UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
INSTITUTO DE MATEMATICA
BAHIA BLANCA

INFORME TECNICO INTERNO

N°. 80

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA
INMABB (UNS - CONICET)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA
República Argentina

INSTITUTO DE MATEMATICA
BAHIA BLANCA

INFORME TÉCNICO INTERNO

N° 80

UNS-CONICET
INSTITUTO DE MATEMATICA
BIBLIOTECA "Dr. ANTONIO MONTEIRO"
LIBRO No ITI
VOL. 80
E J.

INSTITUTO DE MATEMATICA DE BAHIA BLANCA

INMABB (CONICET - UNS)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

Avda. ALEM 1253 - 8000 BAHIA BLANCA

- 2002 -

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
INSTITUTO DE MATEMATICA
BAHIA BLANCA

INFORME TÉCNICO INTERNO N° 80

Subálgebras monádicas de un álgebra de Boole monádica finita

Luiz Monteiro, Manuel Abad, Sonia Savini, Julio Sewald y Marta Zander

Universidad Nacional del Sur

INMABB

CONICET - UNS

AÑO 2002

AL DEL SUR

Subálgebras monádicas de un álgebra de Boole monádica finita

Luiz Monteiro, Manuel Abad, Sonia Savini,
Julio Sewald y Marta Zander
INMABB-CONICET y Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
luizmont@criba.edu.ar - imabad@criba.edu.ar
ssavini@criba.edu.ar - jsewald@criba.edu.ar
mzander@criba.edu.ar

Resumen

Es bien conocido que el número de subálgebras booleanas de un álgebra de Boole con n átomos es igual al número de particiones de un conjunto con n elementos. Es natural plantearse el siguiente problema: *si B es un álgebra de Boole monádica con n átomos, ¿cuántas subálgebras monádicas tiene B?*

1 Nociones preliminares

Si X es un conjunto finito con n elementos, notaremos con $N[X]$ el número de elementos de X y con $\mathbf{p}(n)$ el número de particiones del conjunto X. Vamos a representar un álgebra de Boole con n átomos por B_n, con $\mathcal{A}(B_n) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de sus átomos y con $\mathcal{S}(B_n)$ el conjunto de todas las subálgebras booleanas de B_n. Es bien conocido que $N[\mathcal{S}(B_n)] = \mathbf{p}(n)$.

De acuerdo con el resultado de O. Ore, [8], si definimos $\mathbf{p}(0) = 1$ entonces:

$$\mathbf{p}(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathbf{p}(i), \quad n \geq 0.$$

Tenemos así, por ejemplo, que: $\mathbf{p}(1) = 1,\ \mathbf{p}(2) = 2,\ \mathbf{p}(3) = 5,\ \mathbf{p}(4) = 15,\ \mathbf{p}(5) = 52.$

Si B es un álgebra de Boole y $b \in B$ notaremos $(b] = \{x \in B : x \leq b\}$ y si $X \subseteq B$ notaremos con $SB(X)$ la subálgebra booleana de B generada por el conjunto X.

Recordemos el siguiente resultado (ver por ejemplo [6]): Dada el álgebra de Boole $B = B_n$ sea

$$\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \ldots, X_t\},\ \ 1 \leq t \leq n, \ \ \text{una partición de}\ \ \mathcal{A}(B_n).$$

Sean $g_i = \bigvee\{x : x \in X_i\}, \quad 1 \leq i \leq t$ y $G_{\mathcal{P}} = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$. Entonces:

1) Por la definición de los g_i, cada uno de ellos es supremo de átomos, luego $g_i \neq 0$, para $1 \leq i \leq t$.

2) $\bigvee\limits_{i=1}^{t} g_i = \bigvee\{x : x \in \bigcup\limits_{i=1}^{t} X_i\} = \bigvee\{x : x \in \mathcal{A}(B)\} = 1$.

3) Si $1 \leq i, j \leq t$ son tales que $i \neq j$ entonces $g_i \wedge g_j = (\bigvee\{x : x \in X_i\}) \wedge (\bigvee\{y : y \in X_j\})$. Como X_i, $X_j \subseteq \mathcal{A}(B)$ y $Xi \cap Xj = \emptyset$ entonces $x \neq y$, para todo $x \in X_i$ y para todo $y \in X_j$, por lo tanto $g_i \wedge g_j = 0$.

La subálgebra $B' = SB(G_{\mathcal{P}})$ de B verifica $\mathcal{A}(B') = G_{\mathcal{P}}$. Definamos:

$$\Psi(\mathcal{P}) = SB(G_{\mathcal{P}}).$$

Ψ es una aplicación entre el conjunto de particiones de los átomos de B y el conjunto de subálgebras de B.

Dada una subálgebra S de B, como S es finita, si $t = N[\mathcal{A}(S)]$ entonces $1 \leq t \leq n$.
Si $\mathcal{A}(S) = \{s_1, s_2, \ldots, s_t\}$ entonces como $s_i \in B$, para todo i, $1 \leq i \leq t$ tenemos:

$$s_1 = \bigvee_{j=1}^{i_1}\{a_{1j} \in \mathcal{A}(B) : a_{1j} \leq s_1\}$$

$$s_2 = \bigvee_{j=1}^{i_2}\{a_{2j} \in \mathcal{A}(B) : a_{2j} \leq s_2\}$$

$$\vdots$$

$$s_t = \bigvee_{j=1}^{i_t}\{a_{tj} \in \mathcal{A}(B) : a_{tj} \leq s_t\}$$

Como $s_i \wedge s_j = 0$, para todo $i \neq j$ y $\bigvee\limits_{i=1}^{t} s_i = 1$, entonces:

$$X_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1i_1}\}$$

$$X_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2i_2}\}$$

$$\vdots$$

$$X_t = \{a_{t1}, a_{t2}, \ldots, a_{ti_t}\}$$

es una partición de $\mathcal{A}(B)$. En efecto:

1) Es claro que $X_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq t$.

2) $X_h \cap X_k = \emptyset$, si $h \neq k$, $1 \leq h,k \leq t$. Si $z \in X_h \cap X_k$, entonces $z = a_{hs} = a_{kr} \leq \bigvee_{j=1}^{i_k} \{a_{kj} \in \mathcal{A}(B) : a_{kj} \leq s_k\} = s_k$, y por lo tanto $a_{hs} = a_{hs} \wedge s_h \leq s_k \wedge s_h = 0$, luego $a_{hs} = 0$. Absurdo.

3) $\bigcup_{i=1}^{t} X_i = \mathcal{A}(B)$. En efecto, si $a \in \mathcal{A}(B)$, entonces $a \leq 1 = \bigvee_{r=1}^{t} s_r$. Como a es primo entonces $a \leq s_r$ para algún r, $1 \leq r \leq t$. Luego:

$$a \leq a_{r1} \vee a_{r2} \vee \ldots \vee a_{ri_r}$$

y, nuevamente, como a es primo $a \leq a_{rh}$, con $1 \leq h \leq i_r$. Como ambos elementos son átomos tenemos que $a = a_{rh}$ y, en consecuencia, $a \in \bigcup_{i=1}^{t} X_i$.

Luego $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$ es una partición de $\mathcal{A}(B)$ y se verifica que:

$$\Psi(\mathcal{P}) = SB(G_{\mathcal{P}}) = SB(\{s_1, s_2, \ldots, s_t\}) = S.$$

Por lo tanto Ψ es una función suryectiva.
Probemos finalmente que Ψ es inyectiva. Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ dos particiones de $\mathcal{A}(B)$ tales que $\Psi(\mathcal{P}_1) = \Psi(\mathcal{P}_2)$, esto es $S_1 = SB(G_{\mathcal{P}_1}) = SB(G_{\mathcal{P}_2}) = S_2$. Probemos que $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$. Sabemos que si $\mathcal{P}_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_s\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_t\}$ son particiones de $\mathcal{A}(B)$ entonces:

$$g_i = \bigvee \{x : x \in X_i\}, \quad 1 \leq i \leq s, \quad \text{son átomos de } S_1,$$

$$h_i = \bigvee \{y : y \in Y_i\}, \quad 1 \leq i \leq t, \quad \text{son átomos de } S_2.$$

De $S_1 = S_2$ resulta que $\mathcal{A}(S_1) = \mathcal{A}(S_2)$. Luego $\{g_1, g_2, \ldots, g_s\} = \{h_1, h_2, \ldots, h_t\}$, y entonces $s = t$. Reordenemos el conjunto $\mathcal{A}(S_2)$ de forma tal que $g_i = h_i$, $1 \leq i \leq s$. Tenemos entonces que:

$$g_i = \bigvee \{x : x \in X_i\} \text{ donde } X_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij_i}\}, \text{ y } a_{is} \in \mathcal{A}(B), \ 1 \leq s \leq j_i$$

$$h_i = \bigvee \{y : y \in Y_i\} \text{ donde } Y_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ik_i}\}, \text{ y } b_{iv} \in \mathcal{A}(B), \ 1 \leq v \leq k_i$$

esto es

$$g_i = a_{i1} \vee a_{i2} \vee \ldots \vee a_{ij_i} = b_{i1} \vee b_{i2} \vee \ldots \vee b_{ik_i} = h_i.$$

Como $a_{ij} \leq g_i = b_{i1} \vee b_{i2} \vee \ldots \vee b_{ik_i}$ luego $a_{ij} \leq b_{ih}$ para algún h, $1 \leq h \leq k_i$ y como a_{ij} y b_{ih} son átomos tenemos que $a_{ij} = b_{ih}$, luego $X_i \subseteq Y_i$. Análogamente se prueba que $Y_i \subseteq X_i$. Por lo tanto $X_i = Y_i$, para todo i, $1 \leq i \leq s$, de donde resulta $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

Acabamos así de probar que si B es un álgebra de Boole con n átomos, existen tantas subálgebras de B como particiones tiene el conjunto de los átomos de B.

2 Número de subálgebras monádicas de B_n comparables con la subálgebra de las constantes

Sea $(B_n, \exists)$ un álgebra de Boole monádica [2, 4]. Notaremos con $K(B_n)$ al conjunto $\{x \in B_n : \exists\ x = x\}$. Es bien conocido que $K(B_n)$ es una subálgebra booleana de B_n. Además si $\forall x = -\exists - x$ donde $-x$ indica el complemento booleano de x, entonces $K(B_n) = \{x \in B_n : \forall\ x = x\}$. Recíprocamente dada una subálgebra booleana K de B_n, K induce un operador unario $\exists$ sobre B_n de forma tal que $(B_n, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica y además $K = K(B_n)$. Además esta correspondencia es biyectiva.

Si K es una subálgebra booleana de B_n cuya partición asociada de los átomos de B_n es $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$, donde $N[C_i] = n_i$, para $1 \leq i \leq k$, notaremos indistintamente $(B_n, \exists)$, (B_n, K) ó $(B_n, n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$, al álgebra de Boole monádica correspondiente, y diremos que $\mathcal{P}$ es del tipo $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Si $\mathcal{P}_i$ es una partición de los átomos de B_n indicaremos con S_i la subálgebra booleana de B_n asociada con $\mathcal{P}_i$.

Dada una subálgebra booleana K de B_n, notaremos con $\mathcal{SM}(B_n, K)$ al conjunto de todas las subálgebras monádicas de B_n. Queremos determinar $N[\mathcal{SM}(B_n, K)]$. Es claro que $N[\mathcal{SM}(B_1, B_1)] = 1$.

Dado $n \in N$, $n \geq 2$, sean

$$\mathcal{SM}_1(B_n, K) = \{S \in \mathcal{SM}(B_n, K) : S \subset K\},$$

$$\mathcal{SM}_2(B_n, K) = \{S \in \mathcal{SM}(B_n, K) : K \subseteq S\},$$

$$\mathcal{SM}_3(B_n, K) = \{S \in \mathcal{SM}(B_n, K) : S \text{ es incomparable con } K\}.$$

Luego

$$\mathcal{SM}(B_n, K) = \mathcal{SM}_1(B_n, K) \cup \mathcal{SM}_2(B_n, K) \cup \mathcal{SM}_3(B_n, K).$$

Es claro que si $K = B_n$ ó $K = \{0, 1\}$ entonces toda subálgebra booleana S de B_n es monádica, ya que si $s \in S$, entonces $\exists s \in S$.

Como las únicas subálgebras booleanas de B_2 son $S_1 = \{0, 1\}$ y $S_2 = B_2$, en el primer caso $\mathcal{SM}_1(B_2, S_1) = \emptyset = \mathcal{SM}_3(B_2, S_1)$ y $\mathcal{SM}_2(B_2, S_1) = \{\{0, 1\}, B_2\}$ y en el segundo $\mathcal{SM}_1(B_2, B_2) = \{\{0,1\}\}$, $\mathcal{SM}_2(B_2, B_2) = \{B_2\}$ y $\mathcal{SM}_3(B_2, B_2) = \emptyset$. Por lo tanto $\mathcal{SM}(B_2, S_1) = \mathcal{SM}(B_2, B_2) = \{\{0, 1\}, B_2\}$. Luego $N[\mathcal{SM}(B_2, K)] = 2$ cualquiera que sea la subálgebra booleana K de B_2. Queda así por resolver el caso en que K es una subálgebra booleana de B_n que verifica $\{0, 1\} \subset K \subset B_n$, y $n \geq 3$.

En el caso B_3, el conjunto de todas las particiones del conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ de los átomos de B_3 es el siguiente:

$\mathcal{P}_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$		
$\mathcal{P}_2 = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$	$\mathcal{P}_3 = \{\{a_2\}, \{a_1, a_3\}\}$	$\mathcal{P}_4 = \{\{a_3\}, \{a_1, a_2\}\}$
$\mathcal{P}_5 = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}$		

Si $K = S_1$ ó $K = S_5 = B_3$ entonces $N[\mathcal{SM}(B_3, K)] = \mathbf{p}(3)$ y el diagrama de Hasse del reticulado de las subálgebras monádicas de B_3 es:

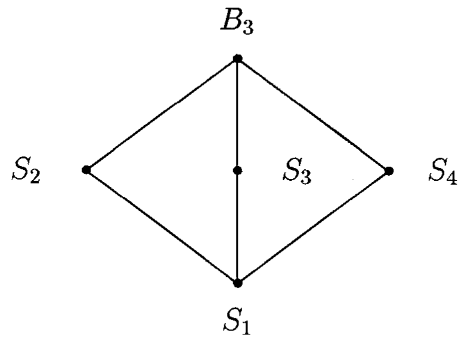

Figura 1

Si $K = S_2$ entonces el diagrama de las subálgebras monádicas es:

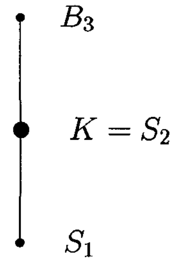

Figura 2

y lo mismo ocurre si $K = S_3$ ó $K = S_4$.

Luego si K es isomorfa a B_2 entonces $\mathcal{SM}(B_3, K) = \{\{0,1\}, K, B_3\}$.

Observemos que si $S \in \mathcal{SM}_1(B_n, K)$, en particular, S es una subálgebra booleana de B_n tal que $S \subset K$. Recíprocamente, si S es una subálgebra booleana de B_n que verifica $S \subset K$, entonces S es una subálgebra monádica de B_n, dado que, si $s \in S$, como $S \subset K$ entonces $\exists s = s \in S$. Por lo tanto $\mathcal{SM}_1(B_n, K) = \{S \in \mathcal{S}(B_n) : S \subset K\}$.

Luego si K es una subálgebra booleana de B_n, con t átomos, $1 \leq t \leq n$, entonces:

$$N[\mathcal{SM}_1(B_n, K)] = N[\{S \in \mathcal{S}(B_n) : S \subset K\}] = \mathbf{p}(t) - 1.$$

Veamos ahora que $\mathcal{SM}_2(B_n, K) = \{S \in \mathcal{S}(B_n) : K \subseteq S\}$. En efecto, si $S \in \mathcal{SM}_2(B_n, K)$, en particular $S \in \mathcal{S}(B_n)$, y por hipótesis, $K \subseteq S$. Recíprocamente si S es una subálgebra booleana de B_n tal que $K \subseteq S$, entonces S es una subálgebra monádica de B_n. En efecto, si $s \in S$ entonces $\exists s \in K \subseteq S$. Luego

$$N[\mathcal{SM}_2(B_n, K)] = N[\{S \in \mathcal{S}(B_n) : K \subseteq S\}].$$

Lema 2.1 *Sea S una subálgebra booleana de B_n, determinada por la partición $\mathcal{P}(S) = \{C_1, C_2, \ldots, C_t\}$ de los átomos de B_n. Si $X(S) = \{S' \in \mathcal{S}(B_n) : S \subseteq S'\}$, entonces $N[X(S)] = \prod_{i=1}^{t} \mathbf{p}(N[C_i])$.*

Dem. Sea P_i, $1 \leq i \leq t$, el conjunto de las particiones del conjunto C_i y $P = \prod_{i=1}^{t} P_i$. Si $\mathcal{P}_i = \{C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{in_i}\}$, es una partición de C_i, $1 \leq i \leq t$, consideremos la siguiente partición de $\mathcal{A}(B_n)$:

$$\mathcal{P}' = \{C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1n_1}, C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{2n_2}, \ldots, C_{t1}, C_{t2}, \ldots, C_{tn_t}\}.$$

Sea S' la subálgebra booleana asociada con esta partición. Escribiremos

$$\psi((\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_t)) = S'.$$

Si a es un átomo de S, entonces $a = a_i$, para algún i, $1 \leq i \leq t$, luego

$$a_i = \bigvee\{x : x \in C_i\} = \bigvee\{x : x \in C_{i1}\} \vee \bigvee\{x : x \in C_{i2}\} \vee \ldots \vee \bigvee\{x : x \in C_{in_i}\}$$

esto es

$$a_i = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_{n_i}.$$

Como $b_j \in \mathcal{A}(S')$, $1 \leq j \leq n_i$, entonces $a_i \in S'$, esto es, $\mathcal{A}(S) \subseteq S'$. Pero entonces $S \subseteq S'$. Es decir, se tiene una función $\psi : P \to X(S)$. Probemos que esta función es suryectiva. En efecto, sean $S' \in X(S)$ y $\mathcal{P}' = \{C'_1, C'_2, \ldots, C'_h\}$ la partición de los átomos de B_n asociada con S'. Como S es subálgebra booleana de S' entonces $t = N[\mathcal{A}(S)] \leq N[\mathcal{A}(S')] = h$. Como $S \subseteq S'$, $\mathcal{A}(S) \subseteq S'$. Luego, para cada i, $1 \leq i \leq t$, tenemos que $a_i \in S'$ y, como $a_i \neq 0$, entonces a_i es supremo de átomos de S'. Los átomos de S' son los elementos $b_j = \bigvee\{x : x \in C'_j\}$, $1 \leq j \leq h$.

Sea $a_i = \bigvee\{b_j : j \in J\}$ donde $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, h\}$. Luego

$$a_i = \bigvee\{x : x \in C'_{j_1}\} \vee \bigvee\{x : x \in C'_{j_2}\} \ \vee \ \ldots \ \vee \ \bigvee\{x : x \in C'_{j_r}\}.$$

Probemos que (1) $C'_{j_m} \subseteq C_i$, para $m = 1, 2, \ldots, r$. En efecto, si $a' \in C'_{j_m}$, entonces

$$a' \leq \bigvee\{x : x \in C'_{j_m}\} \leq a_i = \bigvee\{y : y \in C_i\}.$$

Luego $a' \leq y$, con $y \in C_i$. Pero como a', $y \in \mathcal{A}(B_n)$ entonces $a' = y$ y por lo tanto $a' \in C_i$. Veamos ahora que $\bigcup_{m=1}^{r} C'_{j_m} = C_i$. Por (1) tenemos $\bigcup_{m=1}^{r} C'_{j_m} \subseteq C_i$. Sea $a \in C_i$ luego a es un átomo de B_n y se tiene

$$a \leq a_i = \bigvee\{x : x \in C'_{j_1}\} \ \vee \ \bigvee\{x : x \in C'_{j_2}\} \ \vee \ \ldots \ \vee \ \bigvee\{x : x \in C'_{j_r}\}.$$

Por lo tanto $a \leq x$ para algún $x \in C'_{jm}$, $1 \leq m \leq r$, y en consecuencia $a = x$ de donde resulta $C_i \subseteq \bigcup_{m=1}^{r} C'_{jm}$.

Como los C'_{jm} son disjuntos dos a dos, tenemos que $\mathcal{P}_i = \{C'_{j_1}, C'_{j_2}, \ldots, C'_{j_r}\}$ es una partición de C_i y es claro que $\psi((\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_t)) = S'$. Acabamos así de probar que existe una correspondencia suryectiva ψ entre P y $X(S)$. Como ψ es claramente inyectiva, se tiene que ψ es una biyección. ■

Tenemos así:

Lema 2.2 *Si K es una subálgebra de B_n con t átomos, $1 \leq t \leq n$, y la partición de $\mathcal{A}(B_n)$ asociada con K es $\mathcal{P}(K) = \{C_1, C_2, \ldots, C_t\}$ entonces:*

$$N[\mathcal{SM}_2(B_n, K)] = \prod_{i=1}^{t} \mathbf{p}(N[C_i])$$

y

$$N[\mathcal{SM}(B_n, K)] \geq (\mathbf{p}(t) - 1) + \prod_{i=1}^{t} \mathbf{p}(N[C_i]).$$

Nuestro problema queda entonces restringido a determinar cuántas subálgebras monádicas de B_n, $n \geq 4$, son incomparables con K, donde $\{0, 1\} \subset K \subset B_n$, esto es, a determinar en estos casos la cardinalidad del conjunto $\mathcal{SM}_3(B_n, K)$.

Si $S \in \mathcal{SM}(B_n, K)$ notaremos $(S] = \{S' \in \mathcal{SM}(B_n, K) : S' \subseteq S\}$.

3 Subálgebras incomparables con la subálgebra de las constantes

Veamos en primer lugar que sucede con el álgebra de Boole B_4. A continuación indicamos el conjunto de todas las particiones del conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de los átomos de B_4:

$\mathcal{P}_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	
$\mathcal{P}_2 = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_3 = \{\{a_2\}, \{a_1, a_3, a_4\}\}$
$\mathcal{P}_4 = \{\{a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_5 = \{\{a_4\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$
$\mathcal{P}_6 = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_7 = \{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_4\}\}$
$\mathcal{P}_8 = \{\{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}\}$	
$\mathcal{P}_9 = \{\{a_1\}\{a_2\}, \{a_3, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{10} = \{\{a_1\}, \{a_3\}, \{a_2, a_4\}\}$
$\mathcal{P}_{11} = \{\{a_1\}, \{a_4\}, \{a_2, a_3\}\}$	$\mathcal{P}_{12} = \{\{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_4\}\}$
$\mathcal{P}_{13} = \{\{a_2\}, \{a_4\}, \{a_1, a_3\}\}$	$\mathcal{P}_{14} = \{\{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1, a_2\}\}$
$\mathcal{P}_{15} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}\}$	

El diagrama de B_4 es el siguiente:

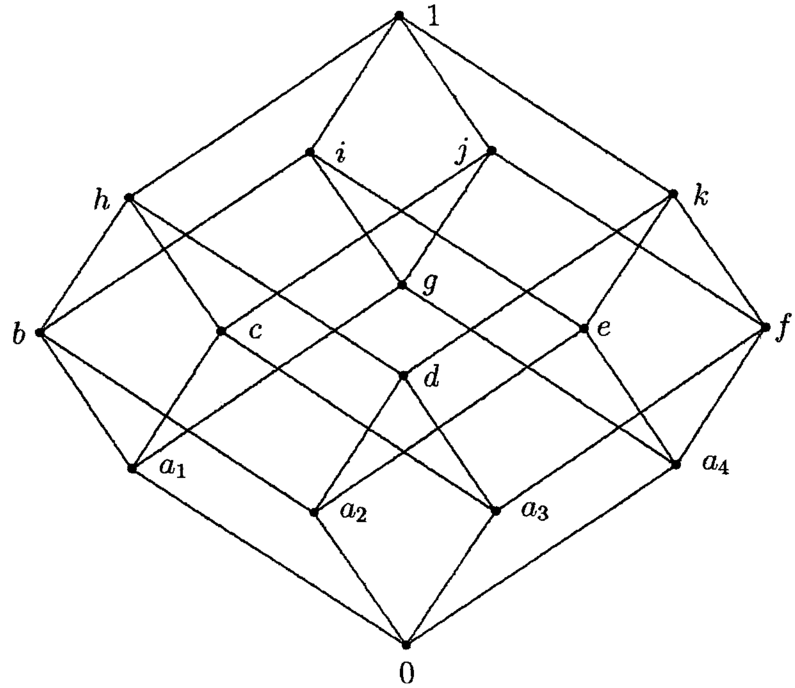

Figura 3

Las subálgebras booleanas de B_4 son:

$S_1 = \{0,1\}$	
$S_2 = \{0,a_1,k,1\}$	$S_3 = \{0,a_2,j,1\}$
$S_4 = \{0,a_3,i,1\}$	$S_5 = \{0,a_4,h,1\}$
$S_6 = \{0,b,f,1\}$	$S_7 = \{0,c,e,1\}$
$S_8 = \{0,d,g,1\}$	
$S_9 = \{0,a_1,a_2,b,f,j,k,1\}$	$S_{10} = \{0,a_1,a_3,c,e,i,k,1\}$
$S_{11} = \{0,a_1,a_4,d,g,h,k,1\}$	$S_{12} = \{0,a_2,a_3,d,g,i,j,1\}$
$S_{13} = \{0,a_2,a_4,c,e,h,j,1\}$	$S_{14} = \{0,a_3,a_4,b,f,h,i,1\}$
$S_{15} = B_4$	

Si $K = S_1$ ó $K = B_4$ entonces el diagrama de las subálgebras monádicas es:

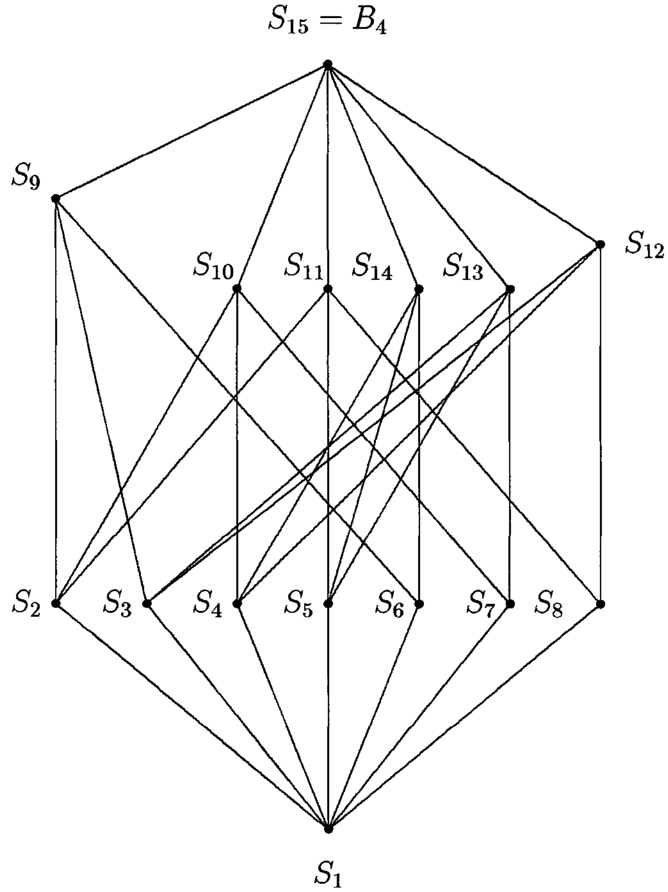

Figura 4

Las subálgebras booleanas K que verifican $\{0,1\} \subset K \subset B_4$ son isomorfas a B_2 ó isomorfas a B_3. Veamos que sucede en cada uno de estos casos:

(I) $K \cong B_2$. Entonces existen dos posibilidades para la bipartición $\mathcal{P} = \{C_1, C_2\}$ de los átomos de B_4:

(Ia) $N[C_1] = 1$, $N[C_2] = 3$. Por ejemplo $K = S_2 = \{0, a_1, k, 1\}$ es una subálgebra booleana de B_4 que verifica $\{0,1\} \subset K \subset B_4$. La misma determina los siguientes operadores.

x	0	a_1	a_2	a_3	a_4	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	1
$\exists x$	0	a_1	k	k	k	1	1	k	k	k	1	1	1	1	k	1
$\forall x$	0	a_1	0	0	0	a_1	a_1	0	0	0	a_1	a_1	a_1	a_1	k	1

En este caso $\mathcal{SM}_3(B_4, S_2) = \emptyset$ y el diagrama de Hasse de las subálgebras monádicas de B_4 es el siguiente:

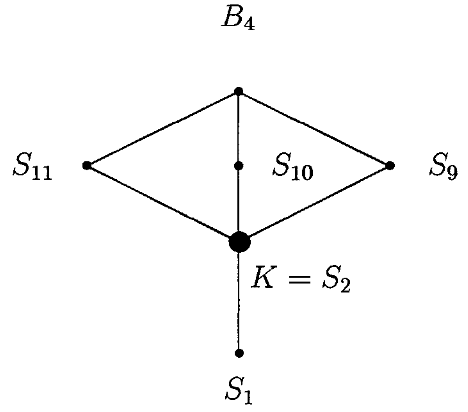

Figura 5

S_9, S_{10} y S_{11} son átomos duales de $\mathcal{SM}(B_4, S_2)$ y $(S_9], (S_{10}]$ y $(S_{11}]$ son conjuntos ordenados isomorfos al indicado en la Figura 2.
El diagrama es el mismo si $K = S_3$, S_4 ó S_5. Este ejemplo muestra que en general el reticulado de las subálgebras monádicas de un álgebra de Boole monádica no es modular.

(Ib) $N[C_1] = 2$, $N[C_2] = 2$. Supongamos que $K = S_6 = \{0, b, f, 1\}$. Entonces los operadores están dados por:

x	0	a_1	a_2	a_3	a_4	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	1
$\exists x$	0	b	b	f	f	b	1	1	1	f	1	1	1	1	1	1
$\forall x$	0	0	0	0	0	b	0	0	0	f	0	b	b	f	f	1

En este caso $\mathcal{SM}_3(B_4, S_6) = \{S_7, S_8\}$ y el diagrama de Hasse de las subálgebras monádicas de B_4 es:

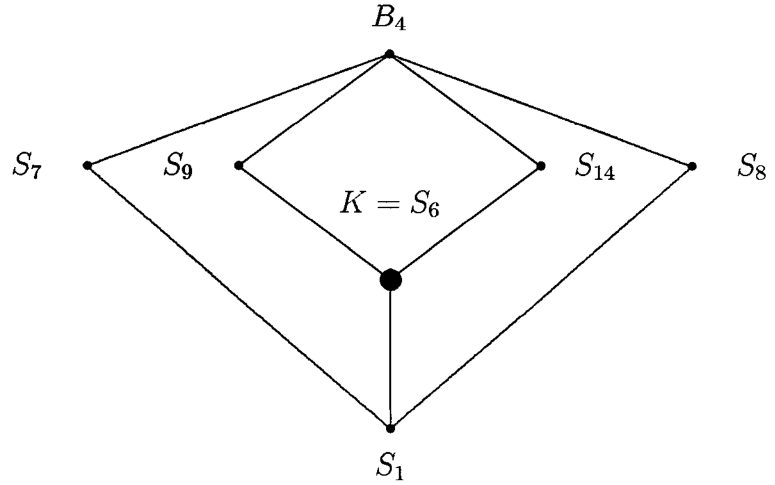

Figura 6

S_9 y S_{14} son átomos duales de $\mathcal{SM}(B_4, S_6)$ y $(S_9]$ y $(S_{14}]$ son conjuntos ordenados isomorfos al indicado en la Figura 2. También S_7 y S_8 son átomos duales de $\mathcal{SM}(B_4, S_6)$ y $(S_7]$ y $(S_8]$ isomorfos a B_2.
El diagrama es el mismo para $K = S_7$ ó S_8.

(II) $K \cong B_3$. Entonces si $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, C_3\}$ es una tripartición de los átomos de B_4, debe ser por ejemplo $N[C_1] = 1$, $N[C_2] = 1$, $N[C_3] = 2$. Supongamos que $K = S_9 = \{0, a_1, a_2, b, f, j, k, 1\}$. Los operadores estan dados por:

x	0	a_1	a_2	a_3	a_4	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	1
$\exists x$	0	a_1	a_2	f	f	b	j	k	k	f	j	1	1	j	k	1
$\forall x$	0	a_1	a_2	0	0	b	a_1	a_2	a_2	f	a_1	b	b	j	k	1

En este caso $\mathcal{SM}_3(B_4, S_9) = \{S_{14}\}$ y el diagrama de Hasse de las subálgebras monádicas de B_4 es:

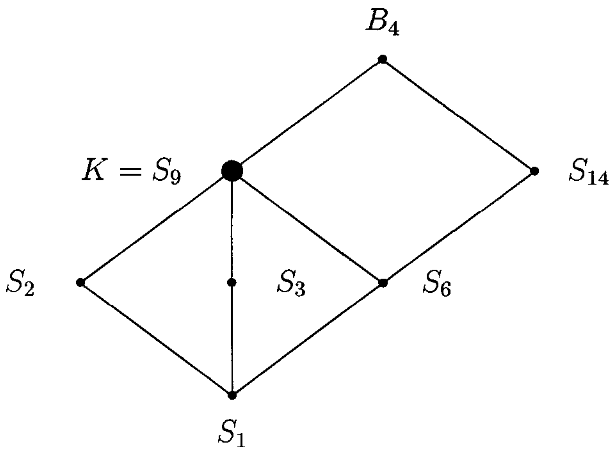

Figura 7

K y S_{14} son átomos duales de $\mathcal{SM}(B_4, S_9)$. $(S_{14}]$ es un conjunto ordenado isomorfo al indicado en la Figura 2, y $(K]$ es un conjunto ordenado isomorfo al indicado en la Figura 1.
El diagrama es el mismo para $K = S_{10}$, S_{11}, S_{12}, S_{13} ó S_{14}.

Lema 3.1 *Sea (B, K) un álgebra de Boole monádica. Si S^* es una subálgebra booleana propia de K y $x_0 \in B \setminus K$, tal que $\exists x_0, \forall x_0 \in S^*$, entonces $S = SB(S^*, x_0)$ es una subálgebra monádica de B incomparable con K. Además $S \cap K = S^* = K(S)$.*

Dem.

1) S es monádica. En efecto, si $y \in SB(S^*, x_0)$ entonces $y = (s_1 \wedge x_0) \vee (s_2 \wedge -x_0)$ donde $s_1, s_2 \in S^* \subseteq K$, luego $\exists y = (s_1 \wedge \exists x_0) \vee (s_2 \wedge \exists - x_0) = (s_1 \wedge \exists x_0) \vee (s_2 \wedge -\forall x_0)$. Por lo tanto como $s_1, s_2, \exists x_0, -\forall x_0 \in S^*$ tenemos que $\exists y \in S^* \subseteq S$.

2) S es incomparable con K. En efecto, $S \not\subseteq K$ pues $x_0 \in S = SB(S^*, x_0)$ y $x_0 \notin K$. Por hipótesis S^* es subálgebra propia de K, luego existe $k \in K \setminus S^*$. Si $K \subseteq S$ entonces $k \in S = SB(S^*, x_0)$, luego por 1) $\exists k \in S^*$ y como $\exists k = k$, tenemos que $k \in S^*$, absurdo. Luego $K \not\subseteq S$.

3) $S \cap K = S^*$. En efecto, si $s \in S^*$, como $S^* \subseteq K$ tenemos que $s \in K$ y $s \in S^* \subseteq SB(S^*, x_0) = S$, luego $s \in S \cap K$. Sea $z \in S \cap K$ luego $z \in S$ entonces por lo indicado en la demostración de 1) tenemos que $\exists z \in S^*$, y como $z \in K$ tenemos $\exists z = z \in S^*$.

■

Observación 3.1 *1) Si x_0 verifica las condiciones del Lema anterior entonces también $-x_0$ las verifica y además $SB(S^*, x_0) = SB(S^*, -x_0)$.*

2) Si $a \in \mathcal{A}(B) \setminus K$, entonces sabemos que $\exists a$ es un átomo de K y $\forall a = 0$. Luego si S^* es una subálgebra propia de K tal que $\exists a \in S^*$, entonces $SB(S^*, a)$ es una subálgebra monádica incomparable con K.

3) Consideremos el álgebra de Boole monádica B_3 indicada en la Figura 8, donde $K(B_3) = \{0, a_1, d, 1\}$. Entonces tenemos que $S^* = \{0, 1\}$ es una subálgebra booleana propia del conjunto de constantes $K(B_3)$ y no existe ningún $x_0 \in B_3 \setminus K(B_3)$ que verifique las condiciones del Lema 3.1.

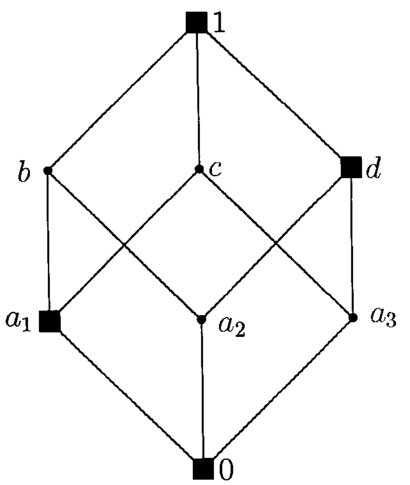

Figura 8

Observemos que si consideramos el álgebra de Boole monádica B_4 indicada en (II) entonces S_6 es una subálgebra propia de $K = S_9$, $a_3, a_4 \in B_4 \setminus K$ verifican $\exists a_3 = \exists a_4 \in S_6$, $\forall a_3 = \forall a_4 \in S_6$, y $SB(S_6, a_3) = SB(S_6, a_4) = S_{14}$, y también $i, h \in B_4 \setminus K$ verifican $\exists i = \exists h \in S_6$, $\forall i = \forall h \in S_6$, y $SB(S_6, i) = SB(S_6, h) = S_{14}$.

Lema 3.2 *Sea S una subálgebra monádica de B_n incomparable con K entonces:*

1) $S^* = S \cap K$ *es una subálgebra propia de* K,

2) $\mathcal{A}_N(S) = \{b \in \mathcal{A}(S) : b \notin K\} \neq \emptyset$,

3) $S = SB(S^* \cup \mathcal{A}_N(S))$.

Dem.

1) $S^* = S \cap K \subseteq K$. Si $S \cap K = K$ entonces $K = S \cap K \subseteq S$, absurdo.

2) Como $S \not\subseteq K$ entonces $\mathcal{A}(S) \not\subseteq K$ y por lo tanto existe $b \in \mathcal{A}(S)$ tal que $b \notin K$, luego $\mathcal{A}_N(S) \neq \emptyset$.

3) Es claro que $\mathcal{A}(S) \subseteq S^* \cup \mathcal{A}_N(S) \subseteq S$. Entonces $S = SB(\mathcal{A}(S)) \subseteq SB(S^* \cup \mathcal{A}_N(S)) \subseteq SB(S) = S$ y se tiene 3).

■

Dada una subálgebra K de B_n consideremos el álgebra de Boole monádica (B_n, K) que le corresponde. Sea $U_0 = \{x \in B_n : \forall x = 0\}$. Como $0 \in U_0$ entonces U_0 es un conjunto no vacío.

Lema 3.3 $U_0 = \{0\} \iff K = B_n$.

Dem. Es claro que la condición es suficiente. Supongamos que $U_0 = \{0\}$ luego $\forall x \neq 0$ cualquiera que sea $x \in B_n \setminus \{0\}$. Dado $a \in \mathcal{A}(B_n)$ en particular $a \neq 0$ y por lo tanto $\forall a \neq 0$, luego $0 < \forall a \leq a$ y por lo tanto como $a \in \mathcal{A}(B_n)$ tenemos que $\forall a = a$. Por lo tanto cualquiera que sea $a \in \mathcal{A}(B_n)$ tenemos $\forall a = a = \exists a$. Luego si $x \in B_n$ $x \neq 0$ entonces $x = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(B_n) : a \leq x\}$ y en consecuencia $\exists x = \exists(\bigvee\{a \in \mathcal{A}(B_n) : a \leq x\}) = \bigvee\{\exists a \in \mathcal{A}(B_n) : a \leq x\} = \bigvee\{a \in \mathcal{A}(B_n) : a \leq x\} = x$ y en consecuencia $x \in K$. Como $x = 0 \in K$ acabamos de probar que $B_n \subseteq K$ y por lo tanto $B_n = K$. ■

Si K es una subálgebra booleana de B_n tal que $\{0,1\} \subset K \subset B_n$ entonces $\{0\} \subset U_0$. U_0 es un conjunto ordenado finito. Sea M_0 el conjunto de los elementos maximales de U_0 luego $\exists M_0 = \{\exists m : m \in M_0\} \subseteq K$ y por lo tanto $S_0 = SB(\exists M_0) \subseteq K$.

Lema 3.4 *Si* $K \neq B_n$ *y* $S_0 = SB(\exists M_0)$ *es una subálgebra propia de* K *entonces* $S = SB(S_0, m)$ *es incomparable con* K *cualquiera que sea* $m \in M_0$.

Dem. Como $K \neq B_n$ entonces por el Lema 3.3 $U_0 \neq \{0\}$, luego $0 \notin M_0$. Por lo tanto si $m \in M_0$ como $M_0 \subset U_0$ entonces $\forall m \in S_0$. Como $\exists m \in \exists M_0 \subseteq SB(\exists M_0) = S_0$ y $m \in B_n \setminus K$ por el Lema 3.1: $S = SB(S_0, m)$ es una subálgebra monádica incomparable con K. ■

Sea $x_0 \in B_n \setminus K$ y consideremos las siguientes subálgebras de B_n:

$$S'(x_0) = SB(\{0,1\}, \exists x_0) = SM(\{0,1\}, \exists x_0),$$

$$S^*(x_0) = SB(S'(x_0), \forall x_0) = SM(S'(x_0), \forall x_0).$$

Observemos que $S'(x_0) = \{0,1\}$ ó $S'(x_0) = \{0, 1, \exists x_0, -\exists x_0\}$ y que $S'(x_0) \subseteq S^*(x_0) \subseteq K$. Como $x_0 \in B_n \setminus K$, $\exists x_0 \in S'(x_0) \subseteq S^*(x_0)$ y $\forall x_0 \in S^*(x_0)$ entonces si $S^*(x_0) \subset K$, por el Lema 3.1 la subálgebra monádica $SB(S^*(x_0), x_0) = SM(S^*(x_0), x_0)$ es incomparable con K. Observemos que si $x_0 \in B_n \setminus K$ entonces también $-x_0 \in B_n \setminus K$. Como (1) $\forall x_0 \in S^*(x_0)$ entonces (2) $\exists - x_0 = -\forall x_0 \in S^*(x_0)$ y como (3) $\exists x_0 \in S'(x_0) \subseteq S^*(x_0)$ entonces (4) $\forall - x_0 = -\exists x_0 \in S^*(x_0)$. Probaremos que

$$SB(S^*(x_0), x_0) = SB(S^*(-x_0), -x_0).$$

Como (i) $-x_0 \in SB(S^*(x_0), x_0)$ si probamos que (ii) $S^*(-x_0) \subseteq S^*(x_0)$ como $S^*(x_0) \subseteq SB(S^*(x_0), x_0)$ entonces (iii) $S^*(-x_0) \subseteq SB(S^*(x_0), x_0)$. Luego de (i) y (iii) resulta $SB(S^*(-x_0), -x_0) \subseteq SB(S^*(x_0), x_0)$.
Probemos (ii). Sea $t \in S^*(-x_0) = SB(S'(-x_0), \forall - x_0)$ luego $t = (s_1 \wedge \forall - x_0) \vee (s_2 \wedge \exists x_0)$ donde $s_1, s_2 \in S'(-x_0) \subseteq \{0, 1, \exists - x_0, \forall x_0\}$.
Como $s_1 \wedge \forall - x_0 \in \{0, -\exists x_0\}$ y $s_2 \wedge \exists x_0 \in \{0, \exists x_0, \forall x_0, \exists - x_0 \wedge \exists x_0\}$ entonces por (1), (2), (3) y (4) resulta que $s_1 \wedge \forall - x_0 \in S^*(x_0)$ y $s_2 \wedge \exists x_0 \in S^*(x_0)$, luego $t \in S^*(x_0)$. En forma análoga se prueba $SB(S^*(x_0), x_0) \subseteq SB(S^*(-x_0), -x_0)$.

4 Construcción de subálgebras monádicas

H. Bass en 1958 [1] (ver también [3]) demostró el siguiente resultado. La demostración que indicamos se debe a L. Monteiro, M. Abad, S. Savini y J. Sewald y fué publicada en [5, 7].

Lema 4.1 *Si $(B, \exists)$ es un álgebra de Boole monádica tal que la subálgebra booleana de las constantes $K = \exists B$ es finita, entonces para todo $x \in B$, $x \neq 0$ se tiene que*

$$\exists x = \bigvee \{k \in \mathcal{A}(K) : k \wedge x \neq 0\}$$

Dem. Como $x \neq 0$ entonces $\exists x \neq 0$, luego como K es finita y $\exists x \in K$ tenemos que $\exists x = \bigvee\{k \in \mathcal{A}(K) : k \leq \exists x\}$.
Sea $X_1 = \{k \in \mathcal{A}(K) : k \wedge x \neq 0\}$ y $X_2 = \{k \in \mathcal{A}(K) : k \leq \exists x\}$. Luego para probar el lema nos basta demostrar que $X_1 = X_2$.
Sea $k \in X_1$, luego (1) $k \in \mathcal{A}(K)$ y (2) $k \wedge x \neq 0$. De (1) resulta $\exists k = k$. Como $k, \exists x \in K$ entonces $b = k \wedge \exists x \in K$. Como $b \in K$, $b \leq k$ y k un átomo de K tenemos que (3) $b = k$ ó (4) $b = 0$. Si ocurre (3) entonces $k \wedge \exists x = k$ esto es $k \leq \exists x$ y por lo tanto $x \in X_2$. Si ocurriera (4) esto es $k \wedge \exists x = 0$ entonces $k \wedge x \leq k \wedge \exists x = b = 0$, lo que contradice (2). Por lo tanto $x \in X_2$
Sea $k \in X_2$ luego (5) $k \in \mathcal{A}(K) \subseteq K$ y (6) $k \leq \exists x$. De (5) resulta (7) $\exists k = k$. De (6) resulta $k = k \wedge \exists x$ y por lo tanto teniendo en cuenta (7) tenemos que:

$$0 \neq k = \exists k = \exists(k \wedge \exists x) = \exists k \wedge \exists x = \exists(\exists k \wedge x) = \exists(k \wedge x)$$

y por lo tanto $k \wedge x \neq 0$ esto es $k \in X_1$. ∎

Observación 4.1 *Si S es una subálgebra de B_n con partición asociada*

$$\mathcal{P}(S) = \{S_1, \ldots, S_h\},\ 1 \leq h \leq n,$$

para simplificar la notación, vamos a considerar que $S_1, \ldots, S_h$ son los átomos de S y los elementos de S son el conjunto $\emptyset$ y uniones de los S_i.
Sea S' una subálgebra de B_n con partición asociada $\mathcal{P}(S') = \{S'_1, \ldots, S'_r\}$, $1 \leq r \leq n$, entonces fijado j, $1 \leq j \leq r$ no puede ocurrir que $S_i \cap S'_j = \emptyset$ para todo i, $1 \leq i \leq h$, pues si así fuera, entonces $S_i \subseteq \complement S'_j = \bigcup\{S'_u : u \neq j\} \subset \mathcal{A}(B_n)$ para todo i, $1 \leq i \leq h$ y entonces $\mathcal{P}(S)$ no sería una partición de $\mathcal{A}(B_n)$.

Sea (B_n, K) un álgebra de Boole monádica, $\mathcal{P}(K) = \{C_1, \ldots, C_t\}$, $1 \leq t \leq n$, la partición asociada a la subálgebra booleana K.

Entonces, si $X \in B_n$, $X \neq \emptyset$ tenemos por el Lema 4.1 que: $\exists X = \bigcup\{C_j : C_j \cap X \neq \emptyset\}$.

Sea S es una subálgebra booleana de (B_n, K) con partición asociada $\mathcal{P}(S) = \{S_1, \ldots, S_h\}$. Para cada S_i, $1 \leq i \leq h$, sea

$$T_i = \{C_j : C_j \cap S_i \neq \emptyset\}.$$

Observaciones: Si los subconjuntos distintos T_i forman una partición de $\mathcal{P}(K)$ entonces

1) Si $S_k \cap C_r \neq \emptyset$, $1 \leq k \leq t$, $1 \leq r \leq h$ para algún $C_r \in T_i$, $1 \leq i \leq h$ entonces $S_k \cap C_j \neq \emptyset$ para todo $C_j \in T_i$. En efecto, si para algún $C_j \in T_i$, $S_k \cap C_j = \emptyset$ entonces $C_j \notin T_k$, esto es, $T_k \neq T_i$. Por otro lado $C_r \in T_i \cap T_k$, con $T_i \neq T_k$. Absurdo.

2) $\bigcup\limits_{C_j \in T_i} C_j = \bigcup\{S_k : S_k \cap C_j \neq \emptyset$ para todo $C_j \in T_i\}$.
Si $x \in \bigcup\limits_{C_j \in T_i} C_j \subseteq \mathcal{A}(B_n)$ luego $x \in C_r$ para algún $C_r \in T_i$, esto es $C_r \cap S_i \neq \emptyset$.

Por otro lado como $x \in \mathcal{A}(B_n) = \bigcup\limits_{i=1}^{h} S_i$ entonces $x \in S_k$, $1 \leq k \leq h$, entonces $x \in S_k \cap C_j$ y por lo tanto $S_k \cap C_j \neq \emptyset$ de donde $C_j \in T_k$. Luego $C_j \in T_k \cap T_i$. Como T_k y T_i son clases de una partición y $T_k \cap T_i \neq \emptyset$ entonces $T_k = T_i$. Pero esto quiere decir por 1) que $S_k \cap C_j \neq \emptyset$ para todo $C_j \in T_i$ dado que $T_i = T_k$, luego $x \in \bigcup\{S_k : S_k \cap C_j \neq \emptyset$ para todo $C_j \in T_i\}$.
Supongamos ahora que $x \in \bigcup\{S_k : S_k \cap C_j \neq \emptyset$ para todo $C_j \in T_i\}$.
Luego $x \in S_k$ para algún S_k tal que $S_k \cap C_j \neq \emptyset$ para todo $C_j \in T_i$ luego $C_j \in T_k$ y en consecuencia $C_j \in T_k \cap T_i$ luego $T_k \cap T_i \neq \emptyset$ y por lo tanto $T_k = T_i$. También como $x \in \mathcal{A}(B_n) = \bigcup\limits_{i=1}^{t} C_i$ entonces $x \in C_r$ para alguna clase C_r y por lo tanto $x \in C_r \cap S_k$, es decir $C_r \cap S_k \neq \emptyset$ luego $C_r \in T_k = T_i$, entonces $C_r \in T_i$ y por lo tanto $x \in \bigcup\limits_{C_j \in T_i} C_j$.

Lema 4.2 *S es una subálgebra monádica de (B_n, K) si y sólo si la familia de conjuntos distintos T_i, $1 \leq i \leq h$, es una partición de $\mathcal{P}(K)$.*

Dem. Supongamos que los T_i forman una partición de $\mathcal{P}(K)$. Veamos que $\exists S_i \in S$ para todo átomo S_i de S. Pero

$$\exists S_i = \bigcup_{C_j \in T_i} C_j = \bigcup \{S_k : S_k \cap C_j \neq \emptyset \text{ para todo } C_j \in T_i\},$$

luego $\exists S_i \in S$.

Recíprocamente, supongamos que S es una subálgebra monádica y probemos que los T_i forman una partición de $\mathcal{P}(K)$. Supongamos que $T_i \neq T_j$. Entonces $\exists S_i = \bigcup\limits_{C_k \in T_i} C_k$ y $\exists S_j = \bigcup\limits_{C_k \in T_j} C_k$. Como S es una subálgebra monádica y S_i, S_j son átomos distintos de S, entonces $\exists S_i$ y $\exists S_j$ son átomos de la subálgebra de las constantes de S y además son distintos porque $T_i \neq T_j$. Luego $\exists S_i \cap \exists S_j = \emptyset$. Luego $T_i \cap T_j = \emptyset$. ■

Es bien conocido que para un conjunto con n elementos el número de t-particiones, $1 \leq t \leq n$, es :

$$\mathbf{p}^{(t)}(n) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{t-1} (-1)^i \binom{t}{i} (t-i)^n}{t!}.$$

Lema 4.3 *Con la notación anterior, el número de subálgebras monádicas de (B_n, K) es*

$$\sum_{\mathcal{P}} \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{h=1}^{m_j} \mathbf{p}^{(h)}(n_{j1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{p}^{(h)}(n_{jl_j}) \cdot (h!)^{l_j - 1} \right),$$

donde $\mathcal{P} = \{\{C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1l_1}\}, \ldots, \{C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{kl_k}\}\}$ es una partición de $\mathcal{P}(K)$, $n_{ji} = N[C_{ji}]$, $m_j = min\{[C_{ji}] : i = 1, \ldots, l_j\}$.

Dem. Por el Lema 4.2, toda subálgebra monádica S de (B_n, K) está determinada unívocamente por una partición $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}(K)$:

$$\mathcal{P} = \{\{C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1l_1}\}, \ldots, \{C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{kl_k}\}\}$$

de modo que (C) $\bigcup\limits_{j \in T_i} C_j = \bigcup \{S_k : S_k \cap C_j \neq \emptyset \text{ para todo } C_j \in T_i\}$. Luego, basta averiguar que ocurre con las S_i en cada clase de $\mathcal{P}$ en forma independiente.

Consideremos la clase $C = \{C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{jl_j}\}$ de $\mathcal{P}$.
Si $\{S_\alpha : S_\alpha \bigcap C_{ji} \neq \emptyset \text{ para toda } C_{ji} \in C\} = \{S_{\alpha 1}, S_{\alpha 2}, \ldots, S_{\alpha h}\}$, entonces cada $C_{ji} \in C$ se intersecta con $S_{\alpha 1}$, $S_{\alpha 2}, \ldots, S_{\alpha h}$ (y con ninguna otra S_α), es decir que cada $C_{ji} \in C$ se parte en h clases, donde $1 \leq h \leq m_j = min\{N[C_{ji}] : i = 1, \ldots, l_j\}$. Esto puede hacerse de

$$\sum_{h=1}^{m_j} \mathbf{p}^{(h)}(n_{j1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{p}^{(h)}(n_{jlj}) \cdot (h!)^{l_j - 1}$$

maneras distintas.

maneras distintas.

Luego el número total de subálgebras monádicas asociadas a una partición $\mathcal{P}$ es

$$\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{h=1}^{m_j}\mathbf{p}^{(h)}(n_{j1})\cdot\ldots\cdot\mathbf{p}^{(h)}(n_{jl_j})\cdot(h!)^{l_j-1}\right).$$

Finalmente, el número de subálgebras monádicas de (B_n, K) es

$$\sum_{\mathcal{P}}\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{h=1}^{m_j}\mathbf{p}^{(h)}(n_{j1})\cdot\ldots\cdot\mathbf{p}^{(h)}(n_{jl_j})\cdot(h!)^{l_j-1}\right),$$

donde $\mathcal{P}$ recorre el conjunto de particiones de $\mathcal{P}(K)$ que verifican (C). ■

Veamos algunos casos particulares.

Consideremos el álgebra de Boole monádica (B_n, K), donde la partición asociada a K es $\mathcal{P}(K) = \{C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1}\}$ y tal que $C_i = \{a_i\}$ para $1 \le i \le k < n$, $C_{k+1} = \{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$. Sea S una subálgebra booleana de (B_n, K) y $\mathcal{P}(S) = \{S_1, S_2, \ldots, S_t\}$ la partición de $\mathcal{A}(B_n)$ asociada a S.
Por lo indicado en la Observación 4.1 debe existir al menos un índice i, $1 \le i \le t$, tal que $S_i \cap C_{k+1} \ne \emptyset$. Sea $I = \{i : 1 \le i \le t, S_i \cap C_{k+1} \ne \emptyset\}$.
Primer caso: $N[I] = 1$. Sea $I = \{i\}$ entonces $C_{k+1} \subseteq S_i$ pues caso contrario existiría $a_s \in C_{k+1}$ tal que $a_s \notin S_i$, luego como $\mathcal{P}(S)$ es una partición de $\mathcal{A}(B_n)$ resulta que $a_s \in S_j$ con $i \ne j$ y entonces $S_j \cap C_{k+1} \ne \emptyset$, contradicción.
El número de subálgebras booleanas de (B_n, K) en estas condiciones es igual al número de particiones del conjunto $\{C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1}\}$, esto es $\mathbf{p}(k+1)$ y claramente todas estas subálgebras son monádicas pues $\exists S_j = S_j$ para todo j, $1 \le j \le t$.

Segundo caso: $N[I] > 1$. Probemos que si S es monádica entonces $S_i \subseteq C_{k+1}$, para todo $i \in I$. Supongamos que existe $i_0 \in I$ tal que $S_{i_0} \not\subseteq C_{k+1}$ luego existe $a_h \in \mathcal{A}(B_n)$ tal que (1) $a_h \in S_{i_0}$ y (2) $a_h \notin C_{k+1}$. De (2) y (1) resulta que (3) $C_h = \{a_h\} \in T_{i_0}$, pues $C_h \cap S_{i_0} \ne \emptyset$.
Como $N[I] > 1$ existe $j \in I$, $j \ne i_0$. Por hipótesis $C_{k+1} \in T_{i_0} \cap T_j$ y como S es monádica $T_{i_0} = T_j$, luego de (3) resulta $C_h \in T_j$, es decir $C_h \cap S_j \ne \emptyset$, por lo tanto (4) $a_h \in S_j$. Las condiciones (1) y (4) contradicen que $\mathcal{P}(S)$ es una partición de $\mathcal{A}(B_n)$.
Observemos que $\{S_i\}_{i\in I}$ es una partición de C_{k+1}. En efecto, por lo demostrado precedentemente $\bigcup_{i\in I} S_i \subseteq C_{k+1}$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ para $i \ne j$ y $S_i \ne \emptyset$ para todo $i \in I$, pues $\mathcal{P}(S)$ es una partición de $\mathcal{A}(B_n)$. Por otro lado si $a \in C_{k+1}$ entonces $a \in S_h$ para algún h, $1 \le h \le t$ luego $S_h \cap C_{k+1} \ne \emptyset$ y por lo tanto $h \in I$, luego $C_{k+1} \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i$.
Observemos aún que (5) $S_i \ne C_{k+1}$ para todo $i \in I$, pues si para algún $i \in I$ se verificara que $S_i = C_{k+1}$ entonces $N[I] = 1$.
En este caso S es monádica si y solo si $\mathcal{P}(S)$ se obtiene a partir de particiones de los conjuntos $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ y $\{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ consideradas en forma independiente. Luego

teniendo en cuenta (5) existen $\mathbf{p}(k)\cdot(\mathbf{p}(n-k)-1)$ subálgebras monádicas.

Luego si $1 \leq k < n$:

$$N[\mathcal{SM}(B_n,\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k}+(n-k))] = \mathbf{p}(k+1)+\mathbf{p}(k).(\mathbf{p}(n-k)-1).$$

Por los resultados indicados en el párrafo 2, sabemos que

$$N[\mathcal{SM}_1(B_n,\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k}+(n-k))] = \mathbf{p}(k+1)-1,$$

y

$$N[\mathcal{SM}_2(B_n,\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k}+(n-k))] = \mathbf{p}(n-k),$$

luego

$$N[\mathcal{SM}_3(B_n,\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k}+(n-k))] =$$

$\mathbf{p}(k+1)+\mathbf{p}(k).(\mathbf{p}(n-k)-1)-[\mathbf{p}(k+1)-1+\mathbf{p}(n-k)] = (\mathbf{p}(k)-1)\cdot(\mathbf{p}(n-k)-1).$

Recordemos que por definición $\mathbf{p}(0)=1$. Si $n \geq 3$ tenemos dos casos particulares:

- si $k=1$ entonces $N[\mathcal{SM}(B_n,1+(n-1))] = 1+\mathbf{p}(n-1)$.
  En este caso: $N[\mathcal{SM}_3(B_n,1+(n-1))] = (\mathbf{p}(1)-1)\cdot(\mathbf{p}(n-1)-1)=0$.
- si $k=n-2$ entonces $N[\mathcal{SM}(B_n,\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2}+2)] = \mathbf{p}(n-1)+\mathbf{p}(n-2)$.

  En este caso:

$$N[\mathcal{SM}_3(B_n,\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2}+2)] = (\mathbf{p}(n-2)-1)\cdot(\mathbf{p}(n-(n-2))-1) = \mathbf{p}(n-2)-1. \quad (4.1)$$

Lema 4.4 *En los siguientes casos tenemos una fórmula para el número de subálgebras:*

(1) $N[\mathcal{SM}(B_n,n)] = \mathbf{p}(n)$,

(2) $N[\mathcal{SM}(B_n,\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})] = \mathbf{p}(n)$,

(3) *Si* $n \geq 2$ *y* $1 \leq k < n$ *entonces:*
$N[\mathcal{SM}(B_n,\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k}+(n-k))] = \mathbf{p}(k+1)+\mathbf{p}(k).(\mathbf{p}(n-k)-1)$,

(3a) $N[\mathcal{SM}(B_n,1+(n-1))] = 1+\mathbf{p}(n-1)$.

(3b) *Si* $n \geq 3$, $N[\mathcal{SM}(B_n,\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2}+2)] = \mathbf{p}(n-1)+\mathbf{p}(n-2)$,

Sea K una subálgebra booleana de B_n, $n > 3$, tal que K es isomorfa a B_2 y $\mathcal{P}(K) = \{C_1, C_2\}$ la partición de los átomos de B_n asociada a K. Veamos si existen subálgebras monádicas de B_n incomparables con K.
Ya sabemos que si $N[C_1] = 1$ y $N[C_2] = n-1$ no existen subálgebras monádicas incomparables con K. Supongamos entonces que $N[C_1] = j > 1$, $N[C_2] = n-j > 1$. Sean X_1 y X_2 subconjuntos tales que $\emptyset \neq X_1 \subset C_1$, $N[X_1] = t$, $1 \leq t < j$ y $\emptyset \neq X_2 \subset C_2$, $N[X_2] = u$, $1 \leq u < n-j$. Sean $Y_1 = C_1 \setminus X_1$, $Y_2 = C_2 \setminus X_2$, $S_1 = X_1 \cup X_2$ y $S_2 = Y_1 \cup Y_2$ entonces $T_1 = \{C_1, C_2\}$ y $T_2 = \{C_1, C_2\}$, luego S es monádica, y claramente incomparable con K.
¿Cuántas de estas subálgebras se pueden construir? Es claro que: $\dfrac{(2^j-2)\cdot(2^{n-j}-2)}{2}$.
Vamos a probar que si $S \in \mathcal{SM}_3(B_n, K)$ y S es isomorfa a B_2 entonces la partición $\mathcal{P}(S) = \{S_1, S_2\}$ es de la forma indicada.
Supongamos que alguno de los conjuntos S_i tiene un único elemento, por ejemplo $N[S_1] = 1$ entonces $S_1 = \{a\}$ con $a \in \mathcal{A}(B_n)$ y $a \in C_1$ ó $a \in C_2$, luego $T_1 = \{C_1\}$ y $T_2 = \{C_1, C_2\}$ ó $T_1 = \{C_2\}$ y $T_2 = \{C_1, C_2\}$ lo que contradice que S es monádica. Luego $N[S_1] > 1$ y $N[S_2] > 1$.
Observemos que (I) $S_1 \neq C_i$ para $i = 1, 2$. En efecto, si $S_1 = C_2$ entonces $S_2 = \complement S_1 = \complement C_2 = C_1$ luego $\mathcal{P}(K) = \mathcal{P}(S)$ y en consecuencia $K = S$, absurdo. Análogamente, si $S_1 = C_1$ se prueba que $K = S$.

Vamos a probar que $\emptyset \neq S_1 \cap C_i \subset C_i$ para $i = 1, 2$. Supongamos que (1) $\emptyset = S_1 \cap C_1$, luego como S_1 y C_1 son subconjuntos de $\mathcal{A}(B_n)$ de (1) resulta que $S_1 \subseteq \complement C_1 = C_2$ y por lo tanto $C_1 = \complement C_2 \subseteq \complement S_1 = S_2$. Luego teniendo en cuenta (I) tenemos que (2) $S_1 \subset C_2$ y (3) $C_1 \subset S_2$. De (2) resulta que (4) $\emptyset \neq S_1 = S_1 \cap C_2$ y de (3) que (5) $\emptyset \neq C_1 = S_2 \cap C_1$. De (2) resulta que existe $a \in \mathcal{A}(B_n)$ tal que (6) $a \in C_2$ y (7) $a \notin S_1$. De (7) resulta (8) $a \in S_2$, luego de (6) y (8) tenemos que (9) $C_2 \cap S_2 \neq \emptyset$.
De (1) y (4) resulta que $T_1 = \{C_2\}$ y de (5) y (9) resulta que $T_2 = \{C_1, C_2\}$, luego $\{T_1, T_2\}$ no es una partición de $\mathcal{P}(K)$, lo que contradice que S es monádica. Luego $\emptyset \neq S_1 \cap C_1$.
Probemos ahora que $S_1 \cap C_1 \subset C_1$. Si (10) $S_1 \cap C_1 = C_1$ esto es $C_1 \subseteq S_1$, entonces por (I) tenemos que (11) $C_1 \subset S_1$, y en consecuencia existe $a \in \mathcal{A}(B_n)$ tal que (12) $a \in S_1$ y (13) $a \notin C_1$. De (13) resulta (14) $a \in C_2$, luego de (12) y (14) tenemos que (15) $C_2 \cap S_1 \neq \emptyset$. Luego de (10) y (15) resulta que $T_1 = \{C_1, C_2\}$. De (11) resulta (16) $\emptyset = C_1 \cap \complement S_1 = C_1 \cap S_2$. De (11) resulta (17) $S_2 = \complement S_1 \subset \complement C_1 = C_2$, luego de (16) y (17) $T_2 = \{C_2\}$, luego $\{T_1, T_2\}$ no es una partición de $\mathcal{P}(K)$, lo que contradice que S es monádica.
En forma análoga se prueba que $\emptyset \neq S_1 \cap C_2 \subset C_2$, luego como $C_1 \cup C_2 = \mathcal{A}(B_n)$ tenemos que

$$(S_1 \cap C_1) \cup (S_1 \cap C_2) = S_1 \cap (C_1 \cup C_2) = S_1,$$

con $\emptyset \neq S_1 \cap C_1 \subset C_1$ y $\emptyset \neq S_1 \cap C_2 \subset C_2$.
En forma análoga se prueba que

$$(S_2 \cap C_1) \cup (S_2 \cap C_2) = S_2,$$

con $\emptyset \neq S_2 \cap C_1 \subset C_1$ y $\emptyset \neq S_2 \cap C_2 \subset C_2$, lo que prueba que $\mathcal{P}(S)$ es de la forma indicada.

Sea $n \geq 4$ y K isomorfa a B_{n-1}. Supongamos que $\mathcal{P}(K) = \{C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\}$ es tal que $C_i = \{a_i\}$ para $1 \leq i \leq n-2$ y $C_{n-1} = \{a_{n-1}, a_n\}$. En B_n existen $\binom{n}{2}$ subálgebras booleanas isomorfas a B_{n-1}. Cada una de ellas proviene de alguna de las $(n-1)$-particiones del conjunto de los átomos de B_n, donde $n-2$ clases tienen un elemento cada una y una sola tiene dos elementos.
Sea S una subálgebra booleana de (B_n, K) con $n-1$ átomos y supongamos que

$$\mathcal{P}(S) = \{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$$

donde $N[S_{n-1}] = 2$ y $N[S_i] = 1$ para $1 \leq i \leq n-2$ y que $S_{n-1} \neq C_{n-1}$.
Si $S_{n-1} \cap C_{n-1} \neq \emptyset$ entonces (1) $a_{n-1} \in S_{n-1}$ ó (2) $a_n \in S_{n-1}$. Como $S_{n-1} \neq C_{n-1}$ si ocurre (1) entonces $S_{n-1} = \{a_j, a_{n-1}\}$, con $j \neq n$ y $S_i = \{a_n\}$ para algún i, $1 \leq i \leq n-2$. Luego $T_{n-1} = \{C_j, C_{n-1}\}$ y $T_i = \{C_{n-1}\}$, entonces por el Lema 4.2 S no es monádica. Se obtiene la misma conclusión en el caso que ocurra (2).
Por lo tanto si S es monádica entonces $S_{n-1} \cap C_{n-1} = \emptyset$.
Supongamos ahora que la subálgebra booleana S verifica (3) $S_{n-1} \cap C_{n-1} = \emptyset$ y probemos que S es monádica. De (3) resulta que $S_{n-1} \subseteq \complement C_{n-1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$.
Luego $S_{n-1} = \{a_i, a_j\}$ con $1 \leq i, j \leq n-2$ e $i \neq j$ y por lo tanto $\exists S_{n-1} = C_i \cup C_j = S_{n-1} \in S$. Además $N[S_h] = 1$ para todo h, $1 \leq h \leq n-2$. Si $S_h = \{a_{n-1}\}$ ó $S_h = \{a_n\}$ tenemos que $\exists S_h = C_{n-1} \in S$, caso contrario $S_h = \{a_r\}$ con $r \neq i, j, n-1, n$ y entonces $\exists S_h = S_h \in S$.

Entonces si $n \geq 4$ y K es isomorfa a B_{n-1} existen exactamente $\binom{n-2}{2}$ subálgebras monádicas isomorfas a K e incomparables con K.

Las particiones del conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ de los átomos de B_5 son:

Partición del tipo 5 **Subálgebra isomorfa a** B_1	
$\mathcal{P}_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$	
Particiones del tipo $1+4$ ó $2+3$ **Subálgebras isomorfas a** B_2	
$\mathcal{P}_2 = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3, a_4, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_3 = \{\{a_2\}, \{a_1, a_3, a_4, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_4 = \{\{a_3\}, \{a_1, a_2, a_4, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_5 = \{\{a_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_6 = \{\{a_5\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}\}$	
$\mathcal{P}_7 = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_8 = \{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_4, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_9 = \{\{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{10} = \{\{a_1, a_5\}, \{a_2, a_3, a_4\}\}$
$\mathcal{P}_{11} = \{\{a_2, a_3\}, \{a_1, a_4, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{12} = \{\{a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{13} = \{\{a_2, a_5\}, \{a_1, a_3, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{14} = \{\{a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{15} = \{\{a_3, a_5\}, \{a_1, a_2, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{16} = \{\{a_4, a_5\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$
Particiones del tipo $1+1+3$ ó $1+2+2$ **Subálgebras isomorfas a** B_3	
$\mathcal{P}_{17} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{18} = \{\{a_1\}, \{a_3\}, \{a_2, a_4, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{19} = \{\{a_1\}, \{a_4\}, \{a_2, a_3, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{20} = \{\{a_1\}, \{a_5\}, \{a_2, a_3, a_4\}\}$
$\mathcal{P}_{21} = \{\{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_4, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{22} = \{\{a_2\}, \{a_4\}, \{a_1, a_3, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{23} = \{\{a_2\}, \{a_5\}, \{a_1, a_3, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{24} = \{\{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1, a_2, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{25} = \{\{a_3\}, \{a_5\}, \{a_1, a_2, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{26} = \{\{a_4\}, \{a_5\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$
$\mathcal{P}_{27} = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}, \{a_4, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{28} = \{\{a_1\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{29} = \{\{a_1\}, \{a_2, a_5\}, \{a_3, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{30} = \{\{a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_4, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{31} = \{\{a_2\}, \{a_1, a_4\}, \{a_3, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{32} = \{\{a_2\}, \{a_1, a_5\}, \{a_3, a_4\}\}$
$\mathcal{P}_{33} = \{\{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_4, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{34} = \{\{a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{35} = \{\{a_3\}, \{a_1, a_5\}, \{a_3, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{36} = \{\{a_4\}, \{a_1, a_2\}, \{a_3, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{37} = \{\{a_4\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{38} = \{\{a_4\}, \{a_1, a_5\}, \{a_2, a_3\}\}$
$\mathcal{P}_{39} = \{\{a_5\}, \{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{40} = \{\{a_5\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_4\}\}$
$\mathcal{P}_{41} = \{\{a_5\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}\}$	
Particiones del tipo $1+1+1+2$ **Subálgebras isomorfas a** B_4	
$\mathcal{P}_{42} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{43} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_4\}, \{a_3, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{44} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_5\}, \{a_3, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{45} = \{\{a_1\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_2, a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{46} = \{\{a_1\}, \{a_3\}, \{a_5\}, \{a_2, a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{47} = \{\{a_1\}, \{a_4\}, \{a_5\}, \{a_2, a_3\}\}$
$\mathcal{P}_{48} = \{\{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1, a_5\}\}$	$\mathcal{P}_{49} = \{\{a_2\}, \{a_3\}, \{a_5\}, \{a_1, a_4\}\}$
$\mathcal{P}_{50} = \{\{a_2\}, \{a_4\}, \{a_5\}, \{a_1, a_3\}\}$	$\mathcal{P}_{51} = \{\{a_3\}, \{a_4\}, \{a_5\}, \{a_1, a_2\}\}$
Partición del tipo $1+1+1+1+1$ **El álgebra** B_5	
$\mathcal{P}_{52} = B_5 = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_5\}\}$	

Consideremos la subálgebra de Boole $K = S_7$. El diagrama de Hasse del reticulado de subálgebras monádicas de (B_5, K) se indica a continuación:

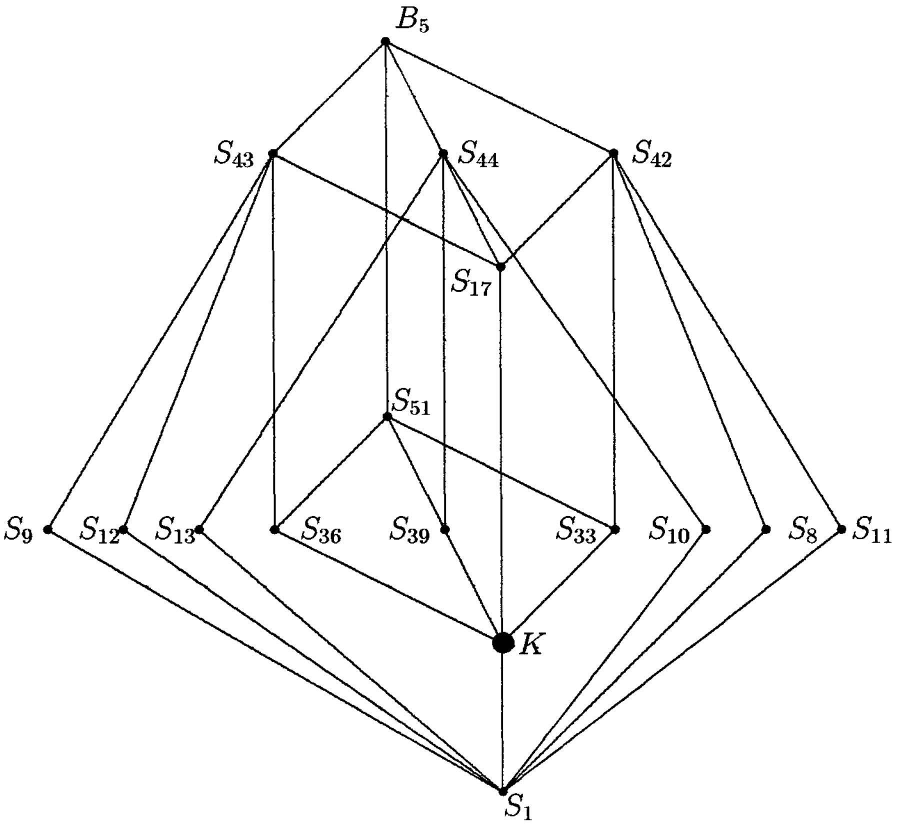

Figura 9

Número de subálgebras monádicas S tales que $S \subset K$: $\mathbf{p}(2) - 1 = 1$.

Número de subálgebras monádicas S tales que $K \subseteq S$: $\mathbf{p}(2).\mathbf{p}(3) = 10$.

Número de subálgebras monádicas S incomparables con K: $\dfrac{(2^2-2)(2^3-2)}{2} = 6$.

Observemos que $K \cong B_2$, $S_{17}, S_{33}, S_{36}, S_{39} \cong B_3$ y que estos son los únicos elementos de $\mathcal{SM}(B_5, K)$ que cubren a K, y que los conjuntos ordenados $(S_{17}]$, $(S_{33}]$, $(S_{36}]$, $(S_{39}]$ son isomorfos al conjunto ordenado indicado en la Figura 2.
Además S_{42}, S_{43}, S_{44} y S_{51} son los átomos duales de $\mathcal{SM}(B_5, K)$, los conjuntos ordenados $(S_{42}]$, $(S_{43}]$ y $(S_{44}]$ son isomorfos al conjunto ordenado indicado en la Figura 6, y en cada uno de estos conjuntos existen 2 subálgebras incomparables con K y $(S_{51}]$ es isomorfo al conjunto ordenado indicado en la Figura 5.

Consideremos la subálgebra de Boole $K = S_{27}$. A continuación se indica el diagrama de Hasse del reticulado de subálgebras monádicas de (B_5, K).

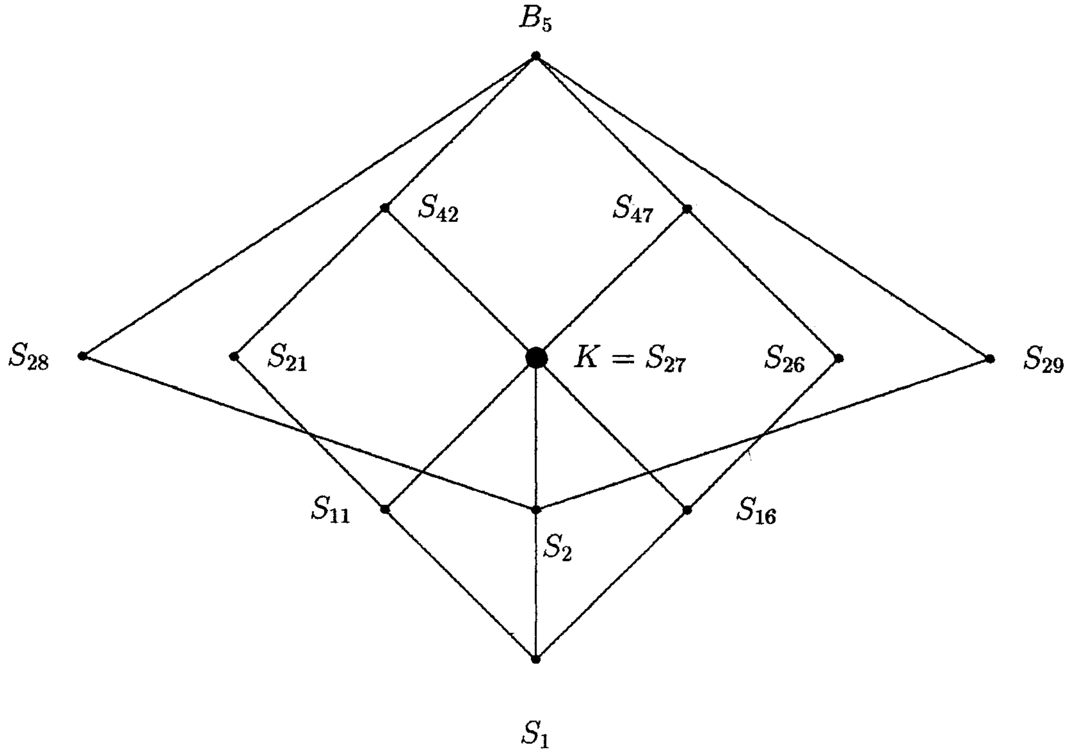

Figura 10

Número de subálgebras monádicas S tales que $S \subset K$: $\mathbf{p}(3) - 1 = 4$.

Número de subálgebras monádicas S tales que $K \subseteq S$: $\mathbf{p}(1).\mathbf{p}(2).\mathbf{p}(2) = 4$.

Número de subálgebras monádicas S incomparables con K: 4.

Observemos que $K \cong B_3$, $S_{42}, S_{47} \cong B_4$, que estos son los únicos elementos de $\mathcal{SM}(B_5, K)$ que cubren a K, y que los conjuntos ordenados $(S_{42}]$ y $(S_{47}]$ son isomorfos al conjunto ordenado indicado en la Figura 7 y en cada uno de ellos existe una única subálgebra monádica de (B_5, K) incomparable con K. Pero existen 2 más, a saber S_{28} y S_{29}, que son incomparables. Además $(S_{28}]$ y $(S_{29}]$ son isomorfos al conjunto ordenado indicado en la Figura 2.

Consideremos el álgebra de Boole B_5 y $K = S_{17}$. A continuación se indica el diagrama de Hasse del reticulado de subálgebras monádicas de (B_5, K).

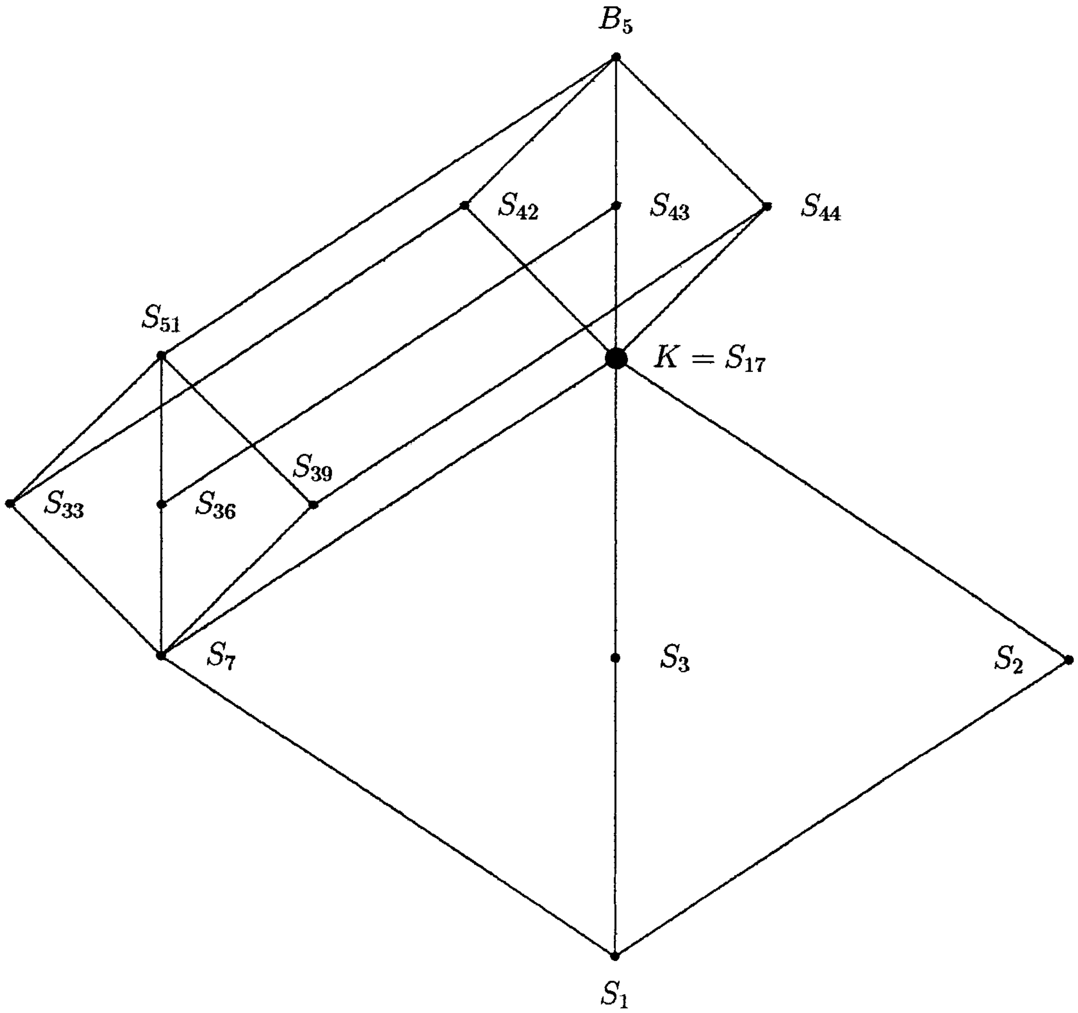

Figura 11

Número de subálgebras monádicas S tales que $S \subset K$: $\mathbf{p}(3) - 1 = 4$.

Número de subálgebras monádicas S tales que $K \subseteq S$: $\mathbf{p}(1).\mathbf{p}(1).\mathbf{p}(3) = 5$.

Número de subálgebras monádicas S incomparables con K: $(\mathbf{p}(2) - 1).(\mathbf{p}(3) - 1) = 4$.

En este caso $K \cong B_3$. Además $S_{42}, S_{43}, S_{44} \cong B_4$, y estos son todos los elementos de $\mathcal{SM}(B_5, K)$ que cubren a K. Los conjuntos ordenados $(S_{42}]$, $(S_{43}]$ y $(S_{44}]$ son isomorfos al conjunto ordenado indicado en la Figura 7. En cada uno de estos segmentos existe una única subálgebra monádica de (B_5, K) incomparable con K, pero existe una más, la S_{51} que es incomparable con K. Los átomos duales de $\mathcal{SM}(B_5, K)$ son S_{42}, S_{43}, S_{44} y S_{51}. Además $(S_{51}]$ es isomorfo al conjunto ordenado indicado en la Figura 5.

Vamos a determinar una cota inferior para el número de subálgebras monádicas de (B_n, K) incomparables con K.
De la observación de los dos diagramas de Hasse precedentes surgió el siguiente resultado.
Supongamos que $n \geq 3$, $\{0,1\} \subset K \subset B_n$ y $\mathcal{P}(K) = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$, donde $1 < t < n$. Luego debe existir i, $1 \leq i \leq t$ tal que $N[C_i] \geq 2$.
Las subálgebras monádicas S de B_n que cubren a K tienen particiones asociadas de la forma $\mathcal{P}(S) = \{C_1, C_2, \dots, C_i', C_i'', \dots, C_t\}$ para cada i, $1 \leq i \leq t$, tal que $N[C_i] \geq 2$, donde $C_i' \cup C_i'' = C_i$.
En particular, cada subálgebra monádica S que cubre a K es isomorfa a:

$$(B_{t+1}, \underbrace{1+1+\cdots+1}_{i-1} + 2 + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{t-i}).$$

Es bien conocido que el número de biparticiones de un conjunto con n elementos es $\mathbf{p}^{(2)}(n) = 2^{n-1} - 1$.
Entonces, el número de subálgebras monádicas de (B_n, K) que cubren a K es

$$\sum_{N[C_i] \geq 2} \mathbf{p}^{(2)}(N[C_i]).$$

Si S es una subálgebra monádica de (B_n, K) que cubre a K, y por lo tanto tiene $t+1$ átomos, entonces es claro que el conjunto $(S]$ es isomorfo al reticulado de subálgebras monádicas del álgebra de Boole monádica (B_{t+1}, K'), donde K' es una subálgebra de B_{t+1} con t átomos, y por lo tanto de acuerdo con nuestra notación

$$(B_{t+1}, K') = (B_{t+1}, \underbrace{1+1+\cdots+1}_{t-1} + 2).$$

El número de subálgebras incomparables con K' en

$$(B_{t+1}, \underbrace{1+1+\cdots+1}_{t-1} + 2)$$

es, por lo visto en (4.1): $\mathbf{p}(t-1) - 1$.
Observemos que si $t = 2$ entonces $\mathbf{p}(t-1) - 1 = 0$.

Además, si S y S' son subálgebras monádicas distintas que cubren a K, entonces $(S] \cap (S'] = (K]$ y por lo tanto $(S] \cap (S']$ no contiene subálgebras monádicas incomparables con K.

Si $n \geq 3$, el número de subálgebras de (B_n, K) incomparables con K donde K tiene t átomos, $2 \leq t \leq n-1$, está acotado inferiormente por

$$\left(\sum_{N[C_i] \geq 2} \mathbf{p}^{(2)}(N[C_i])\right) \cdot (\mathbf{p}(t-1) - 1) = \left(\sum_{N[C_i] \geq 2} (2^{N[C_i]-1} - 1)\right) \cdot (\mathbf{p}(t-1) - 1).$$

Observemos que si $t = 2$ entonces la cota inferior es 0.

Consideremos el álgebra de Boole B_6 y K la subálgebra determinada por la partición $\{\{a_1\},\{a_2,a_3\},\{a_4,a_5,a_6\}\}$. Entonces las particiones asociadas a las subálgebras monádicas son:

Partición del tipo 6 **Subálgebra isomorfa a** B_1	
$S_1 = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$	
Particiones del tipo $3+3$, $1+5$ **ó** $2+4$ **Subálgebras isomorfas a** B_2	
$S_2 = \{\{a_1,a_2,a_3\},\{a_4,a_5,a_6\}\}$	$S_3 = \{\{a_1\},\{a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}\}$
$S_4 = \{\{a_2,a_3\},\{a_1,a_4,a_5,a_6\}\}$	
Particiones del tipo $1+2+3$ **ó** $1+1+4$ **Subálgebras isomorfas a** B_3	
$S_5 = \{\{a_1,a_2,a_3\},\{a_4\},\{a_5,a_6\}\}$	$S_6 = \{\{a_1,a_2,a_3\},\{a_5\},\{a_4,a_6\}\}$
$S_7 = \{\{a_1,a_2,a_3\},\{a_6\},\{a_4,a_5\}\}$	$S_8 = \{\{a_2\},\{a_3\},\{a_1,a_4,a_5,a_6\}\}$
$K = S_9 = \{\{a_1\},\{a_2,a_3\},\{a_4,a_5,a_6\}\}$	$S_{10} = \{\{a_1\},\{a_3,a_6\},\{a_2,a_4,a_5\}\}$
$S_{11} = \{\{a_1\},\{a_3,a_5\},\{a_2,a_4,a_6\}\}$	$S_{12} = \{\{a_1\},\{a_2,a_6\},\{a_3,a_4,a_5\}\}$
$S_{13} = \{\{a_1\},\{a_3,a_4\},\{a_2,a_5,a_6\}\}$	$S_{14} = \{\{a_1\},\{a_2,a_4\},\{a_3,a_5,a_6\}\}$
$S_{15} = \{\{a_1\},\{a_2,a_5\},\{a_3,a_4,a_6\}\}$	
Particiones del tipo $1+1+1+3$ **ó** $1+1+2+2$ **Subálgebras isomorfas a** B_4	
$S_{16} = \{\{a_1,a_2,a_3\},\{a_4\},\{a_5\},\{a_6\}\}$	$S_{17} = \{\{a_1\},\{a_2,a_3\},\{a_4\},\{a_5,a_6\}\}$
$S_{18} = \{\{a_1\},\{a_2,a_3\},\{a_5\},\{a_4,a_6\}\}$	$S_{19} = \{\{a_1\},\{a_2,a_3\},\{a_6\},\{a_4,a_5\}\}$
$S_{20} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_4,a_5,a_6\}\}$	
Particiones del tipo $1+1+1+1+2$ **Subálgebras isomorfas a** B_5	
$S_{21} = \{\{a_1\},\{a_2,a_3\},\{a_4\},\{a_5\},\{a_6\}\}$	$S_{22} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_4\},\{a_5,a_6\}\}$
$S_{23} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_5\},\{a_4,a_6\}\}$	$S_{24} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_6\},\{a_4,a_5\}\}$
Partición del tipo $1+1+1+1+1+1$ **El álgebra** B_6	
$S_{25} = B_6$	

A continuación se indica el diagrama de Hasse de todas las subálgebras monádicas de (B_6,K).

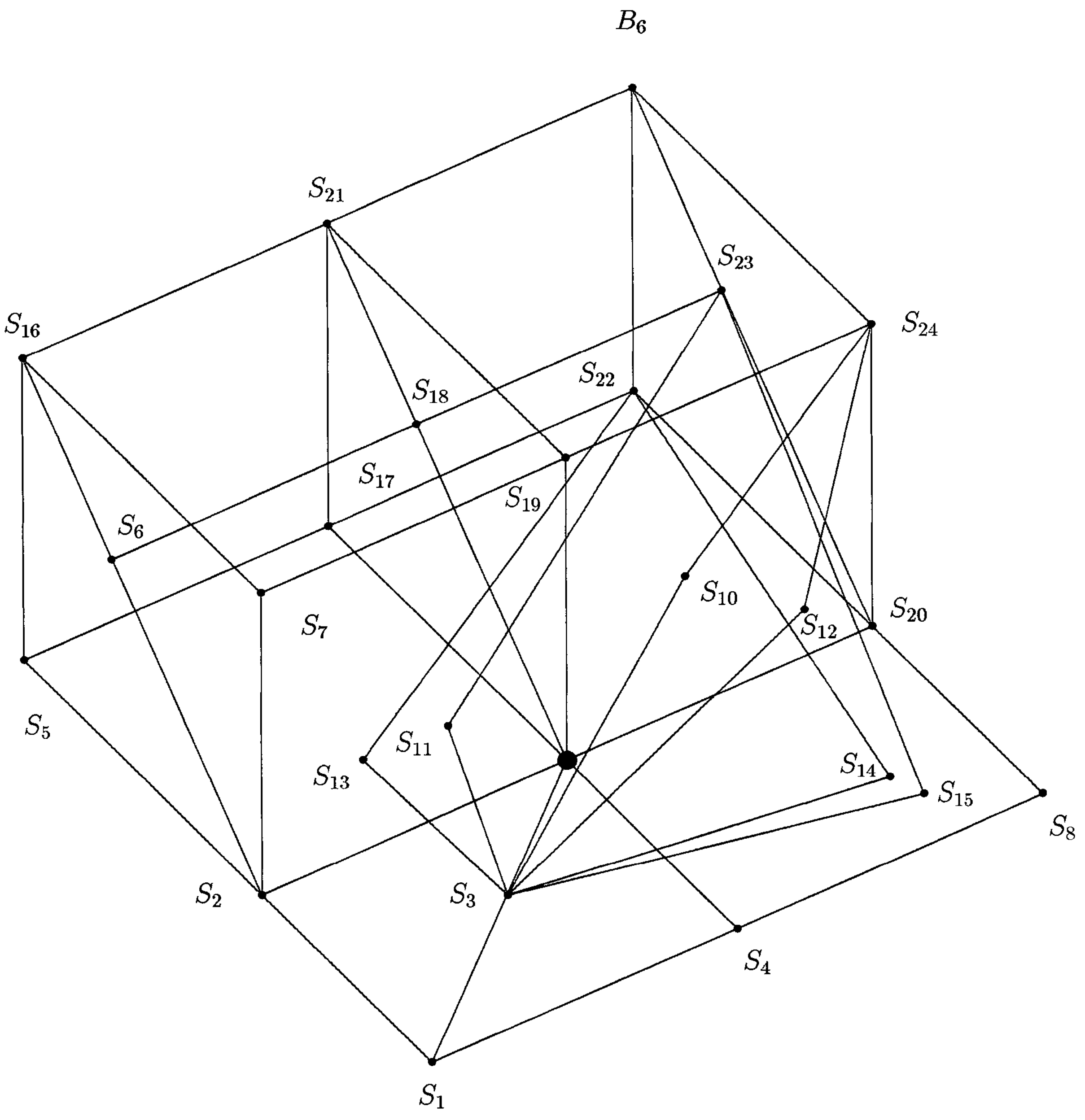

Figura 12

Número de subálgebras monádicas S tales que $S \subset K$: 4.

Número de subálgebras monádicas S tales que $K \subseteq S$: 10.

Número de subálgebras monádicas S incomparables con K: 11.

S_{17}, S_{18}, S_{19} y S_{20} son los elementos de $\mathcal{SM}(B_6, S_9)$ que cubren a $K = S_9$. $(S_{17}], (S_{18}], (S_{19}]$ y $(S_{20}]$ son conjuntos ordenados isomorfos al conjunto ordenado indicado en la Figura 7.

Los átomos duales de $\mathcal{SM}(B_6, S_9)$ son S_{21}, S_{22}, S_{23} y S_{24} y $(S_{21}]$ es isomorfo al conjunto ordenado indicado en la Figura 11 y $(S_{22}], (S_{23}]$ y $(S_{24}]$ son isomorfos al conjunto ordenado indicado en la Figura 10.

Consideremos el álgebra de Boole B_6 y K la subálgebra determinada por la partición $\{\{a_1,a_2\},\{a_3,a_4\},\{a_5,a_6\}\}$. Entonces las particiones asociadas a las subálgebras monádicas son:

Partición del tipo 6 **Subálgebra Isomorfa a B_1**	
$\mathcal{P}_1 = \{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$	
Particiones del tipo $3+3$ ó $2+4$ **Subálgebras isomorfas a B_2**	
$\mathcal{P}_2 = \{\{a_1,a_3,a_5\},\{a_2,a_4,a_6\}\}$	$\mathcal{P}_3 = \{\{a_1,a_4,a_5\},\{a_2,a_3,a_6\}\}$
$\mathcal{P}_4 = \{\{a_1,a_3,a_6\},\{a_2,a_4,a_5\}\}$	$\mathcal{P}_5 = \{\{a_1,a_4,a_6\},\{a_2,a_3,a_5\}\}$
$\mathcal{P}_6 = \{\{a_1,a_2\},\{a_3,a_4,a_5,a_6\}\}$	$\mathcal{P}_7 = \{\{a_3,a_4\},\{a_1,a_2,a_5,a_6\}\}$
$\mathcal{P}_8 = \{\{a_5,a_6\},\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\}$	
Particiones del tipo $2+2+2$ ó $1+1+4$ **Subálgebras isomorfas a B_3**	
$\mathcal{P}_9 = \{\{a_1,a_2\},\{a_3,a_5\},\{a_4,a_6\}\}$	$\mathcal{P}_{10} = \{\{a_1,a_2\},\{a_3,a_6\},\{a_4,a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{11} = \{\{a_3,a_4\},\{a_1,a_5\},\{a_2,a_6\}\}$	$\mathcal{P}_{12} = \{\{a_3,a_4\},\{a_1,a_6\},\{a_2,a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{13} = \{\{a_5,a_6\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{14} = \{\{a_5,a_6\},\{a_1,a_4\},\{a_2,a_3\}\}$
$\mathcal{P}_{15} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3,a_4,a_5,a_6\}\}$	$\mathcal{P}_{16} = \{\{a_3\},\{a_4\},\{a_1,a_2,a_5,a_6\}\}$
$\mathcal{P}_{17} = \{\{a_5\},\{a_6\},\{a_1,a_2,a_3,a_4\}\}$	$K = \mathcal{P}_{18} = \{\{a_1,a_2\},\{a_3,a_4\},\{a_5,a_6\}\}$
Particiones del tipo $1+1+2+2$ **Subálgebras isomorfas a B_4**	
$\mathcal{P}_{19} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3,a_5\},\{a_4,a_6\}\}$	$\mathcal{P}_{20} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3,a_6\},\{a_4,a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{21} = \{\{a_3\},\{a_4\},\{a_1,a_5\},\{a_2,a_6\}\}$	$\mathcal{P}_{22} = \{\{a_3\},\{a_4\},\{a_1,a_6\},\{a_2,a_5\}\}$
$\mathcal{P}_{23} = \{\{a_5\},\{a_6\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_4\}\}$	$\mathcal{P}_{24} = \{\{a_5\},\{a_6\},\{a_1,a_4\},\{a_2,a_3\}\}$
$\mathcal{P}_{25} = \{\{a_1,a_2\},\{a_3,a_4\},\{a_5\},\{a_6\}\}$	$\mathcal{P}_{26} = \{\{a_1,a_2\},\{a_3\},\{a_4\},\{a_5,a_6\}\}$
$\mathcal{P}_{27} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3,a_4\},\{a_5,a_6\}\}$	
Particiones del tipo $1+1+1+1+2$ **Subálgebras isomorfas a B_5**	
$\mathcal{P}_{28} = \{\{a_1,a_2\},\{a_3\},\{a_4\},\{a_5\},\{a_6\}\}$	$\mathcal{P}_{29} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3,a_4\},\{a_5\},\{a_6\}\}$
$\mathcal{P}_{30} = \{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_4\},\{a_5,a_6\}\}$	
Particiones del tipo $1+1+1+1+1+1$ **El álgebra B_6**	
$\mathcal{P}_{31} = B_6$	

A continuación se indica el diagrama de Hasse del reticulado de subálgebras monádicas de (B_6, K).

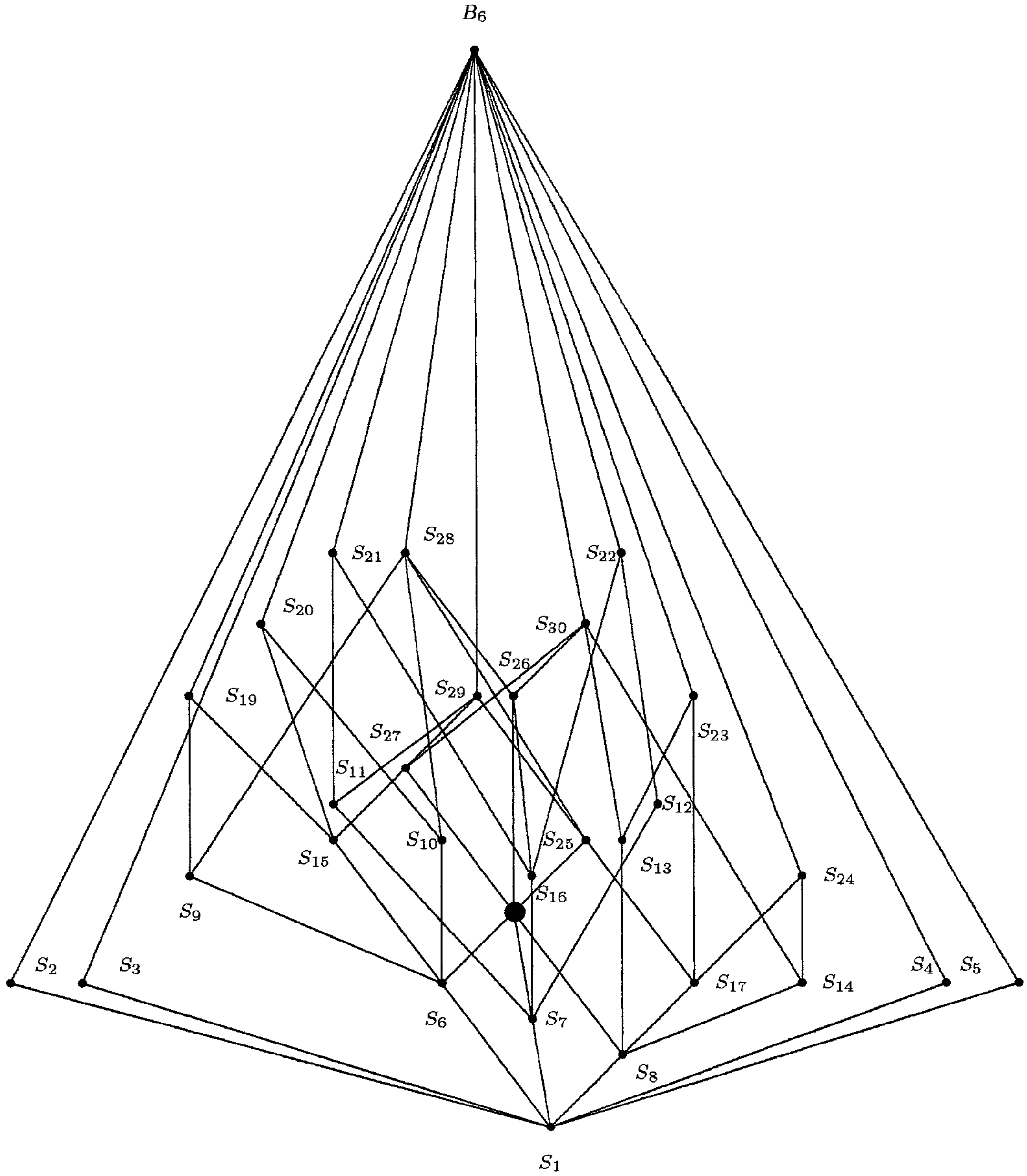

Figura 13

Número de subálgebras monádicas S tales que $S \subset K$: $\mathbf{p}(3) - 1 = 4$.

Número de subálgebras monádicas S tales que $K \subseteq S$: $\mathbf{p}(2).\mathbf{p}(2).\mathbf{p}(2) = 8$.

Número de subálgebras monádicas S incomparables con K: 19.

En este caso $K \cong B_3$. $S_{25}, S_{26}, S_{27} \cong B_4$, son los elementos de $\mathcal{SM}(B_6, S_{18})$ que cubren a K, y que los conjuntos ordenados $(S_{25}]$, $(S_{26}]$ y $(S_{27}]$ son isomorfos al conjunto ordenado indicado en la Figura 7. En estos segmentos existe una única subálgebra monádica incomparable con K, pero además existen 16 más que son incomparables.

$S_{19}, S_{20}, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{24}$ son átomos duales de $\mathcal{SM}(B_6, S_{18})$ y $(S_{19}], (S_{20}], (S_{21}], (S_{22}], (S_{23}], (S_{24}]$, conjuntos ordenados isomorfos.

NUMERO DE SUBALGEBRAS MONADICAS					
Algebra de Boole	Partición de los átomos	$S \subset K$	$K \subseteq S$	Incom-parables	Cantidad
B_1	1	0	1	0	1
B_2	2	0	2	0	2
	$1+1$	1	1	0	2
B_3	3	0	5	0	5
	$1+2$	1	2	0	3
	$1+1+1$	4	1	0	5
B_4	4	0	15	0	15
	$1+3$	1	5	0	6
	$2+2$	1	4	2	7
	$1+1+2$	4	2	1	7
	$1+1+1+1$	14	1	0	15
B_5	5	0	52	0	52
	$1+4$	1	15	0	16
	$2+3$	1	10	6	17
	$1+1+3$	4	5	4	13
	$1+2+2$	4	4	4	12
	$1+1+1+2$	14	2	4	20
	$1+1+1+1+1$	51	1	0	52
B_6	6	0	203	0	203
	$1+5$	1	52	0	53
	$2+4$	1	30	14	45
	$3+3$	1	25	24	50
	$1+1+4$	4	15	14	33
	$1+2+3$	4	10	11	25
	$2+2+2$	4	8	19	31
	$1+1+1+3$	14	5	16	35
	$1+1+2+2$	14	4	13	31
	$1+1+1+1+2$	51	2	14	67
	$1+1+1+1+1+1$	202	1	0	203

Problemas abiertos
De la observación de los diagramas de Hasse indicados precedentemente surgen los siguientes problemas:

1) Si K cubre a S entonces, en el conjunto $[S) \cap \complement[K)$ ¿siempre hay subálgebras monádicas incomparables con K? En caso afirmativo, ¿cuántas hay?

2) Si K es una subálgebra de Boole de B_n determinada por una partición de los átomos de B_n del tipo $1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$.
Si S es la subálgebra (que es monádica) de B_n determinada por la bipartición $1 + (n_2 + n_3 + \cdots + n_k)$ entonces el conjunto ordenado $[S)$ es isomorfo al conjunto ordenado de las subálgebras monádicas de $(B_{n-1}, n_2 + n_3 + \cdots + n_k)$.

   Luego en $[S)$ existen tantas subálgebras monádicas incomparables con K como subálgebras monádicas incomparables con la subálgebra K' de B_{n-1} determinada por la partición $n_2 + n_3 + \cdots + n_k$ de los átomos de B_{n-1}.
Además si S' es una subálgebra monádica de $(B_n, 1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k)$ que cubre a K ninguna de las subálgebras monádicas pertenecientes a $(S']$ e incomparables con K pertenecen a $[S)$.

   Esto mejoraría, en algunos casos, la cota inferior del número de subálgebras incomparables.

Referencias

[1] Bass H., *Finite monadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 258-268.

[2] Halmos P.R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. New York (1962).

[3] Masse A., *Anneaux monadiques libres sur un ensemble fini, (I) et (II)*, Seminaire de Logique Algèbrique , Faculté des Sciences, Université de Lyon, (1970).

[4] Monteiro A., *Algebras monádicas*, Atas del Segundo Colóquio Brasileiro de Ciências,(1960), 33-52.

[5] Monteiro A. y Monteiro L., *Algebras de Boole Monádicas*, Informes Técnicos Internos 69, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1999).

[6] Monteiro L., *Algebras de Boole*, Informes Técnicos Internos 66, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1998).

[7] Monteiro L., Abad M., Savini S., Sewald J., *Notes on free monadic Boolean algebras*, Order 16 (1999), 277-289.

[8] Ore O., *Theory of equivalence relations*, Duke Math. Journal 9 (1942), 573-627.