtenemos,

(15) $$\frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\hat{v}(\xi)}{P(\xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{2\pi i} \sum_{\theta\in A'} \int_{R^n} \phi_\theta(\xi)\, d\xi \int_{|z|=1} \frac{\hat{v}(\xi + z\theta)}{P(\xi + z\theta)} \frac{dz}{z},$$

pues $\hat{u}(\zeta)=\dfrac{\hat{v}(\zeta)}{P(\zeta)}$ es analítica en $\zeta \in C^n$, y por tanto $\dfrac{\hat{v}(\xi+z\theta)}{P(\xi+z\theta)}$ es holomorfa en z para cada par ξ, θ. Se impone entonces la definición

(16) $$\breve{E}(v):=\frac{1}{(2\pi)^{n+1}i}\sum_{\theta\in A'}\int_{R^n}\phi_\theta(\xi)\,d\xi\int_{|z|=1}\frac{\hat{v}(\xi+z\theta)}{P(\xi+z\theta)}\frac{dz}{z},\ \text{para } v\in C_0^\infty .$$

Sea $v\in C_0^\infty$. Luego,

(17) $$\left|\breve{E}(v)\right|\le\frac{B}{(2\pi)^{n+1}}\sum_{\theta\in A'}\int_{R^n}d\xi\int_{|z|=1}\frac{|\hat{v}(\xi+z\theta)|}{\left|\widetilde{P}(\xi)\right|}|dz|=$$

$$=\frac{B}{(2\pi)^{n+1}}\sum_{\theta\in A'}\int_{R^n}\frac{d\xi}{\widetilde{P}(\xi)}\int_{|z|=1}\left|\left(v(.)e^{-i<z\theta,.>}\right)^{\wedge}(\xi)\right||dz|.$$

Sean $w(x):=v(x).\cosh|x|$, $h_z(x):=\dfrac{e^{-i<z\theta,x>}}{\cosh|x|}$. Entonces $w\in C_0^\infty$ y $h_z\in S$. De la proposición 4 del Cap.7 obtenemos

(18) $$\|w.h_z\|_{1,1/\widetilde{P}}\le\|w\|_{1,1/\widetilde{P}}\|h_z\|_{1,M_{1/\widetilde{P}}}.$$

El conjunto de funciones $T_a=\left\{\dfrac{e^{-i<\eta,x>}}{\cosh|x|}:|\eta|\le a<1\right\}\subset S$ es acotado en la topología de espacio vectorial de S pues dados un entero no negativo m y una n-upla α, vale $\left||x|^m D^\alpha\phi(x)\right|\le C(\alpha,m)$ para todo $\phi\in T_a$.

Pero un conjunto acotado en S es acotado en $B_{p,k}$, (cf T.3, Cap.7). Luego $\{h_z:|z|=1\}$, que está contenido en T_a para cierto a, es un conjunto acotado en $B_{1,M_{1/\widetilde{P}}}$. Entonces, de (18) resulta

(19) $$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\left|\left(v(.)e^{-i<z\theta,.>}\right)^{\wedge}(\xi)\right|\frac{d\xi}{\widetilde{P}(\xi)}=\|w.h_z\|_{1,1/\widetilde{P}}\le C\|w\|_{1,1/\widetilde{P}}.$$

Luego,

$$\left|\breve{E}(v)\right|\le\frac{B}{2\pi}\sum_{\theta\in A'}\int_{|z|=1}\|w.h_z\|_{1,1/\widetilde{P}}|dz|\le\frac{B}{2\pi}\sum_{\theta\in A'}\|w\|_{1,1/\widetilde{P}}\int_{|z|=1}C|dz|\le B\,C\,N\,(m+1)\,\|w\|_{1,1/\widetilde{P}}.$$

O sea, $\left|\breve{E}(v)\right|\le B'\,\|w\|_{1,1/\widetilde{P}}=B'\left\|v\cosh|x|\right\|_{1,1/\widetilde{P}}<\infty$ y $\breve{E}$ está bien definida. Además, de

$\breve{E}(v)=\left(E,{}^\vee v\right)=\left(\dfrac{E}{\cosh|x|}\right)\left({}^\vee(v(x)\cosh|x|)\right)=\left(\dfrac{E}{\cosh|x|}\right)^\vee(v(x)\cosh|x|)$ resulta que

(20) $$\left|\left(\frac{E}{\cosh|x|}\right)^\vee(w)\right|\le B'\|w\|_{1,1/\widetilde{P}}\ \text{para todo } w\in C_0^\infty .$$

En consecuencia, $\dfrac{E}{\cosh|x|}$ define una funcional lineal continua sobre $B_{1,1/\widetilde{P}}$ y por tanto pertenece a $B_{\infty,\widetilde{P}}$, (cf. T.3, Cap.7), QED.

APENDICE D
SERIES DE DIRICHLET.

AD1. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-\lambda_k s)$ se dice de *Dirichlet* (y de tipo $\{\lambda_k\}$) si $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$ para $n \to \infty$. Cuando $\lambda_k = \log k$ tenemos: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\exp(\lambda_k s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}$ y la serie es una serie de Dirichlet *ordinaria*.

Sea $s = \sigma + i\tau$, $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$. Vale el siguiente importante

LEMA. Si $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\exp(\lambda_k s_0)}\right| < M$, para n=1, 2, 3 , ... , entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\exp(\lambda_k s_0)}\right| \le M \frac{|s - s_0|}{|\sigma - \sigma_0|} \exp(-\lambda_1(\sigma - \sigma_0)) \text{ si } \sigma > \sigma_0 . \bullet$$

Esto implica que la suma de una serie de Dirichlet es acotada en fajas horizontales de ancho finito. Si la serie

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\exp(\lambda_k s)}$$

converge (absolutamente) en s_0 entonces converge (absolutamente) en el semiplano $\sigma > \sigma_0$. Quedan así definidos los semiplanos de *convergencia absoluta*, $\sigma > \sigma_a$ y de *convergencia condicional*, $\sigma > \sigma_c$, donde σ_c es la *abscisa de convergencia condicional* y σ_a la *abscisa de convergencia absoluta*: $\sigma_a \ge \sigma_c$. Vale que

$$(2) \qquad \sigma_a - \sigma_c \le \overline{lim}_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n}.$$

Si $\sigma_c < \infty$ en el semiplano de convergencia condicional $\{s : \sigma > \sigma_c\}$ (1) define una función $f(s)$ analítica cuyas derivadas pueden obtenerse derivando término a término la serie de Dirichlet que la define. Si $\sigma_1 > \sigma_c$ entonces esta función verifica $f(s) = o(|\tau|)$ uniformemente en $\sigma_1 \le \sigma < \infty$ y para $\tau \to \infty$.

Una *región de Stolz* con vértice en s_0 es un sector infinito definido para $\alpha < \frac{\pi}{2}$ de la siguiente manera: $\{s : |\arg(s - s_0)| \le \alpha, \sigma > \sigma_0\}$. Entonces, si (1) converge en s_0, converge uniformemente en toda región de Stolz con vértice s_0; y por lo tanto, si $s \to s_0$, permaneciendo en esa región:

$$\lim_{s\to s_0} f(s) = f(s_0), \quad \lim_{s\to\infty} f(s) = \begin{cases} 0 & si \quad \lambda_1 > 0, \\ a_1 & si \quad \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

La representación de $f(s)$ por una serie de Dirichlet es única: si $f(s)$=0 para $\sigma > \sigma_c$ entonces $a_k = 0$ para todo k. Más aún, si $a_1 \ne 0$ hay a lo sumo un número finito de ceros de $f(s)$ en toda región de Stolz con vértice en un punto del semiplano de convergencia condicional, y ningún cero en un semiplano $\{s : \sigma > c\}$ para cierto $c > \sigma_a$.

Los coeficientes de la serie pueden obtenerse mediante fórmulas de inversión; por ejemplo, si la serie converge absolutamente para $\sigma = a$ entonces

$$a_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(a+iy)\, e^{\lambda_n(a+iy)}\, dy \text{, para todo } n.$$

AD2. El comportamiento analítico de la suma de una serie de Dirichlet difiere del de las series de potencias. Por ejemplo, si

(3) $$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-\lambda_k s), \quad \sigma > \sigma_c,$$

es analítica en el infinito entonces $f(s)$ es igual a una constante. $f(s)$ no tiene necesariamente una singularidad sobre la abscisa de convergencia. Si embargo vale el siguiente teorema debido a Landau:

TEOREMA 1. Si en (3) $a_k > 0$ para todo k entonces $f(s)$ no es analítica en $s = \sigma_c$.•

DEMOSTRACION. Puede suponerse $\sigma_c = 0$. Desarrollando alrededor de un punto $x > 0$ obtenemos

(4) $$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x)\frac{(s-x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s-x)^k}{k!}\sum_{h=1}^{\infty} a_h(-\lambda_h)^k \exp(-\lambda_h x).$$

Supongamos $f(s)$ analítica en s=0. Entonces la serie de potencias converge en cierto $s = -a < 0$. Luego, de (4) obtenemos:

(5) $$B = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(a+x)^k}{k!} a_h \lambda_h^k \exp(-\lambda_h x) < \infty.$$

Como esta serie es de términos positivos,

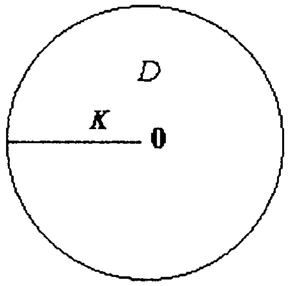
$$B = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \exp(-\lambda_h x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+x)^k}{k!}\lambda_h^k = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \exp(a\lambda_h) < \infty.$$

Es decir, la serie de Dirichlet converge en $s = -a < 0 = \sigma_c$, contradicción, QED.

COROLARIO. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-\lambda_k s)$, $a_k > 0$, converge para $\sigma > R$ y define allí una función analítica $f(s)$ prolongable por $F(s)$ a $\sigma > r$ $(r < R)$ y si F presenta una singularidad en $\sigma = r$, entonces $\sigma_c = r$.•

APENDICE E
EJEMPLO

AE1. Sea K el segmento cerrado de los puntos de abscisa entre -1 y 0 del eje real, y sea $D = B_1(0)\setminus K$. Hallar la función u tal que



(1) $\quad u(z) = 1-r$ en ∂D, $\Delta u = 0$ en D y $u \in C(\overline{D})$,.

Una tal función armónica *existe* pues hay función barrera en todo punto de ∂D, (cf. 6A, 5D y 5E). Queremos probar la

PROPOSICION 1. La solución de (1) tiene la forma

(2) $$u(z) = u(r,\phi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x\log r)\cosh x\phi}{x(x^2+1)\cosh x\pi}dx,$$

para $z = re^{i\phi}$, $0 < r \le 1$, $-\pi < \phi \le \pi$. •

DEMOSTRACION. Separando variables: $w = R.\Phi$, $\Delta w = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)(R\Phi) = 0$ equivale a

(3) $$\frac{\Phi''}{\Phi} = \chi^2, \qquad r(rR')' + \chi^2 R = 0 \qquad \text{con } \chi^2 \text{ una constante real.}$$

El cambio de variables $t = \log r$ reduce la última ecuación a: $\frac{d^2R}{dt^2} + \chi^2 R = 0$. Luego $R = C\operatorname{sen}(\chi\log r) + D\cos(\chi\log r)$. En este caso, $R(1) = 0$ implica $D = 0$. Para que R sea acotada en $0 < r \le 1$, χ debe ser real. Así $w = \left(Ae^{-\chi\phi} + Be^{\chi\phi}\right)\operatorname{sen}(\chi\log r)$. Ensayamos,

(4) $$u(r,\phi) = \int_0^\infty \left(A(\chi)e^{-\chi\phi} + B(\chi)e^{\chi\phi}\right)\operatorname{sen}(\chi\log r)d\chi.$$

Para toda s real vale

(5) $$I(s) = \int_0^\infty (\operatorname{sen}(st))\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-|s|}\right)\operatorname{sgn} s.$$

Aceptemos por un momento este resultado sobre la transformada seno. Entonces

(6) $$I(s) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} st}{t}\frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^\infty\left(\int_0^{st}\frac{\operatorname{sen} h}{h}dh\right)\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = O\left(\int_0^\infty \frac{t}{(1+t^2)^2}dt\right),$$

y la integral converge uniformemente en $s \in (-\infty,\infty)$ y lo hace acotadamente.
Luego, si $0 < r \le 1$,

(7) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t\log r)}{t}\frac{1}{1+t^2}dt = -\frac{\pi}{2}(1-r).$$

Determinemos ahora $A(\chi)$ y $B(\chi)$ de manera que

(8) $$\begin{cases} A(\chi)e^{-\chi\pi} + B(\chi)e^{\chi\pi} = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\chi(\chi^2+1)}, \\ A(\chi)e^{\chi\pi} + B(\chi)e^{-\chi\pi} = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\chi(\chi^2+1)}. \end{cases}$$

La solución de (8) es $A(\chi) = B(\chi) = -\frac{1}{\pi\cosh\chi\pi}\frac{1}{\chi(\chi^2+1)}$. Reemplazando en (4), y observando que la integral converge uniformemente para $0 < \delta \le r \le 1$, resulta que

(9) $$u(r,\phi) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\chi \log r)}{\chi(\chi^2+1)} \frac{\cosh \chi\phi}{\cosh \chi\pi} d\chi,$$

es tal que $\Delta u = 0$ en D, u es continua en $\overline{D}\setminus\{0\}$ y $u = 1-r$ en $\partial D\setminus\{0\}$. Razonando como en (6) se deduce que $u \in L^\infty(D)$. Entonces la función u dada por (9) es, en virtud del Teor. 6 del Cap. 4, la función armónica buscada, QED.

Prueba de (5). Sea $s > 0$:

$$I(s) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} st}{t(t^2+1)} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^s \cos\xi t \, d\xi\right)\frac{dt}{t^2+1} dt = \frac{1}{2}\int_0^s d\xi \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi t}}{1+t^2}dt.$$

Usando cálculo de residuos en la última integral, obtenemos

$$I(s) = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{2\pi i. e^{-\xi}}{2i} d\xi = \frac{\pi}{2}(1-e^{-s}).$$

Como $I(s) = -I(-s)$, (5) sigue.

AE2. Sea ahora D' la región $B_1(0)\setminus I$, $I = \{(x,0) : 0 \le x \le 1\}$. La función armónica en D', continua en $\overline{D'}$, tal que $u(r,\phi)|_{\partial D'} = 1-r$ es igual a

(10) $$u(z) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t \log r)}{t(t^2+1)} \frac{\cosh t(\phi-\pi)}{\cosh t\pi} dt, \text{ si } 0 \ne z = re^{i\phi},\ 0 < \phi \le 2\pi.$$

En lo que sigue calculamos el *núcleo de Green* del problema de contorno

(11) $\Delta u = \Phi(r,\phi)$, $u \in C(\overline{D'})$, $u = 0$ en $\partial D'$.

Lo obtenemos como caso particular del núcleo de Green del problema

(12) $\Delta u = \Phi(r,\phi)$, $u \in C(\overline{D})$, $u = 0$ en ∂D,

donde $D := \{z = re^{i\phi} : 0 < \phi < \alpha, 0 < r < 1\}$, $\alpha \in (0, 2\pi]$ y $\Phi \in L^2(D) \cap C^1(D)$.

El sistema $S = \left\{\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{\alpha}\phi) : n = 1,2,\ldots\right\}$ es ortonormal y completo en $[0,\alpha]$. S surge al separar variables en un problema relacionado con (12), a saber:

$\Delta u = 0$, $u \in C(\overline{D})$, $D := \{z = re^{i\phi} : 0 < \phi < \alpha, 0 < r < 1\}$, $u = 0$ en $\phi = 0$ y $\phi = \alpha$.

Desarrollando para cada r la función Φ en el sistema S,

(13) $$\Phi(r,\phi) \sim \sum_{n=1}^\infty A_n(r) \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{\alpha}\phi), \quad A_n(r) = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha \Phi(r,\phi) \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{\alpha}\phi)\, d\phi.$$

Supongamos, por el momento, la hipótesis más restrictiva: $\Phi \in C_0^\infty(D)$. Entonces, $A_n(0) = A_n(1) = 0$. *Definamos,*

(14) $$\Phi_n(r,\phi) := A_n(r) \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{\alpha}\phi).$$

Entonces, $\Phi = \sum_{n=1}^\infty \Phi_n$ y la convergencia de la serie no sólo es en $L^2(D)$ sino que por la hipótesis adicional es uniforme en D.

La solución del problema (11) para $\Phi \equiv \Phi_n = A_n(r)\operatorname{sen}(n\pi\phi/\alpha)$ es

(15) $$u_n(r,\phi) = B_n(r)\operatorname{sen}(n\pi\phi/\alpha),$$

siempre que $B_n(r)$ satisfaga

(16) $$-(rB_n'(r))'+\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\frac{B_n(r)}{r}=-rA_n(r);\quad B_n(0)=B_n(1)=0.$$

Por otra parte, $v_1(r)=r^{n\pi/\alpha}$ y $v_2(r)=r^{n\pi/\alpha}-r^{-n\pi/\alpha}$ son soluciones de la ecuación en (16) para $A_n\equiv 0$ tales que $v_1(0)=0$ y $v_2(1)=0$.

El núcleo de Green para el problema (16) es $G_n(r,\rho)$, (cf. [W]; [BP1], p.55-61):

(17) $$G_n(r,\rho)=\frac{-\alpha}{2\pi n}\begin{cases} r^{n\pi/\alpha}(\rho^{n\pi/\alpha}-\rho^{-n\pi/\alpha}), & 1\geq\rho\geq r>0,\\ \rho^{n\pi/\alpha}(r^{n\pi/\alpha}-r^{-n\pi/\alpha}), & 1\geq r\geq\rho>0.\end{cases}$$

Luego, si $r\in[0,1]$, $\rho\in[0,1]$ y $\wedge\equiv\inf$, tenemos:

(18) $$0\leq G_n(r,\rho)\leq\frac{\alpha}{2\pi n}\left(\frac{r}{\rho}\wedge\frac{\rho}{r}\right)^{n\pi/\alpha}\leq\frac{1}{n}.$$

Vale entonces,

(19) $$B_n(r)=\int_0^1-\rho A_n(\rho)G_n(r,\rho)d\rho\in C([0,1]).$$

Por otra parte, usando (18) y teniendo en cuenta que $\frac{2n\pi}{\alpha}\geq n$,

(20) $$\int_0^1 G_n^2(r,\rho)\rho d\rho\leq\left(\frac{r\alpha}{2\pi n}\right)^2\left[\int_0^1 t^{\frac{2\pi n}{\alpha}+1}dt+\int_1^{1/r}t^{-\frac{2\pi n}{\alpha}+1}dt\right]\leq(\text{si } n>2)\leq\frac{\alpha}{4\pi n}\left(\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2-1\right)^{-1}$$

Luego,

$$|B_n(r)|^2\leq\int_0^1 A_n^2(\rho)\rho d\rho.\int_0^1 G_n^2(r,\rho)\rho d\rho\leq(\text{si } n>2)\leq\frac{\alpha}{4\pi n}\left(\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2-1\right)^{-1}\int_0^1 A_n^2(\rho)\rho d\rho,$$

(21) $$|B_n(r)|\leq Mn^{-3/2}\left(\int_0^1 A_n^2(\rho)\rho d\rho\right)^{1/2}\qquad \text{para } n=1,2,\dots.$$

De (13) resulta, luego de integrar la fórmula de Parseval: $\int_0^\alpha\Phi^2 d\phi=\sum(\sqrt{\alpha/2}A_n)^2$, que

(22) $$\frac{\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 A_n^2(\rho)\rho d\rho=\int_0^1\rho d\rho\int_0^\alpha\Phi^2(\rho,\phi)d\phi<\infty.$$

De esto y (21) sigue que $\sum|B_n(r)|$ converge uniformemente en $[0,1]$ y por lo tanto también converge uniformemente en $\overline{D}$ la serie

(23) $$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(r,\phi)=:u(r,\phi).$$

Veamos la función u. Vale, $u(r,\phi)\in C(\overline{D})$, $u=0$ en ∂D, y en el sentido de $D'(D)$: $\Delta u=\lim_{N\to\infty}\Delta\sum_{n=1}^{N}u_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\Phi_n=\Phi$. Luegp, del Lema de Weyl se deduce que $u\in C^2(D)$, (cf. Ap.L). Además,

(24) $$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(r)\operatorname{sen}\frac{n\pi\theta}{\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1-A_n(\rho)\rho G_n(r,\rho)d\rho\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi\theta}{\alpha}=$$

$$=\frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{n\pi\theta}{\alpha}\int_0^1 G_n(r,\rho)\rho\,d\rho\int_0^{\alpha}-\Phi(\rho,\phi)\operatorname{sen}\frac{n\pi\phi}{\alpha}d\phi=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\alpha}\int_0^1-\Phi(\rho,\phi)\frac{G_n(r,\rho)}{\alpha}\left\{2\operatorname{sen}\frac{n\pi\theta}{\alpha}\operatorname{sen}\frac{n\pi\phi}{\alpha}\right\}\rho\,d\rho\,d\phi\,.$$

Si se pudiera conmutar la suma con las integrales, tendríamos

$$(25)\qquad u(r,\theta)=\int_0^{\alpha}d\phi\int_0^1-\Phi(\rho,\phi)\left(\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}G_n(r,\rho)\left\{\cos\frac{n\pi}{\alpha}(\phi-\theta)-\cos\frac{n\pi}{\alpha}(\phi+\theta)\right\}\right)\rho\,d\rho\,.$$

La serie entre paréntesis converge a una función continua en $0\le r<\rho\le 1$, $0\le\rho<r\le 1$, pues allí puede localmente mayorarse por una serie geométrica (cf. (18)).

Calcularemos su suma. Observemos que si $|z|<1$, $\log\frac{1}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Luego

$$(26)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos n\phi}{n}=\operatorname{Re}\log\frac{1}{1-re^{i\phi}}=-\frac{1}{2}\log\left(1+r^2-2r\cos\phi\right).$$

Entonces, si $0\le r<\rho\le 1$,

$$\frac{1}{\alpha}G_n(r,\rho)\cos\frac{n\pi}{\alpha}(\phi-\theta)=\frac{-1}{2\pi n}\left((r\rho)^{n\pi/\alpha}-(r/\rho)^{n\pi/\alpha}\right)\cos\frac{n\pi}{\alpha}(\phi-\theta)\,,$$

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}G_n(r,\rho)\cos\frac{n\pi}{\alpha}(\phi-\theta)=\frac{1}{4\pi}\log\frac{1+(r\rho)^{2\pi/\alpha}-2(r\rho)^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi-\theta)}{1+(r/\rho)^{2\pi/\alpha}-2(r/\rho)^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi-\theta)}\,.$$

Luego, si $0\le r<\rho\le 1$, el paréntesis en (25) define a $G=G(r,\theta;\rho,\phi)$:

$$G=G(r,\theta;\rho,\phi):=\frac{1}{\alpha}\sum_{1}^{\infty}G_n(r,\rho)\ \left\{\cos(n\pi(\phi-\theta)/\alpha)-\cos(n\pi(\phi+\theta)/\alpha)\right\}=$$

$$=\frac{-1}{4\pi}\log\frac{\left[r^{2\pi/\alpha}+\rho^{2\pi/\alpha}-2(r\rho)^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi-\theta)\right]\left[1+(r\rho)^{2\pi/\alpha}-2(r\rho)^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi+\theta)\right]}{\left[1+(r\rho)^{2\pi/\alpha}-2(r\rho)^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi-\theta)\right]\left[r^{2\pi/\alpha}+\rho^{2\pi/\alpha}-2(r\rho)^{\pi/\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\phi+\theta)\right]}$$

Pero esta expresión es simétrica en $(r,\rho)\in(0,1)\times(0,1)$ y coincide con la serie para todo valor $(r,\rho)\in(0,1)\times(0,1)$, $r\ne\rho$.

Entonces, con las potencias definidas en el plano cortado a lo largo del semieje positivo, tenemos,

$$(27)\qquad -G(r,\theta;\rho,\phi)=\frac{1}{4\pi}\log\left|\frac{\left(z^{\pi/\alpha}-\zeta^{\pi/\alpha}\right)\left((z\zeta)^{\pi/\alpha}-1\right)}{\left(z^{\pi/\alpha}-\bar{\zeta}^{\pi/\alpha}\right)\left((z\bar{\zeta})^{\pi/\alpha}-1\right)}\right|,$$

si $z=re^{i\theta}$, $\zeta=\rho e^{i\phi}$, $(z,\zeta)\in\partial D\times D$ o bien si $(z,\zeta)\in D\times D,\ r\ne\rho$.

En lugar de probar que la conmutación de integral y suma en (25) es correcta, probaremos directamente que

$$(28)\qquad u(r,\theta)=\int_0^{\alpha}d\phi\int_0^1-\Phi(\rho,\phi)G(r,\theta;\rho,\phi)\,\rho\,d\rho$$

es solución del problema.

Para ello observemos dos hechos:

i) Si $\Phi(r,\phi)=\sum_{n=1}^{N}\Phi_n(r,\phi)=\sum_{n=1}^{N}A_n(r)\operatorname{sen}\frac{n\pi\phi}{\alpha}$, con $A_n(r)\in C^1([0,1])$, entonces es lícito la conmutación de integral y suma en (24). En este caso, (28) es la solución del problema. Además *la familia **F** de funciones de ese tipo* es densa en $L^2(D)$.

ii) En el cálculo de (20) vimos que $\int_0^1 G_n^2(r,\rho)\rho\,d\rho=O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, de donde

(29) $$\int_0^1 |G|^2\rho\,d\rho\le M<\infty.$$

Por tanto, usando *i*) e *ii*), si $\Psi_N(r,\phi)\in \boldsymbol{F}$ y $\Phi(r,\phi)=\lim_{N\to\infty}\Psi_N(r,\phi)$ en L^2 entonces, llamando

(30) $$u(r,\theta):=\int_0^\alpha d\phi\int_0^1-\Phi(\rho,\phi)G(r,\theta;\rho,\phi)\rho\,d\rho\,,$$

y $u_N(r,\phi):=\int_0^\alpha d\phi\int_0^1-\Psi_N(\rho,\phi)G(r,\theta;\rho,\phi)\rho\,d\rho$, resulta

(31) $$|u-u_N|(r,\phi)\le\|\Phi-\Psi_N\|_2\|G(r,\phi;.,.)\|_2\le K\,\|\Phi-\Psi_N\|_2\,.$$

Pero entonces, también en el sentido de las distribuciones,

(32) $$\Delta u=\Delta\left(\lim_{N\to\infty}\int_0^\alpha d\phi\int_0^1-\Psi_N(\rho,\phi)G(r,\theta;\rho,\phi)\rho\,d\rho\right)=\lim_{N\to\infty}\Psi_N=\Phi\,.$$

Usando (30), (31) y el Lema de Weyl se concluye que u $(\in C(D))$ es la solución buscada para $\Phi\in C_0^\infty(D)$.

Con este mismo argumento que involucra a las fórmulas (30)-(32) se prueba que $u(r,\theta)=\int_0^\alpha d\phi\int_0^1-\Phi(\rho,\phi)G(r,\theta;\rho,\phi)\rho\,d\rho$ es la solución del problema (12) pero ahora para la más general $\Phi\in L^2(D)\cap C^1(D)$. Por tanto sigue el

TEOREMA 1. El núcleo de Green del problema (11) en la región $D'=B_1(0)\setminus I$ es igual a

(33) $$G(r,\theta;\rho,\phi)=\frac{-1}{4\pi}\log\left|\frac{(\sqrt{z}-\sqrt{\zeta})(\sqrt{z\zeta}-1)}{(\sqrt{z}-\sqrt{\bar\zeta})(\sqrt{z\bar\zeta}-1)}\right|,$$

donde $z=re^{i\theta}$, $\zeta=\rho e^{i\phi}$, $(z,\zeta)\in\partial D\times D$, o bien, para $(z,\zeta)\in D\times D, r\ne\rho$.♦

APENDICE F
LA SOLUCION FUNDAMENTAL PARA EL LAPLACIANO

AF. 1. Sea $s(a,x)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-a|}$. Entonces $\Delta_x s(a,x)=0$ en $R^2\backslash\{a\}$. Sea $f(x)\in L^\infty(R^2)$ y de soporte compacto. Bajo estas hipótesis vale el siguiente:

TEOREMA 1. Si $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ y

(1) $$u(x):=(\sigma f)(x):=-\int_{R^2} s(x,y)\,f(y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\log|x-y|\,f(y)dy$$

entonces $u(x)\in C^1(R^2)$ y para todo $x\in R^2$ vale:

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)=-\int\frac{\partial s}{\partial x_i}(x,y)\,f(y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}f(y)dy.\bullet$$

DEMOSTRACION. Las funciones $\log|x|$, $x_i/|x|^2$ son localmente integrables en R^2. Por tanto las convoluciones en (1) y (2) definen funciones continuas. La igualdad en (2) es consecuencia del siguiente lema auxiliar, QED.

LEMA 1. Sea $a<t<b$, $0\in(a,b)$, $f(t,y)$ absolutamente continua en t para casi todo y, $\int|f(0,y)|\,dy<\infty$. Si

(3) $$\int_a^b dt\int\left|\frac{\partial}{\partial t}f(t,y)\right|dy<\infty,$$

entonces $f(t,.)$ es absolutamente integrable para todo $t\in(a,b)$ y

(4) $$F(t):=\int f(t,y)\,dy$$

es absolutamente continua en (a,b) y vale

(5) $$F'(t)=\int\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)\,dy \qquad \text{casi doquier en } t\in(a,b).$$

Además, si $\int\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)\,dy$ es continua en t entonces $\frac{d}{dt}\int f(t,y)\,dy=F'(t)=\int\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)\,dy$ en todo $t\in(a,b)$.$\bullet$

No demostraremos este lema. Su demostración es esencialmente una aplicación del Teorema de Fubini.

AF.2. **TEOREMA 2**. Sea $f_1\in L^\infty, f_1\in C^1(D)$, donde D es una región acotada y $f_1=0$ en $R^2\backslash D$. Entonces

$$u_1(x)=(\sigma f_1)(x)\in C^2(D),\text{ y } \Delta u_1=f_1 \text{ en } D.\bullet$$

DEMOSTRACION. Sea $S_\varepsilon=\{x:|x|<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$ y $W:=\{y:M\geq|y|\geq 2\varepsilon\}$, $M>2\varepsilon$. La función

(6) $$\int_W\log|x-y|\,h(y)\,dy,\ h\in L^\infty(R^2)$$

es indefinidamente diferenciable en S_ε. En efecto, ello resulta de repetidas aplicaciones del lema 1. Más aún, las derivadas se obtienen derivando bajo el signo integral.

La función f_1 puede descomponerse así: $f_1 = h + f$, $f \in C^1$ con soporte compacto contenido en D e igual a f_1 en un 2ε-entorno de x_0, $x_0 \in D$.

Entonces $u_1 = \sigma h + \sigma f$, y de lo dicho resulta que en un ε-entorno de x_0:

$\Delta(\sigma h)(x) = -\int \Delta_x s(x,y)\, h(y)\, dy = 0$. Para esta *f* sea *u* definida por (1). Como

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int \frac{y_i}{|y|^2} f(x-y)\, dy,\ f \in C^1, \tag{7}$$

resulta de una aplicación del Lema 1 que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{y_i}{|y|^2}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\, dy \in C(D). \tag{8}$$

Entonces,

$$\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int \frac{y_i}{|y|^2}\frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y)\, dy = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum \int_{|y|>\eta} -\frac{y_i}{|y|^2}\frac{\partial}{\partial y_i} f(x-y)dy =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\{|y|>\eta\}}\left[-div_y\left(\frac{y_1 f(x-y)}{|y|^2}, \frac{y_2 f(x-y)}{|y|^2}\right) + f(x-y)\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{y_1}{|y|^2} + \frac{\partial}{\partial y_2}\frac{y_2}{|y|^2}\right)\right] dy =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\{|y|>\eta\}}[-div(f(x-y)\, .grad \log|y|) + f(x-y).\Delta\log|y|]dy =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\{|y|=\eta\}} f(x-y)\,(grad\log|y| \times \vec{n})\, d\sigma = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\{|y|=\eta\}} f(x-y)\,\frac{d\sigma}{\eta} = f(x), \text{ QED.}$$

AF.3. Probaremos por reducción al absurdo que en el teorema 2 no basta elegir $f_1 \in C(D)$ si queremos que $u_1 \in C^2(D)$. En lo que sigue usaremos sin previo aviso extensiones (o restricciones) de funciones dadas siempre que aquellas se reconozcan claramente en el contexto y supondremos sin pérdida de generalidad que $0 \in D$.

Supongamos que: $\Delta(C^2(D)) \supset C(D) \cap L^\infty(D)$. Sea $C_0(D)$ la familia de funciones continuas en $\overline{D}$ nulas en ∂D. Para $\phi \in C_0(D)$ consideremos la aplicación $\sigma : \phi \to \sigma\phi = \left(\frac{\log|.|}{2\pi}\right) * \phi$. Por hipótesis una tal $\phi = \Delta u$ para algún $u \in C^2(D)$.

Por otra parte, $v = \sigma\phi$ es solución de $\Delta v = \phi$ en el espacio de distribuciones $D'(R^2)$. Vale $v \in C^2(D)$. En efecto, $\Delta(v) = \phi$ en $D'(D)$ y $u - v$ es una distribución armónica en $D'(D)$ y por tanto es una función armónica, ([S], [H], [T], [Ho]). Luego, $u - v \in C^\infty(D)$ y así $v \in C^2(D)$.

Sea $K = \{x : |x| \le R\} \subset D$, $C_0(K) =$ *la familia de funciones continuas en K, nulas en* ∂K. *Convenimos en denotar con* $C^k(K)$ *a la familia de funciones con k derivadas continuas en en el interior de K extendibles continuamente hasta el borde. En particular,* $C^0(K) \supset C_0(K)$. *Cuando interpretemos a estas familias como espacios de Banach lo serán munidas con la norma* (2.2) *donde se ha eliminado la última sumatoria.*

Abusando de la notación podemos interpretar a $C_0(K)$ como la familia de funciones continuas en D, nulas en $D\backslash K$, o bien, nulas en $R^2\backslash K$. Entonces, $C_0(K)\subset C_0(D)$ es un subespacio cerrado de $C_0(\overline{D})$. Es claro ahora el significado de la proposición:

σ es 1-1 de $C_0(K)$ en $C^2(K)$ (esto es cierto pues en $D'(R^2)$ vale $\Delta\sigma\phi=\phi$).

Además σ define una transformación cerrada: en efecto, si $\phi_n\to\phi$ en $C_0(K)$ y $\sigma\phi_n\to v$ en $C^2(K)$ entonces $\sigma\phi_n\to\sigma\phi$ en $D'(D)$ y por tanto $v=\sigma\phi$. Aplicando el teorema del gráfico cerrado vemos que σ es acotada. Probaremos enseguida que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(\sigma\phi)=\frac{1}{\pi}vp\frac{x_1x_2}{|x|^4}*\phi. \tag{9}$$

Supuesto esto tenemos, por ser σ acotada de $C_0(K)$ en $C^2(K)$, que

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(\sigma\phi)\right\|_{\infty|K}=\left\|vp\frac{x_1x_2}{|x|^4}*\phi\right\|_{\infty|K}\le C.\|\phi\|_{\infty|K}. \tag{10}$$

Para una sucesión de funciones no negativas $\psi_n\in C^\infty$, $\|\psi_n\|_\infty=1$, tal que $\psi_n\uparrow\chi_H$ donde χ_H es la función característica de un cuadrado $H:=(0,\delta)\times(0,\delta)\subset K$, vale (T. de Fatou) $\left|\left(vp\frac{x_1x_2}{|x|^4}*\psi_n\right)(0)\right|\to\infty$. Pero por (10): $\left|\left(vp\frac{x_1x_2}{|x|^4}*\psi_n\right)(0)\right|\le\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(\sigma\psi_n)\right\|_{\infty|K}\le C$, contradicción. Llegamos así a la

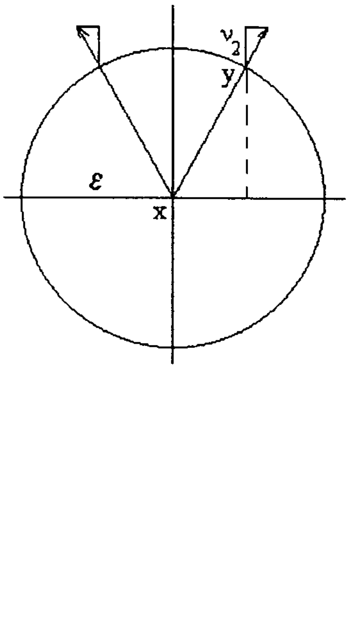
PROPOSICION 1. *i)* $C(D)\cap L^\infty(D)\not\subset\Delta C^2(D)$,

ii) $\sigma(C_0(K))\not\subset C^2(D)$.♦

AF.4. DEMOSTRACION DE (9). Sea $\phi\in C_0^\infty(R^2)$. Entonces, $\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(\sigma\phi)=$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\frac{1}{2\pi}\int(\log|x-y|)\phi(y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\frac{\partial\phi}{\partial y_2}(y)\,dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|\ge\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\phi(y)\right)-\phi(y)\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\right)\right\}dy.$$



Recurriendo a la fórmula de la divergencia,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(\sigma\phi)=\lim_{\varepsilon\to0}-\frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|=\varepsilon}\phi(y)\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}v_2\,ds+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|\ge\varepsilon}\phi(y)\,2\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^4}dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}-\frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|=\varepsilon}(\phi(y)-\phi(x))\frac{x_1-y_1}{\varepsilon^2}v_2\,ds+\frac{1}{\pi}\left(vp\frac{x_1x_2}{|x^4|}*\phi\right).$$

La última igualdad debido a que $\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}(x_1-y_1)\nu_2 ds=0$, (ver figura). Como el último límite es cero, obtenemos (9) y

$$(11)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\log|x|}{2\pi}\right)=\frac{1}{\pi}vp\frac{x_1x_2}{|x|^4}$$

en el espacio de las distribuciones $D'(R^2)$, QED.

AF.5. Queremos probar ahora que en $D'(R^2)$ vale:

$$(12)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}\left(\frac{\log|x|}{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}vp\frac{x_2^2-x_1^2}{|x|^4}+\frac{\delta}{2}.$$

En efecto, como en AF.4 se prueba que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}(\sigma\phi)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\frac{\partial\phi}{\partial y_1}(y)\,dy=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-y|\ge\varepsilon}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\phi(y)\right)-\phi(y)\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\right)\right\}dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1}{2\pi}\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}\phi(y)\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\nu_1\,ds+\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-y|\ge\varepsilon}\phi(y)\frac{|x-y|^2-2(x_1-y_1)^2}{|x-y|^4}dy=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-1}{2\pi}\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}(\phi(y)-\phi(x))\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\nu_1\,ds-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\phi(x)}{2\pi}\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\nu_1\,ds+\phi*vp\frac{|x|^2-2x_1^2}{2\pi|x|^4}=$$

$$=0+\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\phi(x)}{2\pi\,\varepsilon}\int\limits_{|x-y|=\varepsilon}\nu_1{}^2\,ds+\phi*vp\frac{x_2^2-x_1^2}{2\pi|x|^4}=\phi(x)/2+\phi*vp\frac{x_2^2-x_1^2}{2\pi|x|^4},\qquad \text{QED.}$$

En forma completamente análoga se obtiene también

$$(13)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}\left(\frac{\log|x|}{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}vp\frac{x_1^2-x_2^2}{|x|^4}+\frac{\delta}{2}.$$

AF.6. **TEOREMA 3**. Sea f nula en $R^2\backslash D$ y Hölder continua de orden α en D. Es decir, sea $f\in C^{0,\alpha}(D)$, $\alpha\in(0,1]$, f=0 en el complemento de D. Entonces σf es una función con primeras y segundas derivadas continuas en D.♦

DEMOSTRACION. Observemos en primer lugar que f es una función acotada en R^2, (cf. (2.2)). Sea ahora $\Phi\in C^\infty(D)$ con soporte en B, un círculo abierto tal que $K=\overline{B}\subset D$.

Sea $x\in B$. Por el Teorema 1 sabemos que $\sigma(\Phi)$ tiene primeras derivadas continuas. Veamos que ocurre con sus segundas derivadas.

$$\frac{\partial^2\sigma(\Phi)}{\partial x_i\partial x_j}(x)=\int\frac{\partial s}{\partial x_i}(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y_j}(y)\,dy=\int_K s_{x_i}(x,y)\frac{\partial}{\partial y_j}(\Phi(y)-\Phi(x))\,dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K\cap\{|x-y|\geq\varepsilon\}}\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\left(s_{x_i}(x,y)[\Phi(y)-\Phi(x)]\right)-s_{x_i,y_j}[\Phi(y)-\Phi(x)]\right\}dy=\text{(cf. (11), (12), (13))}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K\cap\{|x-y|\geq\varepsilon\}}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(s_{x_i}(x,y)[\Phi(y)-\Phi(x)]\right)dy-\int_K s_{x_i,y_j}(x,y)\,[\Phi(y)-\Phi(x)]\,dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial(K\cap\{|x-y|\geq\varepsilon\})}s_{x_i}(x,y)[\Phi(y)-\Phi(x)]\vec{n}_j\,ds(y)-\int_K s_{x_i,y_j}(x,y)\,[\Phi(y)-\Phi(x)]\,dy=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}-\int_{|x-y|=\varepsilon}s_{x_i}(x,y)(\Phi(y)-\Phi(x))\nu_j\,ds-\int_{\partial K}\Phi(x)\,s_{x_i}(x,y)\,\vec{n}_j\,ds-\int_K s_{x_i,y_j}\,[\Phi(y)-\Phi(x)]\,dy.$$

El límite es igual a cero. Por tanto,

$$\frac{\partial^2\sigma(\Phi)}{\partial x_i\partial x_j}=\int\frac{\partial s}{\partial x_i}(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y_j}(y)\,dy=-\int_{\partial K}\Phi(x)\,s_{x_i}(x,y)\,\vec{n}_j\,ds-\int_K s_{x_i,y_j}(x,y)\,[\Phi(y)-\Phi(x)]\,dy,$$

(14) $$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\sigma(\Phi))=\Phi(x).F(x)+\int_K s_{x_i,y_j}(x,y)[\Phi(x)-\Phi(y)]\,dy,\ F\in C^\infty(R^2\setminus\partial K).$$

Sea $f\in C^{0,\alpha}(D)$, f con soporte en K y $\phi_\varepsilon(x)=\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}$ donde $\phi\geq 0$, $\phi\in C_0^\infty(B_1)$, $\int\phi(x)dx=1$, $B_1=\{x:|x|<1\}$. Entonces, $\Phi_\varepsilon(x):=(f*\phi_\varepsilon)(x)$ satisface una condición de Hölder α, uniformemente en ε.
Aplicando la fórmula (14) a Φ_ε para $\varepsilon<\varepsilon_0$ vale,

(15) $$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\sigma(\Phi_\varepsilon))=\Phi_\varepsilon(x).F(x)+\int_K s_{x_i,y_j}(x,y)[\Phi_\varepsilon(x)-\Phi_\varepsilon(y)]\,dy$$

Pasando al límite para $\varepsilon\to 0$ obtenemos, en el sentido de las distribuciones,

(16) $$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(\sigma(f))=f(x).F(x)+\int_K s_{x_i,y_j}(x,y)[f(x)-f(y)]\,dy.$$

En efecto, la integral en (15) define una familia de funciones que converge puntualmente y en forma dominada pues, independientemente de ε, se tiene que el módulo del integrando es $\leq\dfrac{M.|x-y|^\alpha}{|x-y|^2}$. La función límite es continua. Aceptando esto por un momento concluímos que el segundo miembro de (16) es la derivada de $\sigma(f)$ respecto de x_i,x_j en el sentido ordinario. Luego, $\sigma(f)$ es dos veces continuamente diferenciable.

Una función f_1 general que verifica las hipótesis del teorema se puede descomponer, como se ha hecho en AF.2, en la forma : $f_1 = h + f$, $f \in C^{0,\alpha}(D)$, f con soporte en B e igual a f_1 en un 2ε-entorno de un punto dado x_0, $x_0 \in D$. Entonces $\sigma f_1 = \sigma h + \sigma f$. Como $\sigma h \in C^\infty$ en un ε-entorno de x_0, de lo demostrado anteriormente sigue el teorema.

Para demostrar que el miembro derecho de (16) es una función continua basta probar que $G(x) := \int_K s_{x_i,y_j}(x,y)\,[f(x) - f(y)]\,dy$ es continua en $x_0 \in B$. Pero

$G(x) = \frac{-1}{2\pi}\int_K [f(x) - f(y)]\{\frac{2(x_i - y_i)(x_j - y_j) - \delta_{i,j}|x-y|^2}{|x-y|^4}\}\,dy$ con $\{\ldots\} \le 3|x-y|^{-2}$. O sea,

$$(17) \qquad \left|s_{x_i y_j}\right| \le \frac{1}{2|x-y|^2}.$$

Luego,

$$G(x) - G(x_0) = \int_{K \cap \{|y-x_0| \ge 2\varepsilon\}} \{s_{x_i y_j}(x,y)[f(x) - f(y)] - s_{x_i y_j}(x_0,y)[f(x_0) - f(y)]\}dy \; +$$

$$+ \int_{|y-x_0|<2\varepsilon} s_{x_i y_j}(x,y)[f(x) - f(y)]dy - \int_{|y-x_0|<2\varepsilon} s_{x_i y_j}(x_0,y)[f(x_0) - f(y)]dy = I_1 + I_2 + I_3.$$

Debemos estimar las I_h. En primer lugar tenemos: $I_1 \to 0$ para ε fijo y $x \to x_0$.

Si $|x - x_0| < \varepsilon$ entonces $|I_2| \le \frac{M}{2}\int_{|y-x|<3\varepsilon} |x-y|^{\alpha-2}dy = \pi M \int_0^{3\varepsilon} \frac{dr}{r^{1-\alpha}} = C\varepsilon^\alpha$. Análogamente,

si $|x - x_0| < \varepsilon$, $|I_3| \le C\varepsilon^\alpha$. De todo esto concluimos que $G(x) \to G(x_0)$ para $x \to x_0$, QED.

APENDICE G.
METODO DE GÅRDING PARA LA DETERMINACION DEL NUCLEO DE GREEN DEL OPERADOR DE STURM-LIOUVILLE.

AG1. Sea S un abierto acotado. Queremos determinar el inverso del operador $\Delta + \lambda k(x)$ donde $k(x) > 0$ en $\bar{S}$ y $k(x) \in C^1(\bar{S})$.

Definamos: $a(x,D) = -k(x)^{-1}\Delta_x$, $D_1 = -\dfrac{i\partial}{\partial x_1}$, etc., y

(1) $$H(S) = \text{la completación de } C_0^\infty(S)$$

respecto de la norma

(2) $$\|f\| = \left(\int_S (|f|^2 + |\nabla f|^2)dx\right)^{1/2} = \left(\int_S (|f|^2 + \sum |D_i f|^2)dx\right)^{1/2}.$$

Una nomenclatura usual denota al espacio de Hilbert $H(S)$ con $H_0^{1,2}(S)$ o simplemente con $H_0^1(S)$. $H_0^1(S) \subset H^1(S)$=el espacio de Sobolev constituído por las funciones en $L^2(S)$ cuyas primeras derivadas pertenecen a $L^2(S)$.

$H^1(S)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar se *define* con:

$$((u,v)) := \int_S u.\bar{v}\, dx + \int_S \nabla u.\nabla \bar{v}\, dx = \int_S u.\bar{v}\, dx - \int_S \sum D_i u.D_i \bar{v}\, dx.$$

Se demuestra que $C^\infty(S) \cap H^1(S)$ es denso en $H^1(S)$. Además, el dual de H_0^1 es el espacio $H^{-1}(S)$ de las distribuciones de la forma: $T = \sum_{|\alpha| \le 1} (\partial / \partial x)^\alpha f_\alpha$ con $f_\alpha \in L^2(S)$.

Finalmente, si $S = R^2$ entonces $H_0^1 = H^1$ pero si S es un abierto acotado $H_0^1 \neq H^1$.

DEFINICION 1. Definamos

$$a(f,g) := (a(.,D)f,g) = \int_S \frac{-(\Delta f)(x)}{k(x)} \bar{g}(x)\, dx \qquad \text{si } f,g \in C_0^\infty(S). \;\blacklozenge$$

En este caso, por ser f, g nulas en la frontera, vale

(3) $$a(f,g) = \int_S \nabla f.\nabla(\bar{g}/k)\, dx = \sum_{\substack{|\alpha| \le 1 \\ |\beta| \le 1}} \int_S a'_{\alpha\beta}\, D^\alpha f. D^\beta \bar{g}\, dx,$$

donde $a'_{\alpha\beta} \in C(\bar{S})$. Luego,

(4) $$|a(f,g)| \le C\|f\|.\|g\|.$$

$a(f,g)$ define una forma bilineal sobre $C_0^\infty(S)$ y puede extenderse unívocamente a H manteniendo la acotación (4).

DEFINICION 2. $a_t(f,g) := a(f,g) + t(f,g) = (a(.,D)f + tf, g)$ si $t > 0$. $\blacklozenge$

a_t define un producto escalar en $H(S)$ tal que

(5) $$|a_t(f,g)| \le C\|f\|.\|g\| + t\,|f|.|g| \le (C+t)\|f\| \cdot \|g\|.$$

Recordemos que, en H, ((.,.)) designa al producto escalar asociado a $\|.\|$ y *definamos*:

(6) $$(f,g)_t := ((f,g)) + t\,(f,g).$$

La norma correspondiente, $\| . \|_t$, al producto escalar (6) se define como $\| f \|_t = \left(\| f \|^2 + t\| f \|^2\right)^{1/2}$. Es equivalente, para cada t, a $\| . \|_0 = \| . \|$.
También, para $f, g \in H(S)$,

(7) $$|a_t(f,g)| \leq M \|f\|_t \cdot \|g\|_t .$$

Por otra parte, si $f \in H$:

$$a_t(f,f) = \int_S |\nabla f|^2 \frac{dx}{k(x)} + \int_S (\nabla f . \nabla(1/k))\bar{f}\, dx + t\int_S f . \bar{f}\, dx .$$

El segundo término está acotado en módulo por

$$\|\nabla(1/k)\|_\infty . \int_S |f|\,|\nabla f|\, dx \leq \frac{\|\nabla(1/k)\|_\infty}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_S |f|^2 dx + \varepsilon \int_S |\nabla f|^2 dx\right).$$

En consecuencia, si $m = \inf\{1/k(x) : x \in S\}$ y ε es bastante pequeño:

$$|a_t(f,f)| \geq m\int_S |\nabla f|^2 dx + t\int_S |f|^2 dx - \frac{\|\nabla(1/k)\|_\infty}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_S |f|^2 dx + \varepsilon\int_S |\nabla f|^2 dx\right) \geq$$

$$\geq m'\int_S |\nabla f|^2 dx + (t - \alpha(\varepsilon))\int_S |f|^2 dx,\ m' > 0 .$$

Si t es bastante grande la forma es cooerciva. Es decir, si $t \geq t_0 > 0$, se tiene: $|a_t(f,f)| \geq m''\|f\|_t^2$. Luego, usando (7) y eligiendo M adecuadamente, obtenemos:

(8) $$M^{-1}\|f\|_t^2 \leq |a_t(f,f)| \leq M.\|f\|_t^2 \quad \text{para todo } f \in H \text{ y todo } t \geq t_0 > 0 .$$

AG2. De (7) y (8) se deduce, aplicando el lema de Lax y Milgram (cf. AG3), que para toda $v \in H$ existe un único $q \in H$ tal que

(9) $$(f,v)_t = a_t(f,q) \text{ para todo } f \in H .$$

Además, dado $q \in H$ existe un único v verificando (9); es decir, queda establecida una correspondencia biunívoca de H sobre H: $N_t q = v$, que además es continua respecto a la norma $\| . \|_t$. Se verifica $\|N_t\| \leq M$ y también $\|N_t^{-1}\| \leq M$. La relación (9) puede escribirse ahora de la siguiente manera:

(10) $$(f,v)_t = a_t(f, N_t^{-1}v) .$$

Por otra parte, si f y $g \in C_0^\infty(S)$,

$$(f,f)_t = \|f\|^2 + t\|f\|^2 = \int_{R^2} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi + (t+1)\int_{R^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{R^2} (|\xi|^2 + t + 1)|\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi ,$$

$$|(f,g)| \leq \left(\int_{R^2} \frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{|\xi|^2 + t + 1} d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{R^2} |\hat{g}(\xi)|^2 (|\xi|^2 + t + 1)\, d\xi\right)^{1/2} .$$

Designando con $< f >_t$ al primer paréntesis del miembro derecho, tenemos:

(11) $$|(f,g)| \leq \|g\|_t \cdot \left(\int_{R^2} \frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{|\xi|^2 + t + 1} d\xi\right)^{1/2} = \|g\|_t < f >_t .$$

Esta última desigualdad vale aún para $f \in C_0^\infty(S)$ y $g \in H(S)$. Ella permite definir un operador lineal $M_t : C_0^\infty(S) \to H(S)$ tal que:

(12) $$(f,g) = (M_t f, g)_t,$$

(13) $$\|M_t f\|_t^2 \leq \langle f \rangle_t^2 = \int_{R^2} \frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{|\xi|^2 + t + 1} d\xi \leq \|f\|^2.$$

El operador identidad de $C_0^\infty(S)$ con norma-2 en sí mismo con norma $\langle . \rangle_0$,

$$(C_0^\infty(S), \|\cdot\|_2) \xrightarrow{id} (C_0^\infty(S), \langle . \rangle_0),$$

es completamente continuo, ([Gå], p.227). La compacidad de la identidad es consecuencia de la teoría de los espacios $B_{p,k}$, en nuestro caso $p = 2$, (cf. [H], Cap. 2).
Sigue de (13) que el operador M_t:

$$M_t : C_0^\infty(S) \to H(S)$$

es también completamente continuo.
Entonces M_t puede extenderse a todo $L^2(S)$: $M_t : L_2(S) \to H(S)$.
Luego vale,

(14) $(f,g) = (M_t f, g)_t$ para todo $f \in L^2(S)$ para todo $g \in H(S)$.

De (10) obtenemos: $(v,h)_t = a_t(N_t^{-1}v, h)$ y por tanto,

(15) $$(f,g) = (M_t f, g)_t = a_t(N_t^{-1} M_t f, g).$$

DEFINICION 3. $G := N_t^{-1} M_t : L^2(S) \to H(S)$.♦

Entonces G es completamente continuo de L^2 en H. Recolectando fórmulas y para $f \in L^2$, $g \in H$, llegamos a:

(15′) $$(f,g) = (M_t f, g)_t = a_t(N_t^{-1} M_t f, g) = a_t(Gf, g) = (tGf, g) + (\nabla Gf, \nabla(g/k)) =$$
$$\int_S [(tGf)(x)\bar{g}(x) + \nabla Gf(x).\nabla(\bar{g}(x)/k(x))]\, dx = \langle tGf, \bar{g} \rangle + \langle \nabla Gf, \nabla(\bar{g}/k) \rangle = \langle f, \bar{g} \rangle.$$

De la última igualdad se deduce que para $\varphi \in C_0^\infty$ vale: $\langle f, \varphi \rangle = \langle tGf - \frac{\Delta}{k} Gf, \varphi \rangle$. O sea, que en el sentido de las distribuciones se tiene: $f = (t - \frac{\Delta}{k})Gf$.

TEOREMA 1. Existe $t_0 > 0$ tal que si $t \geq t_0$ el operador $a(.,D) + t$ admite un inverso a derecha G completamente continuo y biunívoco. Precisamente, se verifica: $\left(-\frac{\Delta}{k} + t\right)G = I = \textit{identidad}$ sobre $L^2(S)$.♦

El operador $a(.,D) + t = -\Delta/k + t$ es biunívoco en *H*, en virtud de (8). Consideremos la variedad lineal

(16) $$D_a = \{f \in H : \Delta f \in L^2(S)\} = \left\{f \in H : \frac{-\Delta f}{k} \in L^2(S)\right\} = \{f \in H : (a(.,D) + t)f \in L^2\},$$

a la que podemos considerar el *dominio del operador de Laplace*. De lo dicho se deduce ahora el siguiente teorema.

TEOREMA 2. $G: L^2 \to D_a$ establece una correspondencia biunívoca de L^2 sobre D_a y vale:

$$I_{L^2} = \left(-\frac{\Delta}{k}+t\right)G, \quad G\left(-\frac{\Delta}{k}+t\right) = I_{D_a}. \blacklozenge$$

AG3. TEOREMA DE REPRESENTACION DE LAX-MILGRAM. Dado un espacio de Hilbert H sea $b(.,.): H \times H \to C$, una aplicación que verifica:

i) $b(u_1+u_2,v) = b(u_1,v)+b(u_2,v)$, $b(u,v_1+v_2) = b(u,v_1)+b(u,v_2)$;

ii) $b(cu,v) = cb(u,v) = b(u,\gamma v)$ donde $\gamma = \gamma(c) \in C$;

iii) $|b(u,v)| \le K\|u\|.\|v\|$, $|b(u,u)| \ge k\|u\|^2$ para cierto $k > 0$.

Entonces, para todo $v \in H$ existe un único $q \in H$ tal que $(u,v) = b(u,q)$ para todo $u \in H$.♦

DEMOSTRACION. Sea $S = \{s \in H : \exists q \;\; tal\, que \;\; (.,s) \equiv b(.,q)\}$. S es una variedad lineal que contiene el 0. Sea $\{s_n\} \subset S$, $s_n \to s$. La sucesión $\{q_n\}$ correspondiente es de Cauchy, pues $k\|q_n - q_m\|^2 \le |b(q_n - q_m, q_n - q_m)| = |(q_n - q_m, s_n - s_m)| \le \|q_n - q_m\|.\|s_n - s_m\|$. Luego, $(.,s) \equiv b(.,q)$, $q = lim\, q_n$. En consecuencia, S es un subespacio. Debemos mostrar que $S = H$. Sea $z \perp S$. Entonces, $b(.,z)$ es una funcional lineal acotada sobre H. Por tanto existe s tal que $b(.,z) \equiv (.,s)$ y $s \in S$. Luego, $k\|z\|^2 \le |b(z,z)| = |(z,s)| = 0$ y $S = H$. La unicidad de la representación también es consecuencia de *iii*), QED.

COROLARIO. La correspondencia $q=T(v)$ es lineal, suryectiva y bicontinua.♦

DEMOSTRACION. De lo visto se deduce que $T: H \to H$ es lineal, biunívoca y sobre. Es también acotada. En efecto, $\|T^{-1}(q)\| = \|v\| = \sup_{\|u\|=1}|(u,v)| = \sup_{\|u\|=1}|b(u,q)| \le K\|q\|$. Del teorema de Banach de la transformación inversa sigue que T es acotada, QED.

APENDICE H
TEOREMAS TAUBERIANOS

AH1. Un resultado clásico de Abel afirma que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a un número α entonces $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ converge también a α para $x\uparrow 1$. Este teorema de consistencia tiene una recíproca corregida debida a Tauber: si $a_k \geq 0$ para todo k entonces $f(1-)=\alpha$ implica $\alpha=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Un teorema debido a Littlewood afirma que la condición $a_k = O(1/k)$ reemplazando a: $a_k \geq 0$ da lugar a la misma tesis.

Estos resultados se expresan de la siguiente forma: la convergencia simple implica la convergencia Abel al mismo límite y la recíproca vale si se verifican ciertas hipótesis sobre los coeficientes.

Para el caso de integrales entre 0 e ∞ se multiplica el integrando por e^{-xt} para definir la convergencia Abel en $x=0$, apareciendo así la transformada de Laplace, $\boldsymbol{L}$.

Se prueba sin dificultad la siguiente implicación. Si con $\sigma > 0$, σ fijo, vale la relación asintótica para $T \to \infty$,

$$F(T) := \int_0^T f(t)\,dt \approx A\frac{T^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)},$$

entonces, observando que $\boldsymbol{L}(t^{a-1}) = \Gamma(a)\,s^{-a}$ para $a>0$, $s>0$, se obtiene, para $x \to 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)\,dt = x\int_0^{\infty} e^{-xt}F(t)\,dt \approx \frac{A}{x^{\sigma}}.$$

TEOREMA 1 (Hardy-Littlewood). Sean $f \geq 0$ y $\sigma > 0$. Si, para $x \to 0$,

$\int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)\,dt \approx \frac{A}{x^{\sigma}}$ entonces $\int_0^T f(t)\,dt \approx A\frac{T^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}$ para $T\to\infty$.♦

AH2. De este teorema tauberiano se puede deducir otro, también debido a Hardy y Littlewood, a saber,

TEOREMA 2. Sea $f(x) \geq 0$ y no decreciente. Sean $0<\beta<\alpha>1$. Si

(1) $$\int_0^{\infty} \frac{f(y)}{(x+y)^{\alpha}}\,dy \approx \frac{C}{x^{\beta}} \text{ entonces}$$

(2) $$f(x) \approx \frac{C\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}.x^{\alpha-\beta-1},$$

en ambos casos para $x\to\infty$. Recíprocamente, (2) implica (1).♦

DEMOSTRACION. Calculamos en primer lugar algunas integrales:

(3) $$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-\beta-1}}{(1+t)^{\alpha}}\,dt = (x=\frac{1}{1+t}) = \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-\beta-1}\,dx = \mathrm{B}(\alpha-\beta,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)},$$

(4) $$\int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-\beta-1}}{(x+y)^{\alpha}}\,dy = \frac{1}{x^{\beta}}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-\beta-1}}{(1+t)^{\alpha}}\,dt = \frac{1}{x^{\beta}}.\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)},$$

$$(5)\qquad \int_t^{\infty}\frac{(x-t)^{\gamma-1}}{x^{\beta}}dx=\int_0^{\infty}\frac{z^{\gamma-1}}{(z+t)^{\beta}}dz=\frac{1}{t^{\beta-\gamma}}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\gamma)}{\Gamma(\beta)}\qquad \text{si } \gamma>0,$$

$$(6)\qquad \int_t^{\infty}\frac{(x-t)^{\gamma-1}}{(x+y)^{\alpha}}dx=\int_{y+t}^{\infty}\frac{(z-y-t)^{\gamma-1}}{z^{\alpha}}dz=\frac{1}{(y+t)^{\alpha-\gamma}}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(\alpha)},$$

$$(7)\qquad \int_0^{t}\frac{(t-x)^{\alpha-2}}{(x+y)^{\alpha}}dx=\frac{1}{(\alpha-1)(y+t)}\left[-\left(\frac{t-x}{x+y}\right)^{\alpha-1}\right]_0^t=\frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(y+t)\,y^{\alpha-1}}.$$

De las siguientes desigualdades:

$$\int_0^{\infty}\frac{f(y)}{(x+y)^{\alpha}}dy\geq f(x)\int_x^{\infty}\frac{dy}{(x+y)^{\alpha}}=\frac{f(x)}{(\alpha-1)(2x)^{\alpha-1}},$$

se deduce que (1) implica $f(x)=O(x^{\alpha-\beta-1})$.

La demostración que sigue es directa y no utiliza el Teorema 1.

ii) Supongamos (2). Entonces, si $x\geq x_0(\varepsilon)$,

$$(8)\qquad \left|f(x)-\frac{C\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-\beta-1}\right|\leq\varepsilon.x^{\alpha-\beta-1}.$$

Luego,

$$(9)\qquad \left|\int_0^{\infty}\frac{f(y)}{(x+y)^{\alpha}}dy-\frac{C\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}\frac{y^{\alpha-\beta-1}}{(x+y)^{\alpha}}dy\right|\leq \text{por (8)}\leq$$

$$\leq\int_0^{x_0}\frac{f(y)}{(x+y)^{\alpha}}dy+\frac{C\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}\int_0^{x_0}\frac{y^{\alpha-\beta-1}}{(x+y)^{\alpha}}dy+\varepsilon\int_{x_0}^{\infty}\frac{y^{\alpha-\beta-1}}{(x+y)^{\alpha}}dy=$$

$$=J_1+J_2+J_3=o(x^{-\beta})+\varepsilon\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\,\Gamma(\alpha)}{x^{\beta}\,\Gamma(\alpha)}.$$

En efecto, J_1 y J_2 están acotados por una constante que depende de x_0, multiplicada por $x^{-\alpha}$. O sea, $J_1+J_2=O(x^{-\alpha})=o(x^{-\beta})$. Por otra parte,

$$J_3=\varepsilon\int_0^{\infty}\frac{y^{\alpha-\beta-1}}{(x+y)^{\alpha}}dy-\varepsilon\int_0^{x_0}\frac{y^{\alpha-\beta-1}}{(x+y)^{\alpha}}dy=\text{por (4)}=\varepsilon\frac{1}{x^{\beta}}\cdot\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}+O(x^{-\alpha}).$$

Entonces, de (9) y (4) sigue (1); es decir, queda probada la recíproca del Teorema 2.

iii) Para probar que (1)$\Rightarrow$(2) es suficiente mostrar que esto ocurre para $\beta<1$. En efecto, sea $\beta\geq1$. Elegimos $\gamma>0$ de manera que $1>\beta-\gamma>0$, $\alpha-\gamma>1$. Si multiplicamos (1) por $(x-t)^{\gamma-1}$ e integramos en *x* entre *t* e ∞ obtenemos, usando (8):

$$\int_0^{\infty}f(y)\,dy\int_t^{\infty}\frac{(x-t)^{\gamma-1}}{(x+y)^{\alpha}}dx\approx C\int_t^{\infty}\frac{(x-t)^{\gamma-1}}{x^{\beta}}dx.$$

De (6) y (5) sigue entonces que

$$(10)\qquad \int_0^{\infty}\frac{f(y)}{(t+y)^{\alpha-\gamma}}dy\approx\left[C\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\gamma)}\right]\frac{1}{t^{\beta-\gamma}}.$$

Aplicamos ahora a la última relación el teorema supuestamente demostrado para $0<\beta<1<\alpha$ con un *C* igual al corchete en (10). Así obtenemos (2) para $0<\beta<\alpha>1$.

iv) Supongamos $\beta < 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x)=0$ en $(0,1)$. La hipótesis se puede escribir de la siguiente forma:

$$(11) \qquad \int_0^\infty \frac{f(y)}{(x+y)^\alpha} dy = \frac{C+r(x)}{x^\beta},$$

donde $|r(x)| \leq \varepsilon$ si $x \geq x_0(\varepsilon)$. Además $r(x)$ es acotada en $(0,\infty)$ pues f se anula en un entorno del orígen.

Multiplicando (11) por $(t-x)^{\alpha-2}$, integrando en x entre 0 y t, y usando (7) obtenemos:

$$(12) \qquad \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{f(y)}{(y+t)\, y^{\alpha-1}} dy = C\int_0^t (t-x)^{\alpha-2} x^{-\beta} dx + H .$$

Si $t > 2x_0$, H está acotado por

$$|\sup r(x)| \int_0^{x_0} (t-x)^{\alpha-2} x^{-\beta} dx + \varepsilon \int_0^t (t-x)^{\alpha-2}\, x^{-\beta} dx \leq M\, t^{\alpha-2} + \varepsilon\, \mathrm{B}(\alpha-1, 1-\beta)\, t^{\alpha-\beta-1}$$

donde M depende de x_0. Luego,

$$(13) \qquad \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1} \int_0^\infty \frac{f(y)}{(y+t)\, y^{\alpha-1}} dy = C \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta)}\, t^{\alpha-\beta-1} + O(t^{\alpha-2}) + O(\varepsilon\, t^{\alpha-\beta-1}) .$$

En consecuencia,

$$(14) \qquad \int_0^\infty \frac{f(y)}{(y+t)\, y^{\alpha-1}} dy \approx C \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta)} \frac{1}{t^\beta} .$$

v) Veamos ahora un lema sobre funciones holomorfas.

LEMA. Sea $\alpha < 2\pi$ y sea $f(z)$ una función holomorfa y acotada en el sector:

$$\Gamma := \{z : |z| > 0, |\arg z| < \alpha/2\}.$$

Supongamos que para t real: $\lim_{t\to\infty} f(t) = a$. Entonces

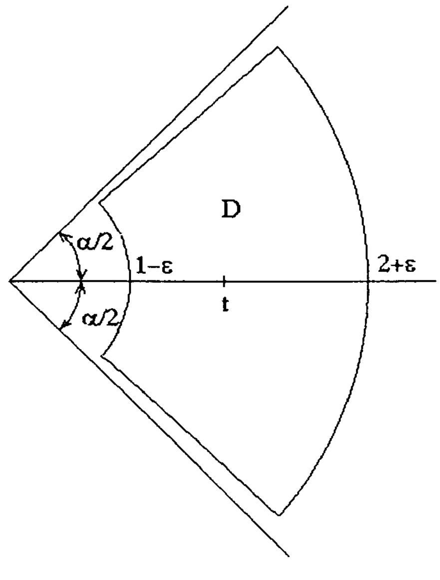
$$\lim_{r\to\infty} f(re^{i\theta}) = a$$

para todo θ tal que $|\theta| < \alpha/2$, uniformemente en $|\theta| < \alpha/2 - \varepsilon$, cualquiera sea $\varepsilon > 0$.•

DEMOSTRACION. En $D := \Gamma \cap \{1-\varepsilon < |z| < 2+\varepsilon\}$ definimos la sucesión $\{f_n\}$ de finciones holomorfas:

$$f_n(z) := f(2^n z).$$

Esta sucesión es uniformemente acotada en D y en el conjunto $D \cap R$ converge uniformemente al número a. Un teorema de Montel afirma que existe una subsucesión $f_{n_j}(z)$ que converge uniformemente sobre compactos a una función holomorfa en D, que debe ser entonces $g(z) \equiv a$. Luego, $f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos a $g(z)$ y el lema sigue inmediatamente, QED.



vi) A partir de la relación asintótica (1) obtuvimos la relación asintótica (14) en la que el parámetro t aparece en un factor lineal del denominador a diferencia de lo que ocurre en (1) en la que aparece en uno no lineal. Consideremos la función $F(z)$ holomorfa en $\{z : |z| > 0, |\arg z| < \pi\}$, prolongación analítica del primer miembro de (14):

$$(15) \qquad F(z) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{(y+z)\, y^{\alpha-1}} dy \,.$$

Como $f(x) = O(x^{\alpha-\beta-1})$ tenemos

$$F(z) = O\left(\int_1^\infty \frac{y^{-\beta}}{y+z} dy\right) = O\left(\int_1^\infty \frac{y^{-\beta}}{(y^2+r^2+2yr\cos\theta)^{1/2}} dy\right)$$

si $z = re^{i\theta}$, $r > 0$. Luego, si $-\pi + \eta \leq \theta \leq \pi - \eta$ donde $\pi > 2\eta > 0$, se obtiene,

$$(16) \qquad \begin{cases} |y+z|^2 = y^2 + r^2 + 2yr\cos\theta = (y + r\cos\theta)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \\ |y+z|^2 \geq y^2 + r^2 - 2yr\cos\eta = (y - r\cos\eta)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\eta \end{cases},$$

y por tanto,

$$|F(z)| \leq M(\eta) r^{-\beta} \int_{1/r}^\infty \frac{t^{-\beta}}{\sqrt{t^2 + 1 - 2t\cos\eta}} dt \leq$$

$$\leq M(\eta) r^{-\beta} \int_0^\infty \frac{t^{-\beta}}{\sqrt{(t - \cos\eta)^2 + \operatorname{sen}^2\eta}} dt \leq M'(\eta)\, r^{-\beta}.$$

En consecuencia $z^\beta F(z)$ es acotada en el sector

$$S = S(\eta) = \{\, z = re^{i\theta} : -\pi + \eta \leq \theta \leq \pi - \eta \,,\; r > 0 \,\}, \quad 0 < \eta < \pi \,.$$

Por tanto, de (14) y el Lema se deduce que $z^\beta F(z)$ tiende a $C\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta)}$ a lo largo de cualquier semirrecta en S que parte del origen. Y esto para todo η.

En particular tenemos, para $\delta \in (0, 1/2)$,

$$(17) \qquad r^\beta . F(re^{i(\pi-\delta)}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{C\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta)} e^{-i(\pi-\delta)\beta} \,.$$

Tomando parte imaginaria en (17), obtenemos, para $r \to \infty$,

$$(18) \qquad \int_0^\infty \frac{r \operatorname{sen}\delta\; f(y)}{(y^2 + r^2 - 2yr\cos\delta)\, y^{\alpha-1}} dy \approx \frac{C\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)\operatorname{sen}(\pi-\delta)\beta}{\Gamma(\alpha-\beta)\, r^\beta} \,.$$

El miembro izquierdo en (18) lo escribimos, para $\varepsilon = \delta^{1/4}$ y $r > 1$, como,

$$\int_0^{r(\cos\delta-\varepsilon)} + \int_{r(\cos\delta-\varepsilon)}^{r(\cos\delta+\varepsilon)} + \int_{r(\cos\delta+\varepsilon)}^{2r} + \int_{2r}^\infty = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \,.$$

(Obsérvese que $\cos\delta > \sqrt[4]{\delta}$ si $\delta \in (0, 1/2)$). Usando (16) obtenemos,

$$|I_1| \leq K.\int_0^r \frac{r\delta . y^{\alpha-\beta-1}}{r^2 \varepsilon^2 y^{\alpha-1}} dy \leq K' \frac{\delta}{\varepsilon^2 r^\beta} = K' \frac{\sqrt{\delta}}{r^\beta}, \quad K'\text{=constante independiente de } \delta \text{ y } r.$$

En forma análoga se demuestra que $|I_3| \leq K'' \dfrac{\sqrt{\delta}}{r^\beta}$ con K''=constante independiente de δ y r. Por otra parte y con M' independiente de δ y r se logra,

$$|I_4| \leq M \int_{2r}^\infty \frac{r\delta . y^{\alpha-\beta-1}}{y^2 y^{\alpha-1}} dy \leq M' \frac{\delta}{r^\beta} \,.$$

O sea, $I_1 + I_3 + I_4 = O\left(\frac{\sqrt{\delta}}{r^\beta}\right)$. Finalmente,

$$I_2 \geq \frac{f(r(\cos\delta - \varepsilon))}{r^{\alpha-1}(\cos\delta + \varepsilon)^{\alpha-1}} \int_{r(\cos\delta-\varepsilon)}^{r(\cos\delta+\varepsilon)} \frac{r\,\mathrm{sen}\,\delta}{y^2 + r^2 - 2yr\cos\delta} dy. \tag{19}$$

La integral en (19) es igual a

$$\mathrm{arctg}\frac{y - r\cos\delta}{r\,\mathrm{sen}\,\delta}\Bigg|_{r(\cos\delta-\varepsilon)}^{r(\cos\delta+\varepsilon)} = \mathrm{arctg}\frac{\varepsilon}{\mathrm{sen}\,\delta} - \mathrm{arctg}\frac{-\varepsilon}{\mathrm{sen}\,\delta}. \tag{20}$$

Entonces el segundo miembro de (20) es igual a:

$$\pi - 2\int_{\varepsilon/\mathrm{sen}\,\delta}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi + O\left(\frac{\mathrm{sen}\,\delta}{\varepsilon}\right) = \pi + O\left(\delta^{3/4}\right). \tag{21}$$

De (19), (20) y (21) sigue

$$\frac{f(r(\cos\delta - \varepsilon))}{r^{\alpha-1}(\cos\delta + \varepsilon)^{\alpha-1}} \leq \frac{(\mathrm{sen}(\pi - \delta)\beta/\mathrm{sen}\,\pi\beta)}{1 + O\left(\delta^{3/4}\right)}\left[\frac{C\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)\mathrm{sen}\,\pi\beta}{\pi\,\Gamma(\alpha - \beta)}\right]\frac{1}{r^\beta} + O\left(\frac{\sqrt{\delta}}{r^\beta}\right).$$

Si T designa al corchete en la fórmula precedente entonces usando la fórmula $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi\,\mathrm{cosec}\,\pi z$ obtenemos $T = C\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}$.

Luego, si $x = r(\cos\delta - \varepsilon)$,

$$f(x).x^{\beta-\alpha+1} \leq T\left(\frac{\cos\delta + \delta^{1/4}}{\cos\delta - \delta^{1/4}}\right)^{\alpha-1}.(1 + O(\delta))(1 + O(\delta^{3/4})) + O(\sqrt{\delta}) = \tag{22}$$

$$= T(1 + O(\delta^{1/4})).(1 + O(\delta^{3/4})) + O(\sqrt{\delta}) = T(1 + O(\delta^{1/4})) + O(\delta^{1/2}) = T(1 + O(\delta^{1/4})).$$

En consecuencia,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, x^{\beta-\alpha+1}.f(x) \leq T + B.\delta^{1/4}.$$

Como esto ocurre para todo δ tal que $0 < \delta < 1/2$ y con B independiente de δ, sigue que,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, x^{\beta-\alpha+1} f(x) \leq T. \tag{23}$$

Un argumento semejante con $\geq$ y $\underline{lim}$ prueba que también vale la siguiente desigualdad,

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\, x^{\beta-\alpha+1} f(x) \geq T. \tag{24}$$

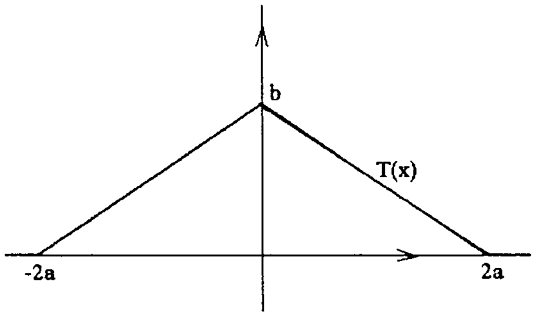
O sea, $\lim_{x\to\infty} x^{\beta-\alpha+1} f(x) = T$, QED.

APENDICE I
UN TEOREMA DE IKEHARA

AI1. *La transformada de Fourier* de una función $f \in L^1(-\infty,+\infty)$:

$$(1) \qquad \hat{f}(x) = Ff(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y)\, dy,$$

es una función continua en $(-\infty,+\infty)$ que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$. *Sea* $A = \{g(x) : g = Ff, f \in L^1\}$. A es un espacio vectorial de funciones continuas, cerrada bajo la operacion de producto: $g_1, g_2 \in A$ implica $g_1 . g_2 \in A$. Es decir, A es un álgebra.
También es cerrada por traslaciones y con cada $g(x)$ contiene a todas las funciones $e^{-icx}.g(x)$, $c \in R$. Si $g \in A$, existe una única $f \in L^1$ tal que $Ff = g$. En efecto, vale el siguiente resultado: en casi todo x:



$$(2) \lim_{0<\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\varepsilon\alpha^2 + i\alpha x)\, g(\alpha)\, d\alpha = f(x)$$

Integrando por partes se deduce que

$$(3) \quad \int_{-b}^{b} \exp(ixy)\, (1 - \frac{|y|}{b})\, dy = \frac{2(1-\cos bx)}{bx^2}.$$

Luego, de (2) obtenemos:

$$(4) \qquad t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, I_{[-2a,2a]}(x)\, (a - \frac{|x|}{2}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixy)\, \frac{\operatorname{sen}^2 ay}{y^2}\, dy.$$

O sea, $T(x) = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, t(x) \in A$. De aquí sigue que la función continua:

$$(5) \qquad \begin{cases} 0 & si \quad |x| > k \\ 1 & si \quad |x| < h < k \\ \text{lineal en } (-k,-h) \text{ y en } (h,k) \end{cases}$$

también pertenece a A. Enunciaremos a continuación un importante teorema.

TEOREMA 1. Sea $f \in L^1(-\infty,\infty)$, $g = Ff$ y $\Phi(z)$ una función holomorfa en un entorno de $g([\beta,\gamma])$. Entonces existe una función h de la clase A que en el intervalo $\beta \le x \le \gamma$ coincide con $\Phi(g)$: $h(x) = \Phi(g(x))$ si $\beta \le x \le \gamma$.♦

AI2. Sea $h(x) \in L^\infty(-\infty,\infty)$ y $H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\, h(y)\, dy$ con $K \in L^1$.

Esta es una función acotada. Se verifica:

$$(6) \qquad \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{l} K(x-y)\, h(y)\, dy = 0,$$

para todo l. Es decir, el comportamiento de H en ∞ queda determinado por el de h allí. Si existe $h(\infty)=\lim_{x\to\infty} h(x)$, también existe $H(\infty)$, como se ve fácilmente usando (6) y vale:

$H(\infty)=h(\infty).\int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\,dy$. La recíproca no es cierta.

Sin embargo N. Wiener encontró que para ciertas funciones $K(x)\in L^1$, la existencia de $H(\infty)$ implica la existencia del límite: $\lim_{x\to\infty}(K*h)(x)$ para todo $K\in L^1$.

TEOREMA 2. (teorema tauberiano de N. Wiener). Sean K, $K_1\in L^1(-\infty,+\infty)$, $h\in L^\infty$, A una constante. Si $\forall x\ \hat{K}_1(x)\neq 0$ entonces para $x\to\infty$ vale,

$$H_1(x)\to A.\int K_1(y)\,dy \text{ implica } H(x)\to A.\int K(y)\,dy\,.\blacklozenge$$

Este resultado admite una extensión que necesitaremos en el párrafo siguiente. Si $f(x)$ es una función continua en $(-\infty,+\infty)$ y $\|f\|_{\infty,k}$ designa su supremo en $k\le x\le k+1$, denotaremos con $|||f|||$ a

(7) $$|||f|||=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|f\|_{\infty,k}\,.$$

Designaremos con M a la clase de funciones continuas en L^1 para las cuales $|||.|||$ es finita. Vale el siguiente

TEOREMA 3. Sea L_1' un subconjunto de M $(\subset L^1)$. Supongamos que para todo $x\in(-\infty,+\infty)$ existe $K_1\in L_1'$ tal que $\hat{K}_1(x)\neq 0$. Sea $\alpha(x)$ una función de variación acotada en todo intervalo finito tal que existe una constante C para la cual

(8) $$V_k(\alpha)=\int_k^{k+1}|d(\alpha(x))|<C\text{, para todo } k \text{ entero.}$$

Entonces, $\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}K_1(x-y)\,d\alpha(y)=B.\int_{-\infty}^{+\infty}K_1(y)\,dy$, para todo $K_1\in L_1'$, B constante, implica

$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-y)\,d\alpha(y)=B.\int_{-\infty}^{+\infty}K(y)\,dy$, para todo $K\in M$.♦

AI3 **TEOREMA 4** (Ikehara). Sea $\alpha(x)$ una función monótona no decreciente, y consideremos la función

(9) $$f(s)=\int_{1+}^{\infty}x^{-s}d\alpha(x)\,.$$

Si para $\mathrm{Re}(s)>1$ la integral converge y si la expresión

(10) $$g(s):=f(s)-\frac{A}{s-1}$$

tiene un límite continuo sobre $\mathrm{Re}\,s=1$, entonces

(11) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=A\,.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. *i*) Podemos suponer que $\alpha(x)$ está definida en $(-\infty,+\infty)$ y que para $x \leq 1$, $\alpha(x) = \alpha(1+)$. Efectuando el cambio de variables $x = e^t$ obtenemos para $\mathrm{Re}\, s > 1$:

(12) $$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ts} d\alpha(e^t) \quad , \quad \frac{A}{s-1} = A . \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-1)t} I_{[0,\infty)}(t)\, dt ,$$

(13) $$g(s) = f(s) - \frac{A}{s-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(1-s)t} d\beta(t) ,$$

donde:

(14) $$\beta(t) = \begin{cases} \alpha(e^t)e^{-t} + \int_0^t e^{-t}\alpha(e^t)\, dt - A.t & para\, t > 0 \\ \alpha(1+) \quad para \quad t \leq 0 \end{cases}$$

O sea , $d\beta(t)$ no tienen masa en $(-\infty, 0]$ y

(15) $$d\beta(t) = e^{-t} d\alpha(e^t) - A\, dt, \quad 0 < t < \infty .$$

ii) Usando (15) obtenemos para $x = e^r$: $\int_{-\infty}^{r} e^{-(r-t)} d\beta(t) = \left(\frac{\alpha(x)}{x} - A \right) - \frac{\alpha(1+)}{x}$.

Luego, para $r \to +\infty$, vale

(16) $$\int_{-\infty}^{r} e^{-(r-t)} d\beta(t) \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha(x)}{x} \to A .$$

iii) Sea $w \in L^1(-b,b)$, y *definamos*:

(17) $$I(\varepsilon,\eta) = \int_{-b}^{b} w(u)\, g(iu + \varepsilon + 1)\, e^{iu\eta} du = \int_{-b}^{b} w(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(\eta - x)} e^{-\varepsilon x} d\beta(x) .$$

Sea : $G(t) := \int_{-b}^{b} w(u)\, e^{iut} du$. Aplicando el teorema de Fubini-Tonelli a (17) obtenemos:

$$I(\varepsilon,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-b}^{b} w(u)\, e^{iu(\eta - x)} du \right) e^{-\varepsilon x} d\beta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta - x)\, e^{-\varepsilon x} d\beta(x) .$$

Por hipótesis, el segundo miembro de (13), que es una función analítica en $\{1 < \mathrm{Re}\, s\}$, puede extenderse a $g(s) \in C(1 \leq \mathrm{Re}\, s)$. Entonces, una aplicación del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue permite *definir* $I(0,\eta)$:

(18) $$I(0,\eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-b}^{b} w(u)\, g(iu + \varepsilon + 1)\, e^{iu\eta} du = \int_{-b}^{b} w(u)\, g(iu + 1)\, e^{iu\eta} du .$$

Del teorema de Riemann-Lebesgue sigue que:

(19) $$I(0,\eta) \xrightarrow[\eta \to +\infty]{} 0 .$$

Es decir, para $\eta \to +\infty$,

(20) $$I(0,\eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\eta - x)\, e^{-\varepsilon x}\, d\beta(x) \to 0 .$$

Si en (20) pudiéramos conmutar *lim* con $\int$, de (19) obtendríamos:

$\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\eta-x)\,d\beta(x)=0$. Si esto último ocurriera para una familia de funciones G adecuada obtenida utilizando w sencillas podríamos recurrir al teorema de Wiener (Teor. 3) y concluír que $\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\eta-x)\,d\beta(x)=0$ para $K\in M$. La función $K(x)=e^{-x}I_{[0,\infty)}(x)$ no pertenece a la clase M solamente por su discontinuidad. Mostraremos que de todas maneras se obtiene para ella la conclusión del Teor. 3, $(K*d\beta)(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\eta} e^{-(\eta-x)}d\beta(x)\xrightarrow[\eta\to+\infty]{}0$, que como ya vimos implica $\dfrac{\alpha(x)}{x}\to A$ para $x\to+\infty$. Este es el programa a desarrollar en los párrafos que siguen.

iv) Consideremos la familia de funciones $w(t)=\left(1-\dfrac{|t|}{b}\right)I_{[-b,b]}(t)$. Entonces su G asociada (cf. *iii*) y (3)) es de la forma

$$G(x)=2\,\frac{(1-\cos bx)}{bx^2}.$$

Luego (cf. (18) y (20)):

$$(21)\qquad I(0,\eta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-\cos b(\eta-x))}{b(\eta-x)^2}\,e^{-\varepsilon x}d\beta(x)=\int\limits_{-b}^{b}\left(1-\frac{|u|}{b}\right)g(iu+1)\,e^{iu\eta}du\,.$$

Pero, como $A\geq 0$, tenemos:

$$(22)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}A\int\limits_{0}^{\infty}\frac{2(1-\cos b(\eta-x))}{b(\eta-x)^2}\,e^{-\varepsilon x}dx\leq 2A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}dt=2A\pi\,.$$

Luego, como el límite en (21) existe, también existe y es finito el límite (cf. (15)):

$$(23)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-\cos b(\eta-x))}{b(\eta-x)^2}\,e^{-\varepsilon x}e^{-x}d\alpha(e^x)\,.$$

El límite en (21) puede conmutarse con la integral; en efecto, tanto en (22) como en (23) puede reemplazarse ε por 0, como se deduce aplicando el teorema de Beppo-Levi para $\varepsilon\downarrow 0$. En consecuencia,

$$(24)\qquad I(0,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-\cos b(\eta-x))}{b(\eta-x)^2}\,d\beta(x)\xrightarrow[\eta\to\infty]{}0.$$

También vale que,

$$(25)\qquad \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-\cos b(\eta-x))}{b(\eta-x)^2}\,e^{-x}d\alpha(e^x)\right|\leq 2\pi A+\left|\int\limits_{-b}^{b}\left(1-\frac{|u|}{b}\right)g(iu+1)\,e^{iu\eta}du\right|.$$

v) **PROPOSICION 1.** Si $|x|<\pi$ entonces $\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}>\dfrac{4}{\pi^2}$.♦

DEMOSTRACION. $\operatorname{sen}x>2x/\pi$ en $(0,\pi/2)$. Integrando entre 0 y x obtenemos para $0<x\leq\dfrac{\pi}{2}$: $1-\cos x>x^2/\pi>2x^2/\pi^2$. Por otra parte la función $(1-\cos x)-2x^2/\pi^2$ es

concava en $\pi/2 \le x \le \pi$, positiva en $x = \pi/2$, nula en $x = \pi$. Luego $(1-\cos x) > 2x^2/\pi^2$ en $0 < x < \pi$, QED.
Haciendo uso de (25) y de la proposición 1, obtenemos para $b = \pi/l$:

$$\frac{4}{l\pi}\int_{\eta}^{\eta+l} e^{-x} d\alpha(e^x) \le 2\pi A + \left|\int_{-\pi/l}^{\pi/l}\left(1-\frac{|u|l}{\pi}\right) g(iu+1)\, e^{iu\eta} du\right|.$$

Supongamos l=1. Entonces

$$(26)\qquad \int_{\eta}^{\eta+1}|d\beta(x)| \le \int_{\eta}^{\eta+1} e^{-x} d\alpha(e^x) + A\int_{\eta}^{\eta+1} dx \le \frac{\pi}{4}\left[2\pi A + \int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{|u|}{\pi}\right)|g(iu+1)|\, du\right] + A.$$

En el caso general tendríamos

$$(27)\qquad \int_{\eta}^{\eta+l}|d\beta(x)| \le \frac{\pi l}{4}\left[2\pi A + \left|\int_{-\pi/l}^{\pi/l}\left(1-\frac{|u|l}{\pi}\right) g(iu+1) e^{iu\eta}\, du\right|\right] + Al.$$

Entonces, si $\eta \to \infty$,

$$(28)\qquad \overline{lim}_{\eta\to\infty}\int_{\eta}^{\eta+l}|d\beta(x)| \le A\left(\frac{\pi^2 l}{2} + l\right).$$

vi) De (26) sigue que β satisface (8) del teorema 3. Definamos: $L_1' = \left\{\frac{2(1-\cos bx)}{bx^2} : b > 0\right\}$.
Obviamente $L_1' \subset M$. Además, de (3) sigue que dado $x \in (-\infty, +\infty)$ existe $K_1 \in L_1'$ tal que $\hat{K}_1(x) \ne 0$. Por otra parte, (24) con B=0, para todo $K_1 \in L_1'$ y $\eta \to \infty$, puede escribirse así:

$$(29)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\eta - x)\, d\beta(x) \to B\int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x)\, dx.$$

Del teorema 3 sigue ahora que (29) vale para todo $K \in M$.
vii) Consideremos la siguiente función $K \in M$.

$$K(t) = \begin{cases} e^{-t} &, \quad t \ge 0 \\ \dfrac{t+a}{a}, & -a < t < 0 \\ 0 &, \quad t \le -a \end{cases}$$

Entonces, $\int_{-\infty}^{+\infty} K(\eta - x)\, d\beta(x) = \int_{-\infty}^{\eta} e^{-(\eta-x)} d\beta(x) + \int_{\eta}^{\eta+a}[(\eta - x + a)/a]\, d\beta(x) \xrightarrow[\eta\to\infty]{} 0$.
En consecuencia, usando (28) obtenemos:

$$\overline{lim}_{\eta\to\infty}\left|\int_{-\infty}^{\eta} e^{-(\eta-x)} d\beta(x)\right| \le \overline{lim}_{\eta\to\infty}\int_{\eta}^{\eta+a}|d\beta(x)| \le aA\left(\frac{\pi^2}{2}+1\right).$$

Luego, haciendo $a \to 0$, logramos,

$$\overline{lim}_{\eta\to\infty}\left|\int_{-\infty}^{\eta} e^{-(\eta-x)} d\beta(x)\right| = 0, \qquad \text{QED.}$$

APENDICE L
LEMA DE WEYL

AL1. Sea Ω un abierto en R^n, $P(x,\partial/\partial x)$ un operador lineal diferencial parcial con coeficientes complejos C^∞ en Ω:

(1) $$P(x,\partial/\partial x):=\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x)(\partial/\partial x)^\alpha,$$

donde $(\partial/\partial x)^\alpha=(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}...(\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$, $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$.

Usaremos la notación:

(2) $$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x)D^\alpha,$$

cuando en (1), $\partial/\partial x_j$ es reemplazado por $D_j=-i\partial/\partial x_j$, $j=1,...,n$. Si $c_\alpha(x)$=cte. para todo α, escribiremos $P(D)$ en lugar de $P(x,D)$.

Supondremos que la parte correspondiente a $|\alpha|=m$ en (1) ò (2) no es idénticamente nula, o sea, existe $x_0\in D$ tal que para algún α, $|\alpha|=m$, $c_\alpha(x_0)\neq 0$. Esa parte: $\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x)D^\alpha$, homogénea en D, se denomina *parte principal* del operador.

Aunque una ecuación de la forma $P(D)u=0$ puede tener infitas soluciones linealmente independientes, como ocurre con la ecuación de las ondas, no puede tener una solución en Ω, en el sentido de las distribuciones, con soporte constituído por un solo punto de Ω. Por otra parte la ecuación

(3) $$P(D)u=\delta, \quad \Omega=R^n,$$

tiene siempre una solución $E\in D'(R^n)$. E se denomina *solución fundamental* de $P(D)$.

AL2. Sea $\Omega=R^n$. Si una solución fundamental E de $P(D)E=\delta$ es una función analítica en $R^n\setminus\{0\}$, $P(D)$ es un operador analítico-hipoelíptico en R^n. Se dice que $P(D)$ es *analítico-hipoelíptico* si cualquiera sea $U\subset\Omega$, U abierto, y T una distribución en U, vale que si $P(D)T$ es una función analítica en U, también lo es T. El operador de Laplace es analítico-hipoelíptico y no lo es el operador del calor. El resultado para la ecuación de Laplace se conoce como *lema de Weyl.*

AL3. Se dice que $P(D)$ es ***hipoelíptico*** si cualquiera sea $U\subset\Omega$, U abierto, y T una distribución en U, vale que si $P(D)T\in C^\infty(U)$ entonces $T\in C^\infty(U)$.

AL4. También se denomina *lema de Weyl* (para el laplaciano) al siguiente resultado.

TEOREMA 1. Sea $f\in C(\Omega)$ tal que satisface localmente una condición de Hölder α en Ω, $0<\alpha\leq 1$. Sea $u\in D'(\Omega)$ tal que $\Delta u=f$ en $D'(\Omega)$. Entonces $u\in C^2(\Omega)$.♦

DEMOSTRACION. Este teorema queda demostrado con el Teor. 3 del Ap. F. A continuación volvemos a probarlo pero en forma ligeramente distinta.

Podemos suponer que Ω es (abierto) acotado. Bastará mostrar que $u\in C^2(\Omega_1)$ para todo abierto Ω_1, $\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega$. A este fin, sea $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi=1$ en $\overline{\Omega}_1$, $g:=\phi f$.

i) $u\in C^1(\Omega_1)$. En efecto, por ser g acotada,

(4) $$v=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\log\frac{1}{|x-y|}g(y)dy\in C^{1}(\Omega),$$

es tal que $\Delta(u-v)=f-g=0$ en Ω_1, (cf. Apéndice F). Luego, $u-v$ es una distribución armónica en Ω_1. Por tanto $u-v\in C^{\infty}(\Omega_1)$, (cf. este apéndice AL6). Sigue que $u\in C^{1}(\Omega)$.

ii) Sabemos que en esta situación vale

(5) $$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x)=\int_{\Omega}H(x-y)\,g(y)\,dy,\qquad x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),$$

donde $-2\pi\,s(x,y)=\log|x-y|$, $H(x-y)=-\dfrac{\partial s}{\partial x_1}=\dfrac{x_1-y_1}{2\pi|x-y|^{2}}$.

En consecuencia, (cf. Ap.F):

(6) $$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial x_2}(x)=v.p.\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{x_1x_2}{|x|^4},\\[2ex] H(x)=\dfrac{x_1}{2\pi|x|^2}\quad si\quad |x|>0,\\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial x_1}(x)=v.p.\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{|x|^2-2x_1^2}{|x|^4}+\dfrac{\delta}{2}.\end{cases}$$

Por su definición, g es de soporte compacto, K, y satisface una condición de Hölder α, uniforme. Sea $g_m(y)=\int_K g(u)\,\phi_m(y-u)\,du$ donde $\{\phi_m(x):m=1,2,\ldots\}$ es una aproximación C^{∞} a la delta en 0. Entonces $g_m\in C^{\infty}$ y vale para $y,y',z\in R^2$:

(7) $$\begin{cases}|g_m(z)-g(z)|\le\int|g(z-u)-g(z)|\,\phi_m(u)\,du\le\varepsilon\quad si\ m>m_0(\varepsilon),\\ |g_m(y)-g_m(y')|\le C.|y-y'|^{\alpha}.\int\phi_m\,du=C.|y-y'|^{\alpha}.\end{cases}$$

Si $(g*H)(y)=\int g(y-u)H(u)du$ entonces tenemos, para j=1, 2, y en el sentido de D':

(8) $$\frac{\partial}{\partial y_j}(g*H)=\lim_{m\to\infty}\frac{\partial}{\partial y_j}(g_m*H)=\lim_{m\to\infty}\left(g_m*\frac{\partial}{\partial u_j}H\right)=\text{(cf.(6))}=$$
$$=\lim_{m\to\infty}(g_m*F)+\left(1-\frac{j}{2}\right)g,$$

donde F representa a las siguientes distribuciones:

(9) $$F(x)=\begin{cases}v.p.\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{|x|^2-2x_1^2}{|x|^4}=v.p.\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{x_2^2-x_1^2}{|x|^4}\quad si\ j=1,\\[2ex] v.p.\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{x_1x_2}{|x|^4}\qquad si\ j=2.\end{cases}$$

En las integrales a continuación: $k=2.diam\,\Omega$, $x\in\Omega$.

$$v.p.\int g_m(x)\,F(y-x)\,dx = v.p.\int_{|x-y|<k}(g_m(x)-g_m(y))\,F(y-x)\,dx =$$

$$= v.p.\int_{|x-y|<k}(g_m(x)-g(x)-(g_m(y)-g(y)))\,F(y-x)\,dx + v.p.\int_{|x-y|<k}(g(x)-g(y))\,F(y-x)\,dx$$

Pero $v.p.\int_{|x-y|<k}(g_m(x)-g(x)-(g_m(y)-g(y)))F(y-x)\,dx$ tiende uniformemente a cero para $m\to\infty$. En efecto, $\left|v.p.\int_{|x-y|<k}(g_m(x)-g(x)-(g_m(y)-g(y)))F(y-x)\,dx\right| =$

$$= \left|\int_{|x-y|<k}(g_m(x)-g(x)-(g_m(y)-g(y)))F(y-x)\,dx\right| \le$$

$\le C\,(\sup_x |g_m(x)-g(x)|)^{1/2}\int_{|x-y|<k}|x-y|^{\alpha/2}|F(x-y)|\,dx.$. Luego,

$$\lim_{m\to\infty} v.p.\int g_m(x)\,F(y-x)\,dx = \int (g(x)-g(y))\,F(y-x)\,dx =: G(y).$$

Como $G(y)$ y $g(y)$ son continuas, de (8) se concluye que $\frac{\partial}{\partial y_j}(g*H)\in C(\Omega)$. Es decir, $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\in C(\Omega)$. Análogamente, $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\in C(\Omega)$. Luego $v\in C^2(\Omega)$, QED.

AL5 *Diremos que* $h(x)$ *es Hölder continua o pertenece a* $Lip_{loc}(\Omega)$ si para todo compacto $K\subset\Omega$ existe $\alpha\in(0,1]$ y existe una constante $M=M(K)$ tal que para todo par de puntos $x,y\in K$, se verifica: $|h(x)-h(y)|\le M.|x-y|^{\alpha}$. Así la función *f* del T.1 es Hölder continua.

El corolario que sigue enuncia propiedades de regularidad de las autofunciones del operador $-\frac{1}{k}\Delta$.

COROLARIO 1. Sea $k(x)\in Lip_{loc}(\Omega)$, $k\in C(\overline{\Omega})$, $k>0$ en $\overline{\Omega}$. Sea $u\in C(\overline{\Omega})$ una solución en $D'(\Omega)$ de

(10) $\quad (\Delta+\lambda k)u=0,\ u|_{\partial\Omega}=0,$

donde λ es una constante. Entonces $u\in C^2(\Omega)$.♦

DEMOSTRACION. Tenemos $\Delta u=\lambda k u\in C(\Omega)$. Por i) del Teor. 1, $u\in C^1(\Omega)$. Por tanto, $\Delta u\in Lip_{loc}(\Omega)$. Aplicando el teorema resulta $u\in C^2(\Omega)$, QED.

COROLARIO 2. Las mismas hipótesis del Corolario 1. Sea $f\in Lip_{loc}(\Omega)$ y sea u localmente sumable. Si para toda $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ vale:

(11) $\quad \int_\Omega u.(\Delta+\lambda k)\phi\,dx = \int_\Omega f.\phi\,dx,$

entonces u coincide en Ω con una función C^2.♦

NB. El corolario 2 es válido aún para operadores elípticos muy generales y si $k\in C^1(\Omega)$ entonces las derivadas segundas son Hölder continuas.♦

AL6. La hipoelipticidad del laplaciano significa en particular que si $u \in D'(R^2)$ es solución de $\Delta u = 0$ entonces $u \in C^\infty(R^2)$. Es decir, toda distribución armónica es una función armónica. Esto se demuestra directamente así: sea $u \in D'(R^2)$ tal que $\Delta u = 0$ y sea $E(x) = \dfrac{\log|x|}{2\pi}$ en $R^2 \setminus \{0\}$. Sabemos que (cf. Ap.R) $\Delta E = \delta$. Entonces, si ϕ denota una función $C^\infty(R^2)$, nula en un entorno de 0 e igual a 1 en un entorno de ∞, tenemos:

(12) $\quad \delta = \Delta(E) = \Delta(\phi E + (1-\phi)E) = h + \Delta((1-\phi)E)$,

donde $\phi E \in C^\infty$ y $(1-\phi)E$ tiene soporte compacto. En consecuencia, $h \in C_0^\infty$ y

(13) $\quad u = u * \delta = h * u + \Delta((1-\phi)E) * u = h * u + ((1-\phi)E) * \Delta u = h * u + 0 \in C^\infty$.

La fórmula (13) muestra también que si solamente $u \in D'(R^2)$ entonces $u = h * u + ((1-\phi)E) * \Delta u$, y como el primer sumando $\in C^\infty(R^2)$ resulta que u coincide con una función $\in C^\infty$ en el complemento del soporte de $((1-\phi)E) * \Delta u$. Eligiendo convenientemente ϕ puede lograrse que el soporte de $(1-\phi)E$ tenga diametro menor que un ε dado, de manera que *u coincide con una función $\in C^\infty$ en el complemento del soporte de Δu*.

Luego, si sólo sabemos que $u \in D'(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ en Ω entonces el argumento precedente aplicado a ψu, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi = 1$ en un entorno de $x \in \Omega$, prueba que $u \in C^\infty$ en un entorno de x, y por tanto vale que $u \in C^\infty(\Omega)$. Así vale el

TEOREMA 2. Si $u \in D'(\Omega)$ es una distribución armónica en Ω $(\Delta u = 0)$ entonces es una función armónica allí.♦

AL7. Otra propiedad importante del operador Δ es su conmutación con las transformaciones lineales T de R^2 en R^2 que dejan invariante la forma cuadrática $|x|^2$: para todo x, $|Tx| = |x|$. Es decir,

TEOREMA 3. Δ conmuta con las transformaciones T del grupo ortogonal completo $O(2)$.♦

En efecto, sea $\phi \in S(R^2)$(=espacio de las funciones de decrecimiento rápido). *Definimos*

(14) $\quad \phi^T(x) := \phi(T^{-1}x)$.

Como $|\det T| = |\det T^{-1}| = 1$, resulta : $(\phi^T)^\wedge(x) := \int e^{-<x,y>}\phi(T^{-1}y)\,dy =$
$= \int e^{-<T^{-1}x,T^{-1}y>}\phi(T^{-1}y)\,dy = \int e^{-<T^{-1}x,z>}\phi(z)\,dz = \hat{\phi}(T^{-1}x) = \hat{\phi}^T(x)$.

Aplicando esta identidad a $\Delta\phi$ tenemos

$$\left((\Delta\phi)^T\right)^\wedge(x) = \left((\Delta\phi)^\wedge\right)^T(x) = \left(-|x|^2\hat{\phi}\right)^T = -|x|^2\hat{\phi}^T(x) = -|x|^2(\phi^T)^\wedge(x) = \left(\Delta(\phi^T)\right)^\wedge(x).$$

Vale entonces para $\phi \in S(R^2)$ y $T \in O(2)$,

(15) $\quad (\Delta\phi)^T = \Delta(\phi^T)$.

Sea ahora $u \in D'(R^2)$ y $T \in O(2)$. *Definimos* u^T de manera que valga (14) si $u \in L^1_{loc}$:

(16) $\quad u^T(\phi) = (|\det T| u)(\phi^{T^{-1}}) = u(\phi^{T^{-1}})$ para toda $\phi \in C_0^\infty$.

Sigue enseguida que la relación (15) se cumple también para u, QED.

APENDICE M
EL PRINCIPIO DE MAXIMO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ELIPTICAS Y UN TEOREMA DE DESARROLLO

AM 1. LEMA DE HOPF. Sean $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ y $f(x)$ funciones continuas en $\overline{D}$, D un dominio de R^n. Sea A el *operador definido* por

(1) $$Au := \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Supongamos A de *tipo elíptico*, es decir, para todo $x \in D$:

(2) $$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, h_i\, h_k > 0 \text{ si } h = (h_1, \ldots, h_n) \neq 0.$$

Aquí, como en lo que sigue, las funciones u a las cuales se les aplica el operador A son continuas en $\overline{D}$ y pertenecientes a $C^2(D)$. Para este operador vale el lema de Hopf:

TEOREMA 1. Sean $Au \geq 0$ en D y $x_0 \in D$ tal que $u(x) \leq u(x_0)$ para todo $x \in \overline{D}$. Entonces, $u(x) \equiv u(x_0)$ en $\overline{D}$.♦

Son corolarios del Lema de Hopf los siguientes teoremas.

TEOREMA 2. (T. de mínimo/máximo.) Sea $a \leq 0$. Si $f \leq 0$ en $\overline{D}$ entonces toda solución no constante $u(x)$ de $Au + au = f$ que tenga un mínimo < 0 en $\overline{D}$ lo alcanza en ∂D, y no en D. Si $f \geq 0$ y la solución no constante tiene un máximo > 0 entonces lo alcanza en ∂D, y no en D.♦

TEOREMA 3. El problema de contorno $Au + au = f$ en D, $a \leq 0$, $u = \phi$ en ∂D, $\phi \in C(\partial D)$, tiene a lo sumo una solución $u(x) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$. Si las $u_i(x)$, $i = 1, 2$, son soluciones con $u_i = \phi_i$ en ∂D entonces $\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \geq \|u_1 - u_2\|_\infty$.♦

AM 2. DESARROLLOS. Un dominio $D \subset R^n$ se dirá *normal* si es un recinto acotado, simplemente conexo, que admite una aplicación del teorema de Gauss. Es decir, en ∂D existe un campo vectorial $\underline{v} = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$, $\|v\| = 1$, $\underline{v}(x)$ coincide con la normal exterior en todo punto del contorno donde éste admite un hiperplano tangente, para el cual vale:

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial D} u(x)\, v_i(x)\, dS, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad \text{para toda } u \in C^1(\overline{D}).$$

En esta sección supondremos que el dominio D, acotado, simplemente conexo, es tal que su contorno posee la siguiente *propiedad*: dado $d \in \partial D$ existe un entorno U de d que puede ser transformado biunívocamente sobre la esfera unitaria por una aplicación $F_{d,U} \in C^3(U)$ con su inversa $F_{d,U}^{-1} \in C^3(B_1)$ tal que $F_{d,U}(d) = 0$, $F_{d,U}(U \cap \partial D) = \{x : |x| < 1, x_n = 0\}$, $F_{d,U}(U \cap D) = \{x : |x| < 1, x_n > 0\}$. Se demuestra que un tal dominio es normal.

Consideremos en D el problema de contorno

(3) $$\Delta_n u - q(x)\, u + \lambda\, k(x)\, u = 0, \quad u = 0 \text{ en } \partial D,$$

donde λ es real, $q(x) \in C(\overline{D})$, $q(x) \geq 0$ en $\overline{D}$, $k(x) \in C(\overline{D})$, $k(x) > 0$ en $\overline{D}$. Llamemos $a(x) = \lambda\, k(x) - q(x)$. Del T.2 se deduce que si $\lambda \leq 0$ la única solución de (3) es $u \equiv 0$.

Vale el siguiente teorema de desarrollo:

TEOREMA 4. Consideremos el problema de autovalores

(4) $\qquad \Delta u + \lambda\, k(x)\, u = 0,\ u = 0$ en ∂D, $k(x) \in C^1(\overline{D})$, $k(x) > 0$ en $\overline{D}$.

i) El problema (4) posee infinitos autovalores positivos $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ con $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = \infty$. Las correspondientes autofunciones $u_i(x)$ son soluciones reales de (4) que pueden suponerse verificando

(5) $\qquad \int_D u_i(x) u_j(x)\, k(x)\, dx = \delta_{ij}$,

y $\{u_j(x) : j = 1,2,\ldots\}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2(D; k(x)dx)$ (=el espacio L^2 con peso *k*).

ii) Si *n*= 2 ò 3 y $u \in C^3(D) \cap C^0(\overline{D})$, real, nula en el borde, con laplaciano acotado en *D*, entonces su desarrollo en autofunciones:

(6) $\qquad u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x),\quad c_i = \int_D u(x)\, u_i(x)\, k(x)\, dx$,

además de converger en $L^2(D; k(x))$, converge absoluta y uniforme en $\overline{D}$.•

NB. Si $q(x) \geq 0$ en $\overline{D}$ y $q \in C^1(\overline{D})$ entonces para el problema (3) vale un resultado semejante.

TEOREMA 5. (Principio de máximo). Sea *D* un dominio acotado, $c(x) \in L^1(D)$, $c(x) \leq 0$ c.d. Supongamos que $u \in C(\overline{D})$ verifica $\Delta u + c(x)\, u = f(x)$ en $D'(D)$ donde $f \geq 0$, $f \in L^1(D)$. Vale, si $\max_{x \in \partial D} u(x) \geq 0$ entonces $\max_{x \in \overline{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x)$.•

DEMOSTRACION. Supongamos que $M := \max_{x \in \overline{D}} u(x) = u(x_0) > \max_{x \in \partial D} u(x) =: m \geq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $u(x) > m$ en *D*. En efecto, de no ser así nos quedamos con la componente conexa *V* de $\{x \in D : u(x) > m\}$ que contiene a x_0. En este caso *u=m* en ∂V. *Definamos*, para $v \in L^1(D)$ con φ tal que $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(|x| < 1)$, $\int \varphi\, dx = 1$,

$$v^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \int_D v(y)\, \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = \int_D v(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

Luego, $v^\varepsilon \in C^\infty$. Sea $D_\varepsilon := \{x \in D : d(x, \partial D) > \varepsilon\}$. Allí: $(\Delta u)^\varepsilon = -(cu)^\varepsilon + f^\varepsilon \geq 0$. Como $\varphi_\varepsilon((x - .) \in C_0^\infty(D)$ si $x \in D_\varepsilon$, resulta: $F(x) := (|c|\, u + f)^\varepsilon(x) = (\Delta u)^\varepsilon(x) = \langle \Delta u, \varphi_\varepsilon(x - .)\rangle =$ $= \langle u(y), \Delta_y \varphi(x-y)\rangle = \langle u, \Delta_x \varphi(x - .)\rangle = \int u(y)\, \Delta_x \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy = \Delta_x \int u(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy =$ $= \Delta_x(u^\varepsilon)$. O sea, $\Delta(u^\varepsilon) = F \geq 0$ en D_ε. Del Teorema 2 se deduce entonces que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $u^\varepsilon(x_0) \leq \max_{x \in \partial D_\varepsilon} u^\varepsilon(x)$. Luego, para $\varepsilon \to 0$ sigue que $M \leq m$, absurdo, QED.

AM 3. SEGUNDO LEMA DE HOPF. Consideremos el operador diferencial

(7) $$Au := \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

(8) $a_{ik}(x) = a_{ki}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$, $f(x) \in C(\overline{D})$, $a(x) \leq 0$, A elíptico en $\overline{D}$,

(9) $$\tilde{A} := A + a.$$

Suponemos en esta sección solamente que el contorno del dominio D satisface la siguiente *propiedad*: si $x_0 \in \partial D$ entonces existe una esfera $S \subset D$ tal que $x_0 \in \partial S$.

Vale entonces el

TEOREMA 6. Sean $u \neq$constante, $u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, $\tilde{A}u \geq 0$ en D. Supongamos que en $x_0 \in \partial S$, u tenga un máximo > 0. Entonces, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, donde ν designa a la normal exterior a la esfera S en ese punto.•

AM 4. DEMOSTRACION DE LOS TEOREMAS 1-3, 6. A continuación presentamos una serie de proposiciones mediante las cuales quedarán probados todos los teoremas mencionados. En ellas D es un dominio acotado y suponemos A es de la forma (1) y verifica (2) *uniformemente* en D:

(2') $$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) h_i h_k \geq \sigma |h|^2, \ \forall x \in D, \text{ donde } \sigma > 0.$$

PROPOSICION 1. Si $Au > 0$ en D entonces u no posee máximo relativo en D.•

DEMOSTRACION. Si x_0 es un máximo relativo de la función $u \in C^2(D)$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)=0$ para todo $i = 1,\dots,n$ y la matriz hessiana $\beta = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right]$ es definida no positiva en el punto x_0. En vista de la condición de elipticidad (2') resulta el absurdo $Au(x_0) \leq 0$. En efecto, sea $\alpha = (a_{ij}(x_0))$. Entonces, $Au(x_0) = tr\,\alpha\beta$. Si γ es una matriz ortogonal vale $tr\,\alpha\beta = tr\,\beta\alpha = tr\,\gamma\gamma^t\alpha\beta$. De esto sigue que $tr\,\alpha\beta = \sum \lambda_i \mu_i$ donde $\{\lambda_i\}, \{\mu_i\}$ son los autovalores de α, β respectivamente. Como $\lambda_i \geq 0, \mu_i \leq 0$ resulta $Au(x_0) \leq 0$, QED.

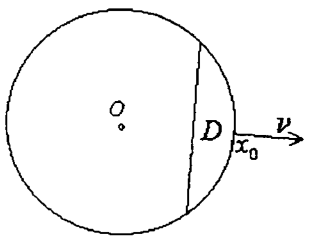
PROPOSICION 2. Si $Au \geq 0$ en D entonces para todo $x_0 \in D$ vale $u(x_0) \leq \max_{x \in \partial D} u(x)$.•

DEMOSTRACION. De (2') sigue que existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in D$, $a_{11}(x)\lambda^2 + \lambda a_1(x) > 0$. Sea $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$. Entonces, $Av_\varepsilon(x) > 0$ para $x \in D$. Por la Proposición 1: $u(x_0) < v_\varepsilon(x_0) \leq \max_{x \in \partial D} v_\varepsilon(x)$. Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ se obtiene la tesis, QED.

PROPOSICION 3. Sean B una bola abierta, $x_0 \in \partial B$ y $u \in C(\overline{B}) \cap C^2(B)$ una función tal que $Au \geq 0$ en B, $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in \overline{B} \setminus x_0$. Entonces, si el versor ν representa a la normal exterior a ∂B en x_0 vale $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$.•

DEMOSTRACION. Podemos suponer que el centro de B es 0 y su radio r. Sean ε, $\lambda > 0$, constantes que especificaremos más adelante y $w := -e^{-\lambda r^2} + e^{-\lambda|x|^2}$. Consideremos un casquete esférico D de B alrededor de x_0 que no contenga al 0, (ver figura). Allí $w > 0$.

Elegimos λ tan grande que $Aw(x) = 4e^{-\lambda|x|^2}\lambda^2\left(\sum_{i,k}^{n} a_{ik}x_i x_k + O(1/\lambda)\right) > 0$ en D. Entonces



$v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon\, w(x)$ verifica $Av_\varepsilon(x) > 0$ en D. De la Proposición 2, para $t > 0$ bastante pequeño, obtenemos:

(10) $\qquad v_\varepsilon(x_0 - t\nu) \le \max_{x\in\partial D} v_\varepsilon(x)$.

Pero en la parte curva de ∂D, $v_\varepsilon(x) = u(x) \le u(x_0)$, mientras que en la parte plana la hipótesis implica que $u(x) \le u(x_0) - \delta < u(x_0)$. Vale entonces, para ε bastante pequeño,

(11) $\qquad v_\varepsilon(x) \le u(x_0)$ en ∂D.

(10) y (11) implican que $u(x_0 - t\nu) + \varepsilon w(x_0 - t\nu) = v_\varepsilon(x_0 - t\nu) \le u(x_0) = u(x_0) + \varepsilon w(x_0)$. Luego,

(12) $\qquad (u(x_0) - u(x_0 - t\nu))/t \ge \varepsilon\left(e^{-\lambda(r-t)^2} - e^{-\lambda r^2}\right)/t$.

Entonces, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{t\downarrow 0}(u(x_0) - u(x_0 - t\nu))/t \ge \varepsilon .2\,\lambda\, r\, e^{-\lambda r^2} > 0$, QED.

DEMOSTRACION del TEOREMA 1. Supongamos que u no es constante. Entonces ambos conjuntos $D_1 := \{x \in D : u(x) = u(x_0)\}$, $D_2 := \{x \in D : u(x) < u(x_0)\}$ son no vacíos, siendo $D = D_1 \cup D_2$, D_2 abierto y D_1 relativamente cerrado en D. Existe un punto $y \in D_2$ más cercano a D_1 que a ∂D. Sea z tal que $z \in D_1$, $|z - y| = dist(y, D_1)$. Una bola abierta B con centro $w \in (z, y)$ verifica $\overline{B} \subset D$, $\overline{B} \cap D_1 = \{z\}$. Entonces $u(z) = u(x_0) =$ valor máximo de u en D. Por tanto $\frac{\partial u}{\partial \nu}(z) = 0$, cualquiera sea ν. Esto contradice a la Proposición 3, QED.

DEMOSTRACION del TEOREMA 2. Sea D_1 :=la componente conexa del abierto $\{x : u(x) < 0\} \subset D$ tal que $x_0 \in D_1$ donde $u(x_0)$ es el valor mínimo negativo de $u(x)$. Entonces, $Au = -au + f \le 0$ en D_1 y por el Teorema 1, $u \equiv u(x_0)$ en D_1. Luego D_1 es cerrado en D. Como D es conexo resulta $u \equiv u(x_0)$, absurdo, QED.

DEMOSTRACION del TEOREMA 3. La función $u := u_1 - u_2$ es solución de $Au + au = 0$ en D, $u = \phi_1 - \phi_2$ en ∂D. Si u no es idénticamente cero entonces $\max_{x\in\overline{D}} |u(x)| = |u(x_0)|$ donde $u(x_0)$ es un valor máximo positivo o bien un valor mínimo negativo de $u(x)$. Por el T.2 $x_0 \in \partial D$. Por lo tanto $u(x_0) = \phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)$, QED.

DEMOSTRACION del TEOREMA 6. Este teorema es un corolario directo de la proposición 3 y el lema de Hopf (Teor. 1), QED.

AM 5. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4. El teorema 4 es una generalización del Teor. 2 del Capítulo 3 que requiere cambiar allí la definición del operador G en (3.21) por:

$$((G\phi)(p) := \int_D G(p,q)\,\phi(q)\,k(q)dq\,.$$

Entonces, G es un operador simétrico, positivo, con núcleo la función de Green $G(p,q)$ considerada actuando en $L^2(D;k(x))$. En dimensiones $n \geq 2$, $G(p,q) = \dfrac{c_n}{|p-q|^{n-2}} + O(1)$.

Así, para n=2,3, G es del tipo Hilbert-Schmidt. Para $n > 3$ no lo es, pero siempre

(7) $$M := \sup_{p\in D} \int_D G(p,q)\,k(q)\,dq < \infty\,.$$

Entonces por la desigualdad de Schwarz, $|G\phi(p)|^2 \leq M \int_D G(p,q)\,|\phi(q)|^2\,k(q)\,dq$. Multiplicando por $k(p)$ esta desigualdad e integrando en D, obtenemos por la simetría de $G(p,q)$,

(8) $$\|G\phi\|_{2,k}^2 \leq M^2 \|\phi\|_{2,k}^2\,.$$

O sea, G es un operador acotado en $L^2(D;k)$ de norma menor que M. Además es limite en la norma de operadores de la sucesión $\{G_N\}$, donde el núcleo $G_N(p,q) := \inf\,\{G(p,q), N\}$ es de Hilbert Schmidt. Luego G siempre es completamente continuo. Además el rango de G es denso en $L^2(D;k)$. En efecto, si $u \in C^3(D) \cap C^0(\overline{D})$, real, nula en el borde, con $\phi := \Delta u \in L^\infty(D)$, entonces $u = G\phi \in$ rango de G. Sigue i).

Para n=2,3, en la identidad de Parseval $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{\phi_i^2(p)}{\lambda_i^2} = \int_D G^2(p,q)\,k(q)\,dq$ el miembro derecho es uniformemente acotado. Y si $u \in C^3(D) \cap C^0(\overline{D})$, real, nula en el borde, con $\phi := \Delta u \in L^\infty(D)$, entonces $u = G\phi$ y $c_i(u) = \dfrac{c_i(\phi)}{\lambda_i}$ i=1,2,.. . En vista de la desigualdad de Schwarz, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(u)\,\phi_i(p) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\phi) \dfrac{\phi_i(p)}{\lambda_i}$ es entonces absoluta- y uniformemente convergente, QED.

APENDICE P
METODO GENERAL DE PERRON

AP 1. Sea L un operador diferencial en una región acotada D:

(1) $$L := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x),$$

con coeficientes reales pertenecientes a $Lip_{loc}(D)$.*

Supondremos que $c(x) \leq 0$ en D y que L es elíptico en cada $x \in D$, o lo que es lo mismo, estríctamente elíptico en todo subconjunto compacto $K \subset D$, (cf. (2.3)).

Sea $f \in Lip_{loc}(D)$. Entonces, para toda esfera $S_r(y) \subset D$, el problema:

(2) $$L(u) = f \text{ en } S_r(y),\ u|_{\Sigma_r} = \phi,$$

tiene solución única ($\in C(S_r) \cap C^2(B_r)$) siempre cuando $\phi \in C(\Sigma_r)$, (cf. Cap. 2).

Dada $u \in C(D)$ está entonces bien definida la siguiente función continua en D:

$$u_B(x) := \begin{cases} u(x) & para\ x \in D \setminus B \\ u_B(x) \in C(S_r) \cap C^2(B) & t.q.\ Lu_B = f \quad en \quad B = B_r(y). \end{cases}$$

Del principio del máximo (cf. Ap. M) se deduce la siguiente

PROPOSICION 1. *i*) $u \leq v$ en $D \Rightarrow u_B \leq v_B$ en D.

ii) $u_n \xrightarrow{\bullet} v$ sobre compactos $\Rightarrow (u_n)_B \xrightarrow{\bullet} v_B$ sobre compactos.♦

DEFINICION 1. $\mathrm{B}(f) := \{u \in C(D) : u(x) \leq u_B(x)\ para\ todo\ B = B_r, S_r \subset D\}$,

$\mathrm{P}(f) := \{u \in C(D) : u(x) \geq u_B(x)\ para\ todo\ B = B_r, S_r \subset D\}$.

Los elementos de la clase $\mathrm{B}(f)$, $f \in Lip_{loc}(D)$, se llamarán *subsoluciones* de $Lu = f$, y los de la clase $\mathrm{P}(f)$ *supersoluciones* de esa ecuación.♦

PROPOSICION 2. *i*) si $u \in \mathrm{B}(f) \cap C^2(D)$ entonces $Lu \geq f$,

ii) si $u \in \mathrm{B}(f) \cap C(\overline{D})$, $v \in \mathrm{P}(f) \cap C(\overline{D})$ verifican $u \leq v$ en ∂D entonces, o bien $u \equiv v$, o bien $u(x) < v(x)$ para todo $x \in D$,

iii) si $u \in \mathrm{B}(f)$ y $B = B_r(y)$, $S_r(y) \subset D$ entonces $u_B \in \mathrm{B}(f)$,

iv) si $u, v \in \mathrm{B}(f)$ y $w(x) = \sup\{u(x), v(x)\}$ entonces $w \in \mathrm{B}(f)$.♦

DEMOSTRACION. *i*) si la proposición fuera falsa existiría una esfera B tal que $f(x) > (Lu)(x)$ en $\overline{B}$. Entonces, $L(u - u_B) < 0$ en B y $u - u_B = 0$ en ∂B. En virtud del T. 2 del Ap.M, $u - u_B$ debe alcanzar su mínimo negativo en ∂B, y no en B. Luego, $u \geq u_B$ y por tanto $u = u_B$ en B. O sea, $Lu = f$ en B, contradicción.

ii) Supongamos $u \neq v$. Si no es cierto que $u(x) < v(x)$ en D entonces en algún $y \in D$ se verifica $v(y) \leq u(y)$. Luego, $m := \inf_{x \in \overline{D}} [v(x) - u(x)]$ verifica

(3) $$m \leq 0,$$

Si $v - u$ alcanza su mínimo en ∂D y no en D entonces m=0 y $v(x) > u(x)$ en D, contradicción. En consecuencia, existe $x_0 \in D$ tal que $(v - u)(x_0) = m$.

---

* Recordemos que $c(x) \in Lip_{loc}(D)$ si para cada compacto $K \subset D$ existe $\alpha_K \in (0,1]$ tal que $c(x)$ es α_K – Hölder continua en K.

Sea $S_r(x_0) \subset D$ y $w = v_B - u_B$. Entonces en $B = B_r$: $w \leq v - u$ y $Lw = 0$.
Como $w(x_0) \leq m \leq 0$ y $w(x) = v(x) - u(x) \geq 0$ en $\Sigma_r(x_0)$, aplicando nuevamente el T. 2 del Ap. M, resulta $w(x) \equiv m$ en $S_r(x_0)$. Luego, $v - u = m$ en $\Sigma_r(x_0)$. En consecuencia, $v - u = m$ en un entorno de x_0. La conexión de D implica entonces que $v - u = m$. Por hipótesis $v - u \geq 0$ en ∂D, lo cual implica junto con (3) que m=0. Es decir, $v \equiv u$, contradicción.

iii) Sea $B_1 = B_t(z)$, $S_t(z) \subset D$. Basta probar que $(u_B)_{B_1} \geq u_B$ en el caso $B_1 \cap B \neq \emptyset$. Tenemos: $u \leq u_{B_1} \leq (u_B)_{B_1}$, (cf. Prop.1). Luego, en $\partial(B_1 \cap B)$: $(u_B)_{B_1} \geq u_B$. Como la función $w := u_B - (u_B)_{B_1}$ verifica en $B_1 \cap B$: $Lw = 0$, sigue que $w \leq 0$, (T. 2, Ap. M).

iv) Una aplicación de la proposición 1 nos da $w_B \geq u_B \vee v_B \geq u \vee v = w$, QED.
NB. Si u es una función de $C^2(D)$ tal que $Lu \geq f$ entonces $u \in \mathrm{B}(f)$. Es decir, para funciones en $C^2(D)$: $u \in B(f) \Leftrightarrow Lu \geq f$.

AP 2. **DEFINICION 2.** Sea $\phi \in L^\infty(\partial D)$,

$$\mathrm{B}(f,\phi) := \{u \in \mathrm{B}(f) : u \in C(\overline{D}), u(x) \leq \phi(x)\ en\ \partial D\},$$

$$\mathrm{P}(f,\phi) := \{u \in \mathrm{P}(f) : u \in C(\overline{D}), u(x) \geq \phi(x)\ en\ \partial D\}.$$

Los elementos de $\mathrm{B}(f,\phi)$ ($\mathrm{P}(f,\phi)$) se denominarán *subfunciones* (*superfunciones*) para la ecuación $Lu = f$ relativas al valor de contorno ϕ.•
Cuando f y ϕ se sobreentiendan diremos simplemente que u es *subfunción* (*superfunción*). Aceptaremos la siguiente hipótesis de trabajo *H*) sobre f y ϕ:
H) $$\mathrm{B}(f,\phi) \neq \emptyset \neq \mathrm{P}(f,\phi).$$
PROPOSICION 3. Si $u \in \mathrm{B}(f,\phi)$ y $v \in \mathrm{P}(f,\phi)$ entonces $u \leq v$.•
DEMOSTRACION. Es consecuencia de *ii*), prop. 2, QED.
TEOREMA 1. La función $u(x) := \sup\{v(x) : v \in \mathrm{B}(f,\phi)\}$ verifica $Lu = f$ en D.•
Para demostrar el teorema recurriremos al siguiente
LEMA 1. Sea $\{u_n\} \subset \mathrm{B}(f,\phi)$ y $B = B_r(y)$, $S_r(y) \subset D$. Entonces existe $\{v_n\} \subset \mathrm{B}(f,\phi)$ tal que
i) $v_n \geq u_n$ en D
ii) $(v_n)_B = v_n$,
iii) $\{v_n(x)\}$ converge uniformemente sobre compactos $K \subset B$ a una función $w(x)$,
iv) si $B_1 = B_t(y)$, $S_t(y) \subset B$, entonces $w_{B_1} \equiv w$. O sea, $w \in C^2(B_1)$ y $Lw = f$ en B_1.•
DEMOSTRACION. Definamos $w_n(x) := (\sup\{u_i(x) : 1 \leq i \leq n\})_B$. Por la proposición 3 y la hipótesis *H*), $\{w_n(x)\}$ es una sucesión acotada en B.
Para $K \subset B$ vale, en virtud del T. 3 del Cap. 2, que

$$\left\|\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\right\|_\infty \leq M_K\left(\|w_n\|_\infty + \|f\|_{0,\alpha_K}\right), \tag{4}$$

donde la primera norma se calcula sobre K y las dos siguientes sobre $\overline{B}$. Por el teorema de Arzelá-Ascoli existe una subsucesión $\{w_{n_i}\}$ que converge uniformemente a w sobre compactos. Sea $v_n := w_{n_i}$, si $n_{i-1} < n \leq n_i$. *i*), *ii*), *iii*) siguen inmediatamente.

En particular, sobre $\overline{B}_1$, $v_n \xrightarrow{\bullet} w$, y también, $(v_n)_{B_1} \xrightarrow{\bullet} (w)_{B_1}$. Como por construcción $(v_n)_{B_1} = v_n$, se tiene $w_{B_1} = w$, QED.

DEMOSTRACION DEL T. 1. Sea $D^r = \{x_j : j = 1, 2, \dots \}$ el conjunto de puntos de D de coordenadas racionales. Para cada j, sea $\{u_{j,n}\}$ una sucesión en $\mathrm{B}(f,\phi)$ tal que $u_{j,n}(x_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x_j)$, y sea $u_n(x) := \sup\{u_{1,n}(x), \dots, u_{n,n}(x)\}$, $x \in D$. Entonces la sucesión $\{u_n(x)\}$ tiene las siguientes propiedades:

(5) $$u_n(x_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x_j)$$

(6) $$u_n(x) \in \mathrm{B}(f,\phi).$$

Sea B una esfera cuya clausura está contenida en D. Aplicando el lema 1 encontramos una w tal que

(7) $$w(x) \le u(x) \text{ para todo } x \in B,\ w(x_j) = u(x_j) \text{ para todo } x_j \in B \cap D^r.$$

El teorema quedará probado si se demuestra que $w = u$ en B, (cf. *iv*) lema 1). Si no fuera así, existiría $y \in B$ tal que $w(y) < u(y)$. Sea $\{u_{0,n}\} \subset \mathrm{B}(f,\phi)$ tal que $u_{0,n}(y) \to u(y)$ para $n \to \infty$. Repitiendo la construcción de w, pero partiendo de la sucesión $u_n(x) := \sup\{u_{0,n}(x), u_{1,n}(x), \dots, u_{n,n}(x)\}$ obtenemos una función $\tilde{w}$ tal que $\tilde{w}(y) = u(y)$, $\tilde{w}(x_j) = w(x_j)$ si $x_j \in B \cap D^r$. Pero como tanto w como $\tilde{w}$ son continuas, $w = \tilde{w}$ en B, y $w(y) = u(y)$, contradicción, QED.

COROLARIO. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in Lip_{loc}(D)$.♦

DEMOSTRACION. $u \in C^2(D)$ y satisface $Lu = f$. Como $f \in Lip_{loc}(D)$, puede aplicarse el Teor. 3 del Cap. 2, QED.

AP 3. Si el operador L es *uniformemente elíptico*, es decir, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

(8) $$\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \varepsilon|\xi|^2$$

para todo $x \in D$, y si además sus coeficientes y f son funciones acotadas en D, vale la siguiente

PROPOSICION 4. En las condiciones apuntadas se verifica la hipótesis *H*).♦

DEMOSTRACION. Supongamos que $0 \in D$. Veamos que la siguiente función v está en $\mathrm{P}(f,\phi)$ si λ es suficientemente grande:

(9) $$v(x) := \left(e^{\lambda d} - e^{\lambda x_1}\right)\|f\|_\infty/\varepsilon + \sup|\phi|,$$

donde d=diámetro de D. Aplicándole el operador L tenemos,

(10) $$(Lv)(x) = -\lambda^2 a_{11}(x)\|f\|_\infty/\varepsilon - \lambda b_1(x)\|f\|_\infty/\varepsilon + O(1)v(x).$$

Si $f \equiv 0$ entonces $Lv(x) = c(x).\sup|\phi| \le 0 = f$. Como (8) implica $a_{11}(x) \ge \varepsilon$ obtenemos de (10) para $\|f\|_\infty > 0$ que $(Lv)(x) \le -\lambda^2\|f\|_\infty + O(\lambda)$ para λ bastante grande. Entonces, $(Lv)(x) < f(x)$. En todo caso, $v \in \mathrm{P}(f)$.

Como $v(x) \ge \phi(x)$ en ∂D, resulta $v \in \mathrm{P}(f,\phi)$. La función $-v$ verifica $L(-v) \ge -f$ y $-v \le -\phi$ en ∂D. O sea, $-v \in \mathrm{B}(-f,-\phi)$ y la proposición sigue inmediatamente, QED.

AP 4. Como el supremo de una familia de funciones continuas es una función semicontinua inferiormente, resulta que $u = \sup\{v : v \in \mathrm{B}(f,\phi)\}$ es semicontinua inferiormente y $w = \inf\{v : v \in \mathrm{P}(f,\phi)\}$ es semicontinua superiormente en $\overline{D}$ y $u \leq v$. En un punto $x_0 \in \partial D$ se tiene entonces

(11) $$u(x_0) \leq \underline{lim}_{x \to x_0} u(x) \leq \overline{lim}_{x \to x_0} u(x) \leq \overline{lim}_{x \to x_0} w(x) \leq w(x_0).$$

En consecuencia, $u(x)$ resultará continua en $x_0 \in \partial D$ si

(12) $$u(x_0) = w(x_0) = \phi(x_0).$$

PROPOSICION 5. Si para cada $x_0 \in \partial D$ existe una sucesión $\{w_n^-\} \in \mathrm{B}(f,\phi)$ y una sucesión $\{w_n^+\} \in \mathrm{P}(f,\phi)$ tales que $\lim_{n \to \infty} w_n^{\pm}(x_0) = \phi(x_0)$, entonces $u \equiv w$, y u es la solución del problema de Dirichlet

(13) $$Lu = f, \qquad u|_{\partial D} = \phi. \blacklozenge$$

La proposición sigue inmediatamente de lo ya observado y el principio del máximo.
Las sucesiones $\{w_n^-\}$ y $\{w_n^+\}$ se llaman *barrera inferior* y *superior* en el punto x_0 de D, respectivamente, , *relativas* a L, f y ϕ.

APENDICE R
SOLUCIONES ELEMENTALES RADIALES
APLICACIÓN A LA ECUACION METARMONICA $(-\Delta+\mu)u=0$.

AR 1. Introducimos la *función media* de una función $f\in C(R^n)$ sobre una esfera de radio $r=|x|$:

(1) $$f_\Diamond(x):=\frac{1}{A(n)}\int_\Sigma f(ry)\,d\sigma(y),$$

donde $d\sigma(y)$ denota el elemento de área de la esfera unitaria $\Sigma:=\{y:|y|=1\}$ y $A(n)$ su área. $f_\Diamond$ es una función que depende solamente de $|x|=r$ y en lo que sigue se usará la notación $f_b(r)$ para *denotar a la función* de variable real $r\in R_+=[0,\infty)$ definida por

$$f_b(r)=f_\Diamond(x) \text{ si } |x|=r.$$

PROPOSICION 1. *i*) Si $f\in C^\infty(R^n)$ entonces $f_b\in C^\infty(R_+)$.

ii) El desarrollo de Taylor de f_b en 0 sólo contiene potencias pares de r.♦

DEMOSTRACION. *i*) sigue de (1) y de la definición de f_b.

ii) $f(ry)=\sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{|\alpha|=j}\frac{D^\alpha f}{\alpha!}(0)\,y^\alpha\right)r^j+o(r^N)$. Si $|\alpha|$ es impar, necesariamente algún α_k es impar y el número de ellos también es impar. En consecuencia, $\int_\Sigma y^\alpha d\sigma(y)=0$, QED.

Vale la siguiente proposición. Una demostración puede verse en [Tr], Cap. I.

PROPOSICION 2. Sea $f\in C^\infty(R^n)$. Entonces

(2) $$(\Delta f)_\Diamond(x)=\Delta(f_\Diamond)\,(x)=\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\right)f_b(r).♦$$

AR 2. Sea u una función localmente integrable radial: $u(x)=f(|x|)$, es decir, $f=u_b$. Esto se expresa por

$H1$) $\quad f(r)r^{n-1}$ es integrable en (0,N) para todo $N>0$.

Supongamos todavía que $f'(r)$ exista en $(0,\infty)$ y también que valga

$H'2$) $\quad f'(r)r^n$ es integrable en (0,N) para todo $N>0$.

Entonces, $\lim_{r\to0} f(r)r^n=L$ existe y $f(r)r^n$ es absolutamente continua en $[0,N]$.

La integrabilidad de $f(r)r^{n-1}$ implica que

(3) $$L=0.$$

Sea $\phi\in C_0^\infty(R^n)$. Con nuestra u, usando la proposición 2, obtenemos

(4) $$<\Delta u,\phi>=\int_{R^n}u.\Delta\phi\,dx=A(n)\int_0^\infty f(r)\,(\Delta\phi)_b\,r^{n-1}\,dr=$$

$$=A(n)\int_0^\infty f(r)\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d\phi_b}{dr}(r)\right)dr=A(n)\left(f(r)\,r^{n-1}\frac{d\phi_b}{dr}(r)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{df}{dr}r^{n-1}\frac{d\phi_b}{dr}dr\right).$$

De las proposiciones (1) y (3) se obtiene

(5) $$<\Delta u,\phi>=-A(n)\int_0^\infty (r^{n-1}.f')\,\phi_b'\,dr\,.$$

Reemplacemos ahora la hipótesis $H'2)$ por otra más fuerte:

$H2)$ $\quad f'(r)r^{n-1}$ es absolutamente continua en $[0,N]$ y $\lim_{r\to 0} f'(r)r^{n-1}=1/A(n)$.

Integrando por partes en (5),

(6) $$<\Delta u,\phi>=\phi(0)+A(n)\int_0^\infty (r^{n-1}.f')'\,\phi_b\,dr=<\delta,\phi>+A(n)\int_0^\infty (r^{n-1}.f')'\,\phi_b\,dr\,.$$

Como $<u,\phi>=A(n)\int_0^\infty f(r)\,r^{n-1}\,\phi_b\,dr$, se obtiene

(7) $$<\Delta u+\lambda u,\phi>=<\delta,\phi>+A(n)\int_0^\infty (\lambda r^{n-1}f+(r^{n-1}f')')\,\phi_b\,dr\,.$$

Llegamos entonces a la siguiente

PROPOSICION 3. $E(x)=f(|x|)$ será una solución elemental (o fundamental) para el operador metarmónico $\Delta+\lambda$, *i.e.* $(\Delta+\lambda)E=\delta$, si f satisface las hipótesis $H1)$ y $H2)$ y la ecuación diferencial

(8) $$\frac{1}{r^{n-1}}(r^{n-1}f')'+\lambda f=0\,,\qquad \text{c.d. } r>0\,.\blacklozenge$$

En esta situación, $E\in L^1_{loc}$.

AR 3. Sea $n=2$ y pongamos $\lambda=k^2$. Entonces (8) se escribe de la siguiente forma

(9) $$f''+f'/r+k^2f=0\,.$$

Si $k=0$, $(1/2\pi)\log r$ satisface (9), $H1)$ y $H2)$. En consecuencia se verifica $\Delta E_0=\delta$ para

(10) $$E_0(x):=\frac{1}{2\pi}\log|x|\,.$$

Si $k>0$, pongamos $f(r)=h(kr)$. La resolución de (9) se reduce entonces a la de

(11) $$h''(z)+\frac{h'(z)}{z}+h(z)=0\,,$$

que es la ecuación de Bessel de orden 0. La solución general es de la forma

(12) $$h(z)=AJ_0(z)+BY_0(z)\,,$$

(13) $$J_0(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n(z/2)^{2n}}{(n!)^2}\,,\qquad Y_0(z)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n(z/2)^{2n}}{(n!)^2}\left(\log\frac{z}{2}-\psi(n+1)\right),$$

$$-\psi(1)=\gamma=\lim_{m\to\infty}(1+1/2+\ldots+1/m-\log m)=\text{cte. de Euler}\cong 0{,}5772\,,$$

$$-\psi(m+1)=\gamma-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m})\,.$$

O sea,

(14) $$Y_0(z)=\frac{2}{\pi}J_0(z)\log z+T(z)\,,$$ donde $T(z)$ es una función entera de z.

Luego, $rf(r)=rh(kr)\in L^1_{loc}$. Por otra parte, para $r\to 0$,

$$rf'(r)=\frac{2}{\pi}BJ_0(kr)+o(1)\,.$$

Eligiendo $B=1/4$ se tiene $\lim_{r\to 0} rf'(r)=1/2\pi=1/A(2)$ y $rf'(r)$ es absolutamente continua en todo $[0,N]$. Luego,

(15) $$AJ_0(k|x|)+Y_0(k|x|)/4$$

es una solución elemental para el operador $\Delta+k^2$, cualquiera sea A.
Recordando que las funciones de Bessel y Weber pueden escribirse como combinaciones lineales de las funciones de Hankel, respectivamente como

$$J_0(z)=\left(H_0^{(1)}(z)+H_0^{(2)}(z)\right)/2, \qquad Y_0(z)=\left(H_0^{(1)}(z)-H_0^{(2)}(z)\right)/2i$$

si elegimos en (15), $A=1/4i$, obtenemos $(k\neq 0)$:

(16) $$E_k(x)=H_0^{(1)}(k|x|)/4i, \qquad (\Delta+k^2)E_k=\delta.$$

Supongamos ahora: $\lambda=k^2<0$, $k=i\chi$, $\chi>0$. Entonces recordando la definición de la función de Kelvin:

$$K_0(\chi r)=\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(i\chi r)$$

resulta,

(17) $$E^{\chi}(x):=-\frac{1}{2\pi}K_0(\chi|x|), \qquad \left(\Delta-\chi^2\right)E^{\chi}=\delta.$$

Si $z=re^{i\theta}$, $\theta\in(-\pi,\pi)$, entonces (cf. [Co] ò [MO]):

$$H_0^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty+\theta i}^{\infty+\theta i} e^{re^{i\theta}\operatorname{senh} t}dt.$$

Luego, si $\theta=\pi/2$,

$$H_0^{(1)}(ir)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty+\pi i/2}^{\infty+\pi i/2} e^{ir\operatorname{senh} t}dt=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ir\operatorname{senh}(u+\pi i/2)}du=\frac{2}{\pi i}\int_0^{\infty} e^{-r\cosh u}du=\frac{2}{\pi i}\int_1^{\infty}\frac{e^{-rt}}{\sqrt{t^2-1}}dt.$$

Tenemos finalmente,

(18) $$K_0(\chi r)=\int_1^{\infty}\frac{e^{-\chi r t}}{\sqrt{t^2-1}}dt, \; r>0,$$

y por (17),

(19) $$E^{\chi}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_1^{\infty}\frac{e^{-\chi|x|t}}{\sqrt{t^2-1}}dt, \; |x|>0.$$

APENDICE V
LA MEMBRANA VIBRANTE

AV 1. Sean ρ la masa por unidad de área de una membrana plana y τ la tensión uniforme ejercida sobre ella. Sean $z = z(x, y, t)$ el desplazamiento vertical en el instante t del punto $(x,y) \in D$ donde D es la región acotada ocupada por la membrana. La ecuación del movimiento es

(1) $$\Delta z - f^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \qquad k(x,y) := f^2(x,y) = \rho(x,y)/\tau .$$

Separando variables obtenemos:

(2) $$z = u(x,y)\, T(t), \qquad \Delta u + \lambda f^2 . u = 0, \qquad T'' + \lambda T = 0.$$

En lo que sigue suponemos $\tau \equiv 1$ por lo que $k = f^2 = \rho$. Si la membrana es homogénea, es decir, si $\rho \equiv$ cte., entonces $c = \sqrt{\tau/\rho}$ es la velocidad de las ondas en la membrana (cf. [Cu], [Fr]). En esta situación los autovalores del problema de la membrana *fija en el borde* son, por definición, los autovalores del problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace para la región ocupada por la membrana.
Veamos la composición de algunos espectros de problemas de contorno.

Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0$, $0 \le x \le \pi$.

α) $u(0) = 0 = u(\pi)$: $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, multiplicidad de $\lambda_n = mult(\lambda_n) = 1$.

β) $u'(0) = 0 = u'(\pi)$: $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $mult(\lambda_n) = 1$.

γ) $u(0) = u(\pi)$, $u'(0) = u'(\pi)$: $\lambda_n = 4n^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots mult(\lambda_0) = 1$ y si $n > 1$, $mult(\lambda_n) = 2$.

Ecuación diferencial: $\Delta u + \lambda u = 0$, $R = \{(x,y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$.

α') $u = 0$ en ∂R: $\lambda_{nm} = \pi^2 \left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} \right)$, $m, n = 1, 2, \ldots$.

Si $(a/b)^2$ es irracional los autovalores son simples, i.e., de multiplicidad uno. Si $(a/b)^2$ es racional, infinitos autovalores son degenerados, o sea de multiplicidad mayor que uno. Las frecuencias normales de vibración son entonces: $\dfrac{c}{2}\sqrt{\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}}$, $m, n \ge 1$.

β') Contorno libre: $\lambda_{nm} = \pi^2 \left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} \right)$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Contorno libre significa $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ en ∂R, siendo η la normal exterior; vale la misma observación que en el caso α') respecto de la multiplicidad de los autovalores.

γ') Las soluciones periódicas $e^{2\pi i\left(\frac{mx}{a} + \frac{ny}{b}\right)}$, m, n enteros, son las autofunciones correspondientes a los autovalores $\pi^2 \left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} \right)$ del problema $u(0, y) = u(a, y)$,

$u(x,0)=u(x,b)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(a,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,b)$. Estos son de multiplicidad ≥ 4 si $|m|>0<|n|$.

Ecuación diferencial: $\Delta u+\lambda u=0$, $D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$.

$\delta')$ $u=0$ en ∂D: $\lambda_{nm}=\left(\mu_n^{(m)}\right)^2$, donde $\mu_k^{(m)}$ es el k-ésimo cero positivo de J_m, y $m=0,1,2,\ldots$. O sea, $\lambda_{nm}>0$ para todo m, n, y de multiplicidad dos.

DEFINICION 1. Dos membranas se dirán isoespectrales si tienen los mismos autovalores con las mismas multiplicidades.•

AV 2. Sean $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ funciones dos veces continuamente diferenciables tales que

$$ds^2=dx^2+dy^2=f^2(\xi,\eta)\left(d\xi^2+d\eta^2\right),\ f^2\neq 0,\text{ en }(x,y)\in D,$$

D una región acotada que contiene el origen. Como

(3) $$d\xi=\xi_x dx+\xi_y dy,\ d\eta=\eta_x dx+\eta_y dy,$$

sigue que

(4) $$\left(\xi_x^2+\eta_x^2\right)f^2=1,\quad \left(\xi_y^2+\eta_y^2\right)f^2=1,\quad \xi_x\xi_y+\eta_x\eta_y=0.$$

Sean $\begin{cases}x=\alpha_1 t\\ y=\alpha_2 t\end{cases}$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$ y $\begin{cases}x=\beta_1 t\\ y=\beta_2 t\end{cases}$, $\beta_1^2+\beta_2^2=1$ dos rectas que se cortan en $(0,0)\in D$. El coseno del ángulo que forman viene dado por

(5) $$\cos\theta=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2.$$

Las curvas imágenes son $(\xi(\alpha_1 t,\alpha_2 t),\eta(\alpha_1 t,\alpha_2 t))$ y $(\xi(\beta_1 t,\beta_2 t),\eta(\beta_1 t,\beta_2 t))$, cuyos vectores directores son $\vec{\alpha}=\left(\alpha_1\xi_x+\alpha_2\xi_y,\alpha_1\eta_x+\alpha_2\eta_y\right)$ y $\vec{\beta}=\left(\beta_1\xi_x+\beta_2\xi_y,\beta_1\eta_x+\beta_2\eta_y\right)$ en $t=0$. Sea θ' el ángulo que forman estas curvas en $Q=(\xi(0,0),\eta(0,0))$. Entonces

(6) $$\cos\theta'=\frac{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\frac{\alpha_1\beta_1/f^2+\alpha_2\beta_2/f^2}{\sqrt{1/f^2}.\sqrt{1/f^2}}=\cos\theta.$$

Luego, $\theta=\theta'$ o bien $\theta=-\theta'$. Comparando áreas infinitesimales y usando (6) tenemos,

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi\,d\eta=dx\,dy=f^2 d\xi\,d\eta.$$

Esto implica que

(7) $$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|=f^2(\xi,\eta).$$

Computando el seno de θ' y comparándolo con el de θ resulta que $\theta=\theta'\Leftrightarrow\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}>0\Leftrightarrow f^2=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$. O sea, siempre $\theta=\theta'$ o bien $\theta=-\theta'$.

Supongamos $h>0, h^2=1/f^2$. Escribamos,

$$\xi_x=h\cos\tau,\ \eta_x=h\,\mathrm{sen}\,\tau,\quad \xi_y=h\cos\eta, n_y=h\,\mathrm{sen}\,\eta.$$

Tendremos entonces,

(4') $$\xi_x^2+\eta_x^2=h^2,\quad \xi_y^2+\eta_y^2=h^2,\quad 0=\xi_x\xi_y+\eta_x\eta_y=h^2\cos(\tau-\eta).$$

Localmente la aplicación $T:(x,y)\to(\xi,\eta)$ es 1-1; digamos en la bola abierta $B=B_\varepsilon(0,0)$. De la tercera igualdad en (4') resulta $\eta=\tau\pm\pi/2$. Luego,

$$\xi_y = h\cos(\tau \pm \pi/2), \quad \eta_y = h\mathrm{sen}(\tau \pm \pi/2).$$

Por tanto, $\mathrm{sgn} = +: \xi_x = \eta_y, \xi_y = -\eta_x$, $\mathrm{sgn} = -: \xi_x = -\eta_y, \xi_y = \eta_x$, que son las condiciones de Cauchy-Riemann y anti Cauchy-Riemann, respectivamente. En el primer caso tenemos, $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \xi_x^2 + \xi_y^2 > 0$ por lo que $\theta = \theta'$ y en el segundo, $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = -(\xi_x^2 + \xi_y^2) < 0$ y $\theta = -\theta'$. La transformación será entonces conforme si y sólo si se verifican las condiciones de Cauchy- Riemann. De la diferenciabilidad de ξ y η concluímos ahora que en este último caso $\xi + i\eta$ es una función holomorfa con derivada no nula. Y además que vale,

(8) $$(\Delta_{xy} w) f^2 = (\Delta_{xy} w)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| = (\Delta_{xy} w)\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \Delta_{\xi\eta} w.$$

Por tanto, si la región de Jordan D con contorno J es llevada conformemente en el círculo unitario $B_1(0)$ por la transformación $T: (x,y) \to (\xi,\eta)$ tal que $T \in C(\overline{D})$, $T^{-1} \in C(S_1(0))$, entonces

(9) $$\Delta_{xy} w + \lambda w = 0 \quad \text{en } D, \qquad w|_J = 0,$$

se transforma en

(10) $$\Delta_{\xi\eta} w + \lambda f^2 w = 0 \quad \text{en } B_1, \quad w|_{\Sigma_1} = 0.$$

Un teorema de H. Weyl implica que si D y $\widetilde{D}$ tienen los mismos autovalores para el problema (9) entonces

(11) $$\text{área de } D := |D| = |\widetilde{D}|$$

y por tanto

(12) $$|D| = \int_{B_1(0)} f^2 d\xi\, d\eta = \int_{B_1(0)} \tilde{f}^2 d\xi\, d\eta = |\widetilde{D}|.$$

OBSERVACIONES. a) Si los contornos de D y $\widetilde{D}$ son además curvas C^2 convexas vale también que: $\int_{\Sigma_1} |f|\, d\sigma =$ longitud de $J =$ long. $\widetilde{J} = \int_{\Sigma_1} |\tilde{f}|\, d\sigma$, ([Pl]).

b) Sea $\zeta = \xi(x,y) + i\eta(x,y) = W(z) = W(x+iy)$ una función analítica de $z = x+iy$ en D verificando $W'(z) \neq 0$ allí. Entonces $|d\zeta|^2 = |W'(z)|^2 |dz|^2 = |W'(z)|^2 (dx^2 + dy^2)$. Luego, $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ cumplen la hipótesis de esta sección con $f(x,y) = |W'(z)|^{-1} > 0$.

AV 3. Una transformación homográfica de $B_1(0)$ sobre $B_1(0)$: $\zeta = \dfrac{az+b}{cz+d}$ que lleva $z = 0$ en $\zeta = p$, $0 < p < 1$, es de la forma

(13) $$\zeta = \frac{z-p}{pz-1}.$$

Su derivada $\zeta' = \dfrac{p^2-1}{(pz-1)^2}$ muestra que lleva la dirección $x > 0$ en el punto (0,0) en la dirección $\xi < 0$ en el punto $(p,0)$. Entonces:

(14) $$\xi = \frac{p(x^2+y^2+1) - x(1+p^2)}{(px-1)^2 + (py)^2}, \qquad \eta = \frac{(p^2-1)y}{(px-1)^2 + (py)^2};$$

(15) $$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\xi_x^2+\xi_y^2=\xi_x^2+\eta_x^2=|\zeta'|^2=\left(\frac{p^2-1}{(px-1)^2+(py)^2}\right)^2=:\frac{1}{f^2(x,y)}.$$

La transformación inversa a (13) también es homográfica. Es igual a

(16) $$z=\frac{\zeta-p}{p\zeta-1}.$$

Luego,

(17) $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\left(\frac{p^2-1}{(p\xi-1)^2+(p\eta)^2}\right)^2=f^2(\xi,\eta).$$

En consecuencia, si $\widetilde{W}(\xi,\eta)=W(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$, el problema de contorno

(18) $$\Delta_{xy}W+\lambda W=0, \qquad W\big|_{\Sigma_1}=0,$$

es equivalente a (cf (8)):

(19) $$\Delta_{\xi\eta}\widetilde{W}+\lambda f^2\widetilde{W}=0, \qquad \widetilde{W}\big|_{\Sigma_1}=0,$$

y por lo tanto tenemos (cf. (17) y (2)):

PROPOSICION 1. Existen infinitas membranas circulares del mismo radio, dos a dos distintas e isoespectrales.♦

Las normas de las autofunciones que se corresponden están relacionadas de la siguiente forma (véase el teorema de desarrollo que sigue):

(20) $$\|\phi_j\|_2^2=\iint|\phi_j(x,y)|^2dx\,dy=\iint|\widetilde{\phi}_j(\xi,\eta)|^2\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi\,d\eta=$$
$$=\iint|\widetilde{\phi}_j(\xi,\eta)|^2f^2(\xi,\eta)d\xi\,d\eta=\|\widetilde{\phi}_j\|_{2,k}^2, \qquad k=f^2.$$

AV 4. **TEOREMA 1.** Sea $k>0$ y continua en $\overline{D}$, D recinto de Jordan. Supongamos además que $k(x)\in Lip_{loc}(D)$. El problema de contorno (*)

(21) $$\Delta u+\lambda k\,u=0, \quad u\big|_{\partial D}=0,$$

posee infinitos autovalores reales de multiplicidad finita que pueden ordenarse según su magnitud creciente: $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots$, $\lambda_n\to\infty$. Las autofunciones correspondientes $\{\phi_j\}$ pueden elegirse verificando

(22) $$\int_D\phi_i(x)\phi_j(x)\,k(x)\,dx=\delta_{ij},$$

y forman un sistema ortonormal completo respecto a la medida $k(x)\,dx$ en D. Toda función $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$ tal que $\Delta u\in L^\infty(D)$, $u\big|_{\partial D}=0$, admite un desarrollo absoluta y uniformemente convergente en $\overline{D}$:

(23) $$u=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n, \qquad c_n=c_n(u)=\int_D u\,\phi_n\,k\,dx.♦$$

DEMOSTRACION. Sea $0<f=\sqrt{k}$. Del principio de máximo se deduce que si $u\neq0$ resuelve (21) entonces $\lambda\notin(-\infty,0]$, (Ap.M T.2).

Sea $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$ tal que $\Delta u=-\lambda k u$, $\lambda\neq0$, $u\big|_{\partial D}=0$. Entonces

(*) Por solución entendemos como siempre una función continua en $\overline{D}$ y dos veces continuamente diferenciable en D.

(24) $$\lambda^{-1}u(p)=\int_D G(p,q)u(q)k(q)dq\,.$$

Si $u\in L^2(D)$ y satisface (24), $ku\in L^2(D)$. Entonces, u es acotada. En consecuencia, $u\in C^1(D)\cap C(\overline{D})$, $u|_{\partial D}=0$, (cf. Cap. 3). Luego, $ku\in Lip_{loc}(D)$ y por tanto $u\in C^2(D)$ y $\Delta u=-\lambda ku$, (cf. Ap.L o Ap.F).

Hemos probado entonces que el problema diferencial (21) es, para $\lambda\neq 0$, equivalente al siguiente problema integral:

(25) $$\mu\widetilde{u}(p)=\int_D \widetilde{G}(p,q)\widetilde{u}(q)\,dq\,;\qquad \widetilde{G}(p,q)=f(p)G(p,q)f(q)\,,$$

donde $f(p)=\sqrt{k(p)}$, $\widetilde{u}(p)=f(p)u(p)$, $\mu=1/\lambda$.

Los autovalores $\{\mu_n\}$ del problema (25) y sus autofunciones normalizadas $\{\widetilde{\phi}_n : n=1,2,\ldots\}$ se corresponden con los del problema (21) pues $\mu=0$ no es autovalor, En efecto, la integral en (25) define un operador de Hilbert-Schmidt $\widetilde{K}$ en $L^2(D)$, $(\widetilde{K}\widetilde{u})(p):=\int_D \widetilde{G}(p,q)\widetilde{u}(q)\,dq$, autoadjunto, positivo y de rango denso. De esto sigue que para todo n, $n=1,2,\ldots$, μ_n es real, positivo, de multiplicidad finita y $\mu_n^{-1}\to\infty$ para $n\to\infty$.

Las autofunciones del problema diferencial, $\phi_n=\widetilde{\phi}_n/f$, son ortogonales respecto al peso k:

(26) $$\int_D \phi_n(q)\phi_m(q)k(q)dq=\int_D \widetilde{\phi}_n(q)\widetilde{\phi}_m(q)dq=\delta_{nm}\,,$$

y forman un sistema completo en $L^2(D;k)$ pues $\{\widetilde{\phi}_n\}$ es completo en la clausura del rango de $\widetilde{K}$, es decir, en $L^2(D)$.

Sea $U(p):=(\widetilde{K}H)(p):=\int_D \widetilde{G}(p,q)H(q)\,dq\in \textit{rango de } \widetilde{K}$. Como para todo p, $\int_D \left|\widetilde{G}(p,q)\right|^2 dq\leq M<\infty$, vale, en virtud de un teorema de E. Schmidt, que el desarrollo $U(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{c}_n(U)\widetilde{\phi}_n(p)$ es absoluta y uniformemente convergente en D.

Si $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$, $u=0$ en ∂D, $\|u\|_\infty<\infty$, entonces en virtud del Teorema 1 del Cap. 3, $uf=\widetilde{K}((\Delta u)/f)$. O sea, $U(p):=(uf)(p)\in \textit{rango de } \widetilde{K}$. Además

$$\widetilde{c}_n(U)=\int_D u(q)f(q)\widetilde{\phi}_n(q)dq=\int_D u(q)\,k(q)\,\phi_n(q)\,dq=c_n(u)\,.$$

Luego,

(29) $$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(u)\widetilde{\phi}_n(p)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n(u)\phi_n(p)\right)f(p)\xrightarrow{\;\bullet\;}u(p)\,f(p)\,,$$

y como $1/\varepsilon>f>\varepsilon$, sigue la tesis, QED.

DEFINICION 2. Si en la ecuación (1) $f^2\equiv 1$, es decir, si la ecuación se reduce a $\Delta z-\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0$, diremos que la membrana correspondiente es un *tambor*.•

DEFINICION 3. Una membrana plana que ocupa la región acotada Z, fija en el borde, y cuyo operador espacial asociado es

(30) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)+\lambda\, f^2(\xi,\eta), \qquad k=f^2,$$

se dirá que *suena como un tambor* si es isoespectral con el tambor que ocupa la misma región. Es decir, si tiene el mismo espectro que

(31) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\lambda\right)u=0 \text{ en } Z, \qquad u|_{\partial Z}=0.\blacklozenge$$

AV 5. Suponemos en lo que sigue que Z es una región de Jordan y que $k(\xi,\eta):=f^2(\xi,\eta)>0$ en $\overline{Z}$, es continua hasta el borde y pertenece a $Lip_{loc}(Z)$.

DEFINICION 4. Diremos que la membrana asociada a (30) *suena aproximadamente como un tambor* si $N(\lambda;Z,k):=\#\{\lambda_j : \lambda_j \text{ } autovalor,\ \lambda_j\le\lambda\}$ verifica:

(32) $$\frac{N(\lambda)}{\lambda}\to\frac{|Z|}{4\pi} \text{ para } \lambda\to\infty.\blacklozenge$$

Aquí, $|Z|=$ área de Z. En otras palabras, una membrana suena aproximadamente como un tambor si el comportamiento asintótico de sus autovalores es el mismo, en primera aproximación, que el de un tambor que ocupa la misma región. Para el tambor la relación (32) no es otra cosa que la fórmula de H. Weyl: $\lambda_n\approx\frac{4\pi n}{|D|}$, (cf. sec. 6G, Cap.G). En efecto,

PROPOSICION 2. i) Si Z es una membrana que suena aproximadamente como un tambor se tiene $\lambda_n\to\infty$ para $n\to\infty$.

ii) Vale,

(33) $$n/\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \Longleftrightarrow N(\lambda)/\lambda \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} A.\blacklozenge$$

DEMOSTRACION. i) (32)$\Rightarrow \lambda_n\to\infty$. ii) Supongamos que

$$\lambda_{n-1}<\lambda_n=\ldots=\lambda_{n+\varepsilon(n)}<\lambda_{n+\varepsilon+1}.$$

Entonces, $\frac{n+\varepsilon(n)}{\lambda_{n+\varepsilon(n)}}=\frac{n+\varepsilon(n)}{\lambda_n}\to A$ implica que $\frac{\varepsilon(n)}{\lambda_n}\to 0$ para $n\to\infty$. Como para $\lambda_{n-1}\le\lambda\le\lambda_n$, se tiene

$$\frac{n-1}{\lambda_{n-1}}\ge\frac{N(\lambda)-1}{\lambda}\ge\frac{N(\lambda)-1}{\lambda_n}=\frac{n}{\lambda_n}+o(1)=\frac{n+\varepsilon(n)}{\lambda_n}+o(1)=\frac{N(\lambda_n)}{\lambda_n}+o(1)$$

sigue que $lim\,\frac{N(\lambda)}{\lambda}=A$.

Finalmente, si esto último ocurre tenemos que $\frac{\varepsilon(n)}{\lambda_n}\to 0$ y $\frac{n}{\lambda_n}\to A$, QED.

COROLARIO 1. $\frac{N(\lambda)}{\lambda}\to A\neq 0 \Rightarrow \#\{\lambda:\lambda=\lambda_n\}=o(n).\blacklozenge$

En efecto, $\frac{\varepsilon(n)}{n}=\frac{\varepsilon(n)}{\lambda_n.(n/\lambda_n)}$, QED.

APENDICE W
EL TEOREMA DE PREPARACION DE WEIERSTRASS
Y DESARROLLOS DE PUISEUX

AW.1. Sean G_1 y G_2 dos conjuntos abiertos del plano comlejo y $F(z,w)$ definida en $G_1 \times G_2$. Diremos que $F(z,w)$, a valores complejos, es *holomorfa* en $G_1 \times G_2$ si para cada valor $z \in G_1$ es holomorfa con respecto a $w \in G_2$ y para cada valor $w \in G_2$, F es holomorfa con respecto a $z \in G_1$. Una función holomorfa en $G_1 \times G_2$ es continua allí (teorema de Hartog), y las derivadas $\frac{\partial^{m+n} F}{\partial z^m \partial w^n}(z,w)$ existen y son holomorfas en $G_1 \times G_2$.

Condición necesaria y suficiente para que $F(z,w)$ sea holomorfa en algún entorno bicircular de (z_0,w_0), o dicho más brevemente, para que sea *holomorfa en* (z_0,w_0), es que F admita un desarrollo de la forma

(1) $$F(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(w-w_0)^n$$

uniformemente convergente en un entorno abierto bicircular $K_1 \times K_2$ con coeficientes $a_n(z)$ holomofos en K_1.

Esto puede precisarse aún más. Sean z_0 y w_0 puntos del plano complejo, K_1 y K_2 discos abiertos con centros z_0 y w_0 respectivamente. Una función $F(z,w)$ es holomorfa en $K_1 \times K_2$ si y sólo si es desarrollable en esta región según una serie de la forma

(2) $$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}(z-z_0)^m (w-w_0)^n$$

uniformemente convergente sobre compactos de $K_1 \times K_2$. Este desarrollo es también absolutamente convergente y

(3) $$a_{m,n} = -\frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \left(\int_{C_2} \frac{F(u,v)}{(u-z_0)^{m+1}(v-w_0)^{n+1}} du \right) dv$$

donde C_1 y C_2 son circunferencias arbitrarias contenidas en K_1 y K_2, respectivamente, y concéntricas con los contornos de los discos.

AW.2. Suponemos definida una función holomorfa no idénticamente nula, $F(z,w)$, en el entorno bicircular $D_1 \times D_2$ alrededor del punto $(z_0,w_0) \in C \times C$.

TEOREMA 1 (Weierstrass). Sea $F(z_0,w_0) = 0$. En un cierto entorno $K_1 \times K_2$ de (z_0,w_0) la función es de la forma

(4) $$F(z,w) = (z-z_0)^m P(z,w) F_1(z,w),$$

donde $F_1(z,w) \neq 0$ en $K_1 \times K_2$ y es holomorfa allí, m es un entero no negativo, y P es un polinomio en w de grado $k \geq 0$ para todo $z \in K_1$:

(5) $$P(z,w) = \prod_{j=0}^{k} (w - w_j(z)) = (w-w_0)^k + A_1(z)(w-w_0)^{k-1} + \ldots + A_k(z),$$

donde $A_j(z)$ es holomorfa en K_1 y $A_j(z_0)=0$ para todo j, $j=1,...,k$. Si $F(z_0,w)\not\equiv 0$ en K_2 entonces (4) se reduce a:

(6) $$F(z,w)=P(z,w).F_1(z,w),$$

y k es la multiplicidad de la raíz $w=w_0$ de $F(z_0,w)$.♦

Una demostración de este teorema puede verse en [SZ].

AW.3. **TEOREMA 2** (Puiseux, cf. Ap. A). Sea $P(\tau,\xi)$ un polinomio en las dos variables τ,ξ de la forma:

$$P(\tau,\xi)=\tau^m+c_{m-1}(\xi)\tau^{m-1}+...+c_0(\xi)=\prod_{i=1}^{m}(\tau-\tau_j(\xi)), \qquad m>1.$$

Si $c_{m-1}(0)=...=c_0(0)=0$ entonces cada $\tau_j(\xi)$ es, para algún entero positivo *p=p(j)*, una función analítica de $\xi^{1/p}$ en $0<|\xi|<\delta$:

(7) $$\tau_j(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k.\left(\xi^{1/p}\right)^k.♦$$

NB. En este caso $\dfrac{\partial P}{\partial \tau}(0,0)=0$. Por el contrario si $\dfrac{\partial P}{\partial \tau}(0,0)\neq 0$, el teorema de las funciones implícitas en el campo complejo asegura que existe una y sólo una función $\tau(\xi)$, analítica en un entorno E de $\xi=0$, tal que $\tau(0)=0$, $P(\tau(\xi),\xi)=0$ en E.

REFERENCIAS

[A] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press, (1975).
[B] BENEDEK, A., *Sobre el problema de Dirichlet*, Notas de Álgebra y Análisis n°2, Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, (1968).
[BP1] BENEDEK, A. y PANZONE, R., *Problemas de contorno*, I. *Lecciones sobre métodos y resultados básicos de la teoria de Sturm-Liouville y algunas de sus generalizaciones*, Notas de Álgebra y Análisis n° 13, Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, (1985).
[BP2] BENEDEK, A., PANZONE, R., Comentario a un teorema de Jakob Steiner, Rev. Unión Matemática Argentina, Vol. XXXII, (1985-86), 93-106.
[BPP] BENEDEK, Agnes, PANZONE Rafael y PANZONE Pablo, *Temas complementarios de Análisis*, INMABB, UNS-CONICET, Informe Técnico # 63, (1998).
[Br] BRELOT Marcel, *Éléments de la Théorie Classique du Potentiel*, Centre de documentation universitaire, 5 Place de la Sorbonne, Paris V.
[C1] CARLEMAN, T., Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Åttonde skan.matematikerkongressen i Stockholm (1934), 34-44.
[C2] CARLEMAN, T., *L'Intégral de Fourier et questions qui s'y rattachent*, Uppsala, (1944).
[CC] COTLAR, M. and CIGNOLI, R., *An Introduction to Functional Analysis*, North-Holland, (1974).
[Co] COPSON, E.T., *An Introduction to the Theory of Functions of Mathematical Physics*, Chelsea Pub. Co. New York, (1954).
[Cu] COULSON, C.A., *Ondas*, Dossat, (1941).
[F] FLEMING, W., *Functions of Several Variables*, Springer, (1977).
[Fr] FRENCH, A. P., *Vibrations and Waves*, M.I.T., (1971).
[FZ] FAVA, N. y ZÓ, F., *Medida e Integral de Lebesgue*, IAM-CONICET, Red Olímpica, (1996).
[G] GOURSAT, E. *Cours d'Analyse Mathématique*, III, (1923).
[Gå] GÅRDING, L. On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators, Math. Scand. 1, 237-255 (1953).
[Gl] GLAZMAN, I. M., *Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators*, Moscú (1963), Jerusalem (1969).
[GK] GOHBERG, I. C. and KREIN, M. G., *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, Moscú (1965), American Mathematical Society (1969).
[GT] GILBARG, D. and TRUDINGER, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, (1983).
[H] HÖRMANDER, L., *Linear partial differential operators*, (1963).
[He] HELLWIG, G., *Partial differential equations, an introduction*, Blaisdell Pub. Co., New York (1964).
[Ho] HOUNIE, J., *Teoria elementar das Distribuçoes*, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
[HPh] HILLE, E. and PHILLIPS, R. S., *Functional Analysis and Semigroups*, A.M.S., Colloquium Publications, vol. XXXI, (1957).
[K] KAC, M., Can one hear the shape of a drum? Am. Math. Monthly, 73, n°4, 1-23, (1966).
[K1] KELLOG, O., On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Trans. Am. Math. Soc., vol 33, n°2, 486-510, (1931).
[K2] KELLOG, O. D., *Foundations of Potential Theory*, (1953).
[M] MIRANDA, C., *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, (1955).
[Mt] MATTILA, P, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge University Press, (1995).

[MO] MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics*, Chelsea Pub. Co., New York, (1954).
[P] PANZONE, R., *Lecciones Preliminares de Análisis Funcional*, Notas de Álgebra y Análisis n° 11, Instituto de Matemática, Univ. Nacional del Sur, (1983).
[Pe] PETROVSKY, I. G., *Lectures on Partial Differential Equations*, (1957).
[Pl] PLEIJEL, Å., A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes, Arkiv för Matematik, vol. 2, # 29, (1952), 553-569.
[RN] RIESZ, F. et SZ.-NAGY, B., *Leçons d'Analyse Fonctionelle*, (1953).
[S] SCHWARTZ, L., *Théorie des Distributions*, I, II, Hermann, Paris, (1951).
[Sc] SCHECHTER, M. *Modern Methods in Partial Differential Equations, an Introduction*, Mc Graw-Hill Inc., (1977)
[Se] SEIDENBERG, A., A new decision method for elementary algebra, Ann. Math., (2), 60,(1954) 365-374.
[SZ] SAKS, S. and ZYGMUND, A., *Analytic Functions*, Warsawa-Wroclaw, (1952).
[T] TITCHMARSH, E. C., *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations*, I, II, Oxford, (1970).
[Tr] TREVES, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, (1975).
[vW] VAN DER WAERDEN, B. L., *Algebra*, I, II, Springer, (1959).
[W] WATSON, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, (1952).
[We] WEINBERGER, H. F., *A first course in Partial Differential Equations*, Blaisdell Pub. Co., (1965).
[WI] WIDDER, D. V., *An Introduction to Transform Theory*, Academic Press, New York and London, (1971).
[Z] ZYGMUND, A., *Trigonometric Series*, I, II , Cambridge, (1959).